

**Государственное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования Московской области  
«Международный университет природы, общества и человека «Дубна»  
(университет «Дубна»)  
Факультет естественных и инженерных наук  
Кафедра теоретической физики**

**УТВЕРЖДАЮ**

проректор по учебной работе

\_\_\_\_\_ С.В. Моржухина

« \_\_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 2011 г.

**ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ**

**Теория функций комплексного переменного**

**направление 010700.62 «ФИЗИКА»**

Специализация «Теоретическая физика»

Форма обучения: очная

Уровень подготовки: бакалавр

Курс 2, семестр 4

г. Дубна, 2011 г.

## 1. Требования ГОС ВПО

Комплексные числа. Аналитические функции и их свойства. Интеграл по комплексной переменной. Интеграл Коши. Ряды аналитических функций. Основные понятия теории конформных отображений. Преобразование Лапласа.

## 2. Аннотация

Программа дисциплины «Теория функций комплексного переменного» составлена в соответствии с разделом **ЕН.Ф** ГОС ВПО для подготовки бакалавров по направлению: **010700.62** «Физика». Дисциплина «Теория функций комплексного переменного» является разделом дисциплины «Математика», которая входит в цикл общих математических и естественнонаучных дисциплин (**ЕН**).

### Место курса в профессиональной подготовке бакалавров

Изучение дисциплины «Теория функций комплексного переменного» опирается на курс математического анализа. Дисциплина «Теория функций комплексного переменного» дает математический аппарат, используемый во всех разделах теоретической и математической физики. Учитывая важную роль теории функций комплексного переменного в профессиональной подготовке бакалавра по направлению «Физика», в цикл **ЕН** учебного плана включены также дополнительные главы теории функций комплексного переменного.

Полученные знания необходимы студентам для изучения большинства разделов теоретической и математической физики, при подготовке, выполнении и защите выпускной квалификационной работы и при решении научно-исследовательских задач в будущей профессиональной деятельности.

**Формы работы студентов:** посещение лекций, решение и разбор задач по темам лекций на семинарских занятиях, выполнение домашних работ.

**Самостоятельная работа:** самостоятельное изучение литературы по теме лекций, подготовка к семинарским занятиям, выполнению домашних работ.

**Виды текущего контроля** – проверка домашних заданий, контрольных работ, выборочные опросы.

### Форма промежуточного контроля

Зачет по теоретической части и по практическим работам, экзамен.

## 3. Цели и задачи дисциплины

**Целью дисциплины** является изучение теории функций комплексного переменного.

**Задача курса:** формирование навыков использования математического аппарата теории аналитических функций во всевозможных областях теоретической и математической физики.

## 4. Требования к уровню освоения содержания дисциплины (знания, умения, навыки)

**Знать** свойства аналитических функций, теорию интеграла Коши, теорию рядов Лорана, теорию конформных отображений. **Уметь выполнять** операции с комплексными числами в алгебраической, тригонометрической и показательной форме. **Находить** область определения, область значений и область однолиственности элементарных функций, а также образы, в которые переводят эти функции декартову и полярную сетку плоскости комплексной переменной. **Выяснять** является ли аналитической заданная функция, используя условия Коши–Римана; **восстанавливать** аналитическую функцию по ее действительной или мнимой части. **Выполнять** интегрирование заданной функции вдоль заданной кривой; **применять** интегральную формулу Коши для вычисления интегралов вдоль замкнутых кривых; **применять** теорию вычетов к вычислению интегралов. **Уметь выполнять** преобразование Лапласа. **Владеть** методом конформных отображений,

## 5. Объем дисциплины и виды учебной работы

Вид учебной работы	Всего часов	Семестр
		4
Общая трудоемкость дисциплины	107	107
Аудиторные занятия	72	72
Лекции (Л)	36	36
Семинары (С)	36	36
Самостоятельная работа (СР)	35	35
Промежуточная аттестация	зачет, экзамен	зачет, экзамен

## 6. Разделы дисциплины

№	Раздел дисциплины	Лекции	Семинары	СР
1	Комплексные числа. Аналитические функции и их свойства.	6	6	5
2	Интеграл по комплексной переменной. Интеграл Коши.	6	6	5
3	Ряды аналитических функций.	4	4	5
4	Аналитическое продолжение.	4	4	5
5	Теория вычетов и их приложение.	6	6	5
6	Конформное отображение. Приложение в физике	6	6	5
7	Преобразование Лапласа	4	4	5

### Содержание разделов дисциплины

#### 1. Комплексные числа. Аналитические функции и их свойства.

Комплексная плоскость. Действительная и мнимая часть, модуль и аргумент, главное значение аргумента комплексного числа. Алгебраическая и тригонометрическая форма комплексных чисел. Операции сложения и умножения. Обратные операции. Комплексное сопряжение. Извлечение корня натуральной степени из комплексного числа.

Стереографическая проекция. Бесконечно удаленная точка. Топология комплексной плоскости. Последовательности комплексных чисел. Предел, необходимое и достаточное условие сходимости числовых последовательностей. Критерий Коши.

