Киральные эффекты, топология импульсного пространства, влияние границ

Хайдуков Захар.

Киральные эффекты

Киральные эффекты являются семейством так называемых явлений аномального переноса. Такие явления имеют свои воплощения в физике твердого тела. Это происходит, в частности, потому, что электронная система обнаруженных недавно полуметаллов Вейля и Дирака моделирует релятивистскую физику, а соответствующие возбуждения при низких энергиях описываются уравнением Дирака. Недавно было предсказано наличие аномального квантового эффекта Холла в трехмерных системах: полуметаллах Вейля и топологических изоляторах.

Киральные эффекты

Киральный магнитный эффект

$$\vec{j} = \frac{e^2 \mu_5 \vec{B}}{2\pi^2}$$

Киральный вихревой эффект

$$\vec{j}^5 = \left(\frac{T^2}{6} + \frac{\mu^2}{2\pi^2}\right)\vec{\Omega} + \ldots$$

Эффект разделения киральностей

$$\vec{j}^5 = \frac{e^2 \mu \vec{B}}{2\pi^2}$$

Цикл работ по теме

Цикл работ по теме

Связь топологии импульсного пространства и транспортных коэффициентов

M.A.Zubkov, «Wigner transformation, momentum space topology, and anomalous transport» arXiv:1603.03665, Annals Phys. 373 (2016) 298-32

Цикл работ по теме

Связь топологии импульсного пространства и транспортных коэффициентов

M.A.Zubkov, «Wigner transformation, momentum space topology, and anomalous transport» arXiv:1603.03665, Annals Phys. 373 (2016) 298-32

Отсутствие CME эффекта

M.A.Zubkov, «Absence of equilibrium chiral magnetic effect» arXiv:1605.08724, Physical Review D 93, 105036 (2016)

Цикл работ по теме

Связь топологии импульсного пространства и транспортных коэффициентов

M.A.Zubkov, « Wigner transformation, momentum space topology, and anomalous transport » arXiv:1603.03665, Annals Phys. 373 (2016) 298-32

Отсутствие CME эффекта

M.A.Zubkov, « Absence of equilibrium chiral magnetic effect » arXiv:1605.08724, Physical Review D 93, 105036 (2016)

CSE эффект в решеточной регуляризации

Z.V. Khaidukov and M.A. Zubkov "Chiral separation effect in lattice regularization" Phys. Rev. D 95, 074502 – Published 11 April 2017

CSE эффект

CSE эффект заключается в возникновении аксиального тока, направленного вдоль внешнего магнитного поля

$$\vec{\mathrm{j}}^5 = -\frac{\mu}{2\pi^2}\overline{\mathrm{B}}$$

μ -химический потенциал, $\mathrm{j}^{5,\mathrm{k}} = \langle\bar{\psi}\gamma^{\mathrm{k}}\gamma^5\psi\rangle$, $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$.

Anomalous Axion Interactions and Topological Currents in Dense Matter Max A. Metlitski and Ariel R. Zhitnitsky,Phys. Rev. D 72, 045011

CSE эффект

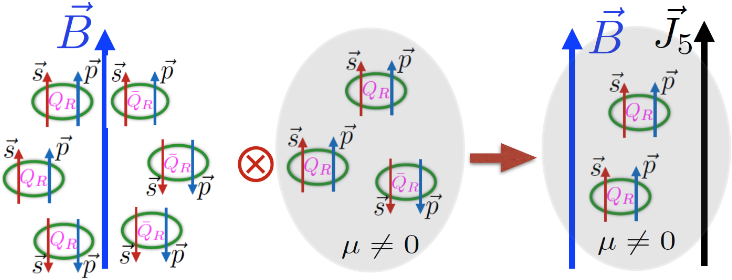
Anomalous Axion Interactions and Topological Currents in Dense Matter Max A. Metlitski and Ariel R. Zhitnitsky, Phys. Rev. D 72, 045011

Рассчет производился за счет прямого построения спектра во внешнем поле с гамильтонианом

$$H = -i(\partial_i + ieA_i)\gamma^0\gamma^i + m\gamma^0$$

Наивная картина для CSE

Modified from [1511.04050]



$\langle\vec{p}\rangle \parallel \langle\vec{s}\rangle \propto \vec{B}$ $\qquad$ $n_Q > n_{\bar{Q}}(\mu > 0)$

CSE и CME

Наивный вывод, данный в работе Житницкого, оказывается под вопросом после доказательства отсутствия CME.

Существование CME доказывалось похожими наивными рассуждениями, в которых из одной бесконечности вычиталась другая, и получался ненулевой результат.

Может быть, будет также нулевой результат?

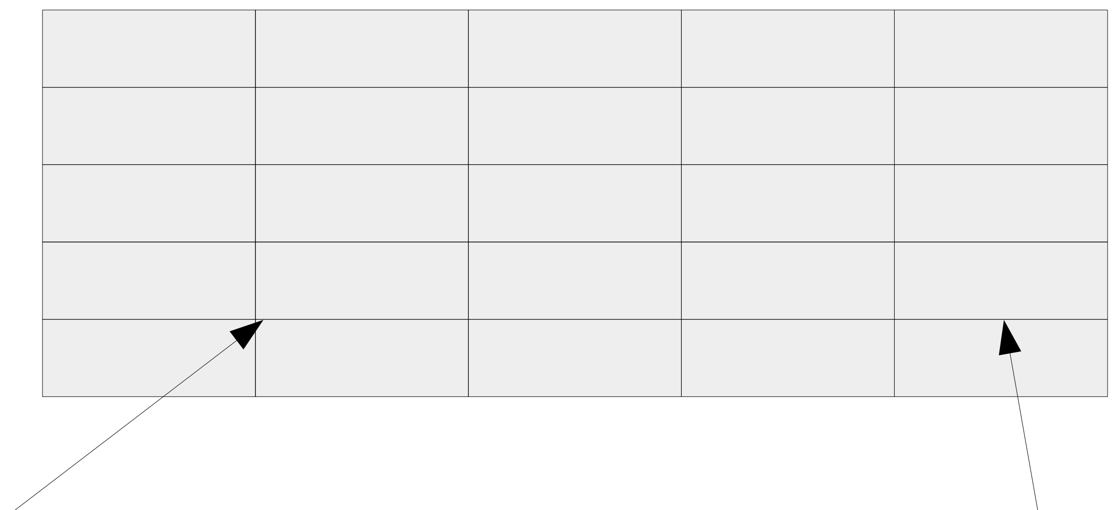
Мы будем работать с широким классом моделей

Пример фермионы Вильсона:

$$Z = \int D\bar{\Psi} D\Psi \exp\Big(- \sum_{\mathbf{r}_n, \mathbf{r}_m} \bar{\Psi}(\mathbf{r}_m)(-i\mathcal{D}_{\mathbf{r}_n,\mathbf{r}_m})\Psi(\mathbf{r}_n)\Big)$$

$$\mathcal{D}_{\mathbf{x},\mathbf{y}} = -\frac{1}{2}\sum_i [(1+\gamma^i)\delta_{\mathbf{x}+\mathbf{e}_i,\mathbf{y}} e^{iA_{\mathbf{x}+\mathbf{e}_i,\mathbf{y}}} + (1-\gamma^i)\delta_{\mathbf{x}-\mathbf{e}_i,\mathbf{y}} e^{iA_{\mathbf{x}-\mathbf{e}_i,\mathbf{y}}}] + (m^{(0)}+4)\delta_{\mathbf{x}\mathbf{y}}$$

Решетка:



Фермионы находятся в узлах решетки.

Калибровочные поля находятся на ребрах.

Модель определена в импульсном пространстве:

$$Z = \int D\bar{\Psi} D\Psi \exp\Big(- \int_{\mathcal{M}} \frac{d^D \mathbf{p}}{|\mathcal{M}|} \bar{\Psi}(\mathbf{p}) \mathcal{G}^{-1}(\mathbf{p}) \Psi(\mathbf{p}) \Big)$$

Дискретные координаты ==> пространство импульсов компактно (электроны в твердом теле, решетка для QFT).

В координатном пространстве:

$$\Psi(\mathbf{r}) = \int_{\mathcal{M}} \frac{d^D \mathbf{p}}{|\mathcal{M}|} e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}} \Psi(\mathbf{p})$$

$$Z = \int D\bar{\Psi} D\Psi \exp\Big(- \sum_{\mathbf{r}_n} \bar{\Psi}(\mathbf{r}_n) \Big[\mathcal{G}^{-1}(-i\partial_{\mathbf{r}}) \Psi(\mathbf{r}) \Big]_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_n} \Big)$$

Пример: Фермионы Вильсона (=простая модель топ. изолятора)

$$\mathcal{G}(\mathbf{p}) = \Big(\sum_k \gamma^k g_k(\mathbf{p}) - i m(\mathbf{p}) \Big)^{-1}$$

$$g_k(\mathbf{p}) = \sin p_k, \quad m(\mathbf{p}) = m^{(0)} + \sum_{a=1,2,3,4} (1 - \cos p_a)$$

Как вводятся калибровочные поля

Фермионы Вильсона

$$Z = \int D\bar{\Psi} D\Psi \exp\Big(- \sum_{\mathbf{r}_n, \mathbf{r}_m} \bar{\Psi}(\mathbf{r}_m)(-i\mathcal{D}_{\mathbf{r}_n,\mathbf{r}_m})\Psi(\mathbf{r}_n)\Big)$$

$$\mathcal{D}_{\mathbf{x},\mathbf{y}} = -\frac{1}{2}\sum_i [(1+\gamma^i)\delta_{\mathbf{x}+\mathbf{e}_i,\mathbf{y}} e^{iA_{\mathbf{x}+\mathbf{e}_i,\mathbf{y}}} + (1-\gamma^i)\delta_{\mathbf{x}-\mathbf{e}_i,\mathbf{y}} e^{iA_{\mathbf{x}-\mathbf{e}_i,\mathbf{y}}}] + (m^{(0)}+4)\delta_{\mathbf{x}\mathbf{y}}$$

В импульсном пространстве:

$$\hat{\mathcal{Q}} = \mathcal{G}^{-1}(\mathbf{p} - \mathbf{A}(i\partial_{\mathbf{p}}))$$

$p_{i_1}...p_{i_n}$ ==> $\frac{1}{n!}\sum_{\text{permutations}}(\hat{p}_{i_1} - A_{i_1})...(\hat{p}_{i_n} - A_{i_n})$

$$Z = \int D\bar{\Psi} D\Psi \exp\Big(- \int_{\mathcal{M}} \frac{d^D\mathbf{p}}{|\mathcal{M}|} \bar{\Psi}(\mathbf{p})\hat{\mathcal{Q}}(i\partial_{\mathbf{p}}, \mathbf{p})\Psi(\mathbf{p})\Big)$$

Для фермионов Вильсона соотношение точное.
Для других моделей с точностью до иррелевантных членов: ~a^2 x Напряженность поля.

