КВАНТОВЫЕ ПОЛЯ:
ВОСПОМИНАНИЯ О БУДУЩЕМ

Д.КАЗАКОВ
БЛТФ ОИЯИ

Преамбула:

- Все успехи физики элементарных частиц основаны на квантовой теории поля
- Аппарат КТП претерпел мало изменений (СМ во многом повторяет КЭД), но КХД заметно расширила арсенал КТП (уравнения эволюции, ДГЛАП, БФКЛ, …)

- Основу применения КТП составляет метод теории возмущений (диаграммы Фейнмана)
- Непертурбативные методы (за исключение решеточных калибровочных теорий) - фрагментарны

- Точные решения (до недавнего времени) удалось получить лишь в двумерных теориях
- Неперенормируемые теории, включая гравитацию в D=4, не поддаются систематическому анализу

Некоторые точные результаты в D=4

- Суперсимметрия позволила получить ряд точных утверждений справедливых во всех порядках ТВ (аналог Тождеств Уорда и Славнова-Тейлора)

- В N =1 суперсимметрии суперпотенциал не переформируется во всех порядках ТВ
- В N=4 D=4 все УФ расходимости в калибровочно-инвариантных величинах сокращаются во всех порядках ТВ - первая конечная теория с взаимодействием
- В N=2 D=4 теории УФ расходимости возникают только в 1 петле
- В N=1 D=4 теориях, подкручивая юкавские константы, можно построить конечную теорию

- Точная бета-фунуция Новикова-Шифмана-Вайнштейна-Захарова $N = 1\ SYM$

Чистый ЯМ

$$\beta(\alpha) = -\frac{3\alpha^2 C_2}{2\pi(1 - C_2\alpha/2\pi)}$$

ЯМ с материей

$$\beta(\alpha) = -\frac{3\alpha^2(C_2 - T(R) + C(R)\gamma(\alpha))}{2\pi(1 - C_2\alpha/2\pi)}$$

- К.Степанянц построил явную схему перенормировок на основе регуляризации высшими производными, где реализуется схема НШВЗ

Спинорно-киральный формализм: Амплитуды

Любой светоподобный вектор $p_{(i)}^2 = 0$ можно представить в виде

Rev. in BernDixonKosower 96

$$p_\mu^{(i)} \mapsto (\sigma^\mu)_{\alpha\dot\alpha} p_\mu^{(i)} = \lambda_\alpha^{(i)} \tilde\lambda_{\dot\alpha}^{(i)}$$

$$\lambda_\alpha \in SL(2,\mathbb{C})$$

$$\epsilon^{\alpha\beta}\lambda_\alpha^{(i)}\lambda_\beta^{(j)} \equiv \langle ij \rangle = \sqrt{(p_i+p_j)^2} e^{i\phi_{ij}} = \sqrt{s_{ij}} e^{i\phi_{ij}}, \;\; \phi_{ij} \in \mathbb{R}$$

$$(\langle ij \rangle)^* \equiv [ij]$$

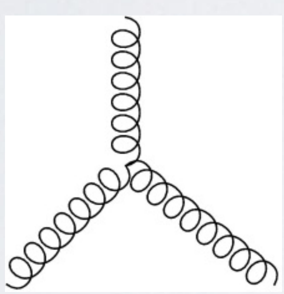
Решения безмассового ур. Дирака

Amplitudes

Вектор поляризации

$$\epsilon_\mu^+(p) \mapsto \epsilon_{\alpha\dot\alpha}^+(p) = \frac{\lambda_\alpha^k \tilde\lambda_{\dot\alpha}^p}{\sqrt{2}\langle kp \rangle}$$

$$\epsilon_\mu^-(p) \mapsto \epsilon_{\alpha\dot\alpha}^-(p) = \frac{\lambda_\alpha^p \tilde\lambda_{\dot\alpha}^k}{\sqrt{2}[kp]}$$



$\mp$ $\pm$

$$p_i \in \mathbb{C}$$

$$A_3(g_1^- g_1^- g_3^+) \sim \frac{\langle 12 \rangle^4}{\langle 12 \rangle \langle 23 \rangle \langle 31 \rangle}$$

$$A_3(g_1^+ g_1^+ g_3^-) \sim \frac{[12]^4}{[12][23][31]}$$

Классификация

$$\mathrm{MHV}_n = \lambda_{tot} = n-4$$

$$\mathrm{N}^k\mathrm{MHV}_n = \lambda_{tot} = n-2k$$

Нет необходимости в фиксации калибровки, гостах Фаддеева-Попова, БРСТ, формализме Баталина-Вилковысского, и т.д.

