

**Государственное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования Московской области  
«Международный университет природы, общества и человека «Дубна»  
(Университет «Дубна»)**

**Факультет естественных и инженерных наук**

Кафедра теоретической физики

**УТВЕРЖДАЮ**

проректор по учебной работе

\_\_\_\_\_ С.В. Моржухина

« \_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 2011 г.

**ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ**

**Численные методы и математическое моделирование**

**по направлению 010700.62 «ФИЗИКА»**

---

(№, наименование направления, специальности)

Форма обучения: очная

Уровень подготовки: *бакалавр*

Курс 2 семестр 4

Дубна, 2011 г.

## 1. Требования ГОС ВПО

Приближенные числа, погрешности. Вычисление значений простейших функций. Интерполяция и приближение функций. Интерполяционные полиномы. Наилучшее приближение. Среднеквадратичное приближение. Равномерное приближение. Ортогональные многочлены. Сплайн интерполяция. Быстрое преобразование Фурье. Поиск корней нелинейных уравнений. Итерационные методы. Метод Ньютона. Отделение корней. Комплексные корни. Решение систем уравнений. Вычислительные методы линейной алгебры. Прямые и итерационные процессы. Задачи на собственные значения. Численное дифференцирование. Численное интегрирование. Численное интегрирование быстро осциллирующих функций. Многомерные интегралы. Методы Монте-Карло. Задача Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений. Интегрирование уравнений второго и высших порядков. Численные методы решения краевой задачи и задач на собственные значения для обыкновенных дифференциальных уравнений. Вычислительные методы решения краевых задач математической физики. Разностные схемы. Аппроксимация. Устойчивость. Сходимость. Вариационно-разностные методы, метод конечных элементов. Численные методы решения интегральных уравнений. Поиск экстремума, одномерная и многомерная оптимизация. Методы математического программирования. Вычисление псевдообратных матриц и псевдорешений. Сингулярное разложение. Обработка экспериментальных данных.

## 2. Аннотация

Программа дисциплины «Численные методы и математическое моделирование» составлена в соответствии с разделом **ЕН.Ф.4.2** ГОС ВПО для подготовки бакалавров по направлению: 010700.62 «Физика». Дисциплина «Численные методы и математическое моделирование» входит в федеральный цикл общих математических и естественнонаучных дисциплин (**ЕН**).

### **Место курса в профессиональной подготовке бакалавров**

Изучение дисциплины «Численные методы и математическое моделирование» опирается на курсы линейной алгебры и аналитической геометрии, математического анализа, дифференциальных и интегральных уравнений, программирования. Дисциплина «Численные методы и математическое моделирование» является вспомогательной для курсов «Теоретическая физика» и дает возможность численного решения задач следующих разделов теоретической физики: «Механика», «Электродинамика», «Квантовая механика», «Статистическая физика». Естественным продолжением курса «Численные методы и математическое моделирование» являются «Практикум по вычислительной физике», «Компьютерное моделирование физических процессов», «Численное решение уравнений математической физики».

Полученные знания необходимы студентам при подготовке, выполнении и защите выпускной квалификационной работы и при решении научно-исследовательских задач в будущей профессиональной деятельности.

**Формы работы студентов** в ходе изучения дисциплины предусмотрены семинарские занятия с выполнением расчетных работ на компьютере, домашние работы. Отдельные темы теоретического курса прорабатываются студентами самостоятельно в соответствии с планом самостоятельной работы и конкретными заданиями преподавателя с учетом индивидуальных особенностей студентов.

**Самостоятельная работа** студентов, предусмотренная учебным планом, выполняется в ходе семестра в форме подготовки к семинарским занятиям с выполнением домашних работ.

**Виды текущего контроля** – проверка домашних заданий, контрольных работ. Текущий контроль проводится, чтобы установить степень усвоения студентами лекционного материала, а также проверить их навыки программирования при решении задач курса «численные методы и математическое моделирование».

