Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования Московской области
«Международный университет природы, общества и человека «Дубна»
(Университет «Дубна»)
Факультет естественных и инженерных наук

Кафедра Ядерной физики

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС ДИСЦИПЛИНЫ

«ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ»

Для направления **010700.62 Физика**

Дубна, 2011

УМК разработан к.ф.-м.н., доцентом А. С. Деникиным

Протокол заседания кафедры «Ядерная физика»

№ _____ от «____» ________________ 20___ г.

Заведующий кафедрой _______________________________ /Ю.Ц. Оганесян/

Согласовано

Декан факультета ____________________/ А.С. Деникин /

«____» ________________ 20___ г.

Проректор по учебной работе ____________________/Моржухина С.В. /

(подпись)

«____» ________ 201__ г.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА.

Курс «Численное решение уравнений математической физики» ориентирован на студентов 4-ого курса физических специальностей. Для освоения данного курса студенты должны прослушать курсы «Методы математической физики» и «Численные методы и математическое моделирование», а также «Технология программирования», т.е. необходимо наличие у студентов навыков программирования на языках высокого уровня (C++, Visual Basic, FORTRAN и т.п.). Занятия проводятся в аудитории оборудованной компьютерами с установленным необходимым программным обеспечением.

Излагаемый курс занятий ставит своей целью дать студенту практические навыки численного решения основных уравнений математической физики; познакомить студентов с существующими алгоритмами решения дифференциальных уравнений в частных производных; уметь сравнить их эффективность и точность; на практике получить опыт исследования сходимости и устойчивости схемы решения; умение выбрать оптимальный способ решения сложной физической задачи.

При разработке программы особое внимание уделялось тому, чтобы ее содержание было ориентировано на использование современных технологий в области вычислительной техники, используемой в современной научно-исследовательской работе.

УЧЕБНО-ТЕМАТИЧЕСКИЙ (КАЛЕНДАРНЫЙ) ПЛАН ДИСЦИПЛИНЫ
ГОУ ВПО Московской области «Международный университет ПРИРОДЫ, ОБЩЕСТВА И ЧЕЛОВЕКА «ДУБНА»
Календарный план (РАБОЧАЯ ПРОГРАММА)

Курс 3 семестр 6 2010/2011учебного года

Виды и содержание учебных занятий										Самостоятельная работа студентов			
Номер и дата недели	Лекции (....1....час. в неделю)*						Практические занятия (…1…. час в неделю)	Лабораторные работы (час. в неделю)					
	В аудитории				Самостоятельное изучение								
	Дата лекции	час	Содержание	Исп. ТСО	Содержание и раздел учебника (глава, параграф)	Форма контроля		№	название	Вид задания	Содержание	часы	форма контроля
1 нед		2	Линейное уравнение переноса. Схемы бегущего счета. Методы анализа устойчивости разностных схем и сходимости решения.	КП	[1] Глава 8, § 2. Материалы лекций	КО	Реализация схем бегущего счета для решения линейное уравнение переноса в виде компьютерного кода.						
2 нед		2			[1] Глава 8, § 2. Материалы лекций	КО	Реализация схем бегущего счета для решения линейное уравнение переноса в виде компьютерного кода.				Изучение материалов лекции. Доработка компьютерного кода для решения линейного уравнения переноса. Схемы бегущего счета.	2	
3 нед		2	Уравнения колебаний упругой струны под действием вынуждающей силы. Явная разностная схема «крест». Неявная разностная схема для одномерного уравнения колебаний.	КП	[1] Глава 8, § 3. п.1. Материалы лекций	КО							
4 нед		2			[1] Глава 8, § 3. п.1. Материалы лекций	КО	Реализация явной разностной схемы «крест» решения уравнения колебаний упругой струны под действием вынуждающей силы.				Изучение материалов лекции. Доработка компьютерного кода для решения уравнения колебаний упругой струны под действием вынуждающей силы. Явная схема.	2	
5 нед		2			[1] Глава 8, § 3. п.1. Материалы лекций	КО	Неявная разностная схема для одномерного уравнения колебаний.				Изучение материалов лекции. Доработка компьютерного кода для решения уравнения колебаний упругой струны под действием вынуждающей силы. Неявная схема.	1	
6 нед		2	Уравнения колебаний упругой круглой мембраны под действием вынуждающей силы.		[1] Глава 8, § 3. п.2. Материалы лекций	КО	Обобщение на случай уравнения колебаний упругой круглой мембраны под действием вынуждающей силы.						
7 нед		2			[1] Глава 8, § 3. п.2. Материалы лекций	КО	Обобщение на случай уравнения колебаний упругой круглой мембраны под действием вынуждающей силы.				Изучение материалов лекции. Доработка компьютерного кода для решения уравнения колебаний упругой круглой мембраны под действием вынуждающей силы.	1	
8 нед		2	Численное решение одномерного уравнения Пуассона. Задача Дирихле для одномерного уравнения Пуассона.	КП	[1] Глава 8, § 3. п.2. Материалы лекций	КО	Численное решение одномерного уравнения Пуассона. Задача Дирихле для одномерного уравнения Пуассона.				Изучение материалов лекции. Доработка компьютерного кода для решения одномерного уравнения Пуассона.	2	
9 нед		2	Численное решение одномерного уравнения Пуассона. Задача Неймана для одномерного уравнения Пуассона.	КП	[1] Глава 8, § 3. п.2. Материалы лекций	КО	Численное решение одномерного уравнения Пуассона. Задача Неймана для одномерного уравнения Пуассона.						
10 нед		2			[1] Глава 8, § 3. п.2. Материалы лекций	КО	Численное решение одномерного уравнения Пуассона. Задача Дирихле и задача Неймана для одномерного уравнения Пуассона.						
11 нед		2	Двумерное уравнение Пуассона для задачи о стационарном распределении температуры. Итерационный метод релаксаций Якоби.	КП	[1] Глава 8, § 3. п.4. Материалы лекций	КО	Численное решение двумерного уравнения Пуассона с помощью итерационного метода (метод релаксации Якоби).				Изучение материалов лекции. Доработка компьютерного кода для решения двумерного уравнение Пуассона.	1	
		2			[1] Глава 8, § 3. п.4. Материалы лекций	КО	Численное решение двумерного уравнения Пуассона с помощью итерационного метода (метод релаксации Якоби).						