Понятие области. Области односвязные и многосвязные. Порядок связности. Понятие функции. Однозначные и многозначные функции. Геометрическая интерпретация функций комплексной переменной. Отображение однолиственное и неоднoliственное. Пути в комплексной плоскости. Параметрическое задание пути.

Дифференцирование функций комплексной переменной. Определение производной от функции комплексной переменной. Геометрический смысл производной. Необходимые и достаточные условия дифференцируемости. Условия Коши–Римана. Элементарные правила дифференцирования. Голоморфные (аналитические) функции.

## 2. Интеграл по комплексной переменной. Интеграл Коши.

Интеграл от функции комплексной переменной. Представление интеграла от функции комплексной переменной с помощью криволинейных интегралов от вещественных функций и способы их вычисления. Свойства интеграла. Оценка интеграла. Первообразная.

Теорема Коши для односвязной области, обобщение на многосвязные области. Представление аналитической функции во внутренних точках области с помощью ее граничных значений. Интегральная формула Коши. Применение этой формулы для вычисления интегралов по замкнутым кривым. Теорема о среднем для аналитических функций. Принцип максимума модуля.

Интегралы, зависящие от параметра. Существование производных всех порядков у аналитической функции. Теорема Лиувилля. Интегральная формула Коши для производной  $n$ -го порядка аналитической функции. Теорема о голоморфности производных голоморфной функции.

## 3. Ряды аналитических функций.

Числовые ряды, сходимость. Ряды аналитических функций, степенные ряды. Представление аналитических функций в круге степенными рядами. Теорема о ряде Тейлора. Представление аналитических функций в кольце рядами. Теорема Лорана.

Следствия основной теоремы о ряде Тейлора аналитической функции. Критерий Коши. Теорема Абеля. Формула Коши-Адамара. Радиус сходимости степенного ряда.

Нули аналитической функции. Теорема о нуле аналитической функции. Теорема единственности аналитической функции. Функциональные ряды – теорема Вейерштрасса. Теорема Рунге.

Ряд Лорана. Изолированные особые точки функций комплексной переменной. Теорема об устранимой особой точке. Теорема о полюсе. Теорема Сохоцкого. Поведение аналитической функции вблизи бесконечно-удаленной точки. Целые и мероморфные функции.

## 4. Аналитическое продолжение.

Продолжение с действительной оси. Методы аналитического продолжения. Многозначные функции. Особые точки многозначного характера. Поверхность Римана. Логарифмическая функция. Обратные тригонометрические функции. Общая степенная функция. Периодичность показательной функции. Область однолиственности функции  $w=e^z$ . Отображение декартовой

прямоугольной сетки из этой области на плоскость  $w$ . Полуплоскость  $Im z > 0$  как область однолиственности функции  $w = z^2$ . Образы полярной и декартовой прямоугольных сеток при этом отображении.

4. Теория вычетов. Вычисление интегралов с помощью теории вычетов. Принцип аргумента, теорема Руше. Лемма Жордана. Случай многозначных функций. Логарифмический вычет. Подсчет числа нулей аналитической функции.

5. Конформные отображения. Принцип соответствия границ при конформном отображении. Теорема Римана. Отображения, осуществляемые элементарными функциями. Дробно-линейное отображение. Функция Жуковского. Интеграл Шварца-Кристоффеля. Отображение многоугольников. Приложение конформных отображений в гидромеханике и электростатике.

6. Преобразование Лапласа. Формула обращения преобразования Лапласа. Теорема о свертке и другие формулы. Изображение элементарных функций. Свойства изображения. Решение задач для дифференциальных уравнений с помощью преобразования Лапласа. Преобразования Фурье и Меллина.

#### Практические занятия (семинары)

№ п/п	№ раздела дисциплины	Наименование практических занятий (семинаров)
1	I	Операции с комплексными числами. Стереографическая проекция
2	I	Дифференцирование функций комплексной переменной. Условия Коши-Римана
3	II	Интеграл по комплексной переменной. Интеграл Коши.
4	II	Интегральная формула Коши.
5	III	Ряды аналитических функций, степенные ряды. Радиус сходимости.
6	III	Ряд Тейлора. Нули аналитической функции
7	III	Ряд Лорана. Полюса аналитической функции
8	IV	Аналитическое продолжение
9	IV	Особые точки многозначного характера. Поверхность Римана.
10	V	Вычисление интегралов с помощью теории вычетов
11	V	Принцип аргумента. Лемма Жордана. Случай многозначных функций
12	V	Подсчет числа нулей аналитической функции.
13	VI	Конформные отображения. Дробно-линейное отображение. Функция Жуковского.
14	VI	Интеграл Шварца-Кристоффеля. Отображение многоугольников.
15	VII	Преобразование Лапласа
16	VII	Преобразования Фурье
17	VII	Преобразования Меллина.
18		Зачетная неделя

#### 7. Учебно-методическое обеспечение дисциплины

##### ОСНОВНАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Свешников А.Г., Тихонов А.Н.. Теория функций комплексной переменной: Учебник, 4-е изд., М.: Наука, 2004.
2. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.. Методы теории функций комплексного переменного. М., Наука, 1987.
3. Волковыский Л.И., Лунц Г.Л., Араманович И.Г.. Сборник задач по теории функций комплексного переменного. М.: Физматлит, 2002.

