Системы взаимодействующих частиц: от интегрируемости к универсальности

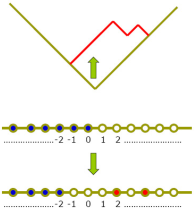
Александр Поволоцкий

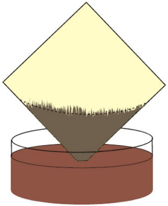
Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Памяти Вячеслава Борисовича Приезжева

Идея=Красота+Простота

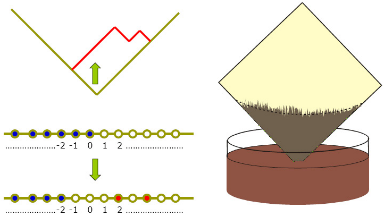
Игрушечные модели повседневной реальности





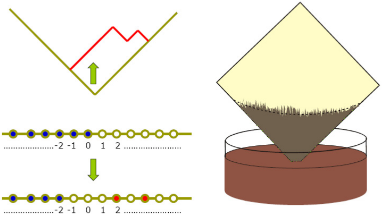
- Итегрируемые модели взаимодействующих частиц дают средства для исследования скейлинговых функций характеризующих широкиеклассы универсальности
  - Случайного роста поверхностей
  - Моделей транспортных потоков
  - Полимеров в случайных средах

Игрушечные модели повседневной реальности



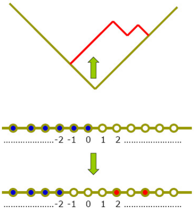
- Итегрируемые модели взаимодействующих частиц дают средства для исследования скейлинговых функций характеризующих широкиеклассы универсальности
  - Случайного роста поверхностей
  - Моделей транспортных потоков
  - Полимеров в случайных средах

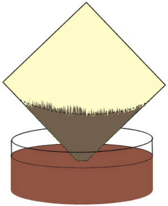
Игрушечные модели повседневной реальности



- Итегрируемые модели взаимодействующих частиц дают средства для исследования скейлинговых функций характеризующих широкиеклассы универсальности
  - Случайного роста поверхностей
  - Моделей транспортных потоков
  - Полимеров в случайных средах

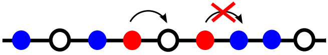
Игрушечные модели повседневной реальности





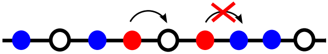
- Итегрируемые модели взаимодействующих частиц дают средства для исследования скейлинговых функций характеризующих широкиеклассы универсальности
  - Случайного роста поверхностей
  - Моделей транспортных потоков
  - Полимеров в случайных средах

Асимметричный процесс с простыми запретами (АПЗ):

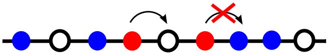


- АПЗ в непрерывном времени :
  - Частицы на одномерной решетке независимо прыгают в соседний узел с вероятностью dt за время dt.
  - Взаимодействие исключенного объема (прыжки в занятый узел запрещены).

Асимметричный процесс с простыми запретами (АПЗ):

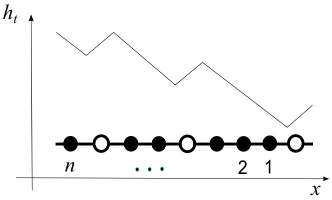


- АПЗ в непрерывном времени :
  - Частицы на одномерной решетке независимо прыгают в соседний узел с вероятностью dt за время dt.
  - Взаимодействие исключенного объема (прыжки в занятый узел запрещены).



- АПЗ в непрерывном времени :
    - Частицы на одномерной решетке независимо прыгают в соседний узел с вероятностью dt за время dt.
    - Взаимодействие исключенного объема (прыжки в занятый узел запрещены).

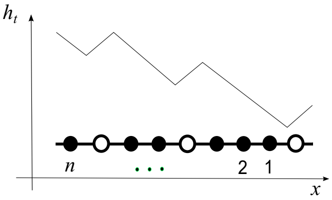
Наблюдаемые



- Координаты частиц в момент времени t: $x_n(t)$
- Высота фронта: $h_t(x+1/2) = h_0(x+1/2) + Y_t(x)$,

  $Y_t(x)$ — интегральный ток из узла x в узел $(x+1)$ за время t.