#### **Форма промежуточного контроля**

Зачеты по практическим работам, курсовая работа

### **3. Цели и задачи дисциплины**

Целью курса «Численные методы и математическое моделирование» является изучение наиболее распространенных методов приближенных вычислений и приобретение практических навыков использования численных методов. В большинстве случаев для решения задач обработки эксперимента и математического моделирования процессов уже существуют готовые программные комплексы. Однако, студенты должны иметь ясное представление об основных методах приближенных вычислений и границах их применимости. Это позволит, во-первых, выбирать подходящую для решения конкретной задачи программу, а во-вторых, правильно интерпретировать получаемые результаты. При изучении данного курса предполагается наличие у студента знаний в рамках стандартного курса математического анализа (производная, интеграл, дифференциальные уравнения), аналитической геометрии и линейной алгебры, основ теории функций комплексной переменной, программирования. Основные задачи курса – углубление математического образования и развитие практических навыков в области решения задач теоретической и математической физики, а также обработке экспериментальных данных. Студенты должны быть готовы использовать полученные в этой области знания, как при изучении смежных дисциплин, так и в профессиональной деятельности

### **4. Требования к уровню освоения содержания дисциплины (знания, умения, навыки)**

В результате изучения курса «Численные методы и математическое моделирование» студент должен

**знать** основы теории погрешностей, суть различных численных методов решения конкретных задач, основные методы компьютерного моделирования физических систем;

**уметь** численно решать уравнения и системы уравнений, интерполировать функцию и оценивать возникающую погрешность, применять формулы численного дифференцирования и интегрирования, применять методы численного решения дифференциальных и интегральных уравнений, эффективно анализировать модели и зависимости, описывающие поведение систем различной природы;

**владеть** навыками составления алгоритмов/программ для решения различных физических задач конкретным методом, применения ЭВМ для решения задач численными методами.

В результате решения задач на семинарах и выполнения домашних заданий и курсовой работы студент должен **научиться** применять методы численного решения в физических задачах (механики, электродинамики, квантовой механики, статистической физики, атомной и ядерной физики), применять аппарат математического анализа и статистики в вопросах требующих использования программных вычислительных средств, осуществлять постановку задач и их численную алгоритмизацию.

## 5. Объем дисциплины и виды учебной работы (в часах)

Вид занятий	Всего часов	4-й семестр	
Общая трудоемкость	87	87	
<b>Аудиторные занятия:</b>	<b>72</b>	<b>72</b>	
Лекции	36	36	
Семинары	36	36	
<b>Самостоятельная работа:</b>	<b>15</b>	<b>15</b>	
Виды итогового контроля		Зачет, курсовая работа	

## 6. Разделы дисциплины

№	Раздел дисциплины	Лекции	Семинары	Сам. раб.
1.	Приближенные числа и действия над ними	1	1	1
2.	Интерполяция и приближение функций.	5	5	2
3.	Численное решение нелинейных уравнений	4	4	1
4.	Численное решение систем нелинейных уравнений	2	2	1
5.	Численное решение систем линейных уравнений	5	5	1
6.	Численное решение задачи на собственные значения	4	4	2
7.	Численное интегрирование	5	5	2
8.	Численное дифференцирование	1	1	1
9.	Численные методы решения ОДУ. Задача Коши.	5	5	2
10.	Численные методы решения ОДУ. Краевая задача	4	4	2

### Содержание разделов дисциплины

#### Приближенные числа и действия над ними.

Дискретизация. Приближенные числа, погрешности (абсолютная и относительная). Обусловленность. Вычисление значений простейших функций. О методах вычислений.

#### Интерполяция и приближение функций.

Основные понятия. Приближение функций интерполяционными полиномами. Погрешность интерполяции. Возможные обобщения приближения функций. Кусочная интерполяция. Наилучшее приближение. Среднеквадратичное приближение. Равномерное приближение. Метод сплайнов. Ортогональные многочлены. Быстрое преобразование Фурье. Интерполяция функций двух переменных.

#### Численное решение нелинейных уравнений.

Численное решение нелинейных уравнений. Методы отделения корней, сканирования, деления отрезка пополам, хорд, Ньютона, простых итераций, релаксаций. Графическая интерпретация рассмотренных методов. Погрешности методов.

#### Численное решение систем нелинейных уравнений.

Формулировка задачи. Метод Ньютона. Метод простых итераций. Комплексные корни. Варианты итерационных схем. Погрешности методов.

