

**Государственное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования Московской области  
«Международный университет природы, общества и человека «Дубна»  
(университет «Дубна»)  
Факультет естественных и инженерных наук  
Кафедра теоретической физики**

**УТВЕРЖДАЮ**

проректор по учебной работе

\_\_\_\_\_ С.В. Моржухина

« \_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 2011 г.

**ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ**

**«Векторный и тензорный анализ»**

**по направлению 010700.62 «ФИЗИКА»**

---

(№, наименование направления, специальности)

Форма обучения: очная

Уровень подготовки: *бакалавр*

Курс 2, семестр 3

г. Дубна, 2011 г.

## 1. Требования ГОС ВПО

Тензоры и операции над ними. Скалярное и векторное поле. Основные операции векторного анализа. Формулы Грина, Гаусса-Остроградского, Стокса. Элементы теории групп.

## 2. Аннотация

Программа дисциплины «Векторный и тензорный анализ» составлена в соответствии с разделом **ЕН.Ф.3.3** ГОС ВПО для подготовки бакалавров по направлению: **010700.62** «Физика». Курс «Векторный и тензорный анализ» входит в цикл общих математических и естественнонаучных дисциплин (ЕН).

### Место курса в профессиональной подготовке бакалавров

Изучение дисциплины «Векторный и тензорный анализ» опирается на курсы «Линейная алгебра и аналитическая геометрия», «Математический анализ». Дисциплина «Векторный и тензорный анализ» является вспомогательной для курсов «Общая физика: Электричество и магнетизм» и «Теоретическая физика. Механика», и дает математический аппарат для следующих разделов теоретической физики: «Механика сплошных сред», «Электродинамика», «Электродинамика сплошных сред», «Введение в гравитацию и космологию». Естественным продолжением курса «Векторный и тензорный анализ» являются курсы «Симметрии и теория групп» и «Теория групп» из цикла специальных дисциплин (СД)

Полученные знания необходимы студентам при подготовке, выполнении и защите выпускной квалификационной работы и при решении научно-исследовательских задач в будущей профессиональной деятельности.

**Формы работы студентов** в ходе изучения дисциплины предусмотрены лекции, семинарские занятия, выполнение домашних работ. Отдельные темы теоретического курса прорабатываются студентами самостоятельно в соответствии с планом самостоятельной работы и конкретными заданиями преподавателя с учетом индивидуальных особенностей студентов.

**Самостоятельная работа** студентов, предусмотренная учебным планом, выполняется в течение семестра в форме подготовки к семинарским занятиям, решения домашних заданий.

**Виды текущего контроля** – проверка домашних заданий, контрольных работ. Текущий контроль проводится, чтобы установить степень усвоения студентами лекционного материала, а также проверить их навыки работы с векторами и тензорами, выборочные опросы.

### Форма промежуточного контроля

Зачет по теоретической части и по практическим работам, экзамен.

## 3. Цели и задачи дисциплины

Целью изучения курса является овладение математическим аппаратом векторного и тензорного анализа, который необходим для дальнейшего изучения студентом-физиком таких дисциплин как электродинамика, гидродинамика, теория упругости, теория гравитации и др.

Задача курса - сформировать навыки вычислений с векторами и тензорами.

## 4. Требования к уровню освоения содержания дисциплины (знания, умения, навыки)

В результате изучения курса векторного и тензорного анализа студент должны **уметь** делать вычисления с векторами и тензорами в различных системах координат; **владеть** как

компонентной, так и безиндексной формой записи векторных и тензорных соотношений; **уметь** находить скалярное, векторное и смешанное произведения векторов; **уметь** находить кривизну и кручение произвольной кривой в евклидовом пространстве; **владеть** дифференциальным исчислением для векторных и тензорных полей; **знать** выражения для дивергенции, ротора и лапласиана в ортогональных системах координат; **уметь** применять интегральные формулы Гаусса-Остроградского, Грина и Стокса; **знать** элементы теории поверхностей; **уметь** вычислять площадь и объем в произвольном римановом пространстве; **знать** элементы теории групп. В результате решения задач на семинарах и выполнения домашних заданий студент должен **научиться** применять аппарат векторного и тензорного анализа в физических задачах (электродинамике, гидродинамике, теории упругости, теории гравитации).