12 нед		2	Одномерная задача теплопроводности. Неявные схемы. Явные схемы Ричардсона и Дюфорта-Франкеля. Наилучшая схема.	КП	Материалы лекций	КО	Одномерная задача теплопроводности. Неявные схемы. Явные схемы Ричардсона и Дюфорта-Франкеля. Наилучшая схема.				Изучение материалов лекции. Доработка компьютерного кода решения одномерной задачи о теплопроводности. Явная, неявная и наилучшая схемы.	1	
13 нед		2	Многомерное уравнение теплопроводности. Продольно-поперечная схема. Метод Монте-Карло.	КП	Материалы лекций	КО	Моделирование распространения тепла в стержне на основе уравнение теплопроводности с переменными коэффициентом теплопроводности и плотностью источников.				Изучение материалов лекции. Доработка кода для решения одномерного уравнения теплопроводности.	1	
14 нед		2	Численное решение нестационарного одномерного уравнения Шредингера. Определение коэффициентов прохождения и отражения.	КП	Материалы лекций	КО	Реализация продольно-поперечной схемыдля решения двумерного уравнения теплопроводности.				Изучение материалов лекции. Доработка кода для продольно-поперечной схемы решения двумерного уравнения теплопроводности.	1	
15 нед		2	Методы решения стационарного уравнения Шрёдингера методом Нумерова.	КП	Материалы лекций	КО	Численное решение нестационарное уравнение Шрёдингера. Моделирование проницаемости одномерного барьера.						
16 нед		2				КО	Численное решение стационарного уравнения Шрёдингера методом Нумерова. Поиск связанных состояний в короткодействующем центральном потенциале баллистическим методом (одномерный случай).				Изучение материалов лекции. Доработка кода для численного решения стационарного уравнения Шрёдингера методом Нумерова.	1	
17 нед		2					Зачетная неделя.				Подготовка к зачету.	1	
18нед		2	Защита курсовых работ										
											Всего	14	
										КТП	Всего		

- Числитель - аудиторные занятия, знаменатель - самостоятельное изучение
- Учебная литература

№	Название, автор, год издания	Примечания	А - задание к практическим занятиям Л - задание к лабораторным занятиям К - контрольные задания Т - типовой расчет П - курсовой проект КП – компьютерная презентация КО – контрольный опрос
1	Турчак Л.И., Плотников П.В. Основы численных методов: Учебное пособие для вузов. 2-е изд.,перераб.и доп. М.: Физматлит, 2005.		
2	Бахвалов Н. С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М., Численные методы: Учебное пособие для вузов. 4-е изд. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006.		

Дата .... Лектор А.С. Деникин Утверждаю:

практ. занятия А.С. Деникин Зав.кафедрой ________________________ (Ю.Ц. Оганесян)

Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования Московской области «Международный университет природы, общества и человека «Дубна»

(университет «Дубна»)

Факультет естественных и инженерных наук

Кафедра «Ядерная физика»

УТВЕРЖДАЮ
проректор по учебной работе

____________ С.В. Моржухина

«_____»___________20   г.

ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

«ЧИСЛННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕКОЙ ФИЗИКИ»

по направления **010700.62 Физика**

Форма обучения: очная

Уровень подготовки: *бакалавр*

Курс (семестр): 4курс, 7 семестр

г. Дубна, 2011 г.

Автор программы:
Деникин А.С.,
кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры «Ядерная физика» ____________________________________

Программа составлена в соответствии с Государственным образовательным стандартом высшего профессионального образования и учебным планом по направлению подготовки 010700.62 Физика

Программа рассмотрена на заседании кафедры «Ядерная физика»

Протокол заседания № _____ от «____» ________________ 20____ г.

Заведующий кафедрой _____________________ / Оганесян Ю.Ц. /

СОГЛАСОВАНО

Декан факультета естественных и инженерных наук __________________ / Деникин А.С. /

«____» _________ 20__ г.

Рецензент:

____

(Фамилия, имя, отчество)

____

(ученая степень, звание)

____

(должность, кафедра или иное подразделение, организация)

____

Руководитель библиотечной системы __________________ / В. Г. Черепанова /

СОДЕРЖАНИЕ

Выписка из Государственного образовательного стандарта

Выписка из Федерального государственного образовательного стандарта ВПО утвержденного приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от 17.03.2000 № 176 по направлению 010700 «Физика», степень – бакалавр физики.

