

Ренормгрупповые величины Стандартной модели в высших порядках теории возмущений

Пикельнер Андрей

ЛТФ ОИЯИ

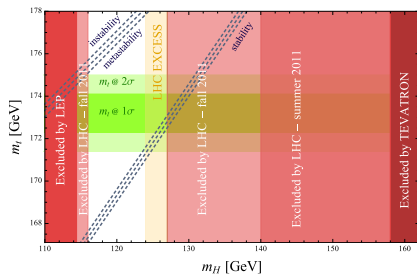
03.06.2015

План

- 1 Мотивация
- 2 Уравнения ренормгруппы
 - Техника вычислений
 - Клибровочные константы
 - Юкавские константы
 - Массивные вакуумные диаграммы и константа самодействия
- 3 Начальные условия
 - Связь величин в OS и \overline{MS} схемах
 - Вычисление массивных диаграмм
- 4 Анализ стабильности вакуума SM
- 5 Заключение

До и после открытия бозона Хиггса

До



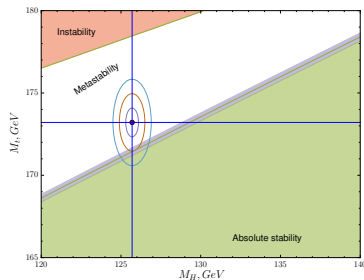
Основная неопределенность в
массе бозона Хиггса M_H

Основная неопределенность:

$$M_H = 125.7 \pm 0.4$$

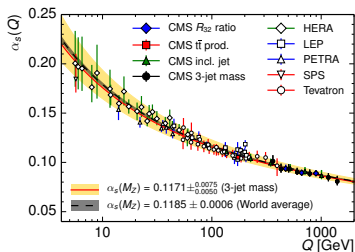
$$M_t = 173.21 \pm 0.51 \pm 0.71$$

$$\alpha_s(M_Z) = 0.1185 \pm 0.0006$$

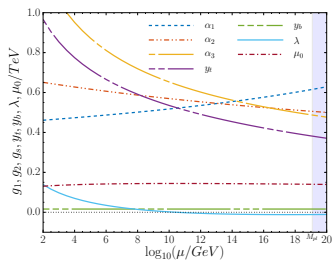
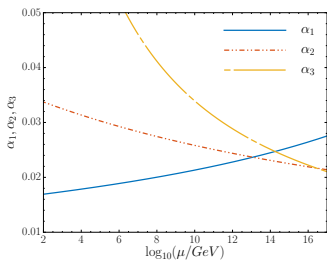


После

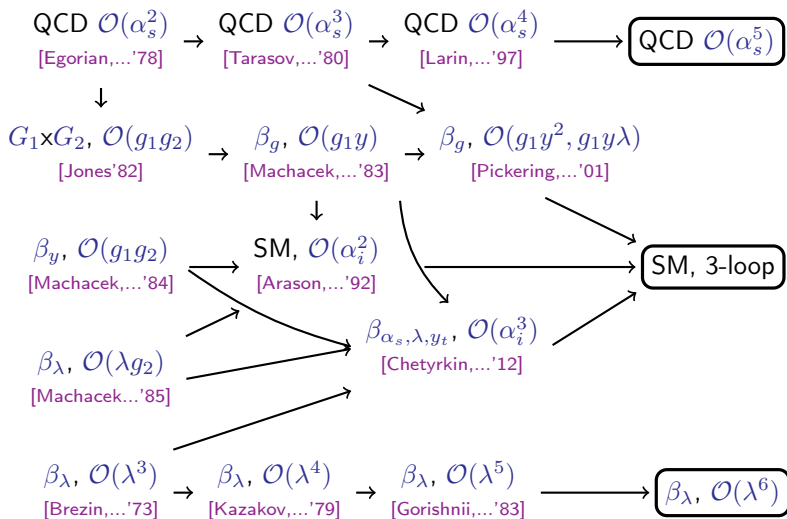
Бегущие константы



- $\alpha_s(Q)$ измеряется при $Q \approx 1\text{TeV}$
- $g_1(\mu), g_2(\mu), g_s(\mu)$, объединение калибровочных констант
- $\lambda(\mu)$, стабильность вакуума Стандартной модели



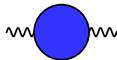
Немного истории



Стандартная модель

трехпетлевое приближение

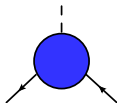
- Калибровочные константы g_1, g_2, g_s



[Mihaila,Salomon,Steinhauser'12]

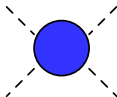
[Bednyakov,AP,Velizhanin'12]

- Юкавские константы y_t, y_b, y_τ



[Bednyakov,AP,Velizhanin'12]

- Параметры скалярного потенциала λ, m



[Chetyrkin,Zoller'13]

[Bednyakov,AP,Velizhanin'13]

② Уравнения ренормгруппы

Техника вычислений

Клибровочные константы

Юкавские константы

Массивные вакуумные диаграммы и константа самодействия

Связь величин в OS и \overline{MS} схемах

Вычисление массивных диаграмм

Схема минимальных вычитаний

Изменение инфракрасной структуры диаграммы

- Голые параметры $g_B = \mu^{2\epsilon} Z_g g$ РГ инвариантны по определению

$$\frac{dg_B}{d\ln\mu^2} = 0 = \epsilon Z_g g + \frac{d \ln Z_g}{d \ln \mu^2} Z_g g + \frac{dg}{d \ln \mu^2} Z_g$$

- Тогда бета-функция в $D = 4 - 2\epsilon$ определяется как

$$\beta_{4-2\epsilon} \equiv \frac{dg}{d \ln \mu^2} = -\epsilon g - g \frac{d \ln Z_g}{d \ln \mu^2}$$