## 5. Объем дисциплины и виды учебной работы

Вид учебной работы	Всего часов	Семестр
		3
Общая трудоемкость дисциплины	86	86
Аудиторные занятия	54	54
Лекции (Л)	36	36
Семинары (С)	18	18
Самостоятельная работа (СР)	32	32
Промежуточная аттестация	Зачет, экзамен	Зачет, экзамен

## 6. Разделы дисциплины

№ п/п	Раздел (тема) дисциплины, содержание	Л	С	СР (в часах)
1	Скалярное и векторное поле. Основные операции векторного анализа.	8	4	8
2.	Интегральные формулы Грина, Гаусса-Остроградского, Стокса	8	4	8
3.	Тензоры и операции над ними.	8	4	8
4.	Элементы дифференциальной геометрии	8	4	8
5.	Элементы теории групп	4	2	2

### Содержание разделов дисциплины

#### **Раздел 1. Скалярное и векторное поле. Основные операции векторного анализа.**

Линейное (векторное) пространство. Базис. Размерность (повторение). Системы координат в евклидовом пространстве. Преобразование координат. Матрица Якоби. Теорема об обратном преобразовании координат.

Евклидово скалярное произведение векторов и угол между векторами (повторение). Кривая в евклидовом пространстве. Касательный вектор (вектор скорости) кривой. Длина дуги. Натуральный параметр. Преобразование вектора скорости (касательного вектора) при замене координат. Квадрат вектора скорости.

Криволинейные координаты. Локальный базис. Символ  $\delta_i^k$ . Скалярное произведение в криволинейных координатах. Метрические матрицы. Связь с матрицами Якоби. *Скалярное поле*. Градиент. Ковектор. Дуальное (сопряженное) пространство. Правила расстановки индексов. Ковариантные и контравариантные компоненты вектора. Векторное произведение. Символ  $\varepsilon^{ijk}$  и его связь с детерминантом. Смешанное и двойное векторные произведения. Геометрический смысл векторов дуального (взаимного) базиса.

Кривые в пространстве. Векторы касательной, нормали, бинормали пространственной кривой. Кривизна и кручение. Формулы Френе.

*Векторное поле*. Дифференцирование вектора. *Основные операции векторного анализа: дивергенция, ротор, лапласиан*.

Дифференциальные операторы в ортогональных криволинейных координатах. Коэффициенты Ламе.

### **Раздел2. Интегральные формулы Грина, Гаусса-Остроградского, Стокса**

Интегральные теоремы. Формулы Грина, Гаусса-Остроградского, Стокса. Потенциальное и соленоидальное поле. Отыскание векторного поля по его ротору и дивергенции.

### **Раздел3. Тензоры и операции над ними.**

*Определение и примеры тензоров*. Преобразования тензоров при замене базиса. *Тензорное поле*. Закон преобразования тензорного поля при замене координат. Разложение тензора по собственному базису. Сложение, умножение тензоров. Свертка и перестановка индексов. Пример: тензоры напряжений и деформаций.

Симметричные и антисимметричные тензоры. Разложение тензора второго ранга на симметричный и антисимметричный. Базисы в пространстве симметричных и антисимметричных тензоров. Антисимметричный тензор типа  $(0, n)$  в  $n$ -мерном пространстве. Преобразование антисимметричного тензора при замене координат. Оператор  $*$ . Инварианты электромагнитного поля. Тензор энергии-импульса электромагнитного поля.

### **Раздел4. Элементы дифференциальной геометрии**

Алгебра внешних форм. Альтернатива тензоров. Внешнее произведение внешних и базисных форм. Внешнее дифференцирование. Дифференциалы как базис ковекторных полей. Основные свойства внешнего дифференциала (антикоммутативность).

Интегрирование дифференциальных форм. Общая формула Стокса.

Элементы теории поверхностей. Индуцированная метрика. Преобразование детерминанта метрического тензора. Первая и вторая квадратичные формы. Гауссова и средняя кривизна. Выражение элементов длины и площади через метрику.

Понятие многообразия. Тензоры в римановом пространстве. Риманова метрика. Псевдоевклидовы пространства. Метрика Минковского. Выражение элемента объема через метрику.