### **Численное решение систем линейных уравнений.**

Численное решение систем линейных уравнений. Вычислительные методы линейной алгебры. Прямые методы. Методы Гаусса, главного элемента, Жордана, прогонки, квадратного корня. Итерационные методы, Якоби, Зейделя, оптимизации параметра. Плохо обусловленные системы. Задачи на собственные векторы и собственные значения. Методы отражения, вращений для эрмитовых матриц. Обусловленность систем линейных алгебраических уравнений. Число обусловленности матрицы. Псевдорешения систем линейных алгебраических уравнений и псевдообратные матрицы. Сингулярное разложение.

### **Численное интегрирование.**

Численное интегрирование. Квадратурные формулы. Погрешности квадратурных формул и их устойчивость. Алгоритм Ромберга. Возможности переменного шага. Интегрирование быстро осциллирующих функций. Метод Гаусса. Несобственные интегралы. Многомерные интегралы. Метод Монте-Карло.

### **Численное дифференцирование.**

Построение формул для приближенного вычисления производных. Анализ погрешности. Неустойчивость численного дифференцирования.

### **Численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Задача Коши.**

Задача Коши для системы уравнений первого порядка, разрешенных относительно производных. Методы Эйлера (явный и неявный). Представление о методах, как о разностных схемах, аппроксимирующих исходную задачу. Анализ погрешности. Модифицированный метод Эйлера, предиктор-корректор, Метод Рунге-Кутты. Представление о многошаговых методах, методы Адамса. Метод Милна, метод Пикара, специальные методы. Интегрирование уравнений второго и высших порядков.

### **Численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Краевая задача.**

Численное решение краевых задач. Линейный случай: непосредственная аппроксимация исходной задачи, сведение ее к последовательности задач Коши. Нелинейные задачи: прогонка с итерациями (для уравнений второго порядка), метод «стрельбы». Разностные схемы для обыкновенных дифференциальных уравнений. Аппроксимация, устойчивость, сходимость. Теорема о сходимости численного решения к решению исходной задачи.

#### Практические занятия (семинары)

№ п/п	№ раздела дисциплины	Наименование практических занятий (семинаров)
1.	Приближенные числа и действия над ними	Основы теории погрешностей. Приближенные числа, абсолютная и относительная погрешности Обусловленность. Вычисление значений простейших функций. Упражнения и задачи.
2.	Интерполяция функций.	Приближение значения таблично заданной функции в точке с помощью: - интерполяционного многочлена Лагранжа заданной степени;

		<ul style="list-style-type: none"> <li>- по схеме Эйткена;</li> <li>- многочленов Ньютона;</li> <li>- многочленами Чебышева.</li> </ul> <p>Обратная интерполяция. Интерполирование сплайнами. Среднеквадратичное, наилучшее и равномерное приближения. Быстрое преобразование Фурье.</p>
3.	Численное решение нелинейных уравнений	<p>Численные методы решения нелинейных уравнений:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- локализация корней уравнения; уточнение значения корня;</li> <li>- методом половинного деления;</li> <li>- методом хорд;</li> <li>- методом касательных;</li> <li>- комбинированным методом хорд и касательных.</li> <li>- методом итерации с различным выбором константы, обеспечивающей сжатость отображения;</li> <li>- методом итерации с различным выбором константы, обеспечивающей сжатость отображении</li> </ul>
4.	Численное решение систем нелинейных уравнений	<p>Численные методы решения нелинейных уравнений:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- методом итераций</li> <li>- методом Ньютона</li> </ul>
5.	Численное решение систем линейных уравнений	<p>Численные методы решения систем линейных алгебраических уравнений:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- прямыми методами ( Гаусса, с выбором главного элемента, прогонки)</li> <li>- методом простой итерации;</li> <li>- методом Якоби, Зейделя:</li> </ul> <p>Псевдорешения систем линейных алгебраических уравнений и псевдообратные матрицы.</p>
6.	Численное решение задачи на собственные значения	<p>Численное решение задачи на собственные векторы и собственные значения:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- метод следов</li> <li>- простых итераций</li> <li>- метод отражения</li> <li>- вращения:</li> <li>- QR-алгоритм</li> </ul>
7.	Численное интегрирование	<p>Вычисление интеграла (применяется практическая оценка погрешности):</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- по различным квадратурным формулам;</li> <li>- алгоритм Ромберга;</li> <li>- с использованием метода Монте-Карло;</li> <li>- вычисление интегралов с особенностями;</li> <li>- вычисление силы Казимира с помощью двойного интеграла.</li> </ul>
8.	Численное дифференцирование	<p>Вычисление производной в узле таблично заданной функции.</p>
9.	Численные методы решения ОДУ. Задача Коши.	<p>Численное решение задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- методы Эйлера (явный, неявный, модифицированный, с пересчетом);</li> <li>- метод Рунге-Кутта;</li> </ul>