Пертурбативное разложение амплитуд (максимально суперсимметричные теории)

$$M_n = A_4/A_4^{tree} = 1 +$$

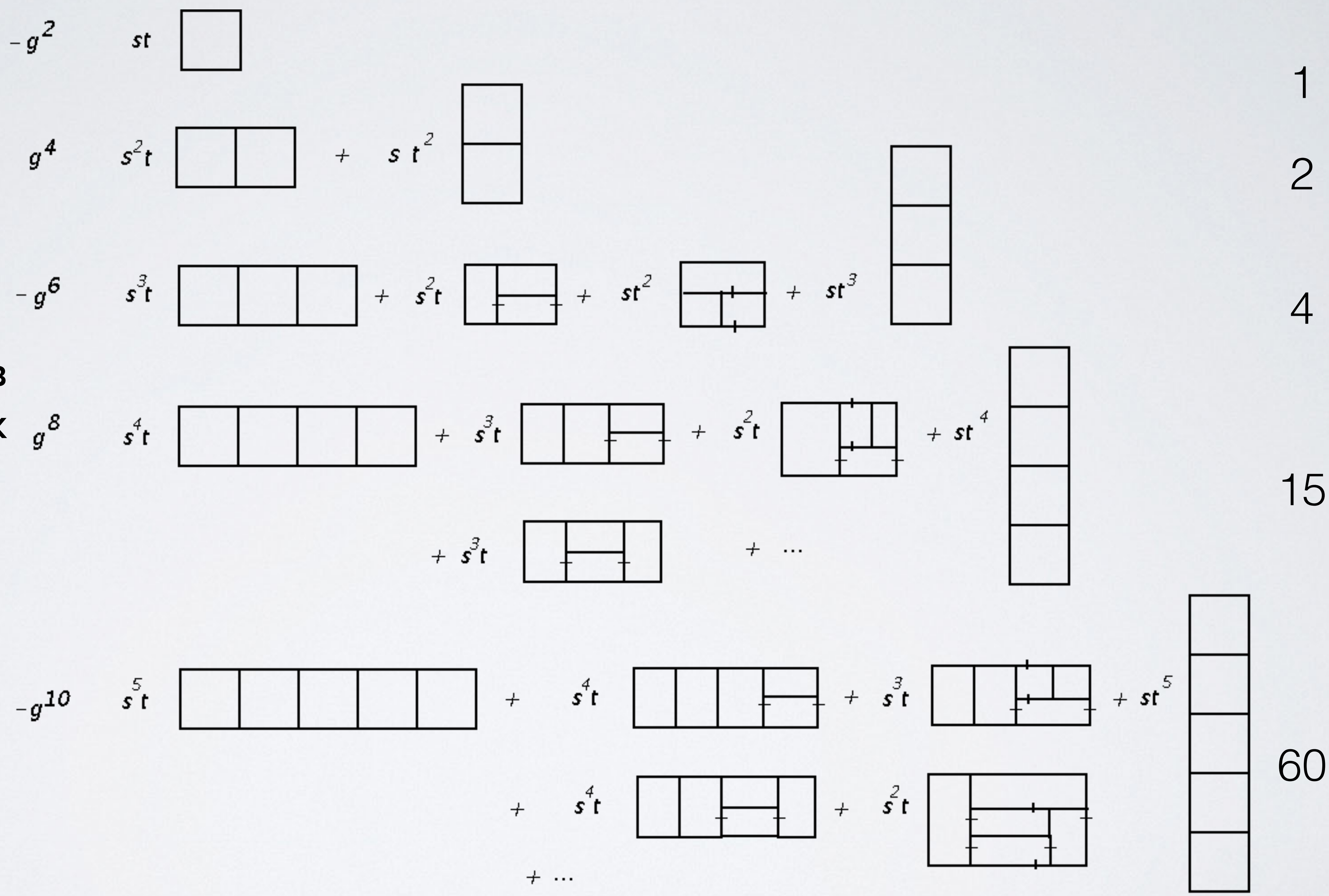
T. Dennen Yu-yin Huang 10 ,
S.Caron-Huot D.O'Connell 10

Нет петель и треугольников

Первые УФ расх в L=[6/(D-4)] петлях

УФ конечны D=4

ИК конечны D>4



Универсальное разложение при всех D в максимальных СУЗИ теориях

Точный результат в D=4 (BDS - анзатц)

D=4 N=4

- Нет УФ расходимостей во всех петлях
- ИК и коллинеарные расход на массовой поверхности