- Z - константы для диаграмм с $\omega = 0$

$$Z_\Gamma = 1 - \mathcal{K} R'_\Gamma,$$

- Дифференцируем диаграммы с $\omega > 0$ нужное количество раз

Сведение к логарифмически расходящимся диаграммам

$$\square_Q \left[\begin{array}{c} P+Q \\ \longrightarrow \end{array} \right]_{Q=0} \equiv 2(2-d) \left[\begin{array}{c} P \\ \bullet \longrightarrow \end{array} \right] = 2(2-d) \frac{\not{P}}{P^4}$$

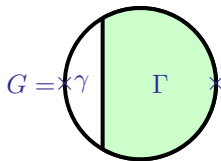
$$\frac{\partial}{\partial Q_\alpha} \left[\begin{array}{c} P+Q \\ \longrightarrow \end{array} \right]_{Q=0} \equiv \left[\begin{array}{c} P \\ \color{red}{|} \longrightarrow \end{array} \right] = -\frac{\not{P}}{P^2} \gamma_\alpha \frac{\not{P}}{P^2}$$

$$\square_Q \left[\begin{array}{c} \text{Diagram with } p_1, p_2, p_1+Q, p_2+Q \text{ and a red wavy line} \\ \text{Diagram with a red wavy line} \end{array} \right]_{Q=0} = 4(2-d) \left[\begin{array}{c} \text{Diagram with } p_1, p_2 \text{ and a red wavy line} \\ \text{Diagram with a red wavy line} \end{array} \right] + 2 \left[\begin{array}{c} \text{Diagram with } p_1, p_2 \text{ and a red wavy line} \\ \text{Diagram with a red wavy line} \end{array} \right]$$

Сведение $\mathcal{K}R'[G_L]$ к $R[G_{L-1}]$

G : L петель, γ : 1 петля, Γ : $(L-1)$ петель

$\Gamma = g_1 \cup g_2 \cup \dots \cup g_n$, $g_i \cap g_j = \emptyset$



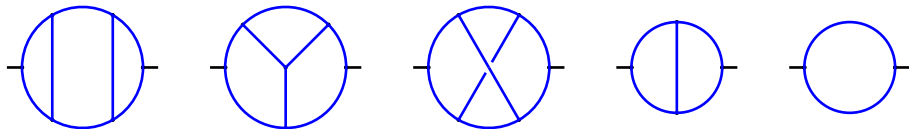
Если Γ не содержит ИК расходимостей,
вместо $\mathcal{K}R'[G]$, вычисляем $R[\Gamma]$

$$\begin{aligned}
 R'[G] &= 1 - \sum L_\gamma + \sum L_{\gamma_1} L_{\gamma_2} - \dots + (-1)^n \sum L_{\gamma_1} \dots L_{\gamma_n} \\
 &= (1 - L_\gamma) - L_\Gamma - (1 - L_\gamma) \sum L_g + (1 - L_\gamma) \sum L_{g_1} L_{g_2} \\
 &\quad + L_\gamma L_\Gamma + \dots + (-1)^n (1 - L_\gamma) \sum L_{g_1} \dots L_{g_n} \\
 &= (1 - L_\gamma) (R'[\Gamma] - L_\Gamma) = (1 - L_\gamma) R[\Gamma]
 \end{aligned}$$

$L_g = \mathcal{K}R'[g]$ - локальный контрчлен, только поверхностная расходимость

MINCER

Вычисление трехпетлевых интегралов типа собственной энергии



- 1 Всего 2 нетривиальных мастер интеграла:

$$NO(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1), \quad T1(1, 1, 1, 1, 1 + \epsilon)$$

- 2 Остальные выражаются через $\Gamma(z)$:

$$G(1, 1), \quad G(1, 1 + \epsilon), \quad G(1 + \epsilon, 1 + \epsilon), \quad G(1, 1 + 2\epsilon)$$

- 3 Вычисление высоких моментов структурных функций
 4 Полная зависимость от ξ , в пропагаторах калибровочных бозонов
 5 Явно разрешена рекурсия соотношений IBP [Chetyrkin, Tkachov'81]
 6 Высокая скорость, правило треугольника

Правило треугольника

$$T_1(n_1, \dots, n_5) = \frac{[n_1(5^- - 2^-)1^+ + n_4(5^- - 3^-)4^+]}{d - 2n_5 - n_1 - n_4} T_1(n_1, \dots, n_5)$$

$$= \frac{n_1}{d - 2n_5 - n_1 - n_4} \left(\begin{array}{c} \text{triangle}(n_1+1, n_4, n_2, n_3, n_5-1) \\ - \\ \text{triangle}(n_1+1, n_4, n_2-1, n_3, n_5) \end{array} \right) + \frac{n_4}{d - 2n_5 - n_1 - n_4} \left(\begin{array}{c} \text{triangle}(n_1, n_4+1, n_2, n_3, n_5-1) \\ - \\ \text{triangle}(n_1, n_4+1, n_2, n_3-1, n_5) \end{array} \right)$$

Локально, действует только на 5 линий, когда в топологиях **LA, BE, NO** по 8

Стандартная модель и калибровка фонового поля

- В ненарушенной фазе калибровочные поля:

$$G_\mu^a = \tilde{G}_\mu^a + \hat{G}_\mu^a \quad (a = 1, \dots, 8), \quad W_\mu^i = \tilde{W}_\mu^i + \hat{W}_\mu^i, \quad (i = 1, 2, 3), \quad B_\mu = \tilde{B}_\mu + \hat{B}_\mu$$