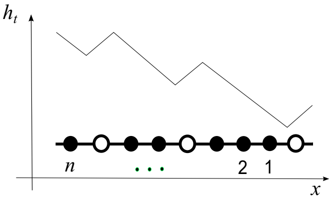
Наблюдаемые



- Координаты частиц в момент времени t: $x_n(t)$
- Высота фронта: $h_t(x+1/2) = h_0(x+1/2) + Y_t(x)$,

  $Y_t(x)$ — интегральный ток из узла x в узел $(x+1)$ за время t.

Наблюдаемые



- Координаты частиц в момент времени t: $x_n(t)$
- Высота фронта: $h_t(x+1/2) = h_0(x+1/2) + Y_t(x)$,

  $Y_t(x)$ — интегральный ток из узла x в узел $(x+1)$ за время t.

Универсальность

- Гидродинамика (Закон больших чисел):

$$\partial_t \rho(x,t) + \partial_x j(\rho(x,t)) = 0$$

- Типичная траектория $\chi(\theta) := x_{t\theta}(t)/t$ при $t \to \infty$

$$\int_{\chi(\theta)}^{\infty} \rho(\chi t, t) d\chi = \theta$$

- Случайные отклонения от детермнистической траектории измеренной в масштабе $t^{1/3}$ сходится к универсальным распределениям (Johansson 2000; Nagao,Sasamoto 2004)

$$\frac{x_n(t) - \chi(\theta)t}{\sigma t^{1/3}} \to_{t\to\infty} \xi_{TW}$$

- Зависит от глобальной формы начальных условий

Универсальность

- Гидродинамика (Закон больших чисел):

$$\partial_t \rho(x,t) + \partial_x j(\rho(x,t)) = 0$$

- Типичная траектория $\chi(\theta) := x_{t\theta}(t)/t$ при $t \to \infty$

$$\int_{\chi(\theta)}^{\infty} \rho(\chi t, t) d\chi = \theta$$

- Случайные отклонения от детермнистической траектории измеренной в масштабе $t^{1/3}$ сходится к универсальным распределениям (Johansson 2000; Nagao,Sasamoto 2004)

$$\frac{x_n(t) - \chi(\theta)t}{\sigma t^{1/3}} \to_{t\to\infty} \xi_{TW}$$

- Зависит от глобальной формы начальных условий

Универсальность

- Гидродинамика (Закон больших чисел):

$$\partial_t \rho(x,t) + \partial_x j(\rho(x,t)) = 0$$

- Типичная траектория $\chi(\theta) := x_{t\theta}(t)/t$ при $t \to \infty$

$$\int_{\chi(\theta)}^{\infty} \rho(\chi t, t) d\chi = \theta$$

- Случайные отклонения от детермнистической траектории измеренной в масштабе $t^{1/3}$ сходится к универсальным распределениям (Johansson 2000; Nagao,Sasamoto 2004)

$$\frac{x_n(t) - \chi(\theta) t}{\sigma t^{1/3}} \to_{t\to\infty} \xi_{TW}$$

- Зависит от глобальной формы начальных условий

Универсальность

- Гидродинамика (Закон больших чисел):

$$\partial_t \rho(x,t) + \partial_x j(\rho(x,t)) = 0$$

- Типичная траектория $\chi(\theta) := x_{t\theta}(t)/t$ при $t \to \infty$

$$\int_{\chi(\theta)}^{\infty} \rho(\chi t, t) d\chi = \theta$$

- Случайные отклонения от детермнистической траектории измеренной в масштабе $t^{1/3}$ сходится к универсальным распределениям (Johansson 2000; Nagao,Sasamoto 2004)

$$\frac{x_n(t) - \chi(\theta)t}{\sigma t^{1/3}} \to_{t\to\infty} \xi_{TW}$$

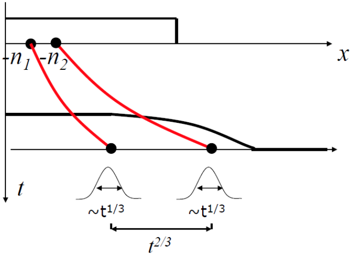
- Зависит от глобальной формы начальных условий

Универсальные корреляции

- Многоточечные распределения $\mathrm{Prob}(\xi(u_1) < a_1, \ldots, \xi(u_n) < a_n)$

$$n = \theta t + u\sigma_1 t^{2/3}$$

$$\frac{x_n(t) - \chi(n/t)t}{\sigma t^{1/3}} \to_{t\to\infty} \xi(u)$$



Задачи

- Поиск и классификация интегрируемых моделей взаимодействующих частиц (Анзац Бете)
- Получение точных распределений
- Асимптотический анализ (скейлиговый предел)