Параллельный перенос вектора. Ковариантное дифференцирование. Геодезические. Символы Кристоффеля. Выражение символов Кристоффеля через метрику. Дифференцирование тензоров второго ранга.

Тензоры, порождаемые ковариантными производными первого порядка: градиент скалярной функции, дивергенция и ротор тензора. Градиент кососимметрического тензора. Ковариантные производные второго порядка. Оператор Лапласа.

Тензор кривизны. Симметрии тензора кривизны.

### **Раздел 5. Элементы теории групп.**

Понятие группы. Свойства групп. Простейшие группы преобразований евклидова пространства. Математическое описание вращений. Кристаллографические группы.

Понятие представления группы. Приводимые и неприводимые представления. Группа Лоренца.

### **Практические занятия (семинары)**

№ п/п	№ раздела дисциплины	Наименование практических занятий (семинаров)
1	1	Преобразования координат. Матрицы Якоби. Локальный и взаимный базис. Символы $\delta_i^k$ и $\varepsilon^{ijk}$
2	1	Дифференциальные операторы в ортогональных криволинейных координатах
3	2	Контрольная работа N1 «Векторный анализ» Интегральные теоремы. Потенциальное и соленоидальное поле
4	3	Преобразования тензоров при замене базиса, свертка, перестановка индексов. Метрический тензор.
5	3	Контрольная работа N2 «Интегральные теоремы» Антисимметричные тензоры. Оператор *
6	4	Элементы теории поверхностей. Индуцированная метрика. Выражение элементов длины и площади и объема через метрику
7	4	Контрольная работа N3 «Тензоры и элементы теории поверхностей» Ковариантное дифференцирование
8	5	Математическое описание вращений. Группа Лоренца
9	5.2	Зачетная неделя

## **7. Учебно-методическое обеспечение дисциплины**

### **ОСНОВНАЯ ЛИТЕРАТУРА**

1. **Ильин В.А.**, Садовничий В.А., Сендов Б. Х., Математический анализ: Учебник для вузов: В 2 ч. Ч.2 - М.: Издательство Московского университета: Проспект: ТК Велби, 2007
2. **В. А. Ильин, Э. Г. Позняк** Линейная алгебра: Учебник для вузов - М.: Физматлит, 2002.

### **ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА**

1. П. К. Рашевский. Риманова геометрия и тензорный анализ. М.:УРСС, 2001
2. Б.А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко. Современная геометрия. Т.1, М.:УРСС, 2001.
3. **Мищенко А.С.**, Фоменко А.Т. Краткий курс дифференциальной геометрии и топологии: Учебник для вузов / - М.: Физматлит, 2004.

### **МЕТОДИЧЕСКИЕ РАЗРАБОТКИ СОТРУДНИКОВ КАФЕДРЫ:**

А.А. Владимиров. Тензорный анализ. <http://theor.jinr.ru/~alvladim/tensor.ps>

### **ИНТЕРНЕТ – РЕСУРСЫ**

Л.И. Коваленко. Методические указания по математическому анализу для студентов второго курса. Элементы векторного анализа. МФТИ, 2001 год. —  
<http://www.math.mipt.ru/study/literature/kovalenk.pdf> (в открытом доступе)

Портал «Мир математических уравнений»  
<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library.htm>

Электронная библиотечная система  
<http://www.knigafund.ru>

## IV. Учебно-методические материалы

### Методические рекомендации преподавателю

В курсе «Векторный и тензорный анализ» изучается математический аппарат для работы с векторами и тензорами. С простейшими из таких объектов студенты встречаются в курсе линейной алгебры и аналитической геометрии. Поэтому, приступая к чтению курса, преподавателю рекомендуется провести опрос студентов, чтобы выяснить уровень их начальных знаний. Изложение сложных геометрических понятий, таких как кривизна, кручение, риманова метрика и т.п., следует по возможности иллюстрировать средствами визуализации и анимации пакетов символьных вычислений Maple или Mathematica. Изучение тензорного анализа студентами-физиками рекомендуется сопровождать примерами из теории электромагнетизма, гравитации, упругости и гидродинамики.