- квантовые $\tilde{V} = (\tilde{G}, \tilde{W}, \tilde{B})$, фоновые $\hat{V} = (\hat{G}, \hat{W}, \hat{B})$ поля, $V = \tilde{V} + \hat{V}$
- Параметры теории, ξ и константы один набор:

$$a_i = \left(\frac{5}{3} \frac{g_1^2}{16\pi^2}, \frac{g_2^2}{16\pi^2}, \frac{g_s^2}{16\pi^2}, \frac{Y_u^2}{16\pi^2}, \frac{Y_d^2}{16\pi^2}, \frac{Y_l^2}{16\pi^2}, \frac{\lambda}{16\pi^2}, \xi_B, \xi_W, \xi_G \right),$$

- В силу тождеств Уорда, соотношения как в КЭД:

$$Z_{g_i} = Z_{\hat{V}_i}^{-1/2}, \quad Z_{\xi_i} = Z_{\tilde{V}_i}$$

- Достаточно вычислить:

$$Z_{\hat{V}_i} \text{ для фоновых полей } \hat{V}_i^\mu = (\hat{B}^\mu, \hat{W}^\mu, \hat{G}^\mu)$$

$$Z_{\tilde{V}_i} \text{ для квантовых полей } \tilde{V}_i^\mu = (\tilde{B}^\mu, \tilde{W}^\mu, \tilde{G}^\mu)$$

Вычисление констант перенормировки

- Необходимы новые правила Фейнмана для вершин с \hat{V}_i LanHEP
- Задача сводится к вычислению двухточечных функций Грина MINCER
- Фоновые поля \hat{V}_i не распространяются, только внешние линии
- Мультипликативная перенормируемость [Larin, Vermaseren'93]

$$\Gamma_{\text{ren}}^{(l)} = Z_{\Gamma}^{(l)} \left[1 + \Gamma_{\text{bare}}^{(1)}(a_{\text{bare}}) + \Gamma_{\text{bare}}^{(2)}(a_{\text{bare}}) + \cdots + \Gamma_{\text{bare}}^{(l)}(a_{\text{bare}}) \right]$$

- Голые константы связаны с перенормированными

$$a_{\text{bare}} = Z_a a_{\text{ren}}$$

-
- Можно вычислять через вершины [Mihaila, Salomon, Steinhauser'12]

$$Z_a = \frac{Z_{\text{vertex}}^2}{\prod_k Z_{k, wf}}, \quad Z_{\xi_i} = Z_{V_i}$$

Обобщение на случай матричных Юкавских констант

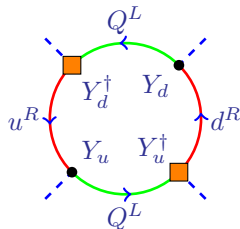
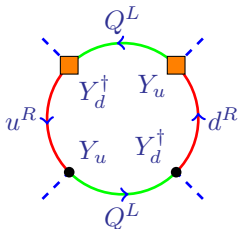
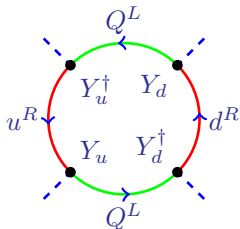
- Один или два следа помечены n_Y

$$n_Y a_i \rightarrow \mathcal{Y}_i \quad n_Y a_i^2 \rightarrow \mathcal{Y}_{ii} \quad n_Y^2 a_i^2 \rightarrow \mathcal{Y}_i^2 \quad n_Y^2 a_i a_j \rightarrow \mathcal{Y}_i \mathcal{Y}_j \quad n_Y a_i a_j \rightarrow \mathcal{Y}_{ij}$$

- где введены обозначения для следов произведений матриц

$$\mathcal{Y}_i = \frac{\text{tr } Y_i Y_i^\dagger}{16\pi^2} \quad \mathcal{Y}_{ii} = \frac{\text{tr } Y_i Y_i^\dagger Y_i Y_i^\dagger}{(16\pi^2)^2} \quad \mathcal{Y}_{ij} = \frac{\text{tr } Y_i Y_i^\dagger Y_j Y_j^\dagger}{(16\pi^2)^2}$$

- Смешанная комбинация \mathcal{Y}_{ij} единственна, нет $Y_u Y_d^\dagger Y_u Y_d^\dagger$ и $Y_u Y_d^\dagger Y_d Y_u^\dagger$



Юкавские константы

- Константы перенормировки из вершин с H и χ

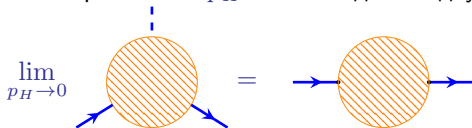
$$Z_{y_f} = \frac{Z_{ffh}}{\sqrt{Z_{f_L} Z_{f_R} Z_h}}, \quad Z_{y_f} = \frac{Z_{ff\chi}}{\sqrt{Z_{f_L} Z_{f_R} Z_\chi}}$$

- Расходимости повторяют древесный член $\Delta\mathcal{L} = -\frac{y_f}{\sqrt{2}}\bar{f}fh - i\frac{y_f}{\sqrt{2}}\bar{f}\gamma_5 f\chi$

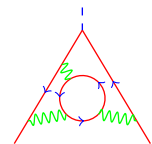
$$\bar{f}_L f_R h + \bar{f}_R f_L h \sim 1, \quad \bar{f}_L f_R \chi + \bar{f}_R f_L \chi \sim \gamma_5$$

- В силу калибровочной инвариантности $Z_\chi = Z_h$, $Z_{ffh} = Z_{ff\chi}$

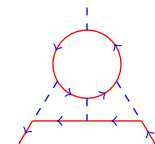
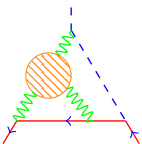
Импульс скалярной ноги $p_H = 0$ - сведение к двухточке