Калибровочные поля возникают как псевдодифференциальные операторы в импульсном пространстве.

Преобразование Вигнера в непрерывной теории

Двухточечная функция Грина:

$$G(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2) = \frac{1}{Z}\int D\bar{\Psi}D\Psi\bar{\Psi}(\mathbf{r}_2)\Psi(\mathbf{r}_1)$$
$$\times \exp\left(-\int d^D\mathbf{r}\bar{\Psi}(\mathbf{r})\hat{Q}(\mathbf{r},\hat{\mathbf{p}})\Psi(\mathbf{r})\right)$$

$$\hat{Q}(\mathbf{r}_1,-i\partial_{\mathbf{r}_1})G(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2) = \delta^{(D)}(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)$$

Преобразование Вигнера:

$$\tilde{G}(\mathbf{R},\mathbf{p}) = \int d^D\mathbf{r}e^{-i\mathbf{p}\mathbf{r}}G(\mathbf{R}+\mathbf{r}/2,\mathbf{R}-\mathbf{r}/2)$$

вейлевский символ оператора =преобразование Вигнера матричного элемента.

$$Q(\mathbf{R},\mathbf{p}) = \int d^D\mathbf{x}d^D\mathbf{r}e^{-i\mathbf{p}\mathbf{r}}\delta(\mathbf{R}-\mathbf{r}/2-\mathbf{x})$$
$$\times \hat{Q}(\mathbf{x},-i\partial_{\mathbf{x}})\delta(\mathbf{R}+\mathbf{r}/2-\mathbf{x}).$$

F. A. Berezin and M. A. Shubin, in *Colloquia Mathematica Societatis Janos Bolyai* (North-Holland, Amsterdam, 1972), p. 21.

Robert G. Littlejohn, The semiclassical evolution of wave packets, Phys. Rep. **138**, 193 (1986).

Преобразование Вигнера в непрерывной теории

Двухточечная функция Грина:

$$G(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2) = \frac{1}{Z}\int D\bar{\Psi}D\Psi\bar{\Psi}(\mathbf{r}_2)\Psi(\mathbf{r}_1) \times \exp\left(-\int d^D\mathbf{r}\bar{\Psi}(\mathbf{r})\hat{Q}(\mathbf{r},\hat{\mathbf{p}})\Psi(\mathbf{r})\right)$$

$$\hat{Q}(\mathbf{r}_1,-i\partial_{\mathbf{r}_1})G(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2) = \delta^{(D)}(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)$$

Преобразование Вигнера :

$$\tilde{G}(\mathbf{R},\mathbf{p}) = \int d^D\mathbf{r}e^{-i\mathbf{p}\mathbf{r}}G(\mathbf{R}+\mathbf{r}/2,\mathbf{R}-\mathbf{r}/2)$$

Уравнение Грюнвальда:

$$1 = \mathcal{Q}(\mathbf{R},\mathbf{p}) * \tilde{G}(\mathbf{R},\mathbf{p}) \equiv \mathcal{Q}(\mathbf{R},\mathbf{p})e^{\frac{i}{2}(\overleftarrow{\partial}_{\mathbf{R}}\overrightarrow{\partial}_{\mathbf{p}}-\overleftarrow{\partial}_{\mathbf{p}}\overrightarrow{\partial}_{\mathbf{R}})}\tilde{G}(\mathbf{R},\mathbf{p})$$

Вейлевский символ оператора.

Если

$$\hat{\mathcal{Q}}(\mathbf{r},\hat{\mathbf{p}}) = \mathcal{G}^{-1}(\mathbf{p}-\mathbf{A}(i\partial_{\mathbf{p}}))$$

==> $\mathcal{Q}(\mathbf{r},\mathbf{p}) = \mathcal{G}^{-1}(\mathbf{p}-\mathbf{A}(\mathbf{r})) + O([\partial_i A_j]^2)$

.

Преобразование Вигнера на решетке

Двухточечная функция Грина:

$$G(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = \frac{1}{Z}\int D\bar{\Psi} D\Psi\, \bar{\Psi}(\mathbf{p}_2)\Psi(\mathbf{p}_1)$$
$$\exp\Big(-\int \frac{d^D\mathbf{p}}{|\mathcal{M}|}\bar{\Psi}(\mathbf{p})\hat{Q}(i\partial_{\mathbf{p}}, \mathbf{p})\Psi(\mathbf{p})\Big)$$

Преобразование Вигнера:

$$\tilde{G}(\mathbf{R},\mathbf{p}) = \int \frac{d^D\mathbf{P}}{|\mathcal{M}|} e^{i\mathbf{P}\mathbf{R}} G(\mathbf{p}+\mathbf{P}/2, \mathbf{p}-\mathbf{P}/2)$$

$$\tilde{G}(\mathbf{R},\mathbf{p}) = \sum_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_n} e^{-i\mathbf{p}\mathbf{r}} G(\mathbf{R}+\mathbf{r}/2, \mathbf{R}-\mathbf{r}/2)$$

В координатном пространстве:

$$G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{1}{Z}\int D\bar{\Psi} D\Psi\, \bar{\Psi}(\mathbf{r}_2)\Psi(\mathbf{r}_1)$$
$$\exp\Big(-\frac{1}{2}\sum_{\mathbf{r}_n}\Big[\bar{\Psi}(\mathbf{r}_n)\Big[\mathcal{G}^{-1}(-i\partial_{\mathbf{r}}$$
$$-\mathbf{A}(\mathbf{r}))\Psi(\mathbf{r})\Big]_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_n} + (h.c.)\Big]\Big)$$

Преобразование Вигнера на решетке

Двухточечная функция Грина:

$$G(\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2) = \frac{1}{Z}\int D\bar{\Psi}D\Psi\,\bar{\Psi}(\mathbf{p}_2)\Psi(\mathbf{p}_1)$$
$$\exp\Big(-\int\frac{d^D\mathbf{p}}{|\mathcal{M}|}\bar{\Psi}(\mathbf{p})\hat{Q}(i\partial_{\mathbf{p}},\mathbf{p})\Psi(\mathbf{p})\Big)$$

Преобразование Вигнера:

$$\tilde{G}(\mathbf{R},\mathbf{p}) = \int\frac{d^D\mathbf{P}}{|\mathcal{M}|}e^{i\mathbf{P}\mathbf{R}}G(\mathbf{p}+\mathbf{P}/2,\mathbf{p}-\mathbf{P}/2)$$

$$1 = \mathcal{Q}(\mathbf{R},\mathbf{p}) * G(\mathbf{R},\mathbf{p})$$

Уравнение Грюнвальда:

$$\equiv \mathcal{Q}(\mathbf{R},\mathbf{p})e^{\frac{i}{2}(\overleftarrow{\partial}_{\mathbf{R}}\overrightarrow{\partial}_{\mathbf{p}}-\overleftarrow{\partial}_{\mathbf{p}}\overrightarrow{\partial}_{\mathbf{R}})}\tilde{G}(\mathbf{R},\mathbf{p})$$

Вейлевский символ оператора

Преобразование Вигнера матричных элементов:

$$\mathcal{Q}(\mathbf{R},\mathbf{p}) = \int d^D\mathbf{K}d^D\mathbf{P}e^{i\mathbf{P}\mathbf{R}}\delta(\mathbf{p}-\mathbf{P}/2-\mathbf{K})$$
$$\times\hat{\mathcal{Q}}(i\partial_{\mathbf{K}},\mathbf{K})\delta(\mathbf{p}+\mathbf{P}/2-\mathbf{K}).$$

$$\int d^D\mathbf{X}d^D\mathbf{Y}f(\mathbf{X},\mathbf{Y})\mathcal{Q}(-i\overleftarrow{\partial}_{\mathbf{Y}}+i\overrightarrow{\partial}_{\mathbf{X}},\mathbf{X}/2+\mathbf{Y}/2)h(\mathbf{X},\mathbf{Y})$$
$$=\int d^D\mathbf{X}d^D\mathbf{Y}f(\mathbf{X},\mathbf{Y})\hat{\mathcal{Q}}(i\partial_{\mathbf{X}}+i\partial_{\mathbf{Y}},\mathbf{X}/2+\mathbf{Y}/2)h(\mathbf{X},\mathbf{Y})$$

Преобразование Вигнера на решетке

Двухточечная функция Грина:

$$G(\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2) = \frac{1}{Z}\int D\bar{\Psi}D\Psi\,\bar{\Psi}(\mathbf{p}_2)\Psi(\mathbf{p}_1)\exp\Big(-\int\frac{d^D\mathbf{p}}{|\mathcal{M}|}\bar{\Psi}(\mathbf{p})\hat{Q}(i\partial_{\mathbf{p}},\mathbf{p})\Psi(\mathbf{p})\Big)$$

Преобразование Вигнера:

$$\tilde{G}(\mathbf{R},\mathbf{p}) = \int\frac{d^D\mathbf{P}}{|\mathcal{M}|}e^{i\mathbf{P}\mathbf{R}}G(\mathbf{p}+\mathbf{P}/2,\mathbf{p}-\mathbf{P}/2)$$

Уравнение Грюнвальда:

$$1 = \mathcal{Q}(\mathbf{R},\mathbf{p})*\tilde{G}(\mathbf{R},\mathbf{p}) \equiv \mathcal{Q}(\mathbf{R},\mathbf{p})e^{\frac{i}{2}(\overleftarrow{\partial}_{\mathbf{R}}\overrightarrow{\partial}_{\mathbf{p}}-\overleftarrow{\partial}_{\mathbf{p}}\overrightarrow{\partial}_{\mathbf{R}})}\tilde{G}(\mathbf{R},\mathbf{p})$$

Вейлевский символ оператора

Если

$$\hat{Q}(\mathbf{r},\hat{\mathbf{p}}) = \mathcal{G}^{-1}(\mathbf{p}-\mathbf{A}(i\partial_{\mathbf{p}})) \quad ==> \mathcal{Q}(\mathbf{r},\mathbf{p}) = \mathcal{G}^{-1}(\mathbf{p}-\mathbf{A}(\mathbf{r})) + O([\partial_i A_j]^2)$$

Для фермионов Вильсона соотношение точное.