В результате изучения курса векторного и тензорного анализа студент должен научиться обращаться с векторами и тензорами, овладеть как компонентной, так и безиндексной формой записи векторных и тензорных соотношений; делать вычисления в различных системах координат; овладеть дифференциальным исчислением для векторных и тензорных полей; научиться применять интегральные теоремы Гаусса-Остроградского и Стокса; ознакомиться с элементами теории поверхностей; научиться вычислять площадь и объем в произвольном римановом пространстве; ознакомиться с элементами теории групп.

Промежуточный контроль усвоения студентами полученных знаний осуществляется в виде опросов и обсуждения решения предложенных задач. Итоговый контроль проводится в виде зачета с оценкой.

### Методические указания студентам

При изучении курса «Векторный и тензорный анализ» студенты должны прослушать лекции и решить задачи, предлагаемые преподавателем для семинарских занятий и домашней работы. Некоторые темы курса вынесены на самостоятельное изучение.

Самостоятельная работа должна быть систематической, ритмичной. Для подготовки к каждому практическому занятию студенту рекомендуется самостоятельно повторить материал предыдущей лекции. На решение домашних задач по теме практического занятия отводится одна неделя. Желательно решать несколько задач в течение недели, не оставляя все на конец семестра. Только так можно выработать навыки обращения с векторами и тензорами. Студентам рекомендуется самостоятельно изучить пакет `tensor` системы символьных вычислений Maple.

Для успешного решения задач необходимо знать и понимать, что такое размерность пространства, базис, система координат, матрица Якоби, вектор, тензор, локальный и взаимный базисы, метрический тензор, ковариантные и контравариантные компоненты вектора, вектор скорости кривой, натуральный параметр, кривизна и кручение кривой, градиент, дивергенция, ротор, лапласиан, индуцированная метрика, риманова метрика, метрика Минковского, ковариантная производная, симметричные, антисимметричные и дуальные тензоры, символы  $\delta_i^k$ ,  $\varepsilon^{ijk}$ , тензорное сложение, умножение и свертка, формулы Грина, Гаусса-Остроградского, Стокса.

## V. Материалы, устанавливающие содержание и порядок проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации.

Пример варианта контрольной работы по разделу 1 «Векторный анализ»:

### **Контрольная работа 1. Вариант 2.**

#### **Задача 1.**

Найти векторы локального и взаимного базисов для эллипсоидальных координат  $u, v, \varphi$   
 $x = a \sinh u \sin v \cos \varphi$ ,  $y = a \sinh u \sin v \sin \varphi$ ,  $z = a \cosh u \cos v$ .

#### **Задача 2.**

Показать, что кручение винтовой линии,  $x^1 = a \cos \xi$ ,  $x^2 = a \sin \xi$ ,  $x^3 = b\xi$ , постоянно. Здесь  $a > 0, b \neq 0$ . Указание: сначала проверить, натуральный ли параметр  $\xi$ .

#### **Задача 3.**

Доказать тождество  $[\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]] + [\mathbf{c}, [\mathbf{a}, \mathbf{b}]] + [\mathbf{b}, [\mathbf{c}, \mathbf{a}]] = 0$ . Здесь  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  векторы, заданные в декартовых координатах.

При решении использовать следующее определение векторного произведения:  $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \varepsilon_{ijk} a_i b_j \mathbf{e}_k$

Пример домашнего задания по разделу 2 «Интегральные формулы ...»:

#### **Задача 5**

Найти поток вектора  $\frac{\mathbf{r}}{r}$ ,  $r = (x^1, x^2, x^3)$  через поверхность цилиндра радиуса  $R$  и длины  $L$ .

#### **Задача 6**

Найти поток вектора  $r = (x^1, x^2, x^3)$  через поверхность эллипсоида вращения, заданную в параметрической форме  $x^1 = a \cos X^1 \sin X^2$ ,  $x^2 = a \sin X^1 \sin X^2$ ,  $x^3 = c \cos X^2$ .

#### **Задача 8**

Найти поток ротора поля

$\mathbf{A} = ((x^1)^2 + x^2 - 4)\mathbf{i}_1 + 3x^1x^2\mathbf{i}_2 + (2x^1x^3 + (x^3)^2)\mathbf{i}_3$  через поверхность полусферы  $(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = 16$ , находящейся над плоскостью  $x^1x^2$ .

