Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования Московской области «Международный университет природы, общества и человека «Дубна»
(университет «Дубна»)
Факультет естественных и инженерных наук
Кафедра теоретической физики

УТВЕРЖДАЮ
проректор по учебной работе

____________ С.В. Моржухина

«_____»___________2011 г.

П Р О Г Р А М М А Д И С Ц И П Л И Н Ы

Методы математической физики, линейные и нелинейные уравнения физики

по направлению 010700.62 «ФИЗИКА»

(№, наименование направления, специальности)

Форма обучения: очная

Уровень подготовки: *бакалавр*

Курс 3, семестр 5, 6

г. Дубна, 2011 г.

1. Требования ГОС ВПО

Физические задачи, приводящие к уравнениям в частных производных. Классификация уравнений в частных производных второго порядка. Общая схема метода разделения переменных. Специальные функции математической физики. Краевые задачи для уравнения Лапласа. Уравнения параболического типа. Уравнения гиперболического типа. Краевые задачи для уравнения Гельмгольца. Понятие о нелинейных уравнениях математической физики. Метод конечных разностей.

2. Аннотация

Программа дисциплины «Методы математической физики, линейные и нелинейные уравнения физики» составлена в соответствии с разделом **ОПД.Ф.02** ГОС ВПО для подготовки бакалавров по направлению: 0**10700.62** «Физика». Курс «Методы математической физики, линейные и нелинейные уравнения физики» входит в федеральный компонент цикла общих профессиональных дисциплин (**ОПД.Ф).**

Место курса в профессиональной подготовке бакалавров

Изучение дисциплины «Методы математической физики, линейные и нелинейные уравнения физики» опирается на курсы математического анализа, дифференциальных и интегральных уравнений, теории функций комплексной переменной. Методы математической физики находят применение во всех разделах теоретической физики. В данном курсе дается описание многих физических явлений на языке краевых задач для уравнений в частных производных.

Полученные знания необходимы студентам при подготовке, выполнении и защите выпускной квалификационной работы и при решении научно-исследовательских задач в будущей профессиональной деятельности.

Формы работы студентов в ходе изучения дисциплины предусмотрены семинарские занятия, выполнение домашних работ. Отдельные темы теоретического курса прорабатываются студентами самостоятельно в соответствии с планом самостоятельной работы и конкретными заданиями преподавателя с учетом индивидуальных особенностей студентов.

Самостоятельная работа студентов: подготовка к семинарским занятиям, выполнение домашних работ.

Виды текущего контроля – проверка домашних заданий, контрольных работ. Текущий контроль проводится, чтобы установить степень усвоения студентами лекционного материала, а также проверить их навыки работы.

Форма промежуточного контроля
Зачет по теоретической части и по практическим работам, экзамен.

3. Цели и задачи дисциплины

Курс «Методы математической физики, линейные и нелинейные уравнения физики» состоит из двух частей, читающихся в осеннем и весеннем семестрах III курса.

Целью первой части курса является изучение методов решения линейных уравнений в частных производных второго порядка с постоянными коэффициентами. Из многочисленных методов решения рассматриваются: метод функций Грина для решения краевых задач в уравнениях эллиптического типа, метод операции сдвига при решении уравнений гиперболического и параболического типов, а также метод разделения переменных и связанная с ним теория ортонормированных функций, где особое внимание уделяется теории Бесселевых функций и теории классических ортогональных полиномов.

Вторая часть курса имеет своей **целью** овладение методами решения неоднородных уравнений в частных производных, в частности, с коэффициентами, являющимися случайными функциями. Из известных методов рассматриваются: метод Фурье и метод представления решений неоднородных уравнений в частных производных в форме функционального интеграла. Методы излагаются на различных примерах.

4. Требования к уровню освоения содержания дисциплины (знания, умения, навыки)

Знать классификацию уравнений математической физики второго порядка**,** теорию ортонормированных функций, теорию Бесселевых функций и теорию классических ортогональных полиномов

Уметь находить решения различных краевых задач, сформулированных в виде линейных уравнений в частных производных второго порядка.

