

# Подходы к исследованию критических явлений в решеточной теории поля

Герасименюк Николай Владимирович

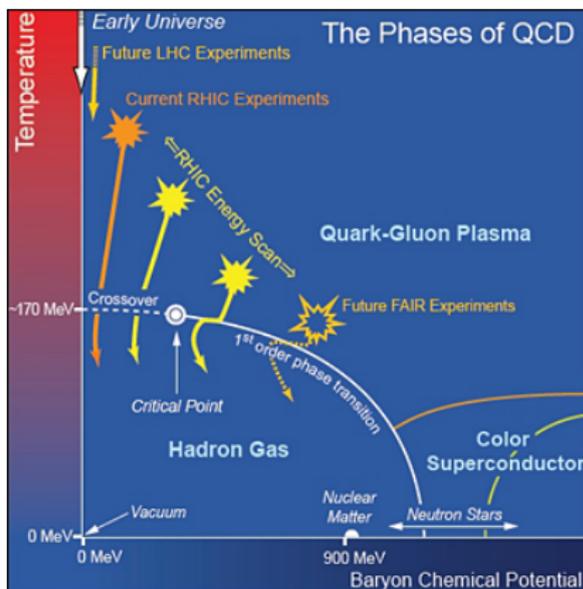
Pacific Quantum Center, Far Eastern Federal University

Доклад в рамках работы: "Критические явления неабелевых  
калибровочных теорий в решеточной регуляризации"

Hadrons and dense matter from QCD, Vladivostok, Russia, 2019.  
Machine Learning Techniques in Lattice QCD, Mainz, Germany, 2021.  
XXXIII Int. Workshop on High Energy Physics, Protvino, Russia, 2021.  
The 38th Int. Symposium on Lattice Field Theory (LATTICE2021), USA, 2021.  
Infinite and Finite Nuclear Matter (INFINUM-2023), Dubna, Russia, 2023.







**Целью** данной работы является изучение фазовой структуры КХД и разработка новых методов для ее исследования.

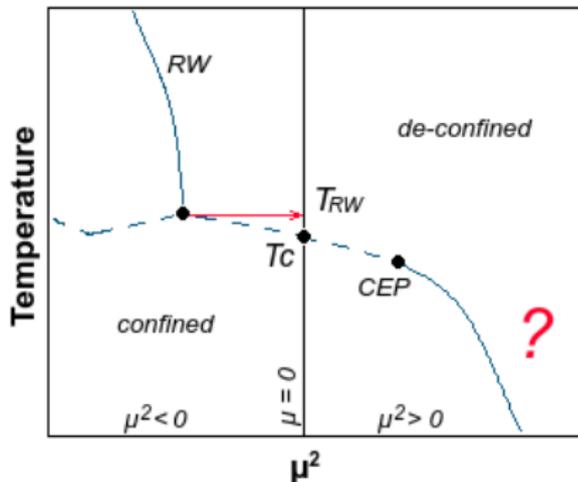
**Задачи:**

- Разработать модель машинного обучения для предсказания решеточных наблюдаемых;
- Исследовать применимость машинного обучения к задачам экстраполяции наблюдаемых;
- Разработать алгоритм получения канонических статсумм  $Z(n, V, T)$ ;
- Исследовать поведение нулей Ли-Янга в рамках канонического подхода.

# Кандидаты на КХД при реальных $\mu$

Основные кандидаты:

- Complex Langevin method
- Lefschetz thimble
- Reweighting method
- Taylor expansion
- *Canonical approach*
- *Neural Network*



V.G. Bornyakov, [et al.]. New approach to canonical partition functions computation in  $N_f=2$  lattice QCD at finite baryon density, doi:10.1103/PhysRevD.95.094506

Atsushi Nakamura, Keitaro Nagata. Probing QCD phase structure using baryon multiplicity distribution. doi:10.1093/ptep/ptw013

Yuto Mori, [et al.]. etc. Application of a neural network to the sign problem via the path optimization method, doi:10.1093/ptep/ptx191

K. Zhou,[et al.]. Regressive and generative neural networks for scalar field theory. doi:10.1103/PhysRevD.100.011501

$K(b,a)$  - сумма всех амплитуд по всевозможным переходам из  $A$  в  $B$

$$K(b, a) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{A^N} \int \cdots \int \exp \left[ \frac{i}{\hbar} S(x_1, \dots, x_{N-1}) \right] dx_1 \dots dx_{N-1}$$

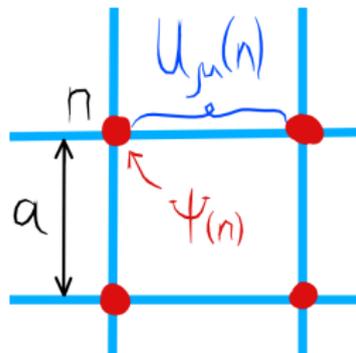
Связь со статистической физикой:

$$K(x_2, t_2; x_1, t_1) = \sum_n U_n^\dagger(x_1) U_n(x_2) e^{-iE_n \Delta t / \hbar}$$

Статооператор:  $\rho(x_1, x_2) = \sum_k U_k^\dagger(x_1) U_k(x_2) e^{-E_k/T}$

Решеточный подход:

- дискретная 4D евклидова решетка
  - $S \rightarrow S_E$
  - $x \rightarrow an, n = 0, 1, 2 \dots$
  - $\psi(x) \rightarrow \psi(n), A_\mu(x) \rightarrow U_\mu(n) = e^{iagA_\mu(x)}$
  - $\psi(x) \rightarrow \psi'(n) = \Omega(n)\psi(n)$
  - $U_\mu(n) \rightarrow U'_\mu(n) = \Omega(n)U_\mu(n)\Omega(n + \mu)^\dagger$
- Дискретизация  $\lim_{a \rightarrow 0} S^{lat} = S_E$



# Решеточная теория поля

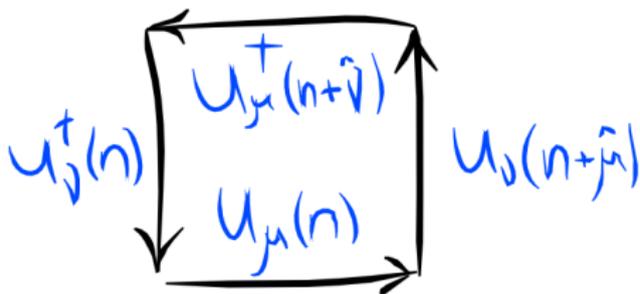
Стандартный подход Монте-Карло применяется для вычислений

$$Z_{GC}(\mu, T, V) = \int \mathcal{D}U \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} e^{-S_G - S_F} = \int \mathcal{D}U (\det[\Delta(\mu)])^{N_f} e^{-S_G}$$

$$\text{Лагранжиан: } \mathcal{L}_{QCD} = \frac{1}{2g^2} \text{Tr}(F_{\mu\nu}^2) + \sum_j i\bar{\psi}_j \gamma^\mu \mathcal{D}_\mu \psi_j - m_j \bar{\psi}_j \psi_j$$

Решеточный аналог действия  $S_G$

$$\lim_{a \rightarrow 0} \beta \sum_{n, \mu > \nu} \left( 1 - \frac{1}{N_c} \text{Re} \left[ \text{Tr} U_{\mu\nu}(n) \right] \right) \approx \frac{1}{2g^2} \int \text{Tr}(F_{\mu\nu}^2) d^4x + O(a^2)$$



Область конечных плотностей

**Проблема знака:**  $P \sim e^{-S[U]} \in \mathbb{R} ?$

**Св-во:**  $\det[\Delta(\mu)] = \det[\Delta(-\mu)^*]$

- $\mu \in \mathbb{R} \rightarrow \det[\Delta(\mu)] \in \mathbb{C}$
- $\mu \in \mathbb{I} \rightarrow \det[\Delta(\mu)] \in \mathbb{R}$

# Решеточные наблюдаемые

В калибровке Вейля  $A_4 = 0$ , что на решетке  $U_4(n) = e^{iagA_4} = 1$

$$\langle W_{T \times R} \rangle = \sum_k C_k e^{-\tau E_k} \xrightarrow{\tau \rightarrow \infty} C_o e^{-\tau V(r)}$$

$$\mathcal{O} = \int \mathcal{D}U \exp \left[ -S[U] + ig \int d^4y j_\mu(y) A_\mu(y) \right], \quad j_\mu(y) = \{0, 0, 0, \delta(y-x)\}$$

$$L(x) = \text{Tr} \left[ P \exp \left[ i g \int_0^{1/T} dt A_4(t, x) \right] \right]$$