Задачи

- Поиск и классификация интегрируемых моделей взаимодействующих частиц (Анзац Бете)
- Получение точных распределений
- Асимптотический анализ (скейлиговый предел)

Задачи

- Поиск и классификация интегрируемых моделей взаимодействующих частиц (Анзац Бете)
- Получение точных распределений
- Асимптотический анализ (скейлиговый предел)

Анзац Бете и распутывание траекторий

В.Б. Приезжев*, Анзац Бете для повернутых граничных условий, ТМФ 81 N 3, 1989*

Для того чтобы T была трансфер-матрицей рассматриваемой модели, необходимо потребовать выполнения следующего условия. В результате свободной эволюции n блуждающих частиц появляется множество траекторий, не удовлетворяющих правилу льда. Всего имеется $n!$ комплектов этих траекторий, соответствующих различным способам присвоения n частицам волновых чисел из набора $\{k\}$ в (12). Матрица T будет трансфер-матрицей модели льда, если значения $k_1, k_2, \ldots, k_n$ и коэффициентов $a(P)$ подобрать такими, чтобы при суммировании по P сократились все

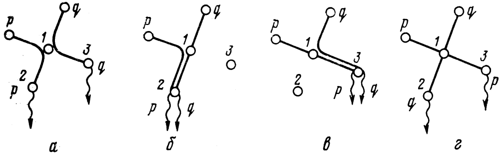


Рис. 2

лишние траектории. Очевидно, что для сокращения лишних траекторий на всей решетке достаточно потребовать их сокращения в каждом узле основной решетки L.

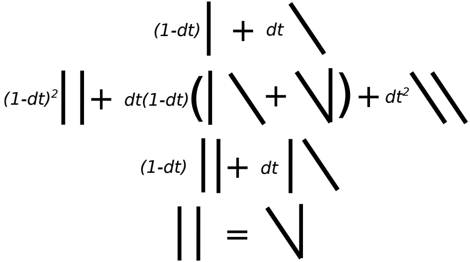
Сокращение траекторий в АПЗ

1 частица

2 частицы (свободные)

2 частицы(взаимодейств.)

условие сокращения



Условие интегрируемости: все многочастичные взаимодействия сводятся к свободным частицам с помощью двухчастичных условий сокращения.

- 1 частица: $A_1 f(x) = (1-dt)f(x) + dtf(x+1)$
- 2 частицы (свободные): $A_2^{free} f(x,x+1) = (1-dt)^2 f(x,x+1) + dt(1-dt)(f(x,x+2) + f(x+1,x+1)) + dt^2 f(x+2,x+2)$
- 2 частицы (взаимодейств.): $A_2^{int} f(x,x+1) = (1-dt)f(x,x+1) + dtf(x,x+2)$
- граничные условия: $f(x,x+1) = f(x+1,x+1)$

- 1 частица: $A_1 f(x) = (1 - dt) f(x) + dt f(x+1)$
- 2 частицы (свободные): $A_2^{free} f(x,x+1) = (1-dt)^2 f(x,x+1) + dt(1-dt)(f(x,x+2) + f(x+1,x+1)) + dt^2 f(x+2,x+2)$
- 2 частицы (взаимодейств.): $A_2^{int} f(x,x+1) = (1-dt) f(x,x+1) + dt f(x,x+2)$
- граничные условия: $f(x,x+1) = f(x+1,x+1)$

Марковская эволюция функций: $f(x) \to Af(x)$

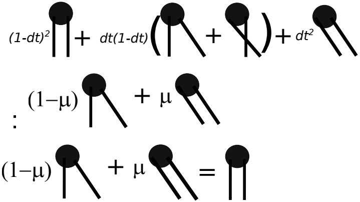
- 1 частица: $A_1 f(x) = (1-dt)f(x) + dtf(x+1)$
- 2 частицы (свободные): $A_2^{free} f(x,x+1) = (1-dt)^2 f(x,x+1) + dt(1-dt)(f(x,x+2) + f(x+1,x+1)) + dt^2 f(x+2,x+2)$
- 2 частицы (взаимодейств.): $A_2^{int} f(x,x+1) = (1-dt)f(x,x+1) + dtf(x,x+2)$
- граничные условия: $f(x,x+1) = f(x+1,x+1)$