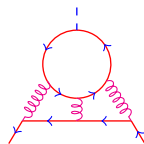
Проблема γ_5 в размерной регуляризации



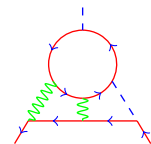
Сумма по всем фермионам в поколении равна нулю



$$\sim \text{tr}[\gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^5]$$



$2n + 1$
 γ матриц



$$\sim \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$$

- Замена справедлива для $D = 4$

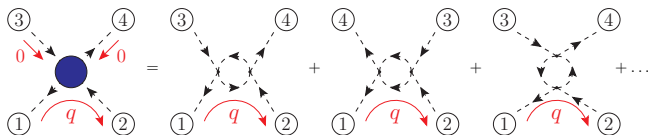
$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = -\mathcal{T}_{[\alpha\beta\gamma\delta]}^{[\mu\nu\rho\sigma]}$$

$$\mathcal{T}_{\alpha\beta\gamma\delta}^{\mu\nu\rho\sigma} = \delta_\alpha^\mu \delta_\beta^\nu \delta_\gamma^\rho \delta_\delta^\sigma,$$

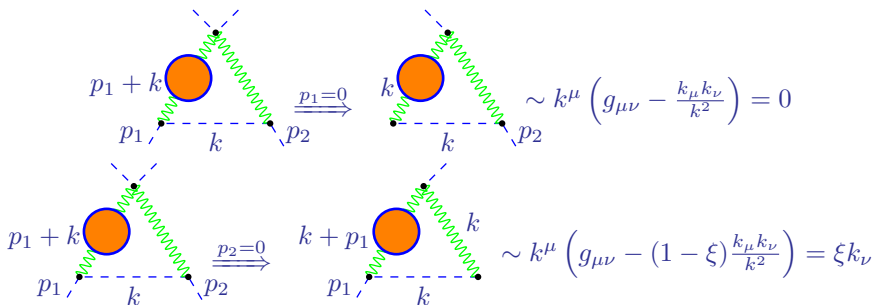
- Используем в $D = 4 - 2\epsilon$, но для диаграмм без старших полюсов, тогда ответ для расходимости не меняется.
- Для упрощения цикличность следа и антикоммутация

Вычисление константы самодействия бозона Хиггса

- Фиксированная протечка, ИК расходимости

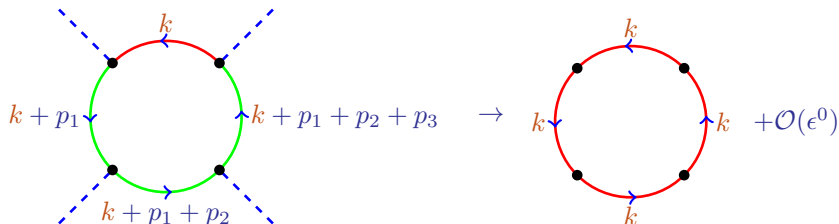


- Результат зависит от протечки



Инфракрасная перестановка в глобальном виде

сведение к полностью массивным вакуумным диаграммам



$$\underbrace{\frac{1}{(k+p)^2 - M^2}}_{\omega=-2} = \underbrace{\frac{1}{k^2 - m_A^2}}_{\omega=-2} + \underbrace{\frac{M^2 - p^2 - 2kp - m_A^2}{k^2 - m_A^2}}_{\omega=-3} \underbrace{\frac{1}{(k+p)^2 - M^2}}_{\omega=-2}$$

- k - петлевые, p - внешние импульсы [Chetyrkin, Misiak, Munz'97]
- Раскладываем до тех пор, пока не станет конечной
- Во всех пропагаторах появится вспомогательная масса m_A

Константа перенормировки глюонного поля Z_3

Двухпетлевой пример

Появляется не поперечная часть Π_M , из которой можно извлечь δZ_m

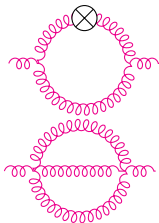
$$\Pi_{\mu\nu}(q^2) = q^2 \left(g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) \Pi_T(q^2) + g_{\mu\nu} m_A^2 \Pi_M(q^2)$$

В одной петле:

$$\Pi_M^{(1)}(q^2) = \frac{q^\mu q^\nu}{q^2 m_A^2} \Pi_{\mu\nu}^{(1)} = a_s \left(4T_F n_f + 4C_A - \frac{9}{4} \xi C_A \right) = \delta Z_m^{(1)}$$

$$Z_3 = 1 - \mathcal{K} R' \Pi_T(q^2) = Z_3 + \frac{a_s}{\epsilon} \delta Z_m^{(1)} C_A \left(\frac{11}{6} + \frac{1}{2} \xi \right)$$

$$+ \frac{a_s^2}{\epsilon} \left(-\frac{22}{3} T_F n_f C_A - 2T_F n_f C_A \xi - \frac{22}{3} C_A^2 + \frac{17}{8} C_A^2 \xi \right)$$



Какие структуры в РГ функциях и интегралах?

$$\begin{array}{c} \text{Circle with 3 internal lines} \end{array} = \dots + \mathbf{D6} + \mathcal{O}(\epsilon), \quad \begin{array}{c} \text{Circle with 1 internal line} \end{array} = \dots + \epsilon \mathbf{T1ep} + \mathcal{O}(\epsilon^2)$$

$$\mathbf{S2} = \frac{4}{9\sqrt{3}} \text{Cl}_2\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{T1ep} = & -\frac{45}{2} - \frac{\pi\sqrt{3}\log^2 3}{8} - \frac{35\pi^3\sqrt{3}}{216} - \frac{9}{2}\zeta_2 + \zeta_3 \\ & + 6\sqrt{3}\text{Cl}_2\left(\frac{\pi}{3}\right) - 6\sqrt{3}\text{Im}\left(\text{Li}_3\left(\frac{e^{-i\frac{\pi}{6}}}{\sqrt{3}}\right)\right) \end{aligned}$$