Индекс	Наименование дисциплины и их основные разделы	часы
ОПД.В.	Дисциплиныь и курсы по выбору студента, устанавливаемые Вузом	100

1. Аннотация

Тип курса – дисциплина по выбору ОПД.В.
Год обучения – 8
Семестр – 7

Место курса в профессиональной подготовке бакалавра

Курс «Численное решение уравнений математической физики» ориентирован на студентов 4-ого курса физических специальностей. Для освоения данного курса студенты должны прослушать курсы «Методы математической физики» и «Численные методы и математическое моделирование», а также «Технология программирования», т.е. необходимо наличие у студентов навыков программирования на языках высокого уровня (С++, Visual Basic, FORTRAN и т.п.).

Излагаемый курс занятий ставит своей целью дать студенту практические навыки численного решения основных уравнений математической физики; познакомить студентов с существующими алгоритмами решения дифференциальных уравнений в частных производных; уметь сравнить их эффективность и точность; на практике получить опыт исследования сходимости и устойчивости схемы решения; умение выбрать оптимальный способ решения сложной физической задачи. Полученные знания будут востребованы при написании дипломной работы бакалавра, а также в ряде специальных курсов магистерской программы по направлению «Физика»

Формы работы студентов

Форма работы студентов в ходе изучения дисциплины предусмотрена в виде семинарских занятий и выполнения домашних индивидуальных заданий.

Самостоятельная работа студентов

Самостоятельная работа студентов, предусмотренная учебным планом в объеме 14 часов, выполняется в ходе семестра в форме расчетно-графической работы по индивидуальному заданию.

Виды текущего контроля

Проверка домашних заданий, защита результатов выполнения расчетно-графической работы.

Форма итогового контроля

Зачет по теоретической части и по практическим работам.

2. Цель и задачи дисциплины

Целью курса «Численное решение уравнений математической физики» является подготовка бакалавров по направлению «Физика» к разработке и применению с помощью компьютеров вычислительных алгоритмов решения дифференциальных уравнений в частных производных, к которым, в частности, относятся уравнения эллиптического, параболического и гиперболического типа. Предлагаемые практические задания формулируются в форме задач, описывающих определенный физический процесс. В результате студент приобретает навыки и опыт решения поставленных задач в рамках конкретной математической модели.

3. Требования к уровню освоения содержания дисциплины.

В ходе изучения дисциплины студенты получают:

- знания методов построения и исследования разностных схем для дифференциальных уравнений в частных производных; знание методов и алгоритмов решения систем разностных уравнений.
- навыки приближенного решения краевых задач математической физики численными методами; навыки разработки программного обеспечения для численного решения задач математической физики.

В результате освоения материала курса бакалавр должен

– Компетентно ориентироваться в методах решения основных уравнений математической физики;

– Уметь построить разностную схему для решения данного уравнения;

– Сделать выводы об устойчивости и сходимости решения выбранной разностной схемы к точному решению исходной дифференциальной задачи;

– Уметь разработать алгоритм на основе предложенной разностной схемы;

– Уметь реализовать предложенный алгоритм в виде компьютерного кода.

4. **Объём дисциплины и виды учебной работы**:

Вид занятий	Всего часов	Семестр
	50	7
Аудиторные занятия:		
Лекции		
Практические занятия (ПЗ)	36	36
Семинары (С)		
Лабораторные работы (ЛР)		
Самостоятельная работа:	14	14
Курсовой проект (работа)		
Расчетно-графические работы	14	14
Реферат		
Вид итогового контроля (зачет, экзамен)	Курсовая работа	Курсовая работа

5. Разделы (темы) дисциплины, содержание и виды занятий

№ п/п	Раздел дисциплины	ПЗ	ЛР	Сам. работа
1	Уравнение переноса.	6		3
2	Уравнения гиперболического типа: уравнения колебаний.	10		3
3	Уравнения эллиптического типа: уравнение Пуассона.	10		4
4	Уравнения параболического типа: уравнение теплопроводности.	10		4
	Итого	36		14

Содержание разделов дисциплины:

1. Уравнение переноса

1.1 Задачи и примеры использования уравнения переноса.
1.2 Схемы бегущего счета.
1.3 Методы анализа устойчивости разностных схем.
1.4 Методы анализа сходимости решения.
1.5 Обобщение на многомерный случай.

2. Уравнения гиперболического типа: уравнение колебаний

2.1 Задачи и примеры использования уравнений гиперболического типа.
2.2 Разностная схема «крест».
2.3 Неявная разностная схема для одномерного уравнения колебаний.
2.4 Обобщение явной схемы на случай двумерного уравнения колебаний.

3. Уравнения эллиптического типа: уравнение Пуассона

3.1 Задачи и примеры использования уравнений эллиптического типа.
3.2 Задача Дирихле для одномерного уравнения Пуассона.
3.3 Задача Неймана для одномерного уравнения Пуассона.
3.4 Двумерное уравнение Пуассона для задачи о стационарном распределении температуры. Метод релаксаций.

4. Уравнения параболического типа: уравнение теплопроводности

4.1 Задачи и примеры использования уравнений параболического типа.
4.2 Одномерная задача теплопроводности. Неявные схемы. Явные схемы Ричардсона и Дюфорта-Франкеля. Наилучшая схема.

4.3 Многомерное уравнение теплопроводности. Продольно-поперечная схема. Метод Монте-Карло.
4.4 Нестационарное уравнение Шрёдингера. Моделирование проницаемости одномерного барьера.