Владеть методом функций Грина для решения краевых задач в уравнениях эллиптического типа, метод операции сдвига при решении уравнений гиперболического и параболического типов, методами разделения переменных, методом Фурье и методом представления решений неоднородных уравнений в частных производных в форме функционального интеграла

5. Объем дисциплины и виды учебной работы

Вид учебной работы	Всего часов	Семестр	
		5	6
Общая трудоемкость дисциплины	240	112	128
Аудиторные занятия	144	72	72
Лекции (Л)	72	36	36
Семинары (С)	72	36	36
Самостоятельная работа (СР)	96	40	56
Промежуточная аттестация	зачет, экзамен	Зачет, экзамен	зачет, экзамен

6. Разделы дисциплины

5 семестр
Уравнения математической физики 2-го порядка

№ п/п	Раздел (тема) дисциплины, содержание	Л	С	СР
1.	Физические задачи, приводящие к уравнениям в частных производных. Классификация уравнений в частных производных второго порядка.	2	2	2
2.	Краевые задачи для уравнения Лапласа.	4	4	6
3.	Уравнения гиперболического типа.	4	4	4
4.	Краевые задачи для уравнения Гельмгольца.	4	4	4
5.	Модель Лэмба	4	4	4
6.	Уравнения параболического типа.	4	4	4
7.	Общая схема метода разделения переменных.	2	2	2
8.	Ортогональные системы функций	2	2	4
9.	Специальные функции математической физики.	6	6	6
10.	Классические ортогональные полиномы	4	4	4
	Итого:	36	36	40

6 семестр.
Нелинейные уравнения математической физики. Неоднородные уравнения математической физики. Метод функционального интегрирования.

№ п/п	Раздел (тема) дисциплины, содержание	Л	С	СР
1.	Понятие о нелинейных уравнениях математической физики.	4	4	6
2.	Метод конечных разностей.	2	2	4
3.	Неоднородные уравнения 2-го порядка	4	4	6
4.	Гауссов функциональный интеграл	4	4	6
5.	Волны в среде со случайными примесями	2	2	6
6.	Функция Грина уравнения Шредингера	4	4	6
7.	Вариационные методы	4	4	6

8.	Полярон	2	2	2
9.	Разряженная горячая плазма	4	4	6
10.	Гауссово эквивалентное представление	4	4	6
11.	Вариационное представление	2	2	2
	Итого:	36	36	56

Содержание разделов дисциплины

5 семестр

1. Физические задачи, приводящие к уравнениям в частных производных. Классификация уравнений в частных производных второго порядка.
Уравнения математической физики 2-го порядка. Приведение к каноническому виду. Сферические координаты в d-мерном пространстве. Инвариантное интегрирование.
2. Краевые задачи для уравнения Лапласа.
Эллиптические уравнения, гармонические функции. Краевые задачи для уравнения Лапласа. Задачи Дирихле иНоймана. Функции Грина. Формула Пуассона. Теорема Лиувилля. Принцип максимума. Теория потенциала.
3. Уравнения гиперболического типа.
Струны. Задача Коши. Формулы Даламбера, Пуассона и Кирхгофа.
4. Краевые задачи для уравнения Гельмгольца.
Колебания и волны. Характеристики. Фронт волны. Преломление лучей. Установившиеся и вынужденные колебания.
5. Модель Лэмба
Осциллятор на струне. Модель Лэмба - возникновения нестабильного состояния и резонансного рассеяния в консервативной системе.
6. Уравнения параболического типа.
Задача Коши и краевая задача. Представление Гаусса.
7. Общая схема метода разделения переменных.
Задача Штурма-Лиувилля. Примеры задач, решаемых методом разделения переменных.
8. Ортонормированные системы функций. Критерий полноты. Тригонометрическая система. Ортогональность и полнота.
9. Специальные функции математической физики.
Цилиндрические функции Бесселя. Другие цилиндрические функции: Неймана, Ганкеля, Макдональда. Классические ортогональные полиномы (общая теория). Полиномы Якоби, Чебышева, Лежандра, Эрмита, Лагерра. Присоединенные полиномы Лежандра. Сферические функции.

6 семестр.

1. Понятие о нелинейных уравнениях математической физики.
Нелинейное уравнение Шредингера. Уравнение sin-Gordon. Уравнение Кортевега-де Вриза. Точно решаемые задачи

2. Метод конечных разностей.
Разбиения и разностные схемы.

3. **Неоднородные уравнения 2-го порядка.**
Метод Фурье для уравнений с постоянными коэффициентами. Формальное решение неоднородных уравнений. Интегральное представление обратных операторов. Операция сдвига. Т-произведение.

4. **Гауссов функциональный интеграл.**
Функциональный интеграл по гауссовой мере. Гауссова мера и ортогональные системы функций. Функциональные детерминанты.