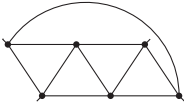
$$\mathbf{D6} = 6\zeta_3 - 17\zeta_4 - 4\zeta_2 \log^2 2 + \frac{2}{3} \log^4 2 + 16\text{Li}_4\left(\frac{1}{2}\right) - 4\left(\text{Cl}_2\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)^2$$

- КХД, 3 петли: $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_3^c \sim \zeta_3$ $\beta_g \sim \mathbb{Q}$ [Tarasov, Vladimirov, Zharkov'1980]
- КХД, 4 петли: $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_3^c \sim \zeta_3, \zeta_4, \zeta_5$ $\beta_g \sim \zeta_3$ [Czakon'2004]

ζ -функции в безмассовых диаграммах

1 Zig-zag conjecture

[Broadhurst, Kreimer'95][Brown, Schnetz'12]

$$Z_5 = \text{Diagram} = \frac{441}{8} \zeta_7$$


[Kazakov'85]

$$I_{Z_n} = 4 \frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!} \left(1 - \frac{1 - (-1)^n}{2^{2n-3}}\right) \zeta(2n-3), \quad n \geq 2$$

2 все приводимые интегралы представимы через HPL и $\sqrt[6]{1}$ [Brown'08]

3 четырехпетлевые пропагаторы содержат только MZV до трансцендентного веса 12(PSLQ): $\zeta_{2,1,1,8}, \zeta_2 \zeta_3 \zeta_7, \dots$ [Lee, Smirnov, Smirnov'11]

4 интегралы четырехпетлевых пропагаторов линейно-приводимы, сводятся к GPL и MZV [Panzer'13]

ϵ - конечный базис массивных вакуумных интегралов

Вычисление расходимостей L -петлевых вакуумных интегралов при помощи $L - 1$ петлевых

- Три петли, полностью массивные интегралы [Chetyrkin,Misiak,Munz'97]
- Четыре для интегралов КЭД типа [Chetyrkin,Faisst,Sturm,Tentyukov'06]
- Необходима редукция (IBP) без $1/\epsilon$ перед мастер-интегралами
- Тогда достаточно лишь расходимостей мастер-интегралов

$$\begin{aligned}
 \mathcal{K} \left(\text{circle}(L) \right) &= \mathcal{K} \left(\int \frac{dk}{k^2 + m^2} \text{circle}(L-1) \right) \\
 &= \int_{\Lambda}^{\infty} \frac{dk}{k^2 + m^2} \lim_{k^2 \rightarrow \infty} R \left[\text{circle}(L-1) \right] \\
 &+ \mathcal{K} \left(\text{circle}(L-1) + \dots \right)
 \end{aligned}$$

Техника вычислений

Клибровочные константы

Юкавске константы

Массивные вакуумные диаграммы и константа самодействия

③ Начальные условия

Связь величин в OS и \overline{MS} схемах

Вычисление массивных диаграмм

- Все бегущие параметры перенормируются в \overline{MS} схеме

$$2^{1/2}G_F = \frac{1 + \Delta\bar{r}(\mu)}{v^2(\mu)}$$

- Древесные соотношения для необходимых констант модифицируются

$$g^2(\mu) = 2^{5/2}G_F M_W^2 [1 + \delta_W(\mu)]$$

$$g^2(\mu) + g'^2(\mu) = 2^{5/2}G_F M_Z^2 [1 + \delta_Z(\mu)]$$

$$\lambda(\mu) = 2^{-1/2}G_F M_H^2 [1 + \delta_H(\mu)]$$

$$y_f(\mu) = 2^{3/4}G_F^{1/2} M_f [1 + \delta_f(\mu)]$$

- Связь с бегущими массами

$$m_x^2(\mu) = M_x^2 [1 + \Delta\bar{r}(\mu)] [1 + \delta_x(\mu)] \quad x = W, Z, H$$

$$m_x(\mu) = M_x [1 + \Delta\bar{r}(\mu)]^{1/2} [1 + \delta_x(\mu)] \quad x = t, b$$

Калибровочно инвариантные собственные энергии

$$\Pi = \text{---} \text{---} \text{---} = \text{---} \text{---} \text{---} + \text{---} \text{---} \text{---} + \text{---} \text{---} \text{---} + \text{---} \text{---} \text{---} + \dots$$

- Π сумма всех одночастично-неприводимых, за исключением линий с H - вкладов **ГОЛОВАСТИКОВ**

$$D(p) = \text{---} \text{---} \text{---} + \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} + \dots = \frac{1}{p^2 - m_0^2 - \Pi(p)}$$

- Можно решить пертурбативно используя анзац

$$M^2 = p^2 = (1 + X_1 + X_2 + \dots) m_0^2$$

Калибровочно инвариантные собственные энергии

$$\Pi = \text{---} \text{---} \text{---} = \text{---} \text{---} \text{---} 1PI \text{---} + \boxed{\begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} H \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} H \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} H \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} 1PI \end{array}} + \dots$$

Головастики

- Π сумма всех одночастично-неприводимых, за исключением линий с H - вкладов **ГОЛОВАСТИКОВ**

$$D(p) = \text{---} \text{---} \text{---} + \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} + \dots = \frac{1}{p^2 - m_0^2 - \Pi(p)}$$

- Можно решить пертурбативно используя анзац

$$M^2 = p^2 = (1 + X_1 + X_2 + \dots) m_0^2$$

Перенормировка в \overline{MS} схеме

- Перенормируя m_0 в \overline{MS} схеме получим связь между бегущей и полюсной массой
- $\Delta\bar{r}$ - жесткая часть распада мюона, сводится к вычислению вакуумных диаграмм
- X_i - связаны с собственными энергиями на массовой поверхности