Решение уравнения Грюнвальда

Слабое внешнее поле

$$
\begin{aligned}
1 &= \mathcal{Q}(\mathbf{R},\mathbf{p}) * \tilde{G}(\mathbf{R},\mathbf{p}) \\
&\equiv \mathcal{Q}(\mathbf{R},\mathbf{p}) e^{\frac{i}{2}(\overleftarrow{\partial}_{\mathbf{R}}\overrightarrow{\partial}_{\mathbf{p}} - \overleftarrow{\partial}_{\mathbf{p}}\overrightarrow{\partial}_{\mathbf{R}})} \tilde{G}(\mathbf{R},\mathbf{p})
\end{aligned}
$$

где

$$
\begin{aligned}
\tilde{G}(\mathbf{R},\mathbf{p}) &= \tilde{G}^{(0)}(\mathbf{R},\mathbf{p}) + \tilde{G}^{(1)}(\mathbf{R},\mathbf{p}) + \dots \\
\tilde{G}^{(1)} &= -\frac{i}{2}\tilde{G}^{(0)} \frac{\partial\left[\tilde{G}^{(0)}\right]^{-1}}{\partial p_i} \tilde{G}^{(0)} \frac{\partial\left[\tilde{G}^{(0)}\right]^{-1}}{\partial p_j} \tilde{G}^{(0)} A_{ij}(\mathbf{R})
\end{aligned}
$$

$$\tilde{G}^{(0)}(\mathbf{R},\mathbf{p}) = \mathcal{G}(\mathbf{p} - \mathbf{A}(\mathbf{R}))$$

Отклик электрического тока на внешнее поле

$$j^k(\mathbf{R}) = \int_{\mathcal{M}} \frac{d^D\mathbf{p}}{|\mathcal{V}||\mathcal{M}|} \mathrm{Tr}\, \tilde{G}(\mathbf{R},\mathbf{p}) \frac{\partial}{\partial p_k} \left[\tilde{G}^{(0)}(\mathbf{R},\mathbf{p})\right]^{-1}$$

$(2\pi)^D$

Отклик электрического тока на внешнее поле $\mathbf{A} \to \mathbf{A} + \delta\mathbf{A}$

$$
\begin{aligned}
\delta \log Z &= -\frac{1}{Z}\int D\bar{\Psi} D\Psi \exp\Big(-\int_{\mathcal{M}} \frac{d^D\mathbf{p}}{|\mathcal{M}|}\bar{\Psi}(\mathbf{p})\hat{\mathcal{Q}}(i\partial_{\mathbf{p}},\mathbf{p})\Psi(\mathbf{p})\Big)\int_{\mathcal{M}} \frac{d^D\mathbf{p}}{|\mathcal{M}|}\bar{\Psi}(\mathbf{p})\Big[\delta\hat{\mathcal{Q}}(i\partial_{\mathbf{p}},\mathbf{p})\Big]\Psi(\mathbf{p}) \\
&= -\int_{\mathcal{M}} \frac{d^D\mathbf{p}}{|\mathcal{M}|}\,\mathrm{Tr}\,\Big[\delta\hat{\mathcal{Q}}(i\partial_{\mathbf{p}_1},\mathbf{p}_1)\Big]G(\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2)\Big|_{\mathbf{p}_1=\mathbf{p}_2=\mathbf{p}} \\
&= -\sum_{\mathbf{R}=\mathbf{R}_n}\int_{\mathcal{M}} \frac{d^D\mathbf{p}}{|\mathcal{M}|}\,\mathrm{Tr}\,\Big[\delta\hat{\mathcal{Q}}(i\partial_{\mathbf{P}}+i\partial_{\mathbf{p}}/2,\mathbf{p}+\mathbf{P}/2)\Big]\,e^{-i\mathbf{P}\mathbf{R}}\tilde{G}(\mathbf{R},\mathbf{p})\Big|_{\mathbf{P}=0}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\delta \log Z &= -\sum_{\mathbf{R}=\mathbf{R}_n}\int_{\mathcal{M}} \frac{d^D\mathbf{p}}{|\mathcal{M}|}\,\mathrm{Tr}\,\Big[\delta\mathcal{Q}(i\overrightarrow{\partial}_{\mathbf{P}}-i\overleftarrow{\partial}_{\mathbf{p}}/2,\mathbf{p}+\mathbf{P}/2)\Big] \\
&\quad e^{-i\mathbf{P}\mathbf{R}}\tilde{G}(\mathbf{R},\mathbf{p})\Big|_{\mathbf{P}=0} \\
&= -\sum_{\mathbf{R}=\mathbf{R}_n}\int_{\mathcal{M}} \frac{d^D\mathbf{p}}{|\mathcal{M}|}\,\mathrm{Tr}\,\Big[\delta\mathcal{Q}(\mathbf{R},\mathbf{p}+\mathbf{P}/2)\Big] \\
&\quad e^{-i\mathbf{P}\mathbf{R}}\tilde{G}(\mathbf{R},\mathbf{p})\Big|_{\mathbf{P}=0}
\end{aligned}
$$

Отклик электрического тока на внешнее поле:

$$
j^k(\mathbf{R}) = \int_{\mathcal{M}} \frac{d^D\mathbf{p}}{|\mathcal{V}||\mathcal{M}|}\,\mathrm{Tr}\,\tilde{G}(\mathbf{R},\mathbf{p})\frac{\partial}{\partial p_k}\Big[\tilde{G}^{(0)}(\mathbf{R},\mathbf{p})\Big]^{-1}
$$

$\delta \log Z = \sum_{\mathbf{R}=\mathbf{R}_n} j^k(\mathbf{R})\delta A_k(\mathbf{R})|\mathcal{V}|$

$(2\pi)^D$

Пример: отклик электрического тока на внешнее поле

$$j^k(\mathbf{R}) = j^{(0)k}(\mathbf{R}) + j^{(1)k}(\mathbf{R}) + \ldots$$

где $$j^{(0)k}(\mathbf{R}) = \int \frac{d^D\mathbf{p}}{(2\pi)^D} \operatorname{Tr} \tilde{G}^{(0)}(\mathbf{R},\mathbf{p}) \frac{\partial \left[\tilde{G}^{(0)}(\mathbf{R},\mathbf{p})\right]^{-1}}{\partial p_k}$$

3+1 D $$j^{(1)k}(\mathbf{R}) = \frac{1}{4\pi^2} \epsilon^{ijkl} \mathcal{M}_l A_{ij}(\mathbf{R}),$$

$$\mathcal{M}_l = \int \operatorname{Tr} \nu_l \, d^4p$$

$$\nu_l = -\frac{i}{3!\,8\pi^2} \epsilon_{ijkl} \left[\mathcal{G} \frac{\partial \mathcal{G}^{-1}}{\partial p_i} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial p_j} \frac{\partial \mathcal{G}^{-1}}{\partial p_k}\right]$$

1) UV регуляризация - ШАГ РЕШЕТКИ
2) Инфракрасная регуляризация - МАССА

CSE эффект

CSE эффект заключается в возникновении аксиального тока, направленного вдоль внешнего магнитного поля

$$\bar{\mathrm{j}}^5 = -\frac{\mu}{2\pi^2}\overline{\mathrm{B}}$$

μ -химический потенциал, $\mathrm{j}^{5,\mathrm{k}} = \langle\bar{\psi}\gamma^{\mathrm{k}}\gamma^5\psi\rangle$, $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$.

Anomalous Axion Interactions and Topological Currents in Dense Matter Max A. Metlitski and Ariel R. Zhitnitsky,Phys. Rev. D 72, 045011

CSE эффект

Anomalous Axion Interactions and Topological Currents in Dense Matter Max A. Metlitski and Ariel R. Zhitnitsky, Phys. Rev. D 72, 045011

Рассчет производился за счет прямого построения спектра во внешнем поле с гамильтонианом

$$H = -i(\partial_i + ieA_i)\gamma^0\gamma^i + m\gamma^0$$

Отклик аксиального тока на внешнее поле

По аналогии с электрическим током в Евклиде
$j^{5,k}(R) = -\frac{\delta}{\delta A^5_k(R)} \log Z[A^5, A]\Big|_{A^5=0}$, где $Z[A^5, A] =$
$\int D\bar{\psi} D\psi \exp\Big(- \int_{\mathcal{M}} \frac{d^D p}{|\mathcal{M}|} \bar{\psi}^T(p) \mathcal{G}^{-1}(p - A^5(i\partial_p)\gamma^5 - A(i\partial_p))\psi(p)\Big)$

$$j^{5,k}(R) = \int_{\mathcal{M}} \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \,\mathrm{Tr}\, \gamma^5 \tilde{G}(R,p) \frac{\partial}{\partial p_k} \left[\tilde{G}^{(0)}(R,p)\right]^{-1} \quad (1)$$

где $\mathcal{G}(p) = -i\Big(\sum_k \gamma^k g_k(p) - im(p)\Big)^{-1}$ и

$$\tilde{G}^{(0)}(R,p) = \mathcal{G}(p - A(R)) \quad (2)$$

Отклик аксиального тока на внешнее поле

$$j^{5k}(R) \;=\; \int_{\mathcal{M}} \frac{d^D p}{(2\pi)^D}\,\mathrm{Tr}\,\gamma^5 \tilde{G}(R,p)\frac{\partial}{\partial p_k}\Big[\tilde{G}^{(0)}(R,p)\Big]^{-1}$$

Фактически, мы можем перенести это определение на любую решеточную теорию даже без точной киральной симметрии. Можно легко проверить, что в пределе наивного непрерывного предела это определение переходит в $-i\bar{\psi}\gamma^k\gamma^5\psi$ (Евклид) или $\bar{\psi}\gamma^k\gamma^5\psi$ (Минковский).

Регуляризация

Чтобы регуляризовать наши выражения для случая безмассовых фермионов, мы будем использовать версию решеточной теории с регуляризацией конечными температурами. С периодическими граничными условиями по импульсам, антипериодическими - по пространственной компоненте.

$$p_i \in (0, 2\pi);\ \omega = p_4 = \frac{2\pi}{N_t}(n_4 + 1/2), n_4 = 0, \ldots, N_t - 1$$

Температура в этом случае определяется как $T = 1/N_t$

Выражение, которое определяет отклик аксиального тока на внешнее магниное поле, перепишется как

$$j^{5k} = -\frac{i}{2} T \sum_{n=0}^{N_t - 1} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} Tr\, \gamma^5 (\mathcal{G}(\omega_n, \mathbf{p}) \partial_{p_i} \mathcal{G}^{-1}(\omega_n, \mathbf{p}) \partial_{p_j} \mathcal{G}(\omega_n, \mathbf{p}) \partial_{p_k} \mathcal{G}^{-1}(\omega_n, \mathbf{p})) F_{ij}$$

Мы изучим свойства этой формулы в различных случаях, как на решетке, так и в непрерывной теории поля.