#### **ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА**

1. Евграфов М. А.. Аналитические функции. М.: Наука, 1991.
2. Сборник задач по теории аналитических функций. Под редакцией М. А. Евграфова М.: Наука, 1972

### **8. Материально техническое обеспечение дисциплины**

оверхед,  
мультимедийный проектор

### **9. Формы контроля и оценочные средства для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины**

Контроль осуществляется в виде устных опросов по материалу лекций, проверки усвоения тем, вынесенных на самостоятельное изучение, разбора решений домашних задач, контрольных работ. По окончании всего курса проводится зачет и экзамен..

#### **Методика формирования результирующей оценки.**

Результирующая оценка выставляется студенту на экзамене по окончании курса. Допуск к зачету в конце курса происходит при условии выполнения 3-х контрольных работ, сдачи не менее 60% домашних заданий. Для оценки результатов деятельности студента по изучению дисциплины используются следующие показатели: посещение аудиторных занятий, выполнение всех контрольных работ, процент решенных домашних задач, уровень ответов на вопросы по темам, вынесенным на зачет.

### **Вопросы к экзамену**

1. Комплексная плоскость. Действительная и мнимая часть, модуль и аргумент, главное значение аргумента комплексного числа. Алгебраическая и тригонометрическая форма комплексных чисел.
2. Операции сложения и умножения. Обратные операции. Комплексное сопряжение. Извлечение корня натуральной степени из комплексного числа.
3. Стереографическая проекция. Бесконечно удаленная точка. Топология комплексной плоскости.
4. Последовательности комплексных чисел. Предел, необходимое и достаточное условие сходимости числовых последовательностей. Критерий Коши.
5. Понятие области. Области односвязные и многосвязные. Порядок связности. Понятие функции. Однозначные и многозначные функции.
6. Геометрическая интерпретация функций комплексной переменной. Отображение однолистное и неоднолистное. Пути в комплексной плоскости. Параметрическое задание пути.
7. Дифференцирование функций комплексной переменной. Определение производной от функции комплексной переменной. Геометрический смысл производной.
8. Необходимые и достаточные условия дифференцируемости. Условия Коши–Римана. Элементарные правила дифференцирования. Голоморфные (аналитические) функции.

9. Интеграл от функции комплексной переменной. Представление интеграла от функции комплексной переменной с помощью криволинейных интегралов от вещественных функций. Свойства интеграла. Оценка интеграла. Первообразная.
10. Теорема Коши для односвязной области, обобщение на многосвязные области. Представление аналитической функции во внутренних точках области с помощью ее граничных значений.
11. Интегральная формула Коши. Применение этой формулы для вычисления интегралов по замкнутым кривым. Теорема о среднем для аналитических функций. Принцип максимума модуля.
12. Интегралы, зависящие от параметра. Существование производных всех порядков у аналитической функции. Теорема Лиувилля. Интегральная формула Коши для производной  $n$ -го порядка аналитической функции. Теорема о голоморфности производных голоморфной функции.
13. Числовые ряды, сходимость. Ряды аналитических функций, степенные ряды. Представление аналитических функций в круге степенными рядами. Теорема о ряде Тейлора.
14. Представление аналитических функций в кольце степенными рядами. Теорема Лорана.
15. Следствия основной теоремы о ряде Тейлора аналитической функции. Критерий Коши. Теорема Абеля. Формула Коши-Адамара. Радиус сходимости степенного ряда.
16. Нули аналитической функции. Теорема о нуле аналитической функции. Теорема единственности аналитической функции. Функциональные ряды – теорема Вейерштрасса. Теорема Рунге.
17. Ряд Лорана. Изолированные особые точки функций комплексной переменной. Теорема об устранимой особой точке. Теорема о полюсе. Теорема Сохоцкого.
18. Поведение аналитической функции вблизи бесконечно-удаленной точки. Целые и мероморфные функции.
19. Понятие аналитического продолжения. Продолжение с действительной оси. Методы аналитического продолжения.
20. Многозначные функции. Особые точки многозначного характера. Поверхность Римана. Логарифмическая функция. Обратные тригонометрические функции.
21. Общая степенная функция. Периодичность показательной функции. Область однолиственности функции  $w=e^z$ .
22. Теория вычетов. Вычисление интегралов с помощью теории вычетов. Принцип аргумента, теорема Руше. Лемма Жордана. Случай многозначных функций.
23. Логарифмический вычет. Подсчет числа нулей аналитической функции.
24. Конформные отображения. Принцип соответствия границ при конформном отображении. Теорема Римана. Отображения, осуществляемые элементарными функциями.
25. Дробно-линейное отображение. Функция Жуковского. Интеграл Шварца-Кристофеля. Отображение многоугольников.
26. Преобразование Лапласа. Формула обращения преобразования Лапласа. Теорема о свертке и другие формулы. Изображение элементарных функций. Свойства изображения.
27. Преобразования Фурье и Меллина.