-
- Вычисление $X_{1,0}, X_{1,1}, X_{2,0}$ для масс $B = W, Z, H, f = t, b$

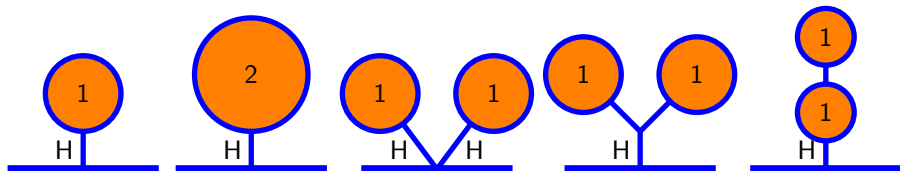
$$\frac{m_B^2(\mu)}{M_B^2} = 1 + \frac{\alpha(\mu)}{4\pi} X_B^{1,0} + \frac{\alpha(\mu)}{4\pi} \frac{\alpha_s(\mu)}{4\pi} X_B^{1,1} + \left(\frac{\alpha(\mu)}{4\pi}\right)^2 X_B^{2,0} + \dots$$

$$\frac{m_f(\mu)}{M_f} = 1 + \frac{\alpha(\mu)}{4\pi} X_f^{1,0} + \frac{\alpha(\mu)}{4\pi} \frac{\alpha_s(\mu)}{4\pi} X_f^{1,1} + \left(\frac{\alpha(\mu)}{4\pi}\right)^2 X_f^{2,0} + \dots$$

- Вычисление $Y_{1,0}, Y_{1,1}, Y_{2,0}$ для констант

$$1 + \delta_x(\mu) = 1 + \frac{\alpha(\mu)}{4\pi} Y_x^{1,0} + \frac{\alpha(\mu)}{4\pi} \frac{\alpha_s(\mu)}{4\pi} Y_x^{1,1} + \left(\frac{\alpha(\mu)}{4\pi}\right)^2 Y_x^{2,0} + \dots$$

Вклады головастиков



- Поправки к константам g, g', y_t, y_b свободны от головастиков в силу сокращений между вкладами в $\Delta\bar{r}$ и \overline{MS} массы в выражениях для $\delta_W, \delta_Z, \delta_t$ и δ_b сингулярными в пределе $M_H \rightarrow 0$
- Поправки к \overline{MS} -массам t, b, W, Z пропорциональны $1/M_H^2$ в порядках $\mathcal{O}(\alpha), \mathcal{O}(\alpha\alpha_s)$ и $1/M_H^4$ в порядке $\mathcal{O}(\alpha^2)$, головастики доминируют

$$\lambda(\mu) = 2^{-1/2} G_F M_H^2 [1 + \delta_H(\mu)]$$

- поправка к константе самодействия $\delta_H(\mu)$ пропорциональна $1/M_H^2$
- Поправки в массу H тоже пропорциональны $1/M_H^2$

СВЯЗЬ $\alpha(M_Z)$ И G_F

- 1 Вклад легких кварков извлекается из $R(s)$

[Eidelman, Jegerlehner'95]

$$\alpha(\mu) = \frac{\alpha}{1 - \Delta\alpha_l - \Delta\alpha_{\text{had}}^{(5)} - \Delta\alpha_{\text{top}}}$$

- 2 $\alpha(m_\tau)$, затем эволюция до $\mu = M_Z$, используется в PDG

[Erler'98]

- 3 Неявно из уравнения, $\delta_W(\mu), \delta_Z(\mu)$ зависят от $\alpha(\mu)$

$$\alpha(\mu) = \frac{\sqrt{2}G_F M_W^2}{\pi} [1 + \delta_W(\mu)] \left[1 - \frac{M_W^2}{M_Z^2} \frac{1 + \delta_W(\mu)}{1 + \delta_Z(\mu)} \right]$$

$$\alpha^{-1}(M_Z) = 132.233 - \underbrace{4.741}_{\alpha} + \underbrace{0.512}_{\alpha\alpha_s} + \underbrace{0.203}_{\alpha^2} = 128.208$$

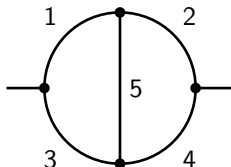
- 4 Так же можно переразложить:

$$\alpha(\mu) = \alpha_F(1 + \alpha_F X_{10}(\mu) + \alpha_F \alpha_s(\mu) X_{11}(\mu) + \alpha_F^2 X_{20}(\mu) + \dots)$$

$$\alpha^{-1}(M_Z) = 132.233 - \underbrace{4.648}_{\alpha} + \underbrace{0.641}_{\alpha\alpha_s} + \underbrace{0.127}_{\alpha^2} = 128.354.$$

Редукция двухпетлевых собственных энергий

Пример топологии с пятью пропагаторами



Известны рекуррентные соотношения для произвольного q^2 вне массовой поверхности [Tarasov'97]

$$2\nu_1 \Delta \mathbf{1}^+ F_{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4 \nu_5}^{(d)} =$$

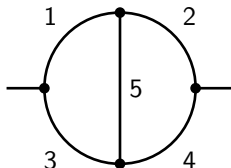
$$\left\{ (d - 2\nu_1 - \nu_3 - \nu_5) \Delta_1 + \Delta_{345} [\nu_5 \mathbf{5}^+ (\mathbf{2}^- - \mathbf{1}^-) - \nu_3 \mathbf{3}^+ \mathbf{1}^-] \right.$$

$$+ \Delta_2 [\nu_1 \mathbf{1}^+ (\mathbf{5}^- - \mathbf{2}^-) + \nu_3 \mathbf{3}^+ (\mathbf{5}^- - \mathbf{4}^-) + \nu_5 - \nu_1]$$

$$\left. + \Delta_6 [\nu_1 \mathbf{1}^+ \mathbf{3}^- + \nu_5 \mathbf{5}^+ (\mathbf{3}^- - \mathbf{4}^-) + \nu_3 - \nu_1] \right\} F_{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4 \nu_5}^{(d)}$$