Линейный отклик аксиального тока на внешнее магнитное поле в случае присутствия химического потенциала

Киральная симметрия на решетке

Линейный отклик аксиального тока на внешнее магнитное поле в случае присутствия химического потенциала

Киральная симметрия на решетке

Теорема Nielsen–Ninomiya

Линейный отклик аксиального тока на внешнее магнитное поле в случае присутствия химического потенциала

Киральная симметрия на решетке

Теорема Nielsen–Ninomiya

It is impossible to have a chirally invariant, doubler-free, local, translation invariant, real bilinear fermion action on the lattice.

Линейный отклик аксиального тока на внешнее магнитное поле в случае присутствия химического потенциала

Киральная симметрия на решетке

Теорема Nielsen–Ninomiya

It is impossible to have a chirally invariant, doubler-free, local, translation invariant, real bilinear fermion action on the lattice.

Линейный отклик аксиального тока на внешнее магнитное поле в случае присутствия химического потенциала

С учетом теоремы N-N сначала рассмотрим систему, в которой нет точной аксиальной симметрии (например, фермионы Вильсона-Дирака).

Химический потенциал вводится стандартным образом:

$$\omega_n \to \omega_n - i\mu$$

Производная аксиального тока по химическому потенциалу задается выражением:

$$j^{5k} = \frac{\mathcal{N}^{ijk}}{4\pi^2} F_{ij}\mu$$

Линейный отклик аксиального тока на внешнее магнитное поле в случае присутствия химического потенциала

Выражение для аксиального тока:

$$j^{5k} = \frac{\mathcal{N}^{ijk}}{4\pi^2} F_{ij} \mu$$

Где под выражением N^{ijk} понимается:

$$\mathcal{N}^{ijk} \quad = \quad -\sum_{n=0}^{N_t-1} \frac{1}{2} T \int \frac{d^3 p}{(2\pi)} \partial_{\omega_n} Tr \gamma^5 \mathcal{G}(\omega_n, \mathbf{p}) \partial_{p_i} \mathcal{G}^{-1}(\omega_n, \mathbf{p})$$
$$\partial_{p_j} \mathcal{G}(\omega_n, \mathbf{p}) \partial_{p_k} \mathcal{G}^{-1}(\omega_n, \mathbf{p})$$

Линейный отклик аксиального тока на внешнее магнитное поле в случае присутствия химического потенциала

Будем предполагать, что сингулярности функции Грина появляются в конечном числе точек: $\omega = \omega^{(0)}, \omega^{(1)}, \ldots$

в пределе нулевых температур $T \to 0$ суммирование переходит в интегрирование

$$\mathcal{N}^{ijk} = -\sum_{n=0}^{N_t-1} \frac{1}{2} T \int \frac{d^3p}{(2\pi)} \partial_{\omega_n} Tr\gamma^5 \mathcal{G}(\omega_n, \mathbf{p}) \partial_{p_i} \mathcal{G}^{-1}(\omega_n, \mathbf{p}) \partial_{p_j} \mathcal{G}(\omega_n, \mathbf{p}) \partial_{p_k} \mathcal{G}^{-1}(\omega_n, \mathbf{p})$$

Линейный отклик аксиального тока на внешнее магнитное поле в случае присутствия химического потенциала

И интеграл регуляризуется следующим образом:

$$\mathcal{N}^{ijk} = \sum_k \Big(-\mathcal{N}_3^{ijk}(\omega^{(k)}+0) + \mathcal{N}_3^{ijk}(\omega^{(k)}-0) \Big) \tag{3}$$

Под N^{ijk} понимается выражение:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_3^{ijk}(\omega_n) \quad = \quad & -\frac{1}{2}\int \frac{d^3p}{(2\pi)^2}\, Tr\gamma^5 \mathcal{G}(\omega_n,\mathbf{p})\partial_{p_i}\mathcal{G}^{-1}(\omega_n,\mathbf{p}) \\ & \partial_{p_j}\mathcal{G}(\omega_n,\mathbf{p})\gamma^5\partial_{p_k}\mathcal{G}^{-1}(\omega_n,\mathbf{p}) \end{aligned} \tag{4}$$

Линейный отклик аксиального тока на внешнее магнитное поле в случае присутствия химического потенциала

$\mathcal{N}_3^{ijk}(\omega_n)$ был бы топологическим инвариантом

если функции Грина антикоммутировали бы с γ^5

$$\mathcal{N}_3^{ijk}(\omega_n) = -\frac{1}{2}\int \frac{d^3p}{(2\pi)^2} Tr\gamma^5 \mathcal{G}(\omega_n, \mathbf{p})\partial_{p_i}\mathcal{G}^{-1}(\omega_n, \mathbf{p}) \partial_{p_j}\mathcal{G}(\omega_n, \mathbf{p})\partial_{p_k}\mathcal{G}^{-1}(\omega_n, \mathbf{p}) \quad (5)$$

тогда в случае преобразования $G \to G + \delta G$, $\delta N^{ijk} = 0$

Линейный отклик аксиального тока на внешнее магнитное поле в случае присутствия химического потенциала

Однако мы можем переписать N^{ijk} как:

$$\mathcal{N}^{ijk} = \frac{1}{2}\int_{\Sigma}\frac{d^3p}{(2\pi)^2} Tr\gamma^5 \mathcal{G}(\omega,\mathbf{p})\partial_{p_i}\mathcal{G}^{-1}(\omega,\mathbf{p}) \partial_{p_j}\mathcal{G}(\omega,\mathbf{p})\partial_{p_k}\mathcal{G}^{-1}(\omega,\mathbf{p}) \quad (6)$$

где Σ - маленькая поверхность, окружающая особенности функции Грина. Нам достаточно более слабого условия – чтобы функция Грина антикоммутировала с γ^5 только в бесконечно малой окрестности сингулярности. И мы сможем получить топологический инвариант

Линейный отклик аксиального тока на внешнее магнитное поле в случае присутствия химического потенциала

Рассмотрим случай фермионов Вильсона-Дирака

$$\mathrm{G^{-1}(p)} = \sum_{\mathrm{i=1..4}} \mathrm{\sin(p_i)\gamma^i} + (\sum_{\mathrm{i=1..4}} 2\,\mathrm{\sin^2(p_i/2) + m^{(0)}})\mathbf{i}$$

Сингулярности возникают в точках $\omega = 0, \pi$. Для $m^{(0)} > 0$ только $\omega = 0$

$$\mathcal{N}^{ijk} = \epsilon^{ijk}$$

К CSE могут существовать поправки в следующих порядках по

CSE эффект

CSE эффект заключается в возникновении аксиального тока, направленного вдоль внешнего магнитного поля

$$\vec{\mathrm{j}}^5 = -\frac{\mu}{2\pi^2}\overline{\mathrm{B}}$$

μ -химический потенциал, $\mathrm{j}^{5,\mathrm{k}} = \langle\bar{\psi}\gamma^{\mathrm{k}}\gamma^5\psi\rangle$, $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$.

Anomalous Axion Interactions and Topological Currents in Dense Matter Max A. Metlitski and Ariel R. Zhitnitsky, Phys. Rev. D 72, 045011

Линейный отклик аксиального тока на внешнее магнитное поле в случае присутствия химического потенциала

Рассмотрим систему с приближенной аксиальной симметрией. Overlap dirac operator. Безмассовый оператор Дирака задается в виде:

$$\mathcal{D}_o = m(\hat{1} + \mathcal{D}(-m)\,(\mathcal{D}(-m)\mathcal{D}^{+}(-m))^{-1/2})$$

где под $\mathcal{D}(m^{(0)})$ понимается безразмерный оператор Вильсон-Дирака (при условии $m^{(0)} = -m$), который определяется как:

$$\mathcal{D}_{x,y} = -\frac{1}{2}\sum_i [(1+\gamma^i)\delta_{x+e_i,y} + (1-\gamma^i)\delta_{x-e_i,y}] + (m^{(0)}+4)\delta_{xy}$$

Линейный отклик аксиального тока на внешнее магнитное поле в случае присутствия химического потенциала

Оператор D^0 подчиняется соотношению Гинспарга-Вильсона (Ginsparg - Wilson)

$$\{\mathcal{D}_o^{-1}, \gamma^5\} = \frac{\gamma^5}{m} \tag{7}$$

Пропагатор overlap фермионов:

$$\mathcal{D}_o^{-1} = -i\gamma_\mu C_\mu + \frac{1}{2m}$$

Линейный отклик аксиального тока на внешнее магнитное поле в случае присутствия химического потенциала

Обратный оператор Дирака задается выражением:

$$\mathcal{D}_o^{-1} = -i\gamma_\mu C_\mu + \frac{1}{2m}$$

$$C_\mu(p) = \frac{1}{2m}\frac{k_\mu}{\sqrt{k_\mu^2 + A^2} + A}, A = \frac{\hat{k}_\mu^2}{2} - m$$

где

$$k_\mu = \sin(p_\mu), \hat{k} = 2\sin(\frac{p_\mu}{2}) \quad (8)$$

Линейный отклик аксиального тока на внешнее магнитное поле в случае присутствия химического потенциала

В этом случае единственный полюс возникает в точке $\omega = 0, p = 0$

И выражение для CSE снова принимает обыкновенное выражение $N_{ijk} = \epsilon_{ijk}$

CSE эффект

CSE эффект заключается в возникновении аксиального тока, направленного вдоль внешнего магнитного поля

$$\vec{\mathrm{j}}^5 = -\frac{\mu}{2\pi^2}\vec{\mathrm{B}}$$

μ -химический потенциал, $\mathrm{j}^{5,\mathrm{k}} = \langle\bar{\psi}\gamma^{\mathrm{k}}\gamma^5\psi\rangle$, $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$.

Anomalous Axion Interactions and Topological Currents in Dense Matter Max A. Metlitski and Ariel R. Zhitnitsky,Phys. Rev. D 72, 045011

Линейный отклик аксиального тока на внешнее магнитное поле в случае присутствия химического потенциала

Рассмотрим ряд решеточных моделей, в которых киральная симметрия является точной.