Практические занятия (семинары)

№ п/п	Раздел дисциплины	Наименование практических занятий (семинаров)
1.	Раздел 1: Уравнение переноса	Реализация схем бегущего счета для решения линейное уравнение переноса в виде компьютерного кода.
2.	Раздел 1: Уравнение переноса	Реализация схем бегущего счета для решения линейное уравнение переноса в виде компьютерного кода.
3.	Раздел 2: Уравнения гиперболического типа: уравнение колебаний	Реализация явной разностной схемы «крест» решения уравнения колебаний упругой струны под действием вынуждающей силы.
4.	Раздел 2: Уравнения гиперболического типа: уравнение колебаний	Неявная разностная схема для одномерного уравнения колебаний.
5.	Раздел 2: Уравнения гиперболического типа: уравнение колебаний	Обобщение на случай уравнения колебаний упругой круглой мембраны под действием вынуждающей силы.
6.	Раздел 3: Уравнения эллиптического типа: уравнение Пуассона	Численное решение одномерного уравнения Пуассона. Задача Дирихле и задача Неймана для одномерного уравнения Пуассона.
7.	Раздел 3: Уравнения эллиптического типа: уравнение Пуассона	Численное решение двумерного уравнения Пуассона с помощью итерационного метода (метод релаксации Якоби).
8.	Раздел 4: Уравнения параболического типа: уравнение теплопроводности	Одномерная задача теплопроводности. Неявные схемы. Явные схемы Ричардсона и Дюфорта-Франкеля. Наилучшая схема.
9.	Раздел 4: Уравнения параболического типа: уравнение теплопроводности	Моделирование распространения тепла в стержне на основе уравнение теплопроводности с переменными коэффициентом теплопроводности и плотностью источников.
10.	Раздел 4: Уравнения параболического типа: уравнение теплопроводности	Многомерное уравнение теплопроводности. Продольно-поперечная схема. Метод Монте-Карло.
11.	Раздел 4: Уравнения параболического типа	Нестационарное уравнение Шрёдингера. Моделирование проницаемости одномерного барьера.
12.	Раздел 3: Уравнения эллиптического типа	Решение стационарного уравнения Шрёдингера методом Нумерова. Состояния рассеяния.
13.	Раздел 3: Уравнения эллиптического типа	Решение стационарного уравнения Шрёдингера методом Нумерова. Поиск связанных состояний в короткодействующем центральном потенциале баллистическим методом (одномерный случай).

6. Учебно-методическое обеспечение дисциплины

Основная литература:

1. Турчак Л.И., Плотников П.В. Основы численных методов: Учебное пособие для вузов. 2-е изд.,перераб.и доп. М.: Физматлит, 2005.
2. Бахвалов Н. С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М., Численные методы: Учебное пособие для вузов. 6-е изд. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008.

Дополнительная литература:

1. Калиткин Н.Н., Численные методы, М.: «Наука», 1978.
2. Марчук Г.И., Методы вычислительной математики, М.: Наука, 1989.

Справочные ресурсы и материалы в Интернет:

1. http://www.srcc.msu.su/num_anal/

2. http://algolist.manual.ru/
3. http://alglib.manual.ru/

7. Технические и электронные средства обучения

В ходе изучения курса предусмотрено использование компьютера для выполнения расчетов и визуализации полученных данных с применением программного пакета Borland CBuilder.

8. Материально-техническое обеспечение дисциплины

(указываются специализированные лаборатории и классы, основные приборы, установки)

Практические задания выполняются в аудиториях оборудованных персональными компьютерами с доступом в Интернет, а также отдельным компьютером для преподавателя снабженным проектором.

9. Формы контроля

Перечень примерных контрольных вопросов и заданий для самостоятельной работы:

1. Что включает в себя полная постановка задачи для уравнений в частных производных?
2. Какие задачи для уравнений в частных производных называются стационарными, а какие – нестационарными? Какие дополнительные условия надо для них задать?
3. Какая задача для уравнений в частных производных называется корректно поставленной?
4. В чем заключается метод сеток для решения уравнений в частных производных?
5. Приведите конечно-разностные формулы для частных производных $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ для функции двух производных $u(x, y)$ в произвольной точке (i, j) сетки с помощью центральных разностей.
6. В чем заключается аппроксимация дифференциальной задачи разностной схемой?
7. Какая разностная схема для уравнений в частных производных называется устойчивой?
8. При каких условиях решение разностных уравнений сходится к решению уравнений с частными производными с соответствующими им дополнительными условиями?
9. Напишите явную разностную схему для уравнения теплопроводности и опишите ее свойства.
10. Задано разностное уравнение $y_{n+1} + p_n y_n = q_n$, определенное на всей числовой оси и удовлетворяющее условию $y_k = d$. Как найти решение этого уравнения?

Примеры тем расчетно-графических работ для курсовых работ.

Задание № 1. Линейное уравнение переноса.

Простейшим дифференциальным уравнением в частных производных является уравнение переноса

$$\frac{\partial U(x,t)}{\partial t} + v\frac{\partial U(x,t)}{\partial x} = \varphi(x,t),$$

где величина v есть скорость переноса, $\varphi(x,t)$ – функция источника. Уравнение , в частности, описывает процесс распространения примеси в потоке жидкости. В этом случае функция $U(x,t)$ определяет концентрацию примеси в точке x в момент времени t, v – скорость движения жидкости, а $\varphi(x,t)$ – функция источника примеси.

Решить смешанную задачу Коши с начальным условием

$$U(t=0,x) = f(x),$$

и левым граничным условием

$$U(x=0,t) = 0.$$

Вид функции $f(x)$ определяет преподаватель.