BDS - анзатц: *Bern, Dixon, Smirnov 05*

$$\mathcal{M}_n \equiv \frac{A_n}{A_n^{tree}} = 1 + \sum_{L=1}^{\infty}\left(\frac{g^2 N_c}{16\pi^2}\right)^L M_n^{(L)}(\epsilon) = \exp\left[\sum_{l=1}^{\infty}\left(\frac{g^2 N_c}{16\pi^2}\right)^l \left(f^{(l)}(\epsilon) M_n^{(1)}(l\epsilon) + C^{(l)} + E_n^{(l)}(\epsilon)\right)\right]$$

$$\mathcal{M}_n(\epsilon) \;=\; \exp\left[-\frac{1}{8}\sum_{l=1}^{\infty}\left(\frac{g^2 N_c}{16\pi^2}\right)^l \left(\frac{\gamma_{cusp}^{(l)}}{(l\epsilon)^2} + \frac{2G_0^{(l)}}{l\epsilon}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\mu^2}{-s_{i,i+1}}\right)^{l\epsilon} + \frac{1}{4}\sum_{l=1}^{\infty}\left(\frac{g^2 N_c}{16\pi^2}\right)^l \gamma_{cusp}^{(l)} F_n^{(1)}(0) + C(g)\right]$$

ИК и коллинеарные расходимости в размерной регуляризации

cusp аномальная разм

$$M_4^{(1-loop)}(\epsilon) = A_4^{(1-loop)}/A_4^{(tree)} = \frac{\Gamma(1-\epsilon)^2}{\Gamma(1-2\epsilon)}\left[\frac{1}{\epsilon^2}\left(\left(\frac{\mu^2}{s}\right)^{\epsilon} + \left(\frac{\mu^2}{-t}\right)^{\epsilon}\right) - \frac{1}{2}\log^2\left(\frac{s}{-t}\right) - \frac{\pi^2}{3}\right] + \mathcal{O}(\epsilon)$$

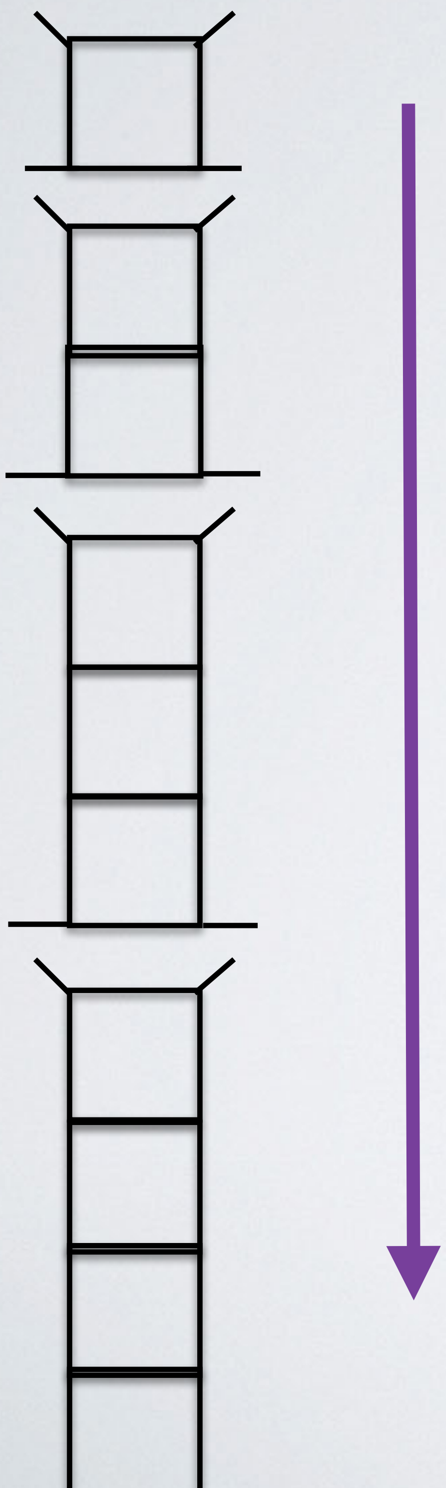
Справедливо для амплитуд с 4 и 5 внешними ногами, далее появляется остаточный член

Пертурбативное разложение амплитуд D=6 N=2

Ведущие двойные логарифмы

УФ конечны

Редже предел $s \to \infty, \quad t < 0, \ fixed$



$$B_n(t,s) \simeq \frac{1}{s}\frac{L^{2n}(x)}{n!(n+1)!}, \qquad L \equiv \log(s/t)$$

Bork,Kazakov,Vlasenko, 13

$$\frac{A_4}{A_4^{(0)}}\bigg|_{L.L.} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-g^2t/2)^n L^{2n}(x)}{n!(n+1)!}, \quad \text{where} \quad g^2 \equiv \frac{g_{YM}^2 N_c}{64\pi^3}.$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-g^2t/2)^n L^{2n}(x)}{n!(n+1)!} = \frac{I_1(2y)}{y}, \qquad y \equiv \sqrt{g^2|t|/2}\ L(x)$$

$$\boxed{\frac{A_4}{A_4^{(0)}}\bigg|_{L.L.} \sim \left(\frac{s}{t}\right)^{\alpha(t)-1}}$$

!