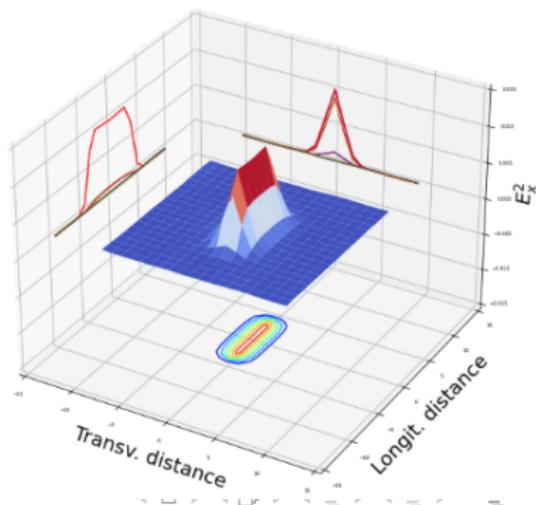
$$\langle L(\vec{r}) L^\dagger(0) \rangle \underset{T \neq 0}{\sim} e^{-\beta F_{q\bar{q}}(\vec{r})}$$

В деконфайменте

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \langle L(\vec{r}) L^\dagger(0) \rangle = |\langle L \rangle|^2 \sim e^{-\beta F_q(\vec{r})}$$

**Конф.:**  $F = \infty$  тогда  $|\langle L \rangle| = 0$

**Деконф.:**  $F \neq \infty$  тогда  $|\langle L \rangle| \neq 0$



В этой части мы исследуем способность нейронных сетей восстанавливать калибровочно-инвариантные наблюдаемые на основе ограниченного набора решеточных конфигураций.

PHYSICAL REVIEW D **103**, 014509 (2021)

## План первой части:

- Подход машинного обучения
- Проблемы
- Реализация алгоритма
- Процесс обучения
- Результаты

### Finding the deconfinement temperature in lattice Yang-Mills theories from outside the scaling window with machine learning

D. L. Boyda<sup>1,\*</sup>, M. N. Chemodub<sup>1,2</sup>, N. V. Gerasimeniuk<sup>1</sup>, V. A. Goy<sup>1,2</sup>,  
S. D. Liubimov<sup>1</sup>, and A. V. Molochkov<sup>1,†</sup>

<sup>1</sup>*Pacific Quantum Center, Far Eastern Federal University, 690950 Vladivostok, Russia*  
<sup>2</sup>*Institut Denis Poisson CNRS/UMR 7013, Université de Tours, 37200 France*

 (Received 23 October 2020; accepted 23 December 2020; published 12 January 2021)

We study the machine learning techniques applied to the lattice gauge theory's critical behavior, particularly to the confinement/deconfinement phase transition in the SU(2) and SU(3) gauge theories. We find that the neural network, trained on lattice configurations of gauge fields at an unphysical value of the lattice parameters as an input, builds up a gauge-invariant function, and finds correlations with the target observable that is valid in the physical region of the parameter space. In particular, we show that the algorithm may be trained to build up the Polyakov loop which serves an order parameter of the deconfining phase transition. The machine learning techniques can thus be used as a numerical analog of the analytical continuation from easily accessible but physically uninteresting regions of the coupling space to the interesting but potentially not accessible regions.

DOI: 10.1103/PhysRevD.103.014509

DOI: [10.1103/PhysRevD.103.014509](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.103.014509)

arXive	Title
1606.02318	Solving the Quantum Many-Body Problem with Artificial Neural Networks
1612.04262	An equation-of-state-meter of QCD transition from deep learning
1705.05582	Machine Learning of Explicit Order Parameters
1709.01971	Deep Learning Beyond Lefschetz Thimbles
1801.05784	Machine learning action parameters in lattice quantum chromodynamics
1807.05971	Machine Learning Estimators for Lattice QCD Observables
1812.01522	Phase transition encoded in neural network
...	...

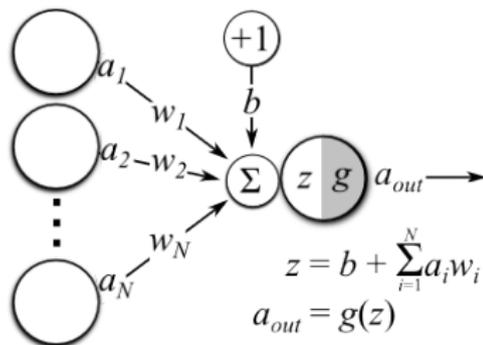
Основные идеи:

- Ускорение вычислений
- Поиски скрытых закономерностей
- Применение там где стандартные методы не работают

# Перцептрон как реализация искусственного нейрона

Перцептрон - сумматор входных данных  $a_i$  с весом  $w_i$  + функция активации.

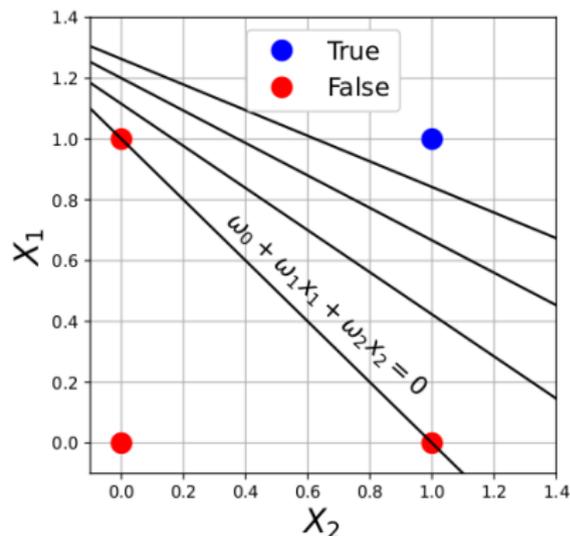
$a_{out} = g(A^T \Omega)$  если  $w_0 = b$  и  $a_0 = 1$ .



Может ли перцептрон выполнять нелинейные аппроксимации?

# Пример

$x_1$	$x_2$	AND	OR	XOR
1	1	1	1	0
1	0	0	1	1
0	1	0	1	1
0	0	0	0	0



Можно выбрать  $g(x)$  как

$$g(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

**NOT( $\neg$ ):**  $g(\omega_1 x + \omega_0) = g(-x + 1)$   
 $\omega_0 = -1, \omega_1 = 1$  не единственное!

**AND( $\wedge$ ), OR( $\vee$ ):**  $g(\omega_2 x_2 + \omega_1 x_1 + \omega_0)$   
Решение дает  $\omega_0 + \omega_1 x_1 + \omega_2 x_2 = 0$

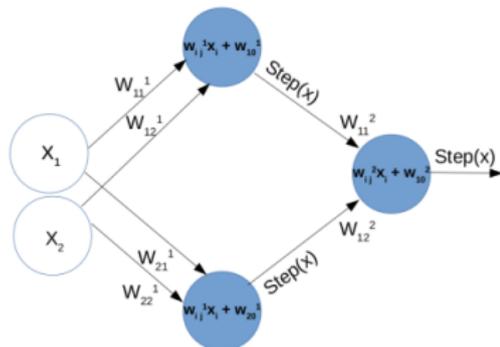
**XOR( $\oplus$ ):** XOR-problem!