		<ul style="list-style-type: none"> <li>- методы Адамса;</li> <li>- метод Милна, Пикара;</li> <li>- специальные методы</li> </ul> Решение систем ОДУ, решение физической задачи нахождения масс частиц
10.	Численные методы решения ОДУ. Краевая задача	Численное решение краевой задачи для линейного дифференциального уравнения 2-ого порядка. Линейный случай: <ul style="list-style-type: none"> <li>- непосредственная аппроксимация исходной задачи, сведение ее к последовательности задач Коши;</li> </ul> Нелинейные задачи: <ul style="list-style-type: none"> <li>- прогонка с итерациями,</li> <li>- метод «стрельбы»;</li> </ul> Методы минимизации невязки (коллокаций, наименьших квадратов, моментов, Галеркина).

## 7. Учебно-методическое обеспечение дисциплины

### ОСНОВНАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Н.Н.Калиткин, *Численные методы* – С.-Пб.:БХВ-Петербург, 2011.
2. Н.С.Бахвалов, Н.П.Жидков, Г.М.Кобельков, *Численные методы* - М.:БИНОМ, 2008.
3. Д.В.Костомаров, А.Л.Фаворский *Вводные лекции по численным методам*, Москва 2004
4. А.А.Самарский, А.П.Михайлов, *Математическое моделирование*. - М.:Физматлит, 2002.
5. А.А.Самарский, А.В.Гулин. *Численные методы*. - М.:Наука, 1989.
6. В.С.Рябенский, *Введение в вычислительную математику*. - М.:Физматлит, 2000.

### ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

7. А.А.Самарский. *Теория разностных схем*. - М.,”Наука”, 1983.
8. Ф.Р.Гантмахер, *Теория матриц*. М.: Физматлит, 2004, 533с.
9. А.В.Манжиров, А.Д.Полянин *Методы решения интегральных уравнений*. Справочник.М.: Наука, 1999, 272 стр.
10. В.А.Ильина, П.К.Силаев, *Численные методы для физиков-теоретиков*, Москва-Ижевск, 2003 (т.1 и т.2)
11. Д.В.Беклемишев, *Дополнительные главы линейной алгебры*. – М.:Наука, 1983.

## 8. Материально-техническое обеспечение дисциплины

- оверхэд
- мультимедийный проектор
- компьютерный класс

## 9. Формы контроля и оценочные средства для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации

### 9.1. ТЕКУЩИЙ КОНТРОЛЬ:

1. Абсолютная и относительная погрешности приближённого числа
2. Понятия значащей, верной, сомнительной цифры в записи приближённого числа
3. Правила округления и погрешность округления
4. Методы отделения корней скалярных уравнений
5. Приближённое вычисление значения корня скалярного уравнения
6. Точные методы решения систем уравнений
7. Построение интерполяционного многочлена Лагранжа, Ньютона
8. Общий случай вычисления значения производной произвольного порядка
9. Численное дифференцирование на основе интерполяционного многочлена
10. Метод наименьших квадратов
11. Квадратурные формулы прямоугольников
12. Решение задачи Коши для дифференциального уравнения 1 порядка с помощью одного из изученных способов решения
13. Численное решение краевой задачи для дифференциального уравнения 2 порядка
14. Численное решение линейного уравнения в частных производных с использованием разностных схем