Для начала рассмотрим фермионы с точной киральной симметрией:

$$\{\gamma^5, \mathcal{G}\} = 0$$

$$\mathcal{G}(p) = -i\Big(\sum_k \gamma^k g_k(p) - im^{(0)}\Big)^{-1}$$

Линейный отклик аксиального тока на внешнее магнитное поле в случае присутствия химического потенциала

Пропагатор наивных фермионов:

$$\mathcal{G}(p) = -i\left(\sum_k \gamma^k g_k(p) - im^{(0)}\right)^{-1}$$

$$g_k(p) = \sin p_k$$

Чтобы сохранить киральную симметрию, необходимо потребовать обращение в нуль параметра $m^{(0)}$.

Линейный отклик аксиального тока на внешнее магнитное поле в случае присутствия химического потенциала

В этой модели при нулевой массе существуют 16 дублеров. Вклад дублеров зависит от ориентации эффективного vierbein. Низкоэнергетический Лагранжиан принимает вид:

$$\mathcal{L} = |e|\, e_a^{\mu} \gamma^a i \nabla_{\mu}$$

Где

$$|e|\, e_a^{\mu} = \begin{pmatrix} (-1)^{n_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^{n_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^{n_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-1)^{n_4} \end{pmatrix}$$

$n = 0, 1$

Линейный отклик аксиального тока на внешнее магнитное поле в случае присутствия химического потенциала

Можно показать, что в рассматриваемом случае вклады дублеров сокращаются.

Еще один пример системы с точной киральной симметрией - Modified overlap fermions:

$$\mathcal{G} = \mathcal{D}_o^{-1} - \frac{1}{2m}$$

Линейный отклик аксиального тока на внешнее магнитное поле в случае присутствия химического потенциала

$$\mathcal{G} = \mathcal{D}_o^{-1} - \frac{1}{2m}$$

В этой ситуации киральная симметрия является точной.

$$\{\mathcal{G}, \gamma^5\} = 0$$

Платой за эту симметрию является возникновение нулей у функции $\mathcal{G}$ в точках:

$p = (n_1\pi, n_2\pi, n_3\pi, n_4\pi)$ при условии $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 \neq 0$

Линейный отклик аксиального тока на внешнее магнитное поле в случае присутствия химического потенциала

Пропагатор Modified overlap fermions:

$$\mathcal{G} = -i\frac{k_\mu \gamma^\mu}{f(k^2)k^2}$$

$$f(k^2) = \frac{2m(\sqrt{k^2 + A^2} + A)}{k^2}$$

$$k_\mu = \sin(p_\mu), \hat{k} = 2\sin(\frac{p_\mu}{2})$$

Линейный отклик аксиального тока на внешнее магнитное поле в случае присутствия химического потенциала

Выражение для аксиального тока принимает вид:

$$j^{5k} = \frac{-iT}{2\pi} \sum_{n=0}^{N_t-1} \mathcal{N}_3(\omega_n) \epsilon^{ijk} F_{ij} \tag{9}$$

Где N_3 - точный топологический инвариант

$$\mathcal{N}_3(\omega_n) = \frac{1}{2\times 3!} \epsilon^{ijk} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^2} Tr(\gamma^5 \mathcal{G}(\omega_n, \mathbf{p}) \partial_{p_i} \mathcal{G}^{-1}(\omega_n, \mathbf{p}) \partial_{p_j} \mathcal{G}(\omega_n, \mathbf{p}) \partial_{p_k} \mathcal{G}^{-1}(\omega_n, \mathbf{p}) \tag{10}$$

Линейный отклик аксиального тока на внешнее магнитное поле в случае присутствия химического потенциала

Обыкновенный химический потенциал не приводит к возникновению новых полюсов в пропагаторе. Это можно увидеть из рассмотрения следующих уравнений:

$$\sin^2(\omega_n - i\mu) + \sum_{l=1}^{3} \sin^2(p_i) = 0 \tag{11}$$

Полюс может возникнуть, если система

$$\begin{cases} 1 - \cos(2\omega_n)\mathrm{ch}(2\mu) + 2\sum_{l=1}^{3} \sin^2(p_i) = 0 \\ \mathrm{sh}(\mu)\sin(2\omega_n) = 0 \end{cases} \tag{12}$$

имеет решение.

Линейный отклик аксиального тока на внешнее магнитное поле в случае присутствия химического потенциала

Первое уравнение обращается в нуль в точке $0, \pi$. У второго уравнения решение только в точке π. Но этот случай зависит от выбора N_t, а мы всегда можем выбрать этот параметр четным. Значит, можно вычислить значение N_3 в вакууме:

$$j^{5k} = -\frac{i}{2}\sum_{n=1}^{N_t}\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}Tr(\gamma^5\mathcal{G}(\omega_n,\mathbf{p})\partial_{p_i}\mathcal{G}^{-1}(\omega_n,\mathbf{p}) \partial_{p_j}\mathcal{G}(\omega_n,\mathbf{p})\partial_{p_k}\mathcal{G}^{-1}(\omega_n,\mathbf{p}))F_{ij} \tag{13}$$

$$j^{5k} = -\frac{i}{2}\sum_{n=1}^{N_t}\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}Tr(\frac{\gamma^\mu k_\mu}{k^2 f(k^2)}\partial^i(\gamma^\nu k_\nu f(k^2)) \partial^j(\frac{\gamma^\lambda k_\lambda}{k^2 f(k^2)})\gamma^5(\partial^k\gamma^\rho k_\rho f(k^2)))F_{ij} \tag{14}$$

$$j^{5k} = -2i\sum_{n=1}^{N_t}\epsilon^{\rho\mu\nu\lambda}\int_M\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{f^2(k^2)k_\mu\partial^i k_\nu\partial^j k_\lambda\partial^k k_\rho}{f^2(k^2)k^4}F_{ij} \tag{15}$$

$g^\mu = \frac{k^\mu}{\sqrt{k^2}}$.

$$j^{5k} = -\frac{2i}{3!(2\pi)^3}\sum_{n=1}^{Nt}\epsilon^{\mu\nu\lambda\rho}\int_M g_\mu dg_\nu\wedge dg_\lambda\wedge dg_\rho\epsilon^{ijk}F_{ij} \tag{16}$$

$$\mathcal{N}_3(\omega_n) = \frac{1}{12\pi^2}\epsilon^{\mu\nu\lambda\rho}\int_M g_\mu dg_\nu \wedge dg_\lambda \wedge dg_\rho \qquad (17)$$

$$g_4 = \sin(\alpha), g_i = k_i \cos(\alpha) \qquad (18)$$

$i = 1,2,3$ $\sum_i k_i^2 = 1$, $\alpha \in [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

$$dg_4 = \cos(\alpha)d\alpha, dg_i = dk_i\cos(\alpha) - k_i\sin(\alpha)d\alpha \qquad (19)$$

$$\mathcal{N}_3 = \frac{3}{12\pi^2}\epsilon^{ijk}\int_M \cos^2(\alpha)k_i d\alpha \wedge dk_j \wedge dk_k$$

$$= \frac{3}{12\pi^2}\epsilon^{ijk}\int_M k_i(\frac{1-\cos(2\alpha)}{2})d\alpha \wedge dk_j \wedge dk_k =$$

$$= \frac{3}{12\pi^2}\epsilon^{ijk}\int_M k_i d(\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{4}\sin(\alpha)) \wedge dk_j \wedge dk_k$$

$$= -\sum_{l} \frac{3}{12\pi^2}\epsilon^{ijk}\int_{\partial\Omega} k_i(\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{4}\sin(\alpha))dk_j \wedge dk_k \tag{20}$$

$\partial\Omega$-малая окрестность точки y_l, где k_l не определен. Отсутствие сингулярностей в g_k подразумевает, что $\alpha \to \pm\frac{\pi}{2}$ в этих точках. Теперь мы видим, что выражение под интегралом - полная производная.

$$N_3 = -\frac{1}{2}\sum_{l} \mathrm{sign}(g_4(y_l))\mathrm{Res}(y_l) \tag{21}$$

$$\mathrm{Res}(y_l) = \frac{1}{8\pi}\epsilon^{ijk}\int_{\partial\Omega} g_i dg_j \wedge dg_k \tag{22}$$

Где $\sum_l \mathrm{Res}(y_l) = 0$. На каждом n значение $\mathrm{sign}\, g_4$ постоянно. Таким образом, $\mathcal{N}_3(\omega_n) = 0$ для любого n.

Вычисление отклика аксиального тока на внешнее магнитное поле в непрерывном пределе

Рассмотрим пропагатор киральных фермионов в непрерывной теории:

$$G(\omega_n, \mathbf{p}) = \frac{1}{i\gamma_\mu p^\mu} \tag{23}$$

Вычислим для него аксиальный ток:

$$j^{5z} = 4Ti \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{\omega_n}{((\omega_n)^2 + p^2)^2} B_z \tag{24}$$

Вычисление отклика аксиального тока на внешнее магнитное поле в непрерывном пределе

$$j^{5z} = 4Ti \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{\omega_n}{((\omega_n)^2 + p^2)^2} B_z \tag{25}$$

Интегрирование по импульсам $=>$ Сумма топ. инвариантов

$$j^{5z} = 4Ti\pi^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{sign}(\omega_n) B_z$$

Вычисление отклика аксиального тока на внешнее магнитное поле в непрерывном пределе

$$j^{5z} = 4Ti \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{\omega_n}{((\omega_n)^2 + p^2)^2} B_z$$

химический потенциал вводится стандартным образом $\omega \to \omega - i\mu$ и в случае интегрирования по импульсам:

$$j^{5z} = 4Ti\pi^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{sign}(\omega_n - i\mu) B_z$$

Вопрос в том, как продолжить функцию sign на комплексную плоскость

Вычисление отклика аксиального тока на внешнее магнитное поле в непрерывном пределе

$$j^{5z} = -4Ti \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{\omega_n}{((\omega_n)^2 + p^2)^2} B_z$$

Просуммируем сначала по частотам:

$$j^{5z} = 4Ti \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{\omega_n - i\mu}{((\omega_n - i\mu)^2 + p^2)^2} B = \tag{26}$$

$$= 2 \int_C \frac{dz}{2i\pi} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{z}{(z^2 - p^2)^2} \mathrm{th}(\frac{z-\mu}{T}) B \tag{27}$$

Вычисление отклика аксиального тока на внешнее магнитное поле в непрерывном пределе

$$\mathrm{res}_{z=z0} f(z) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z\to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} f(z)(z-z_0)^m$$

$$\begin{aligned} j^{5z} &= -2\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{z}{(z+p)^2} \frac{d}{dz} \mathrm{th}(\frac{z-\mu}{2T})|_{z=p} \\ &\quad + \frac{z}{(z-p)^2} \frac{d}{dz} \mathrm{th}(\frac{z-\mu}{2T})|_{z=-p} \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dz} \frac{z}{(z\mp p)^2}\Big|_{z=\mp p} = 0$$

$$j^{5z} = -2B\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} (\frac{1}{4p} \frac{d}{dp} \mathrm{th}(\frac{p-\mu}{2T}) - \frac{1}{4p} \frac{d}{dp} \mathrm{th}(\frac{p+\mu}{2T}))$$

Вычисление отклика аксиального тока на внешнее магнитное поле в непрерывном пределе

$$j^{5z} = -\frac{B}{2\pi^2}\int dp(n_f(p-\mu) - n_f(p+\mu)) = -\frac{B\mu}{2\pi^2} \tag{28}$$

Что совпадает с обыкновенным определением для CSE.