Для решения уравнения переноса использовать схемы бегущего счета. Шаблоны для построения разностных схем показаны на рисунке 1.1.

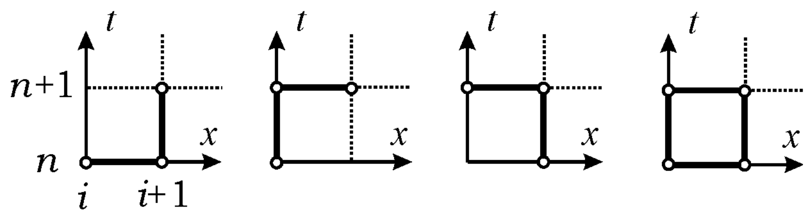


Рис. 1.1. Схемы бегущего счета.

В частности, для крайней левой схемы уравнение может быть преобразовано к разностному виду

$$\frac{1}{\tau}\left(U_{i+1}^{n+1} - U_{i+1}^{n}\right) + \frac{v}{h}\left(U_{i+1}^{n} - U_{i}^{n}\right) = \varphi\left(x_i + \tfrac{1}{2}h, t_n + \tfrac{1}{2}\tau\right)$$

<u>Реализовать</u> в компьютерной программе возможность выбора разностной схемы. *<u>Проверить</u>*, как ведут себя разные схемы при расчетах с разными шагами по времени и координате. *<u>Сравнить</u>* решения, полученные для различных схем расчета. Результаты работы *<u>оформить</u>* в виде краткого отчета (1-2 стр.).

<u>Задание № 2.</u> <u>Уравнение Пуассона.</u>

Уравнение Пуассона – эллиптическое дифференциальное уравнение в частных производных, которое, в частности, описывает

- электростатическое поле,
- стационарное поле температуры,
- поле давления,
- поле потенциала скорости в гидродинамике.

В двумерном случае уравнение Пуассона имеет следующий вид

$$\frac{\partial^2 T(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T(x,y)}{\partial y^2} = -f(x,y).$$

Функции, входящие в уравнение , будем интерпретировать следующим образом: функция $T(x,y)$ – стационарное распределение температуры на плоскости с источниками тепла, интенсивность которых описывается функцией $f(x,y)$.

Уравнение может быть преобразовано к разностной форме с помощью шаблона «крест», изображенной на рисунке 2.1.

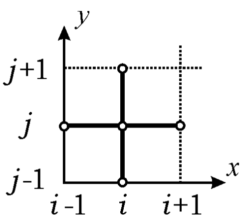


Рис. 2.1. Схема «крест».

Разностная схема для уравнения Пуассона, основанная на схеме «крест», является неявной. Для ее реализации требуется определить 4-ре граничных условия

$$T(x=0,y) = \varphi_1(y),$$

$$T(x,y=0) = \varphi_2(x),$$

$$T(x=L,y) = \varphi_3(y),$$

$$T(x,y=L) = \varphi_4(x),$$

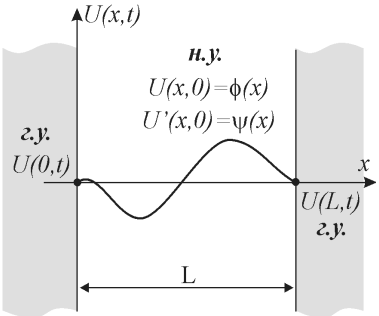
и решить систему линейных уравнений.

<u>Реализовать</u> изложенную схему решения уравнения Пуассона с нулевыми граничными условиями $\varphi_i = 0$. Для решения использовать итерационный метод релаксации Якоби. Уравнение в этом случае удобно переписать в виде

$$\left(\frac{2}{h_x^2} + \frac{2}{h_y^2}\right) T_{ij}^{\alpha} = \frac{1}{h_x^2}\left(T_{i-1j}^{\alpha-1} + T_{i+1j}^{\alpha-1}\right) + \frac{1}{h_y^2}\left(T_{ij-1}^{\alpha-1} + T_{ij+1}^{\alpha-1}\right) + f_{ij}$$

где α - номер итерации, h_x и h_y - шаги разностной сетки, $T_{ij} = T(x_i, y_j)$ - значение искомой функции в узлах разностной сетки. Для контроля точности итерационного счета использовать величину невязки итерационного решения $\delta_\alpha = \sum_{ij} \left| T_{ij}^{\alpha} - T_{ij}^{\alpha-1} \right|$. Результаты работы *оформить* в виде краткого отчета (1-2 стр.).

Задание № 3. Решение одномерного волнового уравнения. Колебание упругой струны.



Рассмотрим одномерное волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2} + f(x,t),$$

где функция $U(x,t)$ определяет, например, положение струны в момент времени t, а $f(x,t)$ внешняя вынуждающая сила. В этом случае

$$a^2 = \frac{T}{\rho},$$

где T – натяжение струны, а ρ – ее линейная плотность. Уравнение колебаний является гиперболическим.