Инструкция для решения проблемы  
 $x_1 \oplus x_2 = (\neg x_1 \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge \neg x_2)$

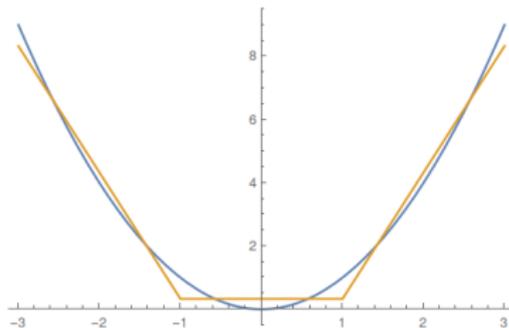
# Пример

XOR-проблема не разрешима для одного слоя, но для двух разрешима.

$$x_1 \oplus x_2 = g(g(-x_1 + x_2 - 0.5) + g(x_1 - x_2 - 0.5) - 0.5)$$



(a) Feedforward Neural Network (NN)

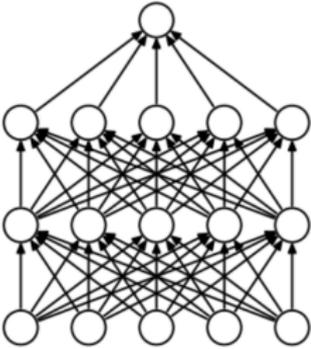


(b) NN fit with  $g(x) = \text{Max}[0, x] = \text{ReLU}(x)$

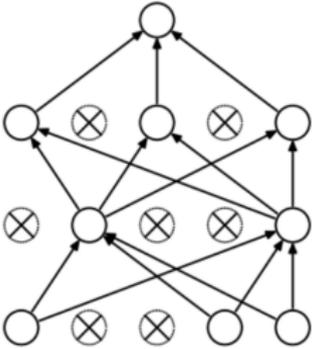
## Универсальная теорема аппроксимации (Цыбенко)

*Искусственная нейронная сеть прямого распространения с одним скрытым слоем может аппроксимировать любую непрерывную функцию многих переменных с любой точностью.*

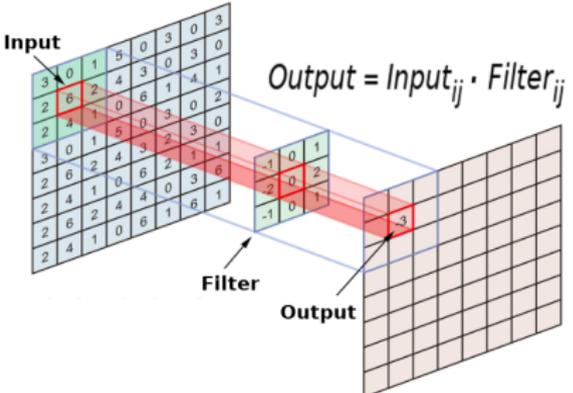
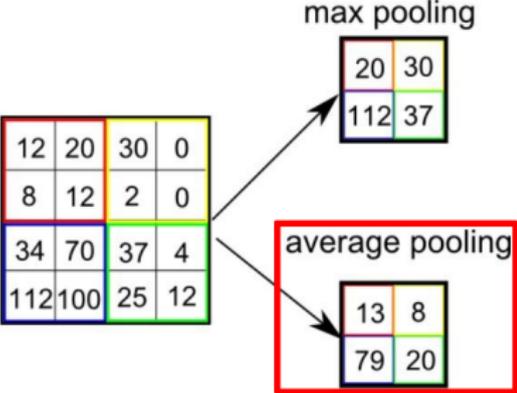
# Инструменты



(a) Standard Neural Net



(b) After applying dropout.



# Градиентный спуск

Набор точек  $\{x_i, y_i\}$  может быть описан полиномом

$$y_i = \sum_{k=0}^N \omega_k x_i^k \text{ или } XW = Y$$

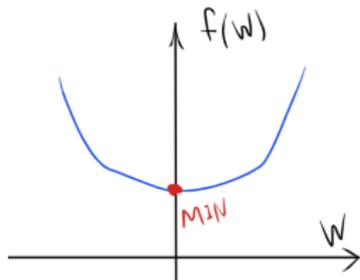
- $n \times n$ :  $X^{-1}$  решение!
- $n \times p$ :  $X^{-1}$  не существует!

Минимизация функционала!

$$f(W) = \|XW - Y\|^2 \rightarrow \min$$

$$\partial_W f = 2X^T(XW - Y) = 0$$

$$W = (X^T X)^{-1} X^T Y$$



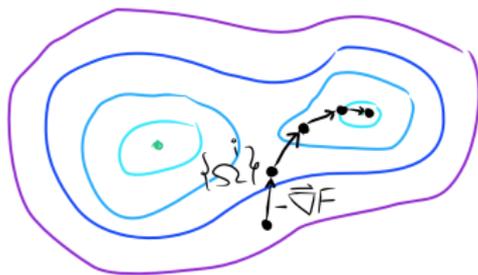
Мы следуем тем же идеям в ML!

NN с одним скрытым слоем можно записать следующим образом:

$$Y = g(g(A^T \Omega_1) \Omega_2)$$

Для нахождения  $\{\Omega_j\}$  используем градиентный спуск (ГС) для функции ошибок  $F(\Omega)$ , которая удовлетворяет решению задачи.

На каждом шаге ГС вычисляем  $\Omega^{i+1} = \Omega^i - \alpha \nabla F(\Omega^i)$



# Сравнение в ходных данных

- Предсказание фазы (Классификация)
- Предсказание наблюдаемых (Регрессия)
- Предсказание решеточных данных (Генерация)

LQCD конфигурации	Рисунок
Набор $SU(N)$ матриц	Набор пикселей (число)
$N_t \times N_s^3 \times \mu \times SU(N) \approx 10^6 \text{ num.}$	$32 \times 32 \times colors \approx 3072 \text{ num.}$
Ансамбль калибровочных полей	Каждое изображение важно
Калибровочная и трансляционная инвариантность с периодическими условиями	Трансляционная инвариантность без периодических условий

# Проблемы

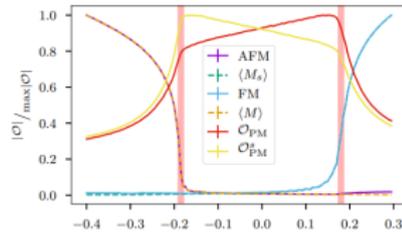
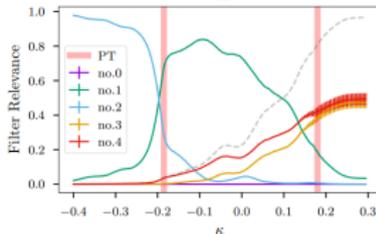
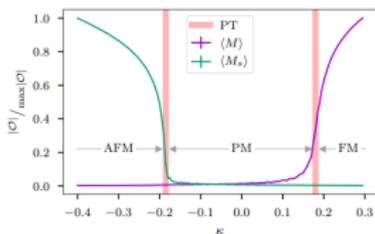
Проблема нейронных сетей: Объяснение:

- Матрицы
  - Калиб.-инвариант. поведение величин
  - Интерпретация
- $\begin{bmatrix} M \\ M \end{bmatrix} \rightarrow N.Network \rightarrow M + \Delta$
  - $(\infty) \rightarrow N.Network \rightarrow Number$
  - $Input \rightarrow (???) \rightarrow Output$

**Что делать?:** Создать новый тип калибровочно-инвариантной нейронной сети, которая сама может работать с матрицами.

Matteo Favoni, [et al.]. Lattice gauge symmetry in neural networks, doi:10.48550/arXiv.2111.04389

**Дополнительный вопрос:** Будет ли эта нейронная сеть гарантировать какое-либо приближение?(Теорема Цыбенко)



Towards novel insights in lattice field theory with explainable machine learning. Stefan Blücher, Lukas Kades, Jan M. Pawłowski, Nils Strodthoff, and Julian M. Urban Phys. Rev. D 101, 094507

# Реализация

Мы рассматриваем SU(2) и SU(3) теорию на решетке с действием Вильсона

$$S[U] = \beta \sum_{n, \mu > \nu} 1 - \frac{1}{N_c} \text{Re} \left[ \text{Tr} U_{\mu\nu}(n) \right]$$

Параметр порядка

$$L = \frac{1}{N_s^3 N_c} \sum_n \text{Tr} \prod_{\mu_t=0}^{N_t-1} U_4(n + \hat{\mu}_t)$$

Представление SU(2) элемента

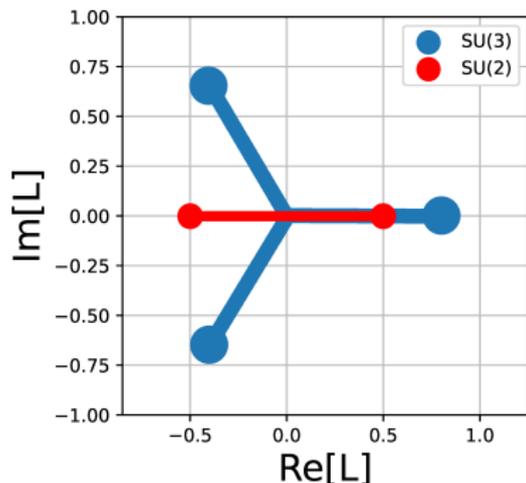
$$U = \begin{pmatrix} a_1 + ia_2 & a_3 + ia_4 \\ -a_3 + ia_4 & a_1 - ia_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix}$$

Обучение происходит в одной точке  $\beta!$

Layer	Structure	
InputLayer	In	$(N_t = 2, N_s \times N_s, N_s, \text{Dim} \times U)$
	Out	$(N_t = 2, N_s \times N_s, N_s, \text{Dim} \times U)$
Conv3D	In	$(2, N_s \times N_s, N_s, \text{Dim} \times U)$
	Out	$(1, N_s \times N_s, N_s, 16)$
Av.Pool.3D + Flatten	In	$(1, N_s \times N_s, N_s, 16)$
	Out	$(16)$
Dense	In	$(16)$
	Out	$(1)$

InputLayer	In	$(N_t = 4, N_s \times N_s, N_s, \text{Dim} \times U)$
	Out	$(N_t = 4, N_s \times N_s, N_s, \text{Dim} \times U)$
Conv3D	In	$(4, N_s \times N_s, N_s, \text{Dim} \times U)$
	Out	$(2, N_s \times N_s, N_s, 256)$
Conv3D	In	$(2, N_s \times N_s, N_s, 256)$
	Out	$(1, N_s \times N_s, N_s, 32)$
Av.Pool.3D + Flatten	In	$(1, N_s \times N_s, N_s, 32)$
	Out	$(32)$
Dense	In	$(32)$
	Out	$(1)$

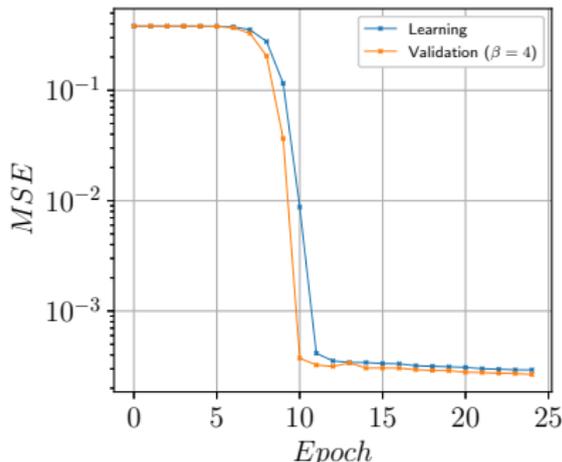
Важно! Использование данных со всех вакуумов!



SU(2) глюодинамика:

- $N_t = 2$ , параметры  $\approx 500$
- $N_t = 4$ , параметры  $\approx 25000$

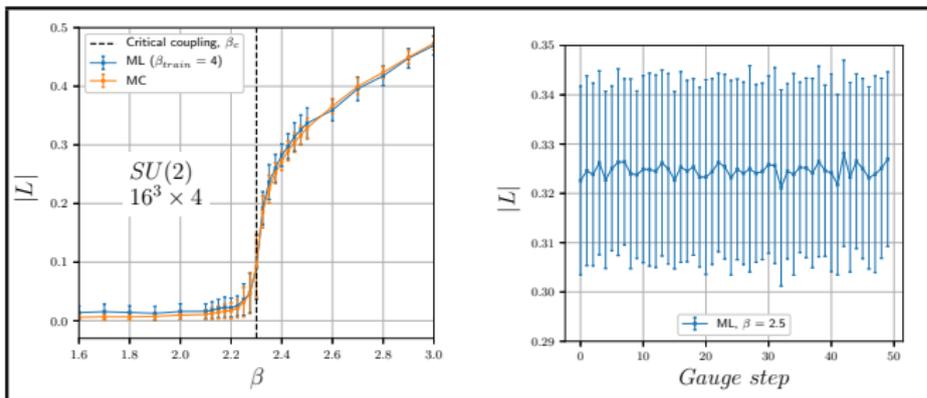
Количество эпох зависит от теории и размера решетки.



SU(3) глюодинамика:

- $N_t = 2$ , параметры  $\approx 4700$
- $N_t = 4$ , параметры  $\approx 53000$

# Результаты



Размер решеток:

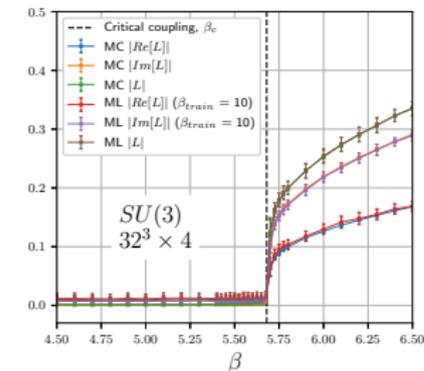
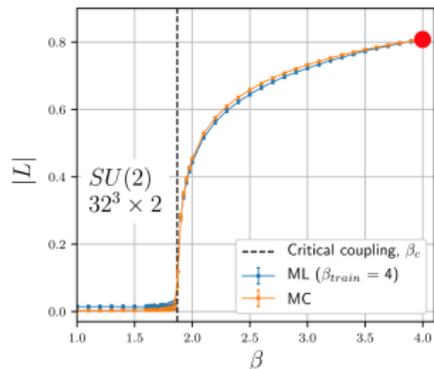
$$N_s = 8, 16, 32$$

$$N_t = 2, 4$$

Обучение:

9000 конф.,  $\beta_{SU(2)} = 4$

9000 конф.,  $\beta_{SU(3)} = 10$



Предсказание:

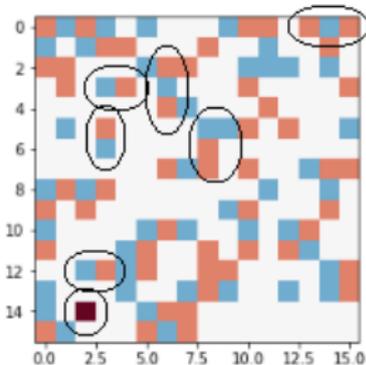
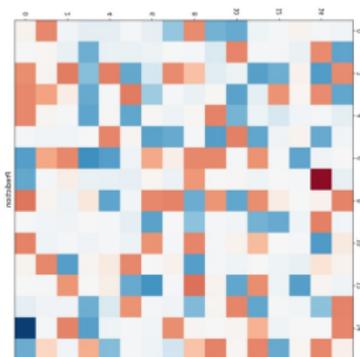
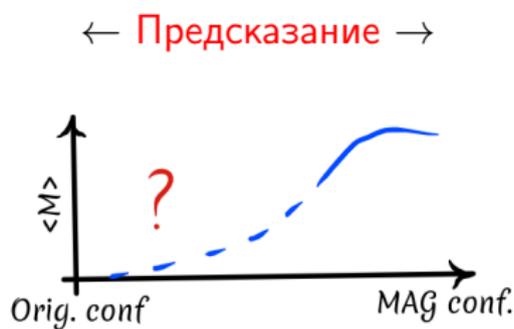
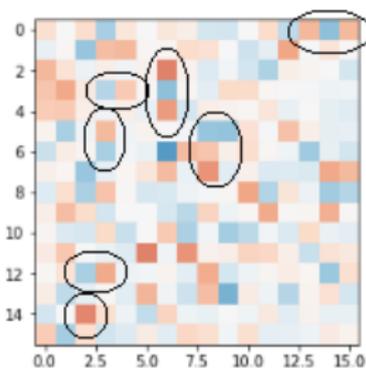
100 конф.,  $\beta_{SU(2)} < 4$

100 конф.,  $\beta_{SU(3)} < 10$

# Текущие исследования (В разработке)

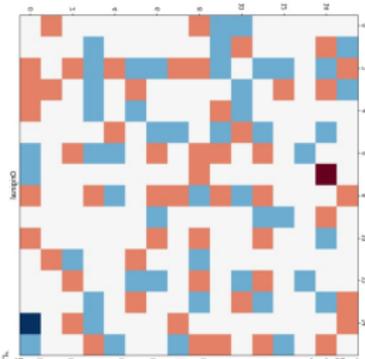
$$SU(2) \xrightarrow[MAG]{} U(1) \times U(1)$$

$U(1)$ -теория



Монополь - магнитный  
поток через элементарную  
ячейку решетки

← Оригинал →



# Заключение первой части

## Заключение:

- Мы выбрали точку обучения далеко от критической области **при очень слабой связи** в решеточных калибровочных теориях  $SU(2)$  и  $SU(3)$  и **построили и обучили нейронную сеть** в этой точке.
- После процесса обучения мы проверили, что алгоритм машинного обучения **восстанавливает калибровочно-инвариантный** параметр порядка с хорошей точностью.
- Также мы показываем, что **численно построенный параметр порядка восстанавливает критическое поведение** системы в физической области в широком диапазоне значений.
- Мы предполагаем, что в будущем этот метод может быть расширен и применен в задачах нахождения новых закономерностей.

В этом проекте фазовая структура КХД при  $T > T_{RW}$  исследовалась методом Ли-Янга в сочетании с каноническим подходом.

PHYSICAL REVIEW D **107**, 014508 (2023)

## План второй части:

- Канонический метод и идеи Ли-Янга
- Нахождение коэффициентов ряда
- Нули Ли-Янга при  $T > T_{RW}$
- Результаты
- Выводы

### Numerical study of the Roberge-Weiss transition

V. G. Bornyakov

*Institute for High Energy Physics NRC "Kurchatov Institute," 142281 Protvino, Russia  
and National Research Center "Kurchatov Institute," 123182, Moscow, Russia*

N. V. Gerasimeniuk, V. A. Goy, A. A. Komeev, and A. V. Molochkov  
*Pacific Quantum Center, Far Eastern Federal University, 690922 Vladivostok, Russia*

A. Nakamura

*RCNP, Osaka University, Osaka 567-0047, Japan  
and Pacific Quantum Center, Far Eastern Federal University, 690922 Vladivostok, Russia*

R. N. Rogalyov

*Institute for High Energy Physics NRC "Kurchatov Institute," 142281 Protvino, Russia*

(Received 19 August 2022; accepted 8 December 2022; published 13 January 2023)

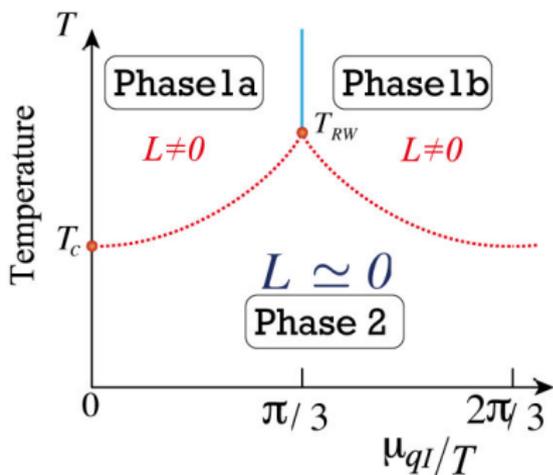
We study the Roberge-Weiss phase transition numerically. The phase transition is associated with the discontinuities in the quark-number density at specific values of imaginary quark chemical potential. We parametrize the quark-number density  $\rho_q$  by the polynomial fit function to compute the canonical partition functions. We demonstrate that this approach provides a good framework for analyzing lattice QCD data at finite density and a high temperature. We show numerically that, at high temperature, the Lee-Yang zeros lie on the negative real semiaxis provided that the high-quark-number contributions to the grand canonical partition function are taken into account. These Lee-Yang zeros have nonzero linear density, which signals the Roberge-Weiss phase transition. We demonstrate that this density agrees with the quark-number density discontinuity at the transition line.

DOI: 10.1103/PhysRevD.107.014508

DOI: [10.1103/PhysRevD.107.014508](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.107.014508)

# Canonical approach

Канонический подход позволяет изучать фазовую структуру КХД при конечной плотности. Канонический подход основан на данных решетки, полученных в мнимой области химического потенциала. Эта область примечательна тем, что для нее нет проблемы знака, т.е. возможно моделирование методом Монте-Карло.



$$Z_{GC}\left(\frac{\mu_I}{T}\right) = Z_{GC}\left(\frac{\mu_I}{T} + \frac{2\pi k}{3}\right)$$

$$Z_{GC}(\mu_q) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} Z_C(n) e^{n\mu_q/T}$$

При  $\mu_q \rightarrow i\mu_{qI}$  (Фурье образ)

$$\frac{\rho_{qI}}{T^3} = -\frac{1}{VT^2} \frac{\partial \ln Z_{GC}}{\partial \mu_{qI}} \approx \alpha_1 \frac{\mu_I}{T} + \alpha_3 \left(\frac{\mu_I}{T}\right)^3 \dots$$

V. G. Bornyakov [et. all]. Phys. Rev. D 95, 094506

Алгоритм:

$$\rho_{qI} \rightarrow Z_{GC}(\mu_I) \rightarrow Z_C(n) \rightarrow Z_{GC}(\mu)$$

# Решеточные вычисления

Плотность кварков  $n_q$  можно вычислить численно на решетке для мнимого химического потенциала по формуле

$$\frac{\rho_q}{T^3} = \frac{N_f}{VT^3} \frac{1}{Z_{GC}} \int \mathcal{D}U (\det \Delta(\mu_q))^{N_f} \text{Tr} \left[ \Delta^{-1} \frac{\partial \Delta}{\partial (\mu_q/T)} \right] e^{-S_g}$$

Улучшенное действие Ивасаки:

$$S = S_g + S_q$$

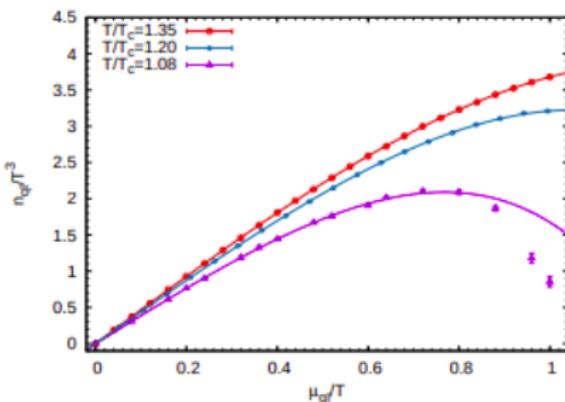
$$S_g = -\beta \sum_{x,\mu\nu} \left( c_0 W_{\mu\nu}^{1 \times 1}(x) + c_1 W_{\mu,\nu}^{1 \times 2}(x) \right)$$

$$S_q = \sum_{f=u,d} \sum_{x,y} \bar{\psi}_x^f \Delta_{x,y} \psi_y^f$$

- Lattice  $4 \times 16^3$  ( $L \approx 3.2 \text{ fm}$ ,  $a \approx 0.2 \text{ fm}$ )
- $m_\pi/m_\rho = 0.8$  ( $m_\pi = 0.7 \text{ GeV}$ )
- $\beta = 6/g^2$ ,  $c_1 = -0.331$ ,  $c_0 = 1 - 8c_1$

Parameter info: S.Ejiri [et al.], PRD 82, 014505 (2010)

V. G. Bornyakov [et. all], New approach to canonical partition functions computation in  $N_f = 2$  lattice QCD at finite baryon density: Phys. Rev. D 95, 094506



$T/T_c$	$a_1$	$a_3$	$a_5$
1.35(7)	4.671(2)	-0.991(4)	-
1.20(6)	4.409(6)	-1.032(31)	-0.165(32)
1.08(5)	3.880(17)	-1.62(21)	-0.59(0.47)

# Идеи Ли-Янга

Для исследования фазовой структуры достаточно изучить поведение нулей Ли-Янга - корней большой канонической статсуммы  $Z_{GC}(\mu)$ .

Lee T. D., Yang C. N. Phys. Rev. — 1959. — Т. 113 — С. 1406

*Неаналитичность = переход?*

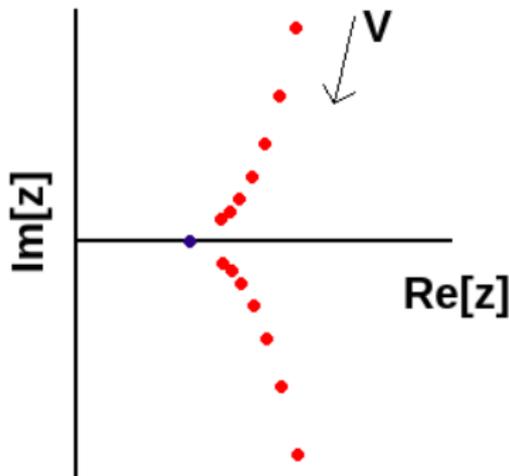
$$Z_{GC}(\mu_q) = \sum_{n=-N_{max}}^{N_{max}} Z_C(n) e^{n\mu_q/T}$$

$$Z_{GC}(\mu_q) \sim \prod_{n=1}^{2N_{max}} (\xi_q - \alpha_n), \quad \xi_q = e^{\mu_q/T}$$

$$Z_C(n) = Z_C(-n) \text{ (C-четность)}$$

$Z_C(n)$  — *положительные*, *реальные*

$\alpha_n$  не реальные, не положительные!



# Нули Ли-Янга при ( $T > T_{RW}$ )

Изучая фазовую структуру КХД мы также следуем идее Ли-Янга.

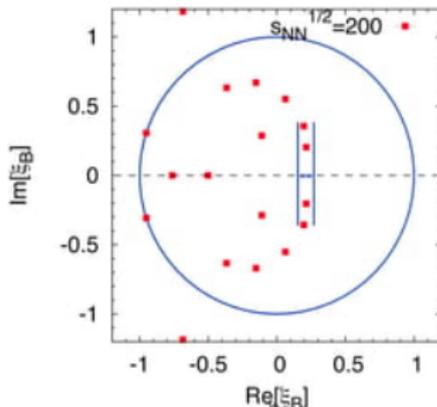
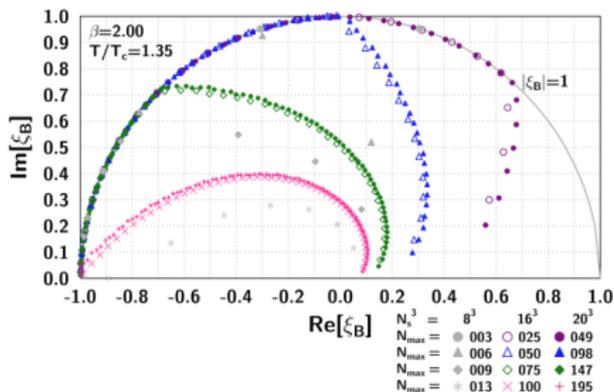
$$Z_{GC}(\mu_q) = \sum_{n=-N_{max}}^{N_{max}} Z_C(n) \xi_q^n = 0, \quad \xi_q = e^{\mu_q/T} = \xi_B^{1/3}$$

Свободный газ фермионов в 1+1:  $\frac{\mu_q}{T} = i\pi \frac{(2k+1)}{3} - \frac{3(2m+1)}{4\nu}$

Eff. model: CEM-**bad**, (arXiv:2103.07442), NJL-**good**, (arXiv:1905.10956)

Wakayama [et. all], Lee-Yang zeros in lattice QCD for searching phase transition points: arXiv:1802.02014

A.Nakamura, K.Nagata, Probing QCD Phase Structure by Baryon Multiplicity Distribution: arXiv:1305.0760



# Нахождение коэффициентов ряда

Для нахождения интеграла  $Z_C(n)$  воспользуемся методом перевала.

$$Z_C(n) = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta_q}{2\pi} e^{-in\theta_q} Z_{GC}(\mu_{qI}) = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta_q}{2\pi} e^{-in\theta_q} e^{-\nu T^3 \int_0^{\theta_q} d\theta'_q n_{qI}(\theta'_q)}$$

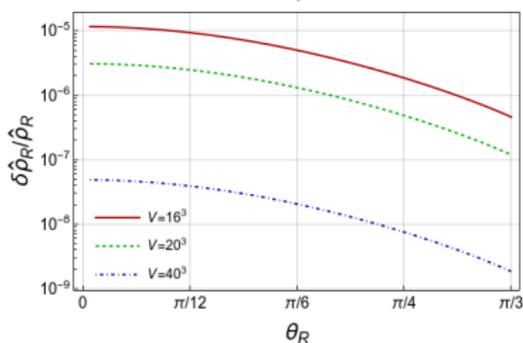
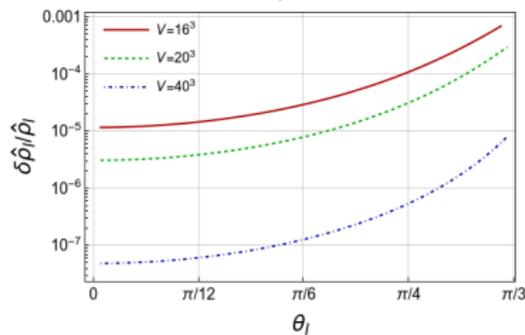
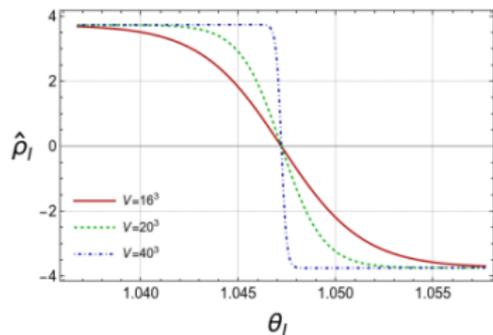
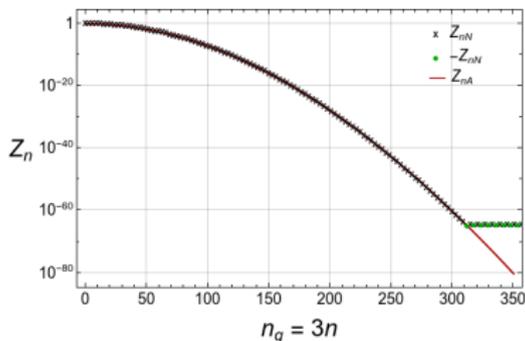
$$\lambda \gg 1, \quad \int_a^b g(x) e^{i\lambda f(x)} dx \approx (i \operatorname{sign}(f))^{1/2} g(s) e^{i\lambda f(s)} \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda |f''(s)|}}$$

$$\nu = \nu T^3 \gg 1, \quad Z_C(n) = \sqrt{\frac{2\pi}{\nu F_n''(\theta_0)}} \exp[-\nu F_n(\theta_0)]$$

$$F_n(\theta) = -\rho_{qI}(n)\theta_q + \frac{1}{2}a_1\theta_q^2 + \frac{1}{4}a_3\theta_q^4$$

$$Z_{nA} = \frac{e^{-\nu F_n(\theta_0)} \sqrt{F_0''(\theta_0)}}{e^{-\nu F_0(\theta_0)} \sqrt{F_n''(\theta_0)}}$$

# Результаты для сравнения $Z_{nA}$ и $\hat{\rho} = \rho/T^3$



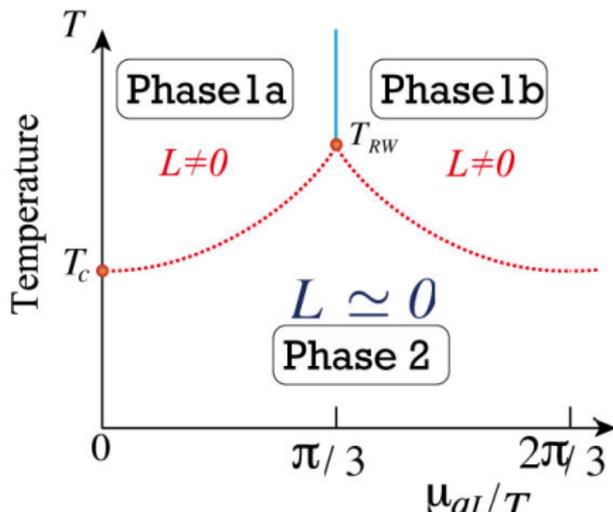
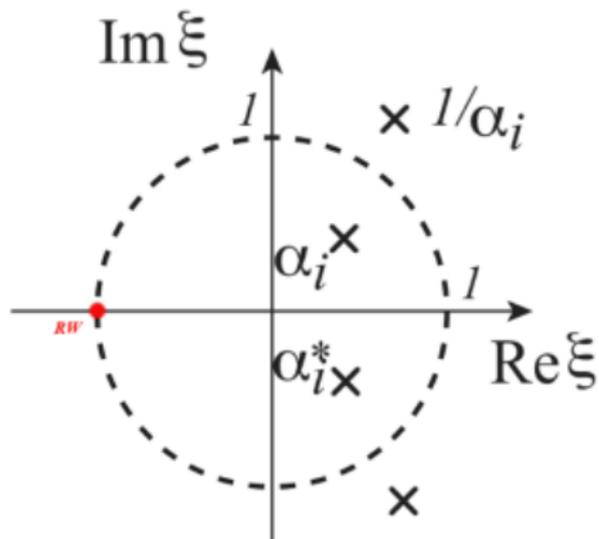
$$\hat{\rho}_l = \frac{1}{\nu} \frac{2 \sum_{n>0} n Z_{nA} \sin(n\theta_l)}{1 + 2 \sum_{n>0} Z_{nA} \cos(n\theta_l)}$$

$$\hat{\rho}_R = \frac{1}{\nu} \frac{2 \sum_{n>0} n Z_{nA} \sinh(n\theta_R)}{1 + 2 \sum_{n>0} Z_{nA} \cosh(n\theta_R)}$$

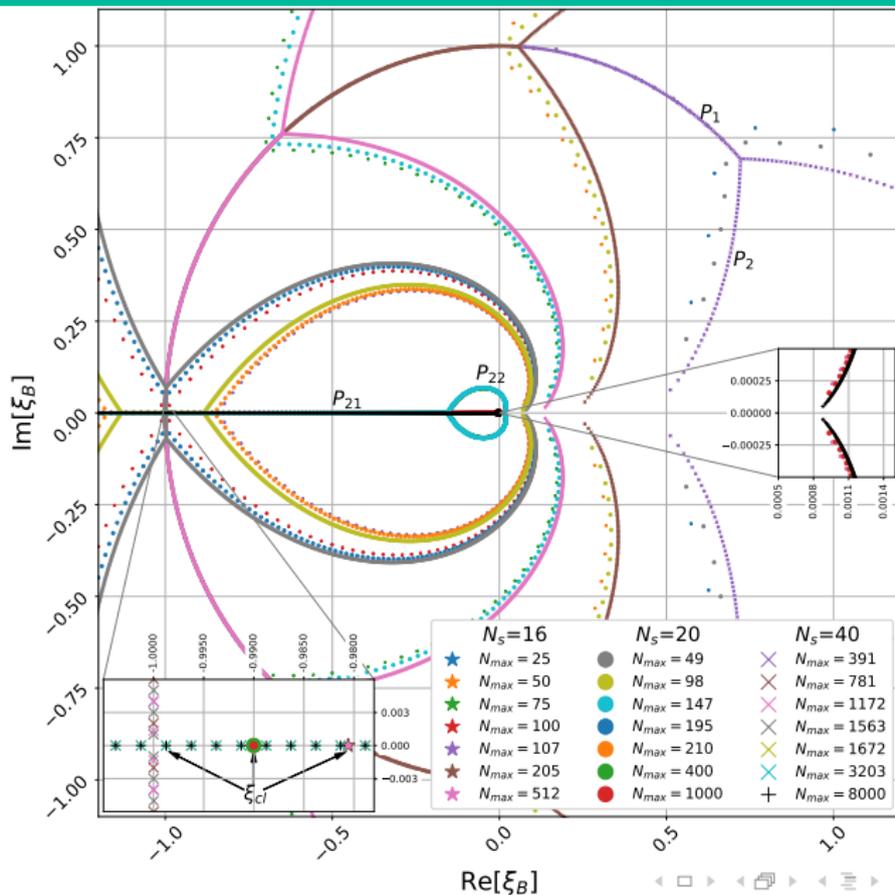
# Нули Ли-Янга

Расчет нулей Ли-Янга выполнен на основе метода Аберта - разновидность метода Ньютона, с возможностью вычислений с произвольной точностью. (doi:10.1016/j.cam.2013.04.037)

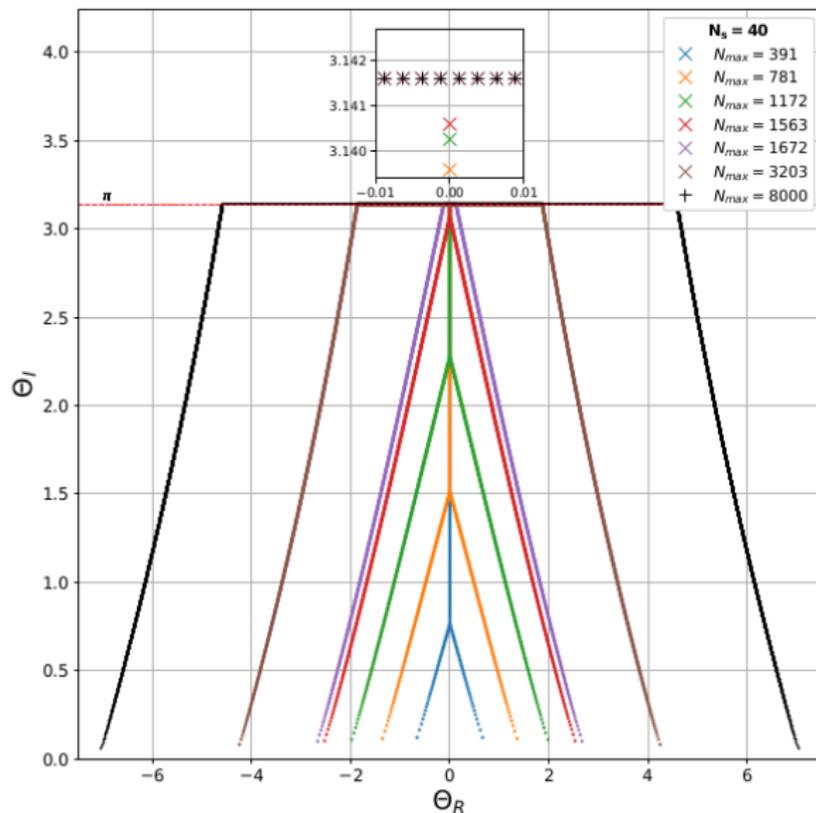
$$Z_{GC}(\mu) = \xi^{-N_{max}} \sum_{n=0}^{2N_{max}} Z_C(n) \xi_B^n = 0, \quad \xi_B = \xi_q^3 = e^{3\mu_q/T}$$



# $N_{max}$ ЗАВИСИМОСТЬ

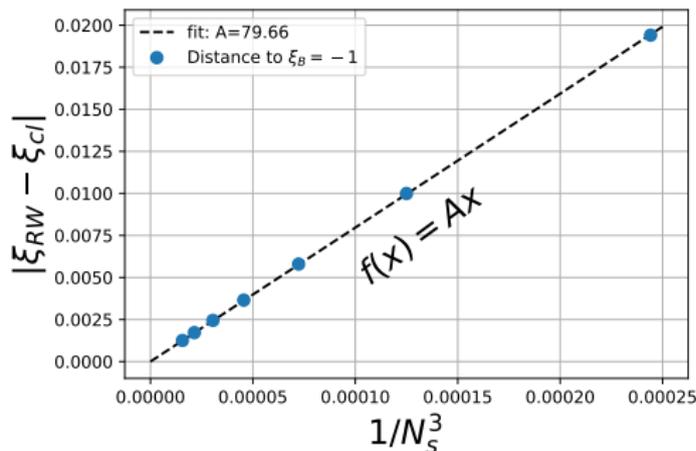


# Нули Ли-Янга на $\mu/T$ -плоскости



# V ЗАВИСИМОСТЬ

После подтверждения, что при больших  $N_{max}$  все нули Ли-Янга лежат на  $Re[\xi_B] < 0$ , была исследована объемная зависимость.



Оценка нулей при  $a_1\theta^2 \gg a_3\theta^4$ :

$$\frac{\mu_q}{T} = i\pi \frac{(2k+1)}{3} - \frac{3(2m+1)}{4\nu a_1}$$

Nagata.K (doi:10.1016/j.pnpnp.2022.103991)

$$Z_C = e^{-\frac{9n^2}{4\nu a_1}}$$

$$Z_{GC} = \sum_n Z_C \xi^{3n}$$

$$Z_{GC} = \sum_n e^{-\frac{9n^2}{4\nu a_1} + \frac{3n\mu}{T}} = \sum_n e^{\pi i n^2 \tau + 2\pi i n z} = \theta(z; \tau)$$

$$\frac{\mu}{T} = i\pi(2k+1) - \frac{9(2m+1)}{4\nu a_1}$$

# Разрыв плотности

Формула связывающая плотность LYZ с разрывом  $\Delta\rho_I$  средней плотности числа частиц была получена Ли и Янгом ([DOI:10.1103/PhysRev.87.410](https://doi.org/10.1103/PhysRev.87.410))

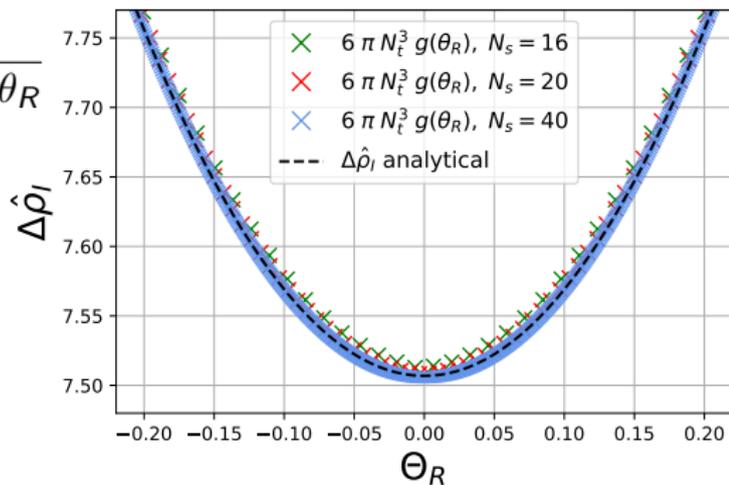
$$g(\theta_R) = \frac{1}{N_s^3} \frac{dN_{LYZ}(\theta_R)}{d\theta_R} \approx \frac{1}{N_s^3 \Delta\theta_R}$$

Численное выражение

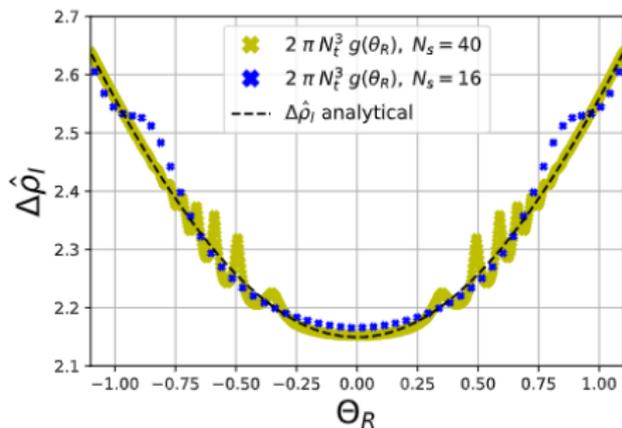
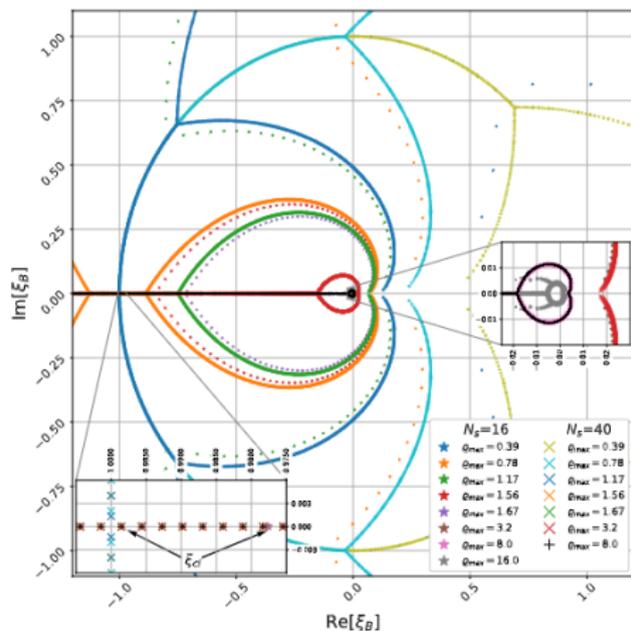
$$\Delta\rho_I = 2\pi N_c N_t^3 g(\theta_R)$$

Аналитическое в  $\theta = i\frac{\pi}{3} + \theta_R$ :

$$\Delta\rho_I = 2 \left( a_1 \frac{\pi}{3} + a_3 \frac{\pi^3}{27} - a_3 \pi \theta_R^2 \right)$$



# Нули Ли-Янга при $T/T_c = 1.2$



$$\Delta \hat{\rho}_I = 2\pi \left( a_1 - a_3 \left( \pi^2 - 3\theta_R^2 \right) - a_7 \left( \pi^6 - 7 \left( 3\pi^4 \theta_R^2 - 5\pi^2 \theta_R^4 + \theta_R^6 \right) \right) \right)$$

# Связь с экспериментом

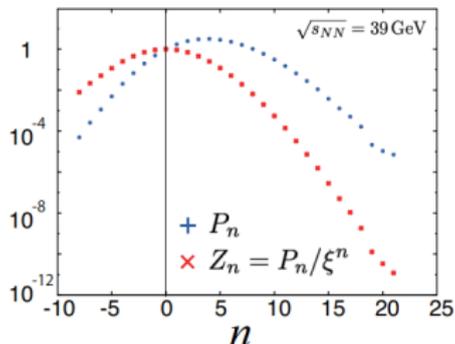
Вероятностный смысл:  $1 = Z_{GC}^{-1} \sum_n Z_n \xi^n$ , где  $\xi = e^{\mu/T}$

$$\text{Multiplicity: } P_n = Z_n \xi^n \Rightarrow Z_n = \sqrt{P_n P_{-n}} \quad \text{и} \quad \xi = \sqrt[2n]{\frac{P_n}{P_{-n}}}$$

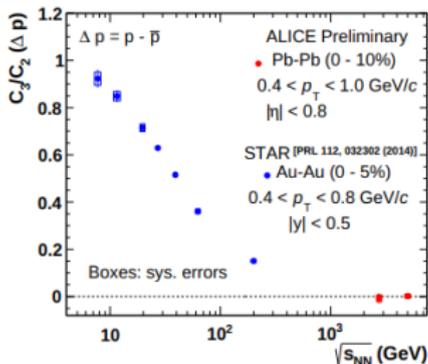
**Определение:** Если для случайной дискретной величины  $X$  существует  $\mathbb{P}(X = x_i) = p_i$ , то производящая функция моментов/кумулянтов.

$$M_X(t) = \sum_{i=1}^{\infty} e^{tx_i} p_i = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \mu_n \frac{t^n}{n!}$$

$$K_X(t) = \ln M_X(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \kappa_n \frac{t^n}{n!}$$



A.Nakamura, K.Nagata, arXiv:1305.0760



K.Behara, arXiv:1807.06780v1



## Заключение второй части

- Исследована  $N_f = 2$  решеточную КХД в фазе деконфайнмента выше  $T_{RW}$  при  $T/T_c = 1,35$ .
- Получены  $Z_{nA}$ , которые очень хорошо согласуются со значениями  $Z_C$ , там где последние доступны, и воспроизводят входное выражение для плотности числа кварков.
- При исследовании нулей Ли-Янга при увеличении максимальной плотности было обнаружено, что нули появляются на  $Re[\xi_B] < 0$  и не изменяются с ростом  $N_{max}$ .
- При исследовании объемной зависимости показано, что при  $V \rightarrow \infty$  существует ненулевая плотность нулей около  $\xi_B = -1$ .
- Показана связь разрыва плотности числа кварков и плотности нулей Ли-Янга и показано что численные результаты для плотности нулей Ли-Янга хорошо удовлетворяют этому соотношению.

1. Нейронная сеть, не содержащая в себе особенности симметрий данной физической задачи, способна находить калибровочно-инвариантные величины в решеточных конфигурациях глюонных полей;
2. Нейронная сеть способна воспроизвести поведение параметра порядка с достаточно хорошей точностью в неизвестной области пространства параметров теории, где обучение не производилось;
3. Аналитический метод оценки интеграла Фурье для разложения большой канонической статсумы в ряд Лорана по активностям не приводит к знакопеременному поведению коэффициентов этого ряда;
4. Показано существование слабой объемной зависимости нулей Ли-Янга при  $\rho > \rho_c$ , в пределе бесконечного объема и больших значений барионного числа;
5. Наличие ненулевой плотности нулей Ли-Янга в области  $\xi_B = -1$  указывает на присутствие фазового перехода первого рода в мнимой области химического потенциала.

- Numerical study of the Roberge-Weiss transition [Text] / V. G. Bornyakov [et al.] // Phys. Rev. D (Q1). — 2023. — Vol. 107, issue 1. — P. 014508. — Scopus, WoS.
- Machine learning physics from unphysics: Finding deconfinement temperature in lattice Yang-Mills theories from outside the scaling window [Text] / D. Boyda [et al.] // Phys. Rev. D (Q1). — 2020. — Vol. 103, no. 014509. — Scopus, WoS.
- Analytic Continuation in Lattice QC2 D [Text] / A. Begun [et al.] // Phys. Part. Nucl. (Q4). — 2021. — Vol. 52, no. 4. — P. 529—535. — Scopus, WoS.
- Lee-Yang Zeroes in the Baryon Fugacity Plane: The Role of High Densities [Текст] / N. Gerasimeniuk [и др.] // Particles (Q3). — 2023. — Т. 6, № 3. — С. 834—846.— Scopus, WoS.