5. **Волны в среде со случайными примесями.**
Гауссовский случайный процесс. Сдвиг фазы и декремент затухания. Движение электрона в газе.
6. **Функция Грина уравнения Шредингера.**
Парная функция квантового осциллятора. Основное состояние N связанных осцилляторов. Уравнения Шредингера и статистическая сумма в квантовой механике. Спектр гамильтониана и энергия низшего состояния.
7. **Вариационные методы.**
Неравенство Йенсена и вариационный метод вычисления функциональных интегралов.
8. **Полярон.**
Энергия основного состояния. Малые и большие константы связи.
9. **Разряженная горячая плазма.**
Канонический ансамбль. Представление производящего функционала в форме функционального интеграла. Экранировка потенциала Кулона.
10. **Гауссово эквивалентное представление.**
Нормальная форма функционала взаимодействия относительно заданной гауссовой меры. Уравнения самосогласования. Ангармонический и кулоновские потенциалы в гауссово эквивалентном представлении.
11. **Вариационное представление.**
Метод теории возмущений. Функциональный интеграл и вариационные производные. Полиномиальные функционалы взаимодействия и диаграммы Фейнмана.

Практические занятия (семинары)

№ п/п	№ раздела дисциплины	Наименование практических занятий (семинаров)
5-ой семестр		
1	1	Классификация уравнений в частных производных второго порядка.
2	2	Краевые задачи для уравнения Лапласа.
3	2	Краевые задачи для уравнения Лапласа.
4	3	Уравнения гиперболического типа.
5	3	Уравнения гиперболического типа.
6	4	Краевые задачи для уравнения Гельмгольца
7	4	Краевые задачи для уравнения Гельмгольца
8	5	Модель Лэмба
9	5	Модель Лэмба
10	6	Уравнения параболического типа.
11	6	Уравнения параболического типа.
12	7	Общая схема метода разделения переменных.
13	8	Ортогональные системы функций
14	9	Специальные функции математической физики.
15	9	Специальные функции математической физики.
16	9	Специальные функции математической физики.
17	10	Классические ортогональные полиномы
18	1-10	Зачетная неделя

6-ой семестр		
1	1	Нелинейные уравнения математической физики
2	1	Нелинейные уравнения математической физики
3	2	Разбиения и разностные схемы.
4	3	Метод Фурье для уравнений с постоянными коэффициентами.
5	3	Интегральное представление обратных операторов
6	4	Функциональный интеграл по гауссовой мере.
7	4	Функциональные детерминанты.
8	5	Волны в среде со случайными примесями.
9	6	Уравнениye Шредингера и статистическая сумма в квантовой механике.
10	6	Спектр гамильтониана и энергия низшего состояния.
11	7	Неравенство Йенсена и вариационный метод вычисления функциональных интегралов.
12	7	Вариационные методы
13	8	Полярон
14	9	Представление производящего функционала в форме функционального интеграла.
15	9	Разряженная горячая плазма
16	10	Ангармонический и кулоновские потенциалы в гауссово эквивалентном представлении.
17	11	Полиномиальные функционалы взаимодействия и диаграммы Фейнмана.
18	1-11	Зачетная неделя

7.Учебно-методическое обеспечение дисциплины

ОСНОВНАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонов А.Н. Уравнения математической физики: Учебное пособие для университетов / Тихонов Андрей Николаевич, Самарский Александр Андреевич. - 5-е изд.,стер. - М.: Наука, 1977. - 736с.: ил. [М.: Издательство Московского университета; : Наука, 2004]

2. Свешников А.Г. Лекции по математической физике: Учебное пособие для вузов / Свешников Алексей Георгиевич, Боголюбов Александр Николаевич, Кравцов Владимир Владимирович; МГУ им.М.В.Ломоносова. - 2-е изд.,испр.и доп. - М.: Издательство Московского университета; : Наука, 2004.

3. Бицадзе А.В. Уравнения математической физики: Учебник для студентов механико-математических и физических специальностей вузов / Бицадзе Андрей Васильевич. - 2-е изд.,перераб.и доп. - М.: Наука, 1982. - 336с.: ил. - Предм.указ.:с.330.

4. Бицадзе А.В. Сборник задач по уравнениям математической физики: Учебное пособие для вузов / Бицадзе Андрей Васильевич, Калиниченко Дмитрий Федорович. - 3-е изд. - М.: Альянс, 2007

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

5. **Владимиров В.С.** Уравнения математической физики: Учебник для вузов / Владимиров Василий Сергеевич, Жаринов Виктор Викторович. - 2-е изд.,стер. - М.: Физматлит, 2004. - 400с. - (Технический университет). - Список лит.:с.399. - ISBN 5-9221-0310-5.

6. **Будак Б.М.** Сборник задач по математической физике: Учебное пособие для студентов университетов / Будак Борис Михайлович, Самарский Александр Андреевич, Тихонов Андрей Николаевич. - 4-е изд.,испр. - М.: Физматлит, 2003. - 688с.: ил. - Список лит.:с.685. - ISBN 5-9221-0311-3.