#### *9.2. ПРОМЕЖУТОЧНЫЙ КОНТРОЛЬ:*

1. Основы теории погрешностей
2. Численные методы решения алгебраических и трансцендентных уравнений с одной переменной. Вывод одной из формул, не включая метод итерации.
3. Метод итерации. Идея метода, геометрическая иллюстрация метода.
4. Решение систем линейных уравнений методом простой итерации. Идея метода, рассмотреть один из вариантов выборки метрики в  $n$ -мерном пространстве.
5. Метод исключения Гаусса для решения систем линейных уравнений.
6. Задача интерполирования. Вывод одной из формул интерполяции с оценкой погрешности.
7. Интерполяционная схема Эйткена.
8. Обратное интерполирование.
9. Интерполяция сплайнами.
10. Задача численного дифференцирования. Формула численного дифференцирования.
11. Численное интегрирование. Вывод одной из формул численного интегрирования с оценкой погрешности.
12. Обработка экспериментальных данных по методу наименьших квадратов.
13. Методы Рунге-Кутты для решения дифференциальных уравнений. Вывод формулы для  $q=1$ .
14. Метод Монте-Карло для вычисления интеграла функции
15. Решение краевой задачи для дифференциального уравнения 2 порядка методом прогонки
16. Численное решение линейного уравнения в частных производных с использованием разностных схем

## **IV. Учебно-методические материалы**

### **1. Методические указания по выполнению, оформлению курсовых работ и защите курсовых работ**

В четвертом семестре студенты выполняют курсовую работу. В конце семестра происходит защита курсовой работы. Курсовая работа должна быть оформлена согласно Положению о оформлении и защите курсовых работ в университете «Дубна» (приказ № 2221 от 14.10.2010).

Курсовая работа выполняется каждым студентом индивидуально, при этом тема и задание курсовой работы может совпадать.

## 1.1. Структура курсовой работы

Структура курсовой работы включает в себя:

- 1) титульный лист,
- 2) содержание,
- 3) задание (постановка задачи),
- 4) введение,
- 5) основная часть (метод решения задачи),
- 6) результаты и заключение,
- 7) список использованной литературы,
- 8) приложения

Во введении раскрываются цели, методы и задачи исследования, дается общая характеристика структуры работы. В основной части излагается содержание темы, описываются примененные методы и излагается расчет, требуемый в задаче. В заключении приводятся результаты, подводятся итоги работы, делаются выводы. В приложение приводится текст программы.

## 1.2. Рекомендации по оформлению курсовой работы

Курсовая работа оформляется на стандартных листах А4, объем работы – 10-15 страниц текста, набранного шрифтом Times New Roman черного цвета с полуторным интервалом, высота шрифта – 12 кегль, без применения полужирного шрифта. Абзацный отступ 1,25 знака, поля: верхнее – 20 мм, правое – 20 мм, левое – 30 мм, нижнее – 20 мм.

Страницы имеют сквозную нумерацию, номер указывается в центре нижнего поля. Титульный лист считается первой страницей, содержание – третьей и т.д. Номер страницы на титульном листе не проставляется.

Титульный лист оформляется в соответствии с приложением №1 Положения о выполнении и защите курсовых работ.

Слово «СОДЕРЖАНИЕ» размещается по центру страницы в виде заголовка прописными буквами. Заголовки пунктов содержания записываются с прописной буквы строчными буквами. Заголовки пунктов содержания основной части работы имеют порядковую нумерацию и обозначаются арабскими цифрами. Введение и заключение не нумеруются.

В конце работы приводится список использованной литературы в соответствии со стандартами: ГОСТ 7.1-2003, ГОСТ 7.80-2000, ГОСТ 7.82-2001.

Защита курсовых работ происходит до начала экзаменационной сессии. Студенты, не сдавшие и не защитившие курсовую работу, не допускаются к сдаче экзаменов.

## 1.3. Примеры тем курсовых работ по курсу «Численные методы и математическое моделирование»

1. Решение квазилинейного эллиптического уравнения в частных производных методом чебышевского ускорения
2. Приближенное вычисление тройного интеграла
3. Решение квазилинейного эллиптического уравнения в частных производных
4. Интерполяция методом кубического сплайна
5. Решение уравнения Пуассона с краевыми условиями.
6. Решение задачи Штурма-Лиувилля с заданным потенциалом
7. Решение системы нелинейных уравнений методами Ньютона и простых итераций