Предлагается *решить* смешанную задачу для свободных колебания ($f(x,t) = 0$) струны длины L с закрепленными концами. Таким образом, считаются заданными следующие условия:

1. начальные условия:

$$U(x, t=0) = \varphi(x),$$
$$U'(x, t=0) = \psi(x);$$

2. граничные условия:

$$U(x=0, t) = 0,$$
$$U(x=L, t) = 0.$$

Показать, что уравнению соответствует разностная схема

$$u_i^{n+1} = 2(1-\lambda)u_i^n + \lambda(u_{i+1}^n + u_{i-1}^n) - u_i^{n-1},$$

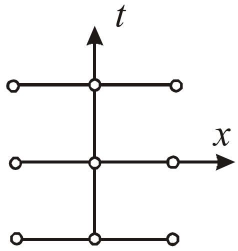
где $\lambda = a^2\tau^2/h^2$, τ и h шаги сетки по времени и координате, соответственно. Схема – трехслойная, т.е. для нахождения решения в момент времени t требуется знать решение при $t\text{-}h$ и $t\text{-}2h$. Поэтому расчет по формуле можно начать только со второго слоя по времени. А решения на нулевом и первом слоях должны быть определены из начальных условий. На нулевом слое решение задано первым выражением в .

Для нахождения решения на первом слое, *разложить* в ряд Тейлора по переменной t функцию $U(x, t=\tau)$ в окрестности $t=0$. *Получить* решение на первом слое u_i^1, оставляя в разложении члены 1-ого по τ порядка. *Получить* решение на первом слое u_i^1, оставляя в разложении члены 2-ого по τ порядка (для определения второй производной по времени воспользоваться уравнение .

Написать компьютерный код, реализующий решение волнового уравнения с заданными выше условиями. *Сравнить* результаты работы программы для разных вариантов определения решения на 1ом слое. *Исследовать* устойчивость разностной схемы и определить при каком значении величины λ данная разностная схема устойчива. Результаты работы *оформить* в виде краткого отчета (1-2 стр.).

Задание № 4. Решение одномерного волнового уравнения. Неявная схема.

Используем для решения задачи безусловно устойчивую неявную схему. Для этого, используя шаблон, показанный на рисунке, построим разностную схему с весами при пространственных производных на разных слоях



$$\frac{1}{\tau^2}(y_i^{n+1} - 2y_i^n + y_i^{n-1}) = \Lambda\left[\sigma y^{n+1} + (1-2\sigma)y^n + \sigma y^{n-1}\right] + f_i,$$

$$\Lambda y^n = \frac{a^2}{h^2}(y_{i+1}^n - 2y_i^n + y_{i-1}^n).$$

Для безусловной сходимости веса в разностной схеме должны удовлетворять неравенству $\frac{1}{4} \le \sigma \le \frac{1}{2}$.

Показать, что полученная разностная схема приводить к системе линейных алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей. Определить коэффициенты этой матрицы и решить полученную систему методом прогонки. Результаты сравнить с полученными в упражнении 2.1. Численно продемонстрировать устойчивость обоих схем. Результаты работы оформить в виде краткого отчета (1-2 стр.).

Задание № 5. Решение двумерного волнового уравнения.

Самостоятельно *разработать* метод решения уравнения колебаний для двумерной мембраны. Выбор формы мембраны, начальных и граничных условий произволен. Проверить метод решения на интуитивно понятном примере. Продемонстрировать устойчивость выбранного метода. Результаты работы оформить в виде краткого отчета (1-2 стр.).

Задание № 6. Решение одномерного уравнения Шрёдингера. Дискретный спектр собственных значений.

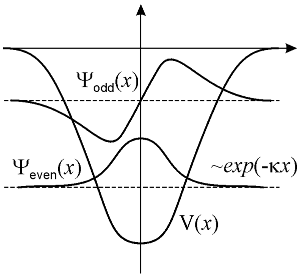


Рис. 5.1.

Цель и задание: Определить собственные значения и собственные функции гамильтониана H следующего уравнения Шредингера

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}+V(x)\right]\Psi(x)=E\,\Psi(x),$$

где m – масса частицы, $V(x)$ – произвольный потенциал внешнего поля, E – энергия состояния, $\Psi(x)$ - искомая волновая функция.

Для решения уравнения необходимо определить граничные условия. Для короткодействующего потенциала можно записать, что

$$\Psi(x\to\infty)\to Ce^{-\kappa x},$$

где C – некоторая константа, а $\kappa=\sqrt{2m|E|/\hbar^2}$ - волновое число.

Волновая функция вблизи нуля может быть четной или нечетной функцией координаты (см. рисунок 1). При $x\to 0$ волновая функция для собственных состояний должна удовлетворять соотношениям

$$\Psi_{odd}(x\to 0)\to 0,\qquad \Psi'_{odd}(x\to 0)\to const,$$

$$\Psi_{even}(x\to 0)\to const,\qquad \Psi'_{even}(x\to 0)\to 0.$$

Таким образом, собственные значения гамильтониана могут быть найдены интегрированием уравнения Шредингера «вперед» (стартуя из точки $x=0$) и «назад» (стартуя из точки $x=X_{max}\to\infty$) с последующим требованием равенства логарифмических производных этих решений в точке сшивки X_{match}. Величины X_{max} и X_{match} подбираются из «физических соображений».

1. Реализовать предложенную схему решения уравнения Шредингера, используя метод Нумерова для численного решения (см. ниже).
2. Обосновать выбор величин X_{max} и X_{match}.
3. Проверить работоспособность кода для точно решаемого гамильтониана.
4. Проверить свойство ортогональности полученных решений.
5. Результаты работы оформить в виде краткого отчета (1-2 стр.).

Дополнение: Методом Нумерова применяется для решения дифференциальных уравнений вида

$$y''(x)=F(x,y).$$

Для этого используется следующая разностная схема

$$y_{n+1}-2y_n+y_{n-1}=\frac{h^2}{12}\left(F_{n+1}+10F_n+F_{n-1}\right),$$

где $y_i\equiv y(x_i)$ и $F_i\equiv F(x_i,y(x_i))$, величина h - шаг разностной схемы.