7. **Ефимов Г.В.** Метод функционального интегрирования: Учебное пособие для студентов, обучающихся по направлению "Физика" / Ефимов Гарий Владимирович; - Дубна: Международный университет природы, общества и человека "Дубна", 2008.

8. **V.Dineykhan, G.V.Efimov, G.Ganbold, S.N.Nedelko,** Oscillator representation in quantun physics, **Lect.Notes Phys.M26:1-279,1995**. Springer-Verlag, Berlin.

9. **Егоров А.Д.** Введение в теорию и приложения функционального интегрирования / Егоров Александр Дмитриевич, Жидков Евгений Петрович, Лобанов Юрий Юрьевич. - М.: Физматлит, 2006. - 400с.: ил. - Лит.указ.:с.382.-Список лит.:с.384.-Предм.указ.:с.395. - ISBN 9785940521372.

8. Материально-техническое обеспечение дисциплины

Не предусмотрено

9. Формы контроля и оценочные средства для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины[1]

Темы контрольных работ:
K1: Краевые задачи для уравнения Лапласа и уравнения теплопроводности.
K2: Метод разделения переменных
K3: Специальные функции
K4: Нелинейные уравнения математической физики
K5: Метод функции Грина
K6: Функциональный интеграл и вариационные производные

Вопросы, выносимые на экзамен

Часть I. Однородные уравнения математической физики.

1. Уравнения второго порядка, классификация, приведение к каноническому виду, характкристики.
2. Уравнения эллиптического вида, гармонические функции, краевая задача.
3. Интегральное представление гармонических функций, принцип максимума, теорема Лиувилля.
4. Теория потенциала, уравнение Пуассона, потенциал шара в $\mathbf{R}^3$. Гиперболические уравнения, волновое уравнение, задача Коши и краевая задача.
5. Гиперболические уравнения. формулы Даламбера, Пуассона и Кирхгофа.
6. Гиперболические уравнения. Принцип Гюйгенса. Установившиеся и вынужденные колебания.
7. Осциллятор на струне (Модель Лэмба).
8. Параболические уравнения, уравнение теплопроводности, представление Гаусса - оператор сдвига.
9. Метод разделения переменных, сферические координаты.

[1]

10. Ортогональные системы, полнота, необходимое и достаточное условие полноты, собственные функции и собственные значения.
11. Тригонометрическая система.
12. Классические ортогональные полиномы, условие Пирсона, представление, уравнение, собственные значения, нормировка, производящая функция.
    a) Полиномы Эрмита: уравнение, собственные значения, нормировка, производящая функция.
    b) Полиномы Лагерра: уравнение, собственные значения, нормировка, производящая функция, асимптотическое поведение.
    c) Полиномы Якоби: уравнение, собственные значения, нормировка, производящая функция.
    d) Полиномы Чебышева: уравнение, собственные значения, нормировка, производящая функция.
    e) Полиномы Лежандра: уравнение, собственные значения, нормировка, производящая функция.
    f) Присоединенные функции Лежандра, сферические функции, уравнение, собственные значения, нормировка.
13. Функции Бесселя $J_n(z)$: уравнение, ряд, производящая функция, асимптотическое поведение.
14. Функции Ханкеля $H_n^{(1,2)}(z)$: уравнение, интегральное представление, асимптотическое поведение.
15. Связь функций Ханкеля $H_n^{(1,2)}(z)$ с функциями Бесселя и Неймана.

Часть II. Неоднородные уравнения математической физики. Метод функционального интегрирования.

1. Неоднородные уравнения 2-го порядка. Операция сдвига. Т-произведение. Интеральное представление обратных операторов.
2. Гауссов функциональный интеграл. Функциональный интеграл по гауссовой мере. Гауссова мера и ортогональные системы функций. Теория возмущений.
3. Волны в среде со случайными примесями. Функция Грина в форме функционального интеграла. Гауссовский случайный процесс. Сдвиг фазы и декремент затухания.
4. Функция Грина уравнения Шредингера в квантовой механике и квантовой статистике. Спектр гамильтониана и энергия низшего состояния.
5. Неравенство Йенсена и вариационный метод вычисления функциональных интегралов.
6. Полярон. Энергия основного состояния. Малые и большие константы связи.
7. Разряженная горячая плазма. Канонический ансамбль. Представление производящего функционала в форме функционального интеграла. Экранировка потенциала Кулона.
8. Движение квантовой частицы (электрона) в разряженной плазме.
9. Гауссово эквивалентное представление функционального интеграла. Нормальнаая форма функционала взаимодействия относительно заданной гауссовой меры. Уравнения самосогласования.
10. Функциональный интеграл и вариационные производные.
11. Полиномиальные функциональные взаимодействия. Диаграммы Фейнмана и их классификация.