CSE эффект

CSE эффект заключается в возникновении аксиального тока, направленного вдоль внешнего магнитного поля

$$\vec{j}^5 = -\frac{\mu}{2\pi^2}\overline{B}$$

μ -химический потенциал, $j^{5,k} = \langle\bar{\psi}\gamma^k\gamma^5\psi\rangle$, $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$.

Anomalous Axion Interactions and Topological Currents in Dense Matter Max A. Metlitski and Ariel R. Zhitnitsky,Phys. Rev. D 72, 045011

Заключение

Был рассмотрен CSE в непрерывной теории и решеточной регуляризации.

Заключение

Был рассмотрен CSE в непрерывной теории и решеточной регуляризации.

В случае непрерывной теории вычисление значения аксиального тока неоднозначно по причине плохой определенности выражения.

Заключение

Был рассмотрен CSE в непрерывной теории и решеточной регуляризации.

В случае непрерывной теории вычисление значения аксиального тока неоднозначно по причине плохой определенности выражения.

Решеточная формулировка дает возможность избежать этих проблем.

Заключение

Был рассмотрен CSE в непрерывной теории и решеточной регуляризации.

В случае непрерывной теории вычисление значения аксиального тока неоднозначно по причине плохой определенности выражения.

Решеточная формулировка дает возможность избежать этих проблем.

В теориях, в которых существует явная аксиальная симметрия, ток равен нулю.

Заключение

Был рассмотрен CSE в непрерывной теории и решеточной регуляризации.

В случае непрерывной теории вычисление значения аксиального тока неоднозначно по причине плохой определенности выражения.

Решеточная формулировка дает возможность избежать этих проблем.

В теориях, в которых существует явная аксиальная симметрия, ток равен нулю.

В теориях, в которых аксиальная симметрия не является точной, CSE может существовать. Он может быть защищен топологически, но допускает поправки.

Мы обсудим поправки к киральному вихревому эффекту при наличии конечного объема и массы, а также возможность описания кирального вихревого эффекта через эффективное калибровочное поле. Мы также обсудим новый киральный эффект, возникающий при наличии поля кручения.
Эта часть опирается на две статьи:

"Anatomy of the chiral vortical effect"Ruslan Abramchuk, Z.V. Khaidukov, and M.A. Zubkov Phys. Rev. D 98, 076013 (2018)

"Chiral Torsional Effect Khaidukov, Z.V. Zubkov, M.A., Jetp Lett. (2018)

Киральный вихревой эффект

Киральный вихревой эффект заключается в появлении аксиального тока в фермионной системе при наличии вращения. Этот эффект был предсказан впервые А. Виленкиным (Phys. Rev. D 22, 3080 (1980)). Было найдено следующее выражение для осевого тока безмассовых дираковских частиц (В пределе очень высоких температур):

$$\vec{j}^5 = -\frac{1}{6}\vec{\Omega}T^2 \tag{1}$$

При наличии химического потенциала в выражении для аксиального тока возникает дополнительный член:

$$\vec{j}^5 = (\frac{T^2}{6} + \frac{\mu^2}{2\pi^2})\vec{\Omega} + \dots \tag{2}$$

Киральный вихревой эффект и аномалия.

Была надежда, что значение коэффициента перед завихренностью не зависит от взаимодействий и может быть зафиксировано из рассмотрения киральной аномалии, которая не чувствительна к поправкам. Но Сон и соавторы показали, что высшие порядки теории возмущений способны корректировать, по крайней мере, коэффициент перед T^2 в уравнении

На формальном уровне теория с безмассовыми фермионами страдает от различных инфракрасных расходимостей, из-за чего конечные массы фермионов всегда вводятся в рассматриваемую систему, даже если принимается предел малых масс. Обратите внимание, что в оригинальной работе обсуждались нейтральные частицы, и для них нет инфракрасных расходимостей, связанных с излучением фотонов.

Причинность и новый инфракрасный параметр

Скорость вращения не может превышать скорость света. Следовательно, должно быть выполнено следующее соотношение:

$$\Omega R \leq 1 \tag{3}$$

Таким образом возникает дополнительный параметр, который соответствует инфракрасной физике. Даже в отсутствии взаимодействия, соотношение между температурой, химическим потенциалом и размером системы определяет поведение системы. Важным эффектом, связанным с конечным размером системы, является существование состояний локализованных на границе и которые дают вклад в общий аксиальный ток.

Начальные данные

Мы рассмотрим невзаимодействующие фермионы и исследуем влияние на аксиальный ток как конечной массы фермионов, так и конечного размера системы. Вращение системы будет введено через выражение для общего углового момента. Конечный объем будет задаваться при помощи граничных условий MIT .

Проекция импульса на ось:

$$\delta S = \kappa \int dt \omega_{ij} M^{ij}$$

где ω_{ij} обозначает плоскость вращения (для вращения вокруг оси z $\omega_{ij} = \epsilon_{03ij}$), а тензор M^{ij} - тензор момента импульса для фермионов:

Начальные данные

$$M^{ij} = \frac{1}{2}\int d^3x\bar{\psi}(\gamma^0\{x^i, \hat{P}^j\} - \gamma^0\{x^j, \hat{P}^i\} + \{\gamma^0, \frac{1}{2}\Sigma^{ij}\})\psi$$

Таким образом, мы можем сформулировать уравнение Дирака с вращением

уравнение Дирака

Уравнение Дирака (или, точнее, уравнение Вейля) без граничных условий записывается как (эта матрица должна быть равна нулю)

$$\begin{pmatrix} -M & i\partial_t + \mu + \Omega\left(ix^1\partial^2 - ix^2\partial^1 + \frac{1}{2}\sigma^3\right) - i\sigma^k\partial_k \\ i\partial_t + \mu + \Omega\left(ix^1\partial^2 - ix^2\partial^1 + \frac{1}{2}\sigma^3\right) + i\sigma^k\partial_k & -M \end{pmatrix}$$

Перепишем уравнение Дирака, используя выражение для полного углового момента $\hat{J}_z = \hat{L}_z + \frac{1}{2}\Sigma^{12}$ и обозначения $\hat{P}_\pm = \hat{p}_x \pm i\hat{p}_y$

$$\begin{pmatrix} -M & W + \mu + \kappa\hat{J}_z - \sigma^3 k - \begin{pmatrix} & \hat{P}_- \\ \hat{P}_+ & \end{pmatrix} \\ W + \mu + \kappa\hat{J}_z + \sigma^3 k + \begin{pmatrix} & \hat{P}_- \\ \hat{P}_+ & \end{pmatrix} & -M \end{pmatrix} \psi = 0 \tag{6}$$

Решения уравнения Диракаы

Давайте попробуем найти решение в следующей форме

$$\psi_j = e^{-iWt+kz} \begin{pmatrix} C_j^L \varphi_j(\rho, \phi) \\ C_j^R \varphi_j(\rho, \phi) \end{pmatrix}, \quad j = (W, k, m, \sigma) \tag{7}$$

где φ_j является (двухкомпонентной) собственной функцией оператора спиральности

$$\hat{h}\varphi_j = \sigma\varphi_j \tag{8}$$

$$\varphi = \begin{pmatrix} Ae^{im\phi} J_m(qr) \\ Be^{i(m+1)\phi} J_{m+1}(qr) \end{pmatrix} \tag{9}$$

Решения уравнения Дирака

$$\begin{pmatrix} k-\sigma p & -iq \\ iq & -k-\sigma p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = 0 \tag{10}$$

Что дает:

$$p = \sqrt{k^2+q^2} \tag{11}$$

и

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}p} \begin{pmatrix} iq \\ k-\sigma p \end{pmatrix} \tag{12}$$

В итоге (6) сводится к:

$$\begin{pmatrix} -M & w-p_j\sigma \\ w+p_j\sigma & -M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C^L \\ C^R \end{pmatrix} = 0 \tag{13}$$

где

$$w = W+\mu+\Omega j_z \tag{14}$$

Мы также получили дисперсионное соотношение.

$$\begin{pmatrix} C_L \\ C_R \end{pmatrix} = \frac{1}{M} \begin{pmatrix} w-p\sigma \\ M \end{pmatrix} \tag{15}$$

Граничные условия МТИ

Мы помещаем систему в цилиндр с радиусом R и накладываем так называемые граничные условия МТИ(MIT).

$$(i\gamma^\mu n_\mu - 1)\psi|_{r=R} = \begin{pmatrix} -1 & -i\begin{pmatrix} & e^{-i\phi} \\ e^{i\phi} & \end{pmatrix} \\ i\begin{pmatrix} & e^{-i\phi} \\ e^{i\phi} & \end{pmatrix} & -1 \end{pmatrix} \psi|_{r=R} = 0 \tag{16}$$

здесь $n_\mu = (0, \frac{\mathbf{r}}{r}, 0)$ - единичный вектор, ортогональный к поверхности цилиндра. В соответствии с этими условиями текущая нормаль к поверхности цилиндра исчезает:
$j^\mu n_\mu = 0$ Это граничное условие смешивает состояния $K(\psi_\sigma)$, заданные Eq. (7), с противоположными спиральностями $\sigma = \pm 1$

Граничные условия МТИ

$$\psi = C_+\psi_+ + C_-\psi_- \tag{17}$$

Ненулевое $(C_\pm)$ существует, если $(q = q_{ml})$, где радиальное квантовое число l перечисляет допустимые значения q при заданных значениях (m). Что приводит к следующему условию квантования

$$\mathbf{j}_m^2 - \frac{2M}{q}\mathbf{j}_m - 1 = 0, \quad \mathbf{j}_m(q) = \frac{J_m(qR)}{J_{m+1}(qR)} \tag{18}$$

Мы можем посчитать спектр системы!!.