Задание № 7. Нестационарная задача о рассеянии на одномерном прямоугольно барьере.

Запишем нестационарное уравнение Шрёдингера:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t)=\hat{H}(x,t)\psi(x,t),$$

где в общем случае предполагается, что оператор Гамильтона $\hat{H}=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+U(x,t)$ может зависеть от времени. В дальнейшем, однако будем рассматривать консервативную систему, полная энергия которой не зависит от времени. Опираясь на уравнение можно записать его формальное решение в виде

$$\psi(x,t+\Delta t)=\exp\left[-\frac{i}{\hbar}\Delta t\hat{H}\right]\psi(x,t),$$

где экспонента в правой части соотношения есть не что иное, как оператор эволюции. Решение задачи удобно искать на дискретном наборе точек по времени и координате

$$x_i \in [x_0, x_N], t_j \in [t_0, t_M],$$

то есть $i = 0,\ldots,N$, а $j = 0,\ldots,M$ и $\psi(x_i, t_j) = \psi_i^j$. Шаг сетки выберем постоянным как по координате δ, так и по времени τ. Будем считать, что в момент времени t_0 волновая функция задана начальным условием

$$\psi_i^0 = f(x_i),$$

а условия

$$\psi_0^j = g_0, \psi_N^j = g_N,$$

определяют граничные условия на краях интервала.

Используем метод конечных разностей для перехода от дифференциального уравнения к системе линейных уравнений. Для этого перепишем соотношение в симметричной форме

$$\exp\left[+\frac{i}{2\hbar}\tau\hat{H}\right]\psi_i^{j+1} = \exp\left[-\frac{i}{2\hbar}\tau\hat{H}\right]\psi_i^j$$

и используем разложение Тейлора для операторов эволюции справа и слева

$$\left[1 + \frac{i}{2\hbar}\tau\hat{H}\right]\psi_i^{j+1} = \left[1 - \frac{i}{2\hbar}\tau\hat{H}\right]\psi_i^j.$$

Выразим оператор Гамильтона, заменяя производную по координате с помощью конечных разностей,

$$\psi_i^{j+1} - \frac{i\tau}{2\hbar\delta^2}\frac{\hbar^2}{2m}\left(\psi_{i+1}^{j+1} - 2\psi_i^{j+1} + \psi_{i-1}^{j+1}\right) + \frac{i\tau}{2\hbar}U_i\psi_i^{j+1} = \psi_i^j + \frac{i\tau}{2\hbar\delta^2}\frac{\hbar^2}{2m}\left(\psi_{i+1}^j - 2\psi_i^j + \psi_{i-1}^j\right) - \frac{i\tau}{2\hbar}U_i\psi_i^j.$$

Группируя слагаемые, и вводя константу $\lambda = 4m\delta^2/\tau\hbar$, перепишем уравнение в более удобной форме

$$\psi_{i+1}^{j+1} + \left(i\lambda - 2 - \delta^2 u_i\right)\psi_i^{j+1} + \psi_{i-1}^{j+1} = -\psi_{i+1}^j + \left(i\lambda + 2 + \delta^2 u_i\right)\psi_i^j - \psi_{i-1}^j,$$

где $u_i = \frac{2m}{\hbar^2}U_i$. Таким образом, соотношение дает нам систему $N-1$ линейных уравнений относительно $N+1$ неизвестных ψ_i^{j+1} с матрицей трехдиагональной формы. Дополняя систему граничными условиями , получим полностью определенную задачу.

<u>*Задание 1.*</u> Решить систему методом прогонки. Нарисовать на экране компьютера эволюцию волновой функции $\psi(x,t)$ во времени, выбирая в качестве начального распределения гауссов волновой пакет

$$f(x) = A\exp[ikx]\exp\left[-\frac{(x - X_0)^2}{2\sigma^2}\right],$$

где A – нормировочная константа, X_0 – положение волнового пакета в начальный момент времени, σ – дисперсия волнового пакета.

<u>*Задание 2.*</u> Вычислить коэффициент проницаемости потенциального барьера, сравнивая норму волновой функции справа от барьера с нормой по всему пространству

$$C_p = \frac{\int_0^{\infty}|\psi(x,t)|^2\,dx}{\int_{-\infty}^{\infty}|\psi(x,t)|^2\,dx}.$$

Построить зависимость коэффициента C_p от энергии столкновения и сравнить ее с аналитическим решением стационарной задачи.

10. Методические рекомендации по организации изучения дисциплины.

Методические рекомендации для преподавателей

Преподаватель, ведущий занятия по данному курсу, должен дать краткую вводную лекцию по каждой теме, с учетом того, что основной материал должен был быть изложен ранее в рамках курса «Численные методы и математическое моделирование». Каждое задание формулируется в письменной форме, а ход работы разбирается на лекции. Дальнейшая работа заключается в индивидуальных консультациях студентов по каждому заданию. В работе нужно требовать и поощрять как можно большую самостоятельность студента.

Преподаватель должен обеспечить студентов списком необходимой литературой. Набор электронных материалов по численным методам и уравнениям математической физики должен быть размещен на сайте кафедры и кафедральных компьютерах. Каждый студент должен иметь доступ к методическим указаниям по данному курсу.

Отчетность студента за каждое выполненное задание должна выражаться в демонстрации работоспособной компьютерной программы и краткого печатного отчета (2-3 страницы). Контроль работы студента проводить в виде опроса по выполненному расчетному заданию.