Примеры задач для семинарских занятий по разделу 4 «Элементы дифференциальной геометрии»:

#### **Задача**

Дана метрика сферы радиуса  $R$ :  $dl^2 = R^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$ ;  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$

Написать уравнение геодезической на поверхности сферы.

#### **Задача**

Дана пространственно-временная метрика Шварцшильда (метрика черной дыры):

$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) c^2 dt^2 - r^2 (\sin^2\theta d\varphi^2 + d\theta^2) - \frac{dr^2}{1 - \frac{r_g}{r}}$ , где  $r_g$  - гравитационный радиус тела. Пусть

$r > r_g$ . Написать оператор Лапласа.

### **Задача**

Найти коэффициенты первой квадратичной формы для поверхности эллипсоида вращения, заданной в неявной форме

$$\left(\frac{x^1}{a}\right)^2 + \left(\frac{x^2}{a}\right)^2 + \left(\frac{x^3}{c}\right)^2 = 1, \quad a^2 \geq c^2$$

## Вопросы к экзамену по курсу «Векторный и тензорный анализ»

1. Линейное (векторное) пространство. Базис и размерность пространства.
2. Замена координат. Матрица Якоби. Обратное преобразование координат.
3. Евклидово скалярное произведение векторов и угол между векторами.
4. Кривая в евклидовом пространстве. Касательный вектор (вектор скорости кривой).
5. Преобразование вектора скорости (касательного вектора) при замене координат. Квадрат вектора скорости.
6. Длина дуги. Натуральный параметр.
7. Векторы касательной, нормали, бинормали пространственной кривой.
8. Кривизна и кручение. Формулы Френе.
9. Криволинейные координаты. Локальный базис. Символ  $\delta_i^k$ .
10. Скалярное произведение в криволинейных координатах. Метрические матрицы. Связь с матрицами Якоби.
11. Скалярное поле. Градиент. Понятие ковектора. Дуальное (сопряженное) пространство. Геометрический смысл векторов дуального (взаимного) базиса.
12. Правила расстановки индексов. Ковариантные и контравариантные компоненты вектора.
13. Векторное произведение. Символ  $\varepsilon^{ijk}$  и его связь с детерминантом.
14. Смешанное и двойное векторные произведения.
15. Векторное поле. Дифференцирование вектора. Основные операции векторного анализа: дивергенция, ротор, лапласиан.
16. Дифференциальные операторы в криволинейных ортогональных координатах. Коэффициенты Ламе.
17. Теорема Гаусса-Остроградского.
18. Формулы Грина и Стокса.
19. Потенциальное и соленоидальное поле.
20. Тензорное поле. Закон преобразования тензорного поля при замене координат. Разложение тензора по собственному базису.
21. Сложение, умножение тензоров. Свертка и перестановка индексов.
22. Симметричные и антисимметричные тензоры. Разложение тензора второго ранга на симметричный и антисимметричный.
23. Антисимметричный тензор типа  $(0, n)$  в  $n$ -мерном пространстве.
24. Преобразование антисимметричного тензора при замене координат.
25. Дуальный тензор. Оператор  $*$ .
26. Инварианты электромагнитного поля. Тензор энергии-импульса электромагнитного поля.
27. Дифференциальные формы. Основные свойства внешнего дифференциала (антикоммутативность).
28. Интегрирование дифференциальных форм. Общая формула Стокса.
29. Ковариантное дифференцирование. Символы Кристоффеля.
30. Выражение символов Кристоффеля через метрику.
31. Тензоры, порождаемые ковариантными производными первого порядка: градиент скалярной функции, дивергенция и ротор тензора.
32. Градиент кососимметрического тензора.
33. Ковариантные производные второго порядка. Оператор Лапласа.

34. Способы задания поверхности. Индуцированная метрика. Преобразование детерминанта метрического тензора.
35. Первая и вторая квадратичные формы.
36. Выражение элементов длины и площади через метрику.
37. Параллельный перенос вектора. Геодезические.
38. Псевдоевклидовы пространства. Метрика Минковского.
39. Риманова метрика. Выражение элемента объема через метрику.
40. Понятие группы. Некоторые свойства групп.
41. Подгруппы. Нормальные делители. Гомоморфизмы.
42. Простейшие группы преобразований евклидова пространства.
43. Математическое описание вращений.
44. Группа Лоренца.