Вычисление аксиального тока

Нас интересует аксиальный ток вдоль оси вращения

$$j_z^5 = \bar{\psi}\gamma^5\gamma^3\psi = \psi_L^\dagger\sigma^3\psi_L + \psi_R^\dagger\sigma^3\psi_R \tag{19}$$

Распределение ферми задается в виде

$$n(w, j_z) = \frac{1}{e^{\beta(w-\mu-\Omega j_z)} + 1} \tag{20}$$

Это распределение описывает не только положительные энергетические состояния ($E = w - \Omega j_z > 0$), но также состояния с отрицательной энергией $E = w - \Omega j_z < 0$.

Вращение как магнитное поле

$$S = \int d^4x\bar{\psi}(\gamma^\mu(i\partial_\mu + \mu u_\mu) - M)\psi \tag{21}$$

В этой формулировке можно рассматривать u_μ как «калибровочное поле», но без калибровочной инвариантности. В случае, когда $M = 0$, мы получаем эффект CVE. Его можно получить из обычной скорости $\vec{v} = (-\Omega y, \Omega x, 0)^T$ следующим образом

$$u^\mu = \gamma(r)(1, -\Omega y, \Omega x, 0)^T, \quad \gamma(r) = \frac{1}{\sqrt{1 - \Omega^2 r^2}} \tag{22}$$

Но что произойдет в случае ненулевого M?

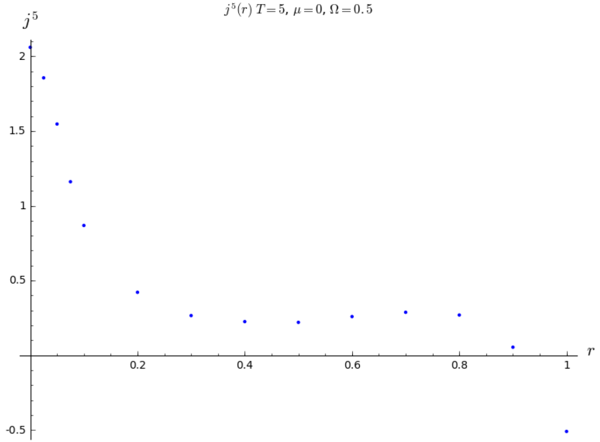


FIG. 5: Axial current density as a function of r (given in the units of R) for the system of massless fermions rotating with the angular velocity $\Omega = 0.5/R$. Temperature is taken equal to $T = 5/R$. The value of chemical potential is $\mu = 0$.

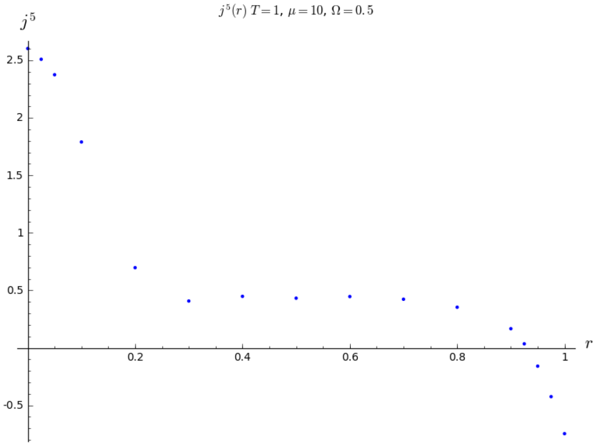


FIG. 4: Axial current density as a function of r (given in the units of R) for the system of massless fermions rotating with the angular velocity $\Omega = 0.5/R$. Temperature is taken equal to $T = 1/R$. The value of chemical potential is $\mu = 10/R$.

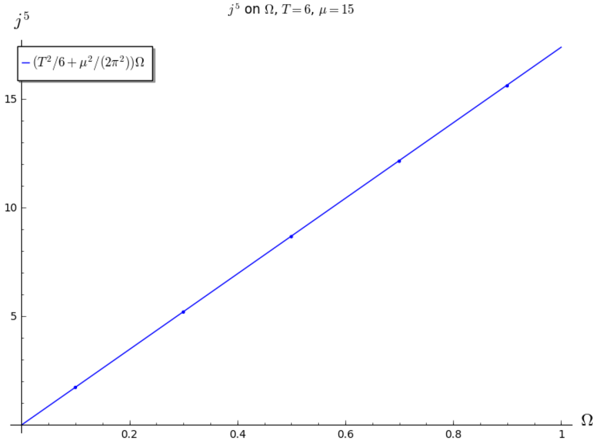


FIG. 3: Axial current density at $r = 0$ for the system of massless fermions rotating with the angular velocity Ω (the values of Ω are represented in the units of $1/R$). Temperature is taken equal to $T = 6/R$. The value of chemical potential is $\mu = 15/R$.

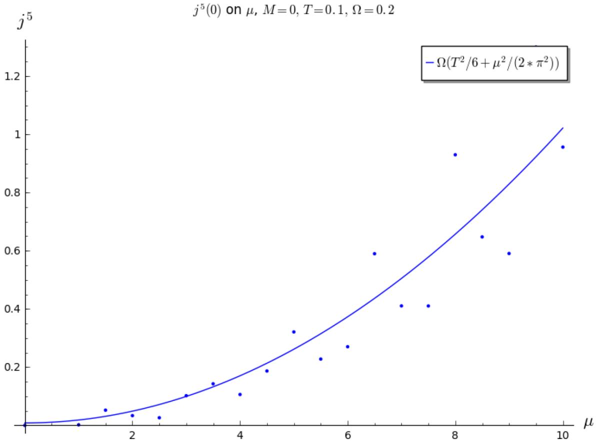


FIG. 10: The axial current density at $r = 0$ (given in the units of R^{-3}) as a function of μ (given in the units of R^{-1}) for the system of massless fermions rotating with the angular velocity $\Omega = 0.2R^{-1}$.

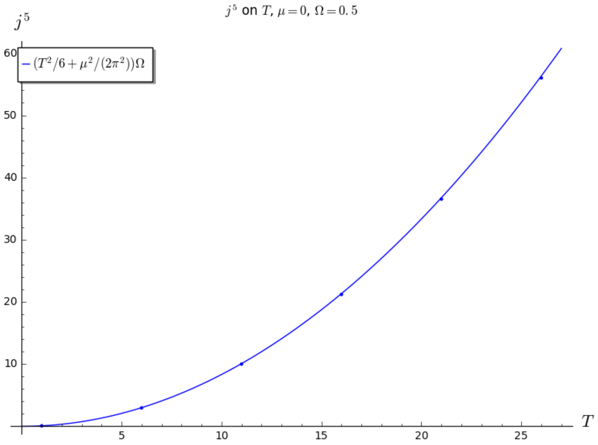


FIG. 2: Axial current density at $r = 0$ for the system of massless fermions rotating with the angular velocity $\Omega = 0.5/R$. The chemical potential is equal to zero. The values of temperature T are presented in the units of $1/R$.

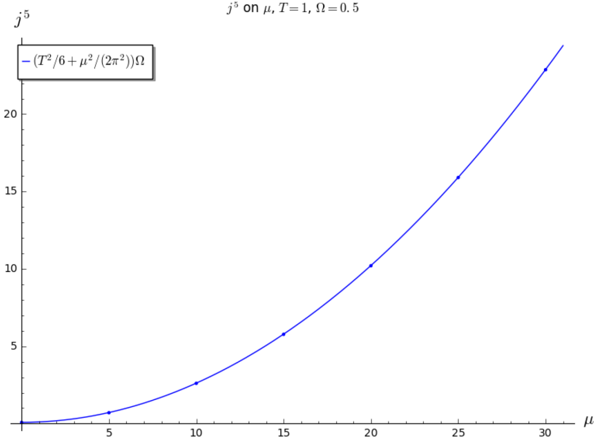
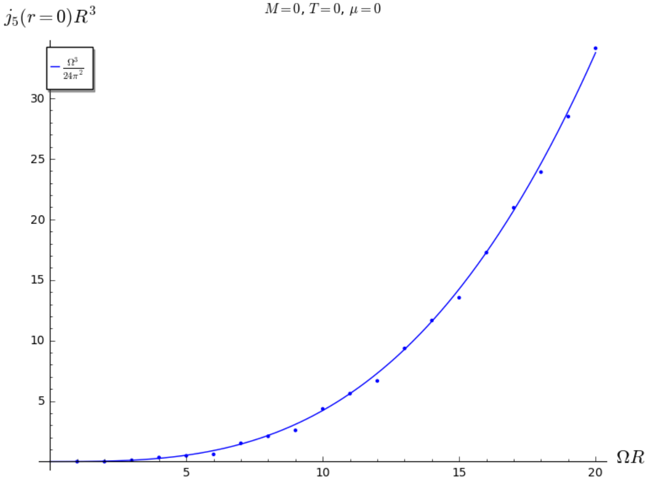


FIG. 1: Axial current density at $r = 0$ for the system of massless fermions rotating with the angular velocity $\Omega = 0.5/R$. Temperature is taken equal to $T = 1/R$. The values of chemical potential μ are presented in the units of $1/R$.


$M=0, T=0, \mu=0$
$j_5(r=0)R^3$
$\frac{\Omega^3}{24\pi^2}$
30
25
20
15
10
5
5
10
15
20
ΩR

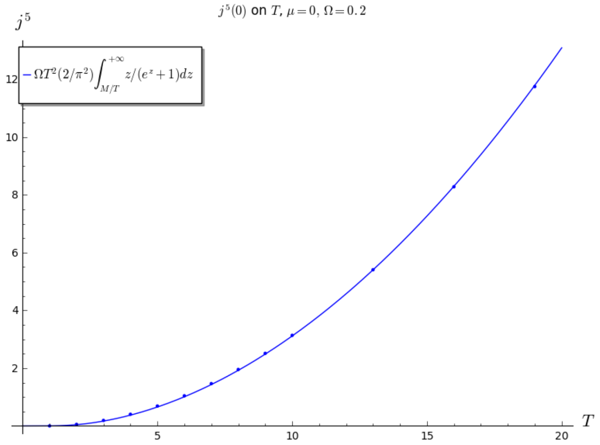


FIG. 9: Axial current density at $r = 0$ as a function of T (given in the units of $1/R$) for the system of fermions with mass $M = 5.1/R$ rotating with the angular velocity $\Omega = 0.2/R$. The value of chemical potential is taken equal to $\mu = 0$.