Методические рекомендации для студентов.

Работа студента над выполнением заданий по курсу «Численное решение уравнений математической физики» в значительной степени самостоятельная. Задания формулируются в краткой форме, что требует от студента дополнительной работы с литературой, доступной либо в университетской библиотеке, либо в электронном виде на сайте кафедры. Основная роль преподавателя заключается в консультировании студента.

При выполнении заданий студенту понадобятся знания, полученные на курсах «Уравнения математической физики», «Численные методы и математическое моделирование» и навыки программирования на языках высокого уровня. Навыки работы с программами визуализации данных (Origin Pro 7.5) и офисными приложениями понадобятся при оформлении результатов.

Отчетность студента за каждое выполненное задание должна выражаться в демонстрации работоспособной компьютерной программы и краткого печатного отчета (2-3 страницы) с описанием задачи и результатами. В течение семестра студент должен выполнить не менее 75% от общего числа заданий.

Последовательность всех контрольных мероприятий изложена в календарном плане, который доводится до сведения каждого студента в начале семестра, а также размещен на сайте кафедры.

Планирование времени на самостоятельную работу, необходимого на изучение настоящей дисциплины, студентам лучше всего осуществлять на весь семестр, предусматривая при этом регулярное повторение пройденного материала. Материал, законспектированный на лекциях, необходимо регулярно дополнять сведениями из литературных источников, представленных в рабочей программе.

По каждой из тем для самостоятельного изучения, приведенных в рабочей программе данной дисциплины следует сначала прочитать рекомендованную литературу и при необходимости составить краткий конспект основных положений, терминов, сведений, требующих запоминания и являющихся основополагающими в этой теме и для освоения последующих разделов курса.

Для расширения знаний по дисциплине рекомендуется использовать Интернет-ресурсы: проводить поиск в различных системах и использовать материалы сайтов, рекомендованных преподавателем на лекционных занятиях.

Материалы, используемые при контроле знаний студентов

1. Написание отчета по каждому заданию.
2. Проверка и приём расчётно-графической работы(курсовая работа)
3. Устный опрос на семинаре

11. Методические указания по выполнению курсовой работы

Цель курсовой работы – закрепление теоретических знаний, умения практических расчетов амплитуды и фаз рассеняия, сечений реакции с использованием собственных и общепринятых компьютерных алгоритмов расчета ядерной динамики.

Выполнение курсовой работы по дисциплине «Теория рассеяния» – один из важных этапов учебного процесса в системе подготовки физиков ядерщиков. Они должны владеть основными понятиями и понимать методы теории рассеяния в приложении к задачам описания процессов втолкновения атомных ядер при низких и промежуточных энергиях.

Предъявляемые требования:

Курсовая работа должна содержать теоретический и практический материал по заданной тематике. Основное требование при выполнении курсовой работы – умение связать теоретические результаты вычислений характеристик рассеяния с имеющимися эксперементальными данными. Курсовая работа должна выполняться на конкретных экспериментальных материалах и содержать элементы самостоятельных исследований.

По результатам курсовой работы студент может выступать на конференциях и семинарах по рассматриваемой проблеме.

Написание курсовой работы:

Курсовая работа должна включать: введение, основную часть, заключение и приложения, при необходимости.

Во введении даются краткая характеристика и современное состояние рассматриваемого вопроса. Указываются цели и задачи работы, конкретизируется объект исследования, анализируется актуальность темы.

Основная часть работы должна содержать результаты, поулчение которых ставиться целью в задании к курсовой работе. Вначале подробно описываются теоретические положения, раскрывающие сущность рассматриваемой проблемы, анализируются имеющиеся материалы по тематике исследования. Этот раздел работы следует сопроводить иллюстрациями, таблицами, схемами, графиками и другими материалами. Далее излагаются математические методы решения поставленной задачи, анализируется применимость, устойчивость и сходимость этих методов. Затем приводятся результаты проведенных расчетов и, по возможности, их сравнение с имеющимися экспериментальными данными или расчетами других авторов в рамках альтернативных моделей и подходов. При использовании материалов из других источников следует делать сноски с указанием автора, названия и год издания книги или других материалов. В конце раздела подводятся итоги по основной части работы.

Заключение должно состоять из перечисления основных результатов и сделанных на их основе выводов. Их следует формулировать четко и по пунктам.

Литература содержит список учебной, научной литературы, научных статей, баз экспериментальных данных, использованных источников при выполнении курсовой работы.

Курсовая работа выполняется с использованием фактического материала подобранного самостоятельно и предложенного преподавателем.

Курсовая работа должна содержать титульный лист, план работы, список используемой литературы и приложения. Объем работы должен составлять 10-15 страниц компьютерного текста, шрифт № 12 через 1.5 интервала. Форма и содержание титульного листа, а также стилевые параметры отчета по курсовой работе определяются рекомендациями кафдеры «Ядерная физика».

Страницы должны иметь поля и пронумерованы. В приложениях страницы не нумеруются. Иллюстрации, рисунки, чертежи, графики, фотографии, которые приводятся по тексту работы, следует нумеровать.

Представленная курсовая работа проверяется преподавателем, а результаты проверки отражаются в рецензии.

При положительном заключении работа допускается к защите, о чем делаются записи на титульном листе работы и в рецензии.

При отрицательной рецензии работа возвращается на доработку с последующим представлением на повторную проверку с приложением рецензии.