Редукция двухпетлевых собственных энергий

Пример топологии с пятью пропагаторами

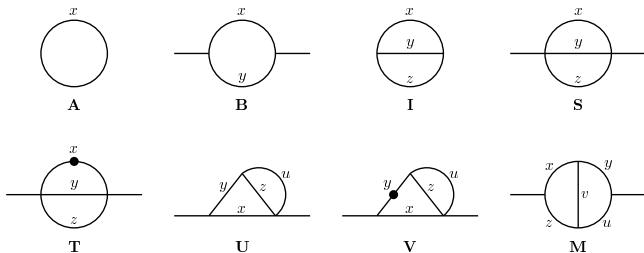


- В случае диаграмм Стандартной модели на массовой поверхности:
 $\Delta = \Delta_2 = \Delta_6 = 0, \Delta_1 = \Delta_{345}$ - кинематические детерминанты

$$F_{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4 \nu_5}^{(d)} = - \frac{[\nu_5 \mathbf{5}^+ (\mathbf{2}^- - \mathbf{1}^-) - \nu_3 \mathbf{3}^+ \mathbf{1}^-]}{(d - 2\nu_1 - \nu_3 - \nu_5)}$$

- Нежелательные соотношения с $J/(d-4)$
- Отсутствие редукции для J_{Mmm}
- Использование пакета TARCER

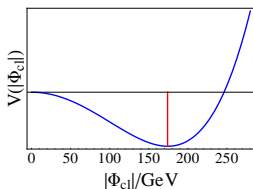
TSIL, Вычисление мастер-интегралов



- $\mathbf{A}(x), \mathbf{B}(x, y; s), \mathbf{I}(x, y, z)$ известны аналитически, $s = Q^2$, $\partial_s f = \frac{\partial f}{\partial Q^2}$

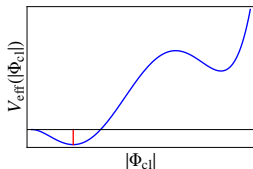
$$\begin{matrix} \partial_s \mathbf{S} \\ \partial_s \mathbf{T} \\ \partial_s \mathbf{U} \\ \partial_s \mathbf{V} \\ \partial_s \mathbf{M} \end{matrix} = \begin{pmatrix} c_{SS} & c_{TS} & 0 & 0 & 0 \\ c_{ST} & c_{TT} & 0 & 0 & 0 \\ c_{SU} & c_{TU} & c_{UU} & c_{VU} & 0 \\ c_{SV} & c_{TV} & c_{UV} & c_{VV} & 0 \\ c_{SM} & c_{TM} & c_{UM} & c_{VM} & c_{MM} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{S} \\ \mathbf{T} \\ \mathbf{U} \\ \mathbf{V} \\ \mathbf{M} \end{pmatrix} + \begin{matrix} b_{\mathbf{S}}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{I}) \\ b_{\mathbf{T}}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{I}) \\ b_{\mathbf{U}}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{I}) \\ b_{\mathbf{V}}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{I}) \\ b_{\mathbf{M}}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{I}) \end{matrix}$$

- Часть уравнений отщепляется для более простых топологий



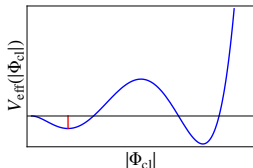
- Поправки изменяют форму классического потенциала
- При больших значениях поля, вдали от v

$$V_{\text{eff}} \sim \lambda_{\text{eff}}(\mu)\Phi^4, \quad \lambda_{\text{eff}}(\mu) \sim \lambda_{\overline{\text{MS}}}(\mu)$$

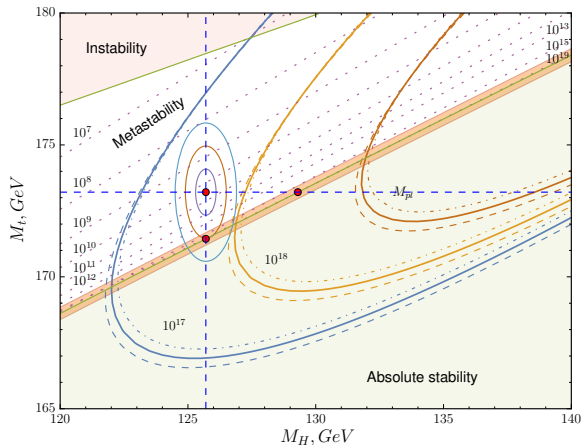


Условие стабильности переходит с $\min V_{\text{eff}}$ в $\min \lambda_{\overline{\text{MS}}}(\mu)$

- 1 $\lambda(\mu) > 0$ для всех $\mu < \Lambda$
- 2 $\lambda(\mu) = \beta_\lambda(\mu) = 0$ - граница стабильности



- 1 Мета-стабильность $\beta_\lambda(\mu) = 0, \lambda(\mu) > \lambda_{\min}(\mu)$
- 2 Нестабильность $\tau < \tau_U \approx 0.96/H_0 \sim 13.7 \times 10^9$ лет

Фазовая диаграмма Стандартной модели. $M_H - M_t$ 

- PDG:
 $M_H = 125.7(4) \text{ GeV}$
 $M_t = 173.21(87) \text{ GeV}$
 $\alpha_s(M_Z) = 0.1185(6)$
- $\lambda(\mu_{\text{fixed}}) = 0$
- $\beta_\lambda(\mu_{\text{fixed}}) = 0$
- **Стабильность**
 $\lambda(\mu) = \beta_\lambda(\mu) = 0$
- **Мета-стабильность**
 $\beta_\lambda(\mu) = 0, \lambda(\mu) = \lambda_{\min}$