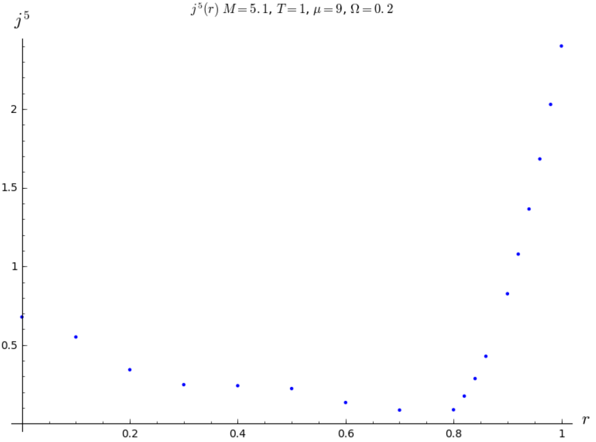


FIG. 6: The axial current density (given in the units of R^{-3}) as a function of r (given in the units of R) for the system of fermions with $M = 5.1R^{-1}$ rotating with the angular velocity $\Omega = 0.2R^{-1}$. Temperature is taken equal to $T = 1R^{-1}$. The value of the chemical potential is $\mu = 9R^{-1}$.

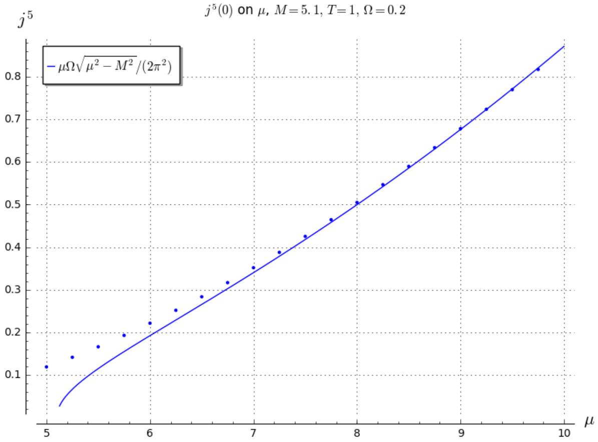


FIG. 7: Axial current density at $r=0$ as a function of μ (given in the units of $1/R$) for the system of fermions with mass $M=5.1/R$ rotating with the angular velocity $\Omega=0.2/R$. Temperature is taken equal to $T=1/R$.

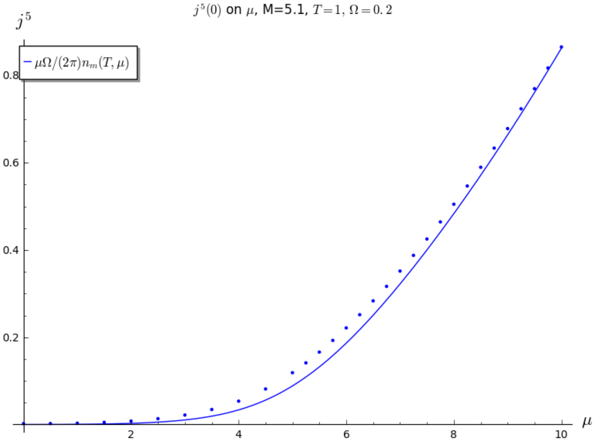


FIG. 8: Axial current density at $r = 0$ as a function of μ (given in the units of $1/R$) for the system of fermions with mass $M = 5.1/R$ rotating with the angular velocity $\Omega = 0.2/R$. Temperature is taken equal to $T = 1/R$.

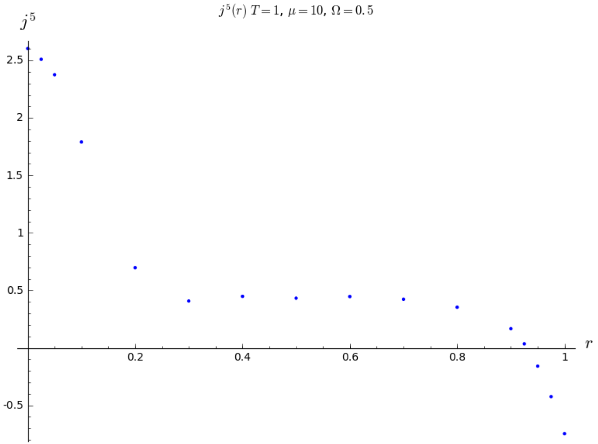


FIG. 4: Axial current density as a function of r (given in the units of R) for the system of massless fermions rotating with the angular velocity $\Omega = 0.5/R$. Temperature is taken equal to $T = 1/R$. The value of chemical potential is $\mu = 10/R$.

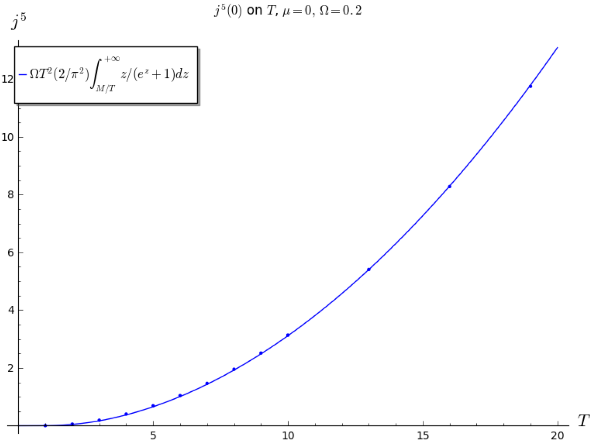


FIG. 9: Axial current density at $r = 0$ as a function of T (given in the units of $1/R$) for the system of fermions with mass $M = 5.1/R$ rotating with the angular velocity $\Omega = 0.2/R$. The value of chemical potential is taken equal to $\mu = 0$.

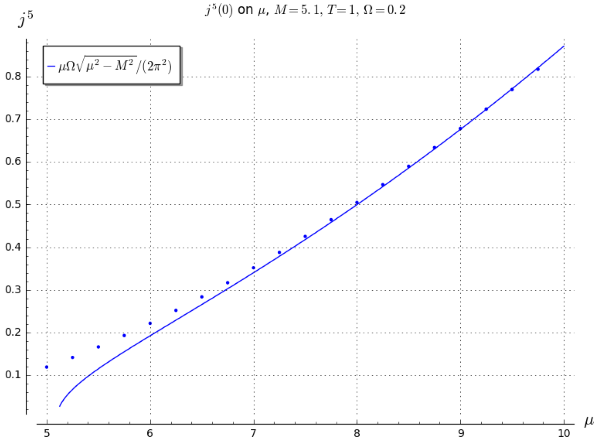


FIG. 7: Axial current density at $r = 0$ as a function of μ (given in the units of $1/R$) for the system of fermions with mass $M = 5.1/R$ rotating with the angular velocity $\Omega = 0.2/R$. Temperature is taken equal to $T = 1/R$.

Результаты

Был рассчитан спектр системы и найдены соответствующие решения свободного уравнения Дирака, удовлетворяющие заданным граничным условиям. Было показано, что конечный размер существенно влияет на ток. В частности, при достаточно низких температурах возникают колебания в зависимости плотности аксиального тока от химического потенциала. При любых значениях температуры плотность аксиального тока быстро меняется при изменении расстояния до оси вращения. Предыдущие результаты, полученные в пределе бесконечного объема, воспроизводятся в наших расчетах только в малой окрестности оси вращения. Сравнение двух разных подходов к определению вращения показывает, что при достаточно малых значениях температуры T (значительно меньших, чем $|\mu - M|$) эти два подхода дают одинаковое значение плотности аксиального тока в пределе бесконечного объема.

Киральный торсионный эффект

Как мы видели в некотором диапазоне параметров, внешнее поле вращения можно рассматривать как «калибровочное поле», такой же прием можно использовать для равномерного кручения:

$$T^a_{ij} = \partial_i e^a_j - \partial_j e^a_i \tag{23}$$

e^a_j-vielbein

Киральный торсионный эффект

Мы будем использовать поле кручения в следующем виде:

$$T^0_{ij} = \epsilon^0_{.fij} S^f \tag{24}$$

Вычисляем отклик аксиального тока на кручение при помощи методов изложенных выше. Рассмотрим случай исчезающей спиновой связности и нетривиального кручения, закодированного в вельбейне. $e^a_i(x) = \delta^a_i + \delta e^a_i(x)$.

$$j^{5k} = 8S^k T \sum_{\omega_n} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{\omega_n^2}{(\omega_n^2 + p^2)^2} \tag{25}$$

Киральный торсионный эффект

Мы должны использовать регуляризацию в этом выражении. Есть два способа сделать это. Через дзета-регуляризацию и посредством мацубаровского пересуммирования. Мы получаем

$$j^k_{medium} = \frac{T^2}{6} S^k = -\frac{T^2}{12} \epsilon^{0kij} T^0_{ij}$$

Эффект разделения киральностей с граничными условиями

Давайте рассмотрим влияние граничных условий на эффект разделения киральностей.Рассмотрим безмассовые фермионы и наложим на них условие вдоль оси z вида:

$$in_\mu \gamma^\mu \psi(x_b) = \zeta \psi(x_b) \tag{27}$$

$$\zeta = exp(-i\gamma_5\theta) = cos(\theta) - i\gamma_5 sin(\theta) \tag{28}$$

Нас будет интересовать решение уравнения Дирака в двух случаях $\theta = 0, \pi$

Эффект разделения киральностей с граничными условиями

Решаем уравнение Дирака, получаем , что в безмассовом случае

$$j^{5z} = \frac{eB}{2\pi L} \sum_{p_z, \lambda=0} (n_f(|p_z| - \mu) - n_f(|p_z| + \mu)) \tag{29}$$

$$p_z L = \frac{\pi}{2} + \pi(F - 1), F \in N \tag{30}$$

А в массивном случае ситуация меняется значительным образом:

$$\zeta = 1, k_z cos(Lk_z) - msin(Lk_z) = 0 \tag{31}$$

$$\zeta = -1, k_z cos(Lk_z) + msin(Lk_z) = 0 \tag{32}$$

Thank you for your attention!