Редже поведение

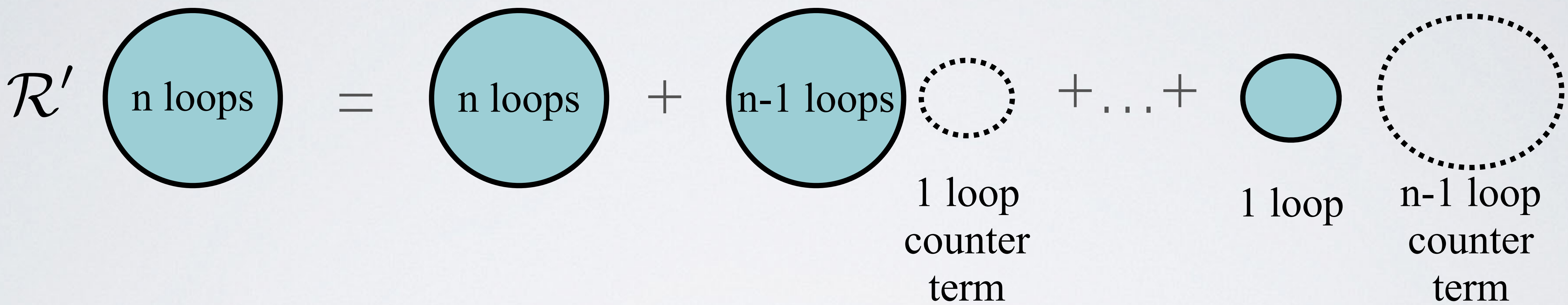
Точный результат $N_c \to \infty$

$$\alpha(t) = 1 + 2\sqrt{g^2|t|/2} = 1 + \sqrt{\frac{g_{YM}^2 N_c|t|}{32\pi^3}}$$

BPHZ R-operation

$$\mathcal{R}'G_n = \frac{A_n^{(n)}(\mu^2)^{n\epsilon}}{\epsilon^n} + \frac{A_{n-1}^{(n)}(\mu^2)^{(n-1)\epsilon}}{\epsilon^n} + \ldots + \frac{A_1^{(n)}(\mu^2)^{\epsilon}}{\epsilon^n}$$

$$+ \qquad \text{lower pole terms}$$



$A_k^{(n)}(\mu^2)^{k\epsilon}$ terms appear after subtraction of (n-k) loop counter terms

<u>Statement:</u> $R'G_n$ is local, i.e. terms like $\log^k \mu^2/\epsilon^m$ should cancel for any k and m

<u>Consequence:</u> $A_n^{(n)} = (-1)^{n+1}\dfrac{A_1^{(n)}}{n}$

The leading divergences are governed by 1 loop diagrams!

Пертурбативное разложение амплитуд D=6 N=2

Ведущие логарифмы $s \to \infty, t \to \infty$ УФ расходимости

$$M_4(s,t) = 1 + \Sigma_s(s,t) + \Sigma_t(s,t) \qquad \Sigma_s = \sum_{n=3}^{\infty}(-z)^n S_n, \quad \Sigma_t = \sum_{n=3}^{\infty}(-z)^n T_n$$

s-channel term $S_n(s,t)$ t-channel term $T_n(s,t)$ $T_n(s,t) = S_n(t,s)$

Точное соотношение для всех диаграмм

Bork,Kazakov,Kompaneets,Vlasenko, 13

$$\boxed{nS_n(s,t) = -2s\int_0^1 dx \int_0^x dy\ (S_{n-1}(s,t') + T_{n-1}(s,t'))}$$

$n \geq 4$

$t' = t(x-y) - sy$

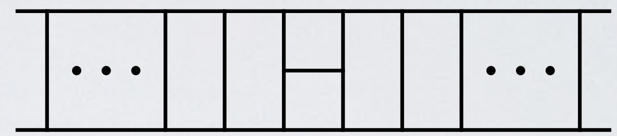
$S_3 = -s/3, \ T_3 = -t/3$

Дифф ур-е Обобщённое уравнение ренормгруппы $z \equiv \dfrac{g^2}{\epsilon} \leftrightarrow g^2 \log(\mu^2)$

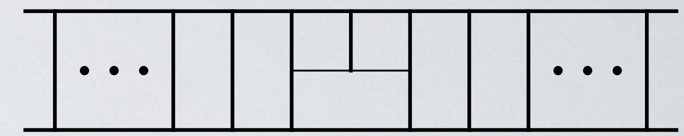
$$\boxed{z\frac{d}{dz}\Sigma_s(s,t,z) = sz - 2\Sigma_s(s,t,z) + 2sz\int_0^1 dx \int_0^x dy (\Sigma_s(s,t',z) + \Sigma_t(s,t',z))|_{t'=xt+yu}}$$

Решение РГ уравнения D=6 N=2

Горизонтальная лестница + теннисный корт



Ladder



Lddder 2

$$\Sigma_L(s,z) = \frac{2}{s^2z^2}(e^{sz} - 1 - sz - \frac{s^2z^2}{2})$$

$$\Sigma_{L2} = \frac{1}{2s^2z^2}\left[27(e^{z/3} - 1 - \frac{z}{3} - \frac{1}{2}\frac{z^2}{9} - \frac{1}{6}\frac{z^3}{27})(1+2\frac{t}{s}) - (e^z - 1 - sz - \frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{6}z^3)\right]$$

В общем случае - численное решение близкое по своим свойствам к лестничному приближению

$$\Sigma_s + \Sigma_t \sim e^{(s+t)z}$$

$$z \to \infty \qquad \begin{array}{l} s+t = -u > 0, \quad \Sigma \to \infty \\ s+u = -t > 0, \quad \Sigma \to \infty \\ t+u = -s < 0, \quad \Sigma \to const \end{array}$$

D=8 N=1

Пертурбативное разложение амплитуд

Bork,Kazakov,Tolkachev,Vlasenko, 14

Ведущие логарифмы $s \to \infty, t \to \infty$ УФ расходимости

$$\boxed{\begin{aligned} nS_n(s,t) &= -2s^2 \int_0^1 dx \int_0^x dy\ y(1-x)\ (S_{n-1}(s,t') + T_{n-1}(s,t'))|_{t'=tx+yu} \\ + \quad & s^4 \int_0^1 dx\ x^2(1-x)^2 \sum_{k=1}^{n-2} \sum_{p=0}^{2k-2} \frac{1}{p!(p+2)!}\ \frac{d^p}{dt'^p}(S_k(s,t') + T_k(s,t')) \times \\ & \times \frac{d^p}{dt'^p}(S_{n-1-k}(s,t') + T_{n-1-k}(s,t'))|_{t'=-sx}\ (tsx(1-x))^p \end{aligned}}$$

Дифф ур-е $S_1 = \frac{1}{12},\ T_1 = \frac{1}{12}$

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{d}{dz}\Sigma(s,t,z) &= -\frac{1}{12} + 2s^2 \int_0^1 dx \int_0^x dy\ y(1-x)\ (\Sigma(s,t',z) + \Sigma(t',s,z))|_{t'=tx+yu} \\ -s^4 & \int_0^1 dx\ x^2(1-x)^2 \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!(p+2)!} (\frac{d^p}{dt'^p}(\Sigma(s,t',z) + \Sigma(t',s,z))|_{t'=-sx})^2\ (tsx(1-x))^p. \end{aligned}}$$

Решение РГ уравнения   D=8 N=1

Borlakov,Kazakov,Tolkachev,Vlasenko, 16

Горизонтальная лестница

Дифф ур-е
$$\frac{d}{dz}\Sigma_A = -\frac{1}{3!} + \frac{2}{4!}\Sigma_A - \frac{2}{5!}\Sigma_A^2 \qquad z = g^2 s^2/\epsilon$$

$$\boxed{\Sigma_A(z) = -\sqrt{5/3}\,\frac{4\tan(z/(8\sqrt{15}))}{1-\tan(z/(8\sqrt{15}))\sqrt{5/3}} = \sqrt{10}\,\frac{\sin(z/(8\sqrt{15}))}{\sin(z/(8\sqrt{15})-z_0)}}$$

$$\Sigma(z) = -(z/6 + z^2/144 + z^3/2880 + 7z^4/414720 + \dots) \qquad z_0 = \arcsin(\sqrt{3/8})$$

В общем случае - численное решение близкое по своим свойствам к лестничному приближению: имеется бесконечное количество полюсов в обеих направлениях

Скалярная теория