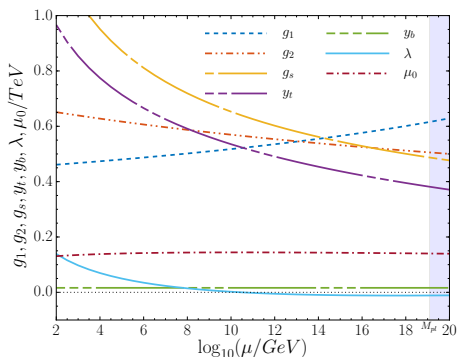
Относительные вклады при $\mu = M_t$

- Увеличивает λ , когда M_H растет

$$\beta_\lambda^{(1)} = 12\lambda^2 - 3a_t^2 + \mathcal{O}(g_1, g_2)$$

$$\lambda(\mu) = 2^{-1/2} G_F M_H^2 [1 + \delta_\lambda(\mu)]$$

$$a_t(\mu) = 2^{3/2} G_F M_f^2 [1 + \delta_{a_t}(\mu)]$$



	$\mathcal{O}(\alpha_s)$	$\mathcal{O}(\alpha_s^2)$	$\mathcal{O}(\alpha_s^3)$	$\mathcal{O}(\alpha_s^4)$	$\mathcal{O}(\alpha)$	$\mathcal{O}(\alpha\alpha_s)$	$\mathcal{O}(\alpha^2)$
$\delta_\lambda \cdot 10^4$	-	-	-	-	-114.1	-103.5	-26.2
$\delta_{a_t} \cdot 10^4$	-917	-195	-55.5	-20	25.96	-9.67	5.44

Относительные вклады при $\mu = M_t$

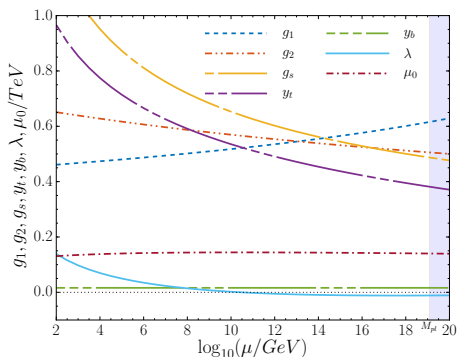
- Увеличивает λ , когда M_H растет

$$\beta_\lambda^{(1)} = 12\lambda^2 - 3a_t^2 + \mathcal{O}(g_1, g_2)$$

- Уменьшает λ , когда M_t растет

$$\lambda(\mu) = 2^{-1/2} G_F M_H^2 [1 + \delta_\lambda(\mu)]$$

$$a_t(\mu) = 2^{3/2} G_F M_f^2 [1 + \delta_{a_t}(\mu)]$$



	$\mathcal{O}(\alpha_s)$	$\mathcal{O}(\alpha_s^2)$	$\mathcal{O}(\alpha_s^3)$	$\mathcal{O}(\alpha_s^4)$	$\mathcal{O}(\alpha)$	$\mathcal{O}(\alpha\alpha_s)$	$\mathcal{O}(\alpha^2)$
$\delta_\lambda \cdot 10^4$	-	-	-	-	-114.1	-103.5	-26.2
$\delta_{a_t} \cdot 10^4$	-917	-195	-55.5	-20	25.96	-9.67	5.44

Положения выносимые на защиту

- 1 Вычислены все бета-функции констант связи и аномальные размерности полей в Стандартной модели
- 2 Разработан эффективный аппарат автоматизированных вычислений функций ренормгруппы в трехпетлевом приближении
- 3 Получены двухпетлевые соотношения для начальных условий всех бегущих констант Стандартной модели в терминах параметров извлекаемых из эксперимента
- 4 Получен полный набор инструментов для NNLO анализа поведения Стандартной модели в области высоких энергий и определения границ стабильности
- 5 Все полученные результаты доступны в виде программных кодов находящихся в свободном доступе

Публикации I

- [1] Bagaev, A.A. and Bednyakov, A.V. and Pikelner, A.F. and Velizhanin, V.N. The 16th moment of the three loop anomalous dimension of the non-singlet transversity operator in QCD. *Phys.Lett.*, B714:76–79, 2012.
- [2] Bednyakov, A.V. and Pikelner, A.F. and Velizhanin, V.N. Anomalous dimensions of gauge fields and gauge coupling beta-functions in the Standard Model at three loops. *JHEP*, 1301:017, 2013.
- [3] Bednyakov, A.V. and Pikelner, A.F. and Velizhanin, V.N. Higgs self-coupling beta-function in the Standard Model at three loops. *Nucl.Phys.*, B875:552–565, 2013.
- [4] Bednyakov, A.V. and Pikelner, A.F. and Velizhanin, V.N. Yukawa coupling beta-functions in the Standard Model at three loops. *Phys.Lett.*, B722:336–340, 2013.
- [5] Bednyakov, A.V. and Pikelner, A.F. and Velizhanin, V.N. Three-loop Higgs self-coupling beta-function in the Standard Model with complex Yukawa matrices. *Nucl.Phys.*, B879:256–267, 2014.

Публикации II

- [6] Bednyakov, A.V. and Pikelner, A.F. and Velizhanin, V.N. Three-loop SM beta-functions for matrix Yukawa couplings. *Phys.Lett.*, B737:129–134, 2014.
- [7] Kniehl, Bernd A. and Pikelner, Andrey F. and Veretin, Oleg L. Two-loop electroweak threshold corrections in the Standard Model. *Nucl.Phys.*, B896:19–51, 2015.