Марковская эволюция функций: $f(x) \to Af(x)$

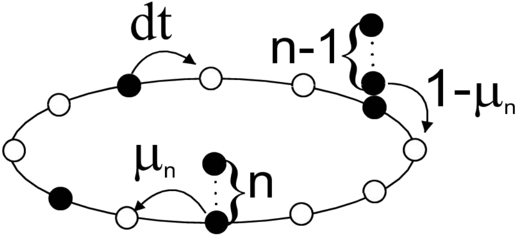
- 1 частица: $A_1 f(x) = (1-dt)f(x) + dtf(x+1)$
- 2 частицы (свободные): $A_2^{free} f(x,x+1) = (1-dt)^2 f(x,x+1) + dt(1-dt)(f(x,x+2) + f(x+1,x+1)) + dt^2 f(x+2,x+2)$
- 2 частицы (взаимодейств.): $A_2^{int} f(x,x+1) = (1-dt)f(x,x+1) + dtf(x,x+2)$
- граничные условия: $f(x,x+1) = f(x+1,x+1)$

Асимметричный лавинный процесс (Приезжев, Ивашкевич, АП, Ху 2001)

- Свободные частицы:
- Взаимодействующие :
- Граничные условия:



Лавинная динамика:

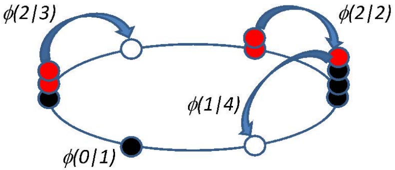


$\mu_n = 1 - \frac{1-(-\mu)^n}{1+\mu}$

Другие примеры интегрируемых моделей взаимодействующих частиц

- АПЗ в дискретном времени с последовательным обновлением (Приезжев 2003)
- q-бозонный процесс с близкодействием в непрерывном (АП 2004) и дискретном (АП, Мендеш 2006) времени
- АПЗ в дискретном времени с параллельным обновлением (АП, Мендеш 2006; АП, Приезжев 2006)
- АПЗ с обобщенным обновлением *(Дербышев, Погосян, АП, Приезжев 2012)*

Общая модель многочастичного хоппинга с близкодействием



- Неограниченное число частиц в узле
- Эволюция в дисткретном времени
- На каждом шаге все узлы обновляются независимо и одновременно
- m частиц прыгает в следующий узел из узла с n частицами с вероятностью $\varphi(m|n)$.

При каких $\varphi(m|n)$ модель решается анзацем Бете?

Квантовый бином и вероятности перескоков.

Соответствие между взаимодействующей и невзаимодействующей динамиками можно свести к задаче о квантовой биномиальной формуле.

Пусть A, B генераторы ассоциативной алгебры, удовлетворяющие однородному квадратичному соотношению общего вида.

$$BA = \alpha AA + \beta AB + \gamma BB,$$

где α, β, γ - произвольные комплексные числа, удовлетворяющие соотношению $\alpha + \beta + \gamma = 1$. Найти коэффициенты биномиального разложения

$$(pA + (1-p)B)^n = \sum_{m=0}^{n} \varphi(m|n) A^m B^{n-m}$$

Теорема (АП 2013)

$$\varphi(m|n) = \mu^m \frac{(\nu/\mu;q)_m(\mu;q)_{n-m}}{(\nu;q)_n} \frac{(q;q)_n}{(q;q)_m(q;q)_{n-m}},$$

где $\alpha = \frac{\nu(1-q)}{1-q\nu}, \beta = \frac{q-\nu}{1-q\nu}, \gamma = \frac{1-q}{1-q\nu}, \mu = p+\nu(1-p)$
и $\nu \neq q^{-k}$ с $k \in \mathbb{N}$ и $(a,q)_n = (1-a)(1-qa)\cdots(1-q^{n-1}a)$-
q-символ Похгаммера.

- Эти вероятности перехода содержат все упомянутые модели как предельные случаи, а также и многие другие.
- Анзац Бете позволяет диагонализовать марковскую матрицу модели и получать точные формулы для вероятностных распределений позиций частиц и токов.
- Асимптотический анализ полученных результатов позволяет получать новые скейлинговые функции.

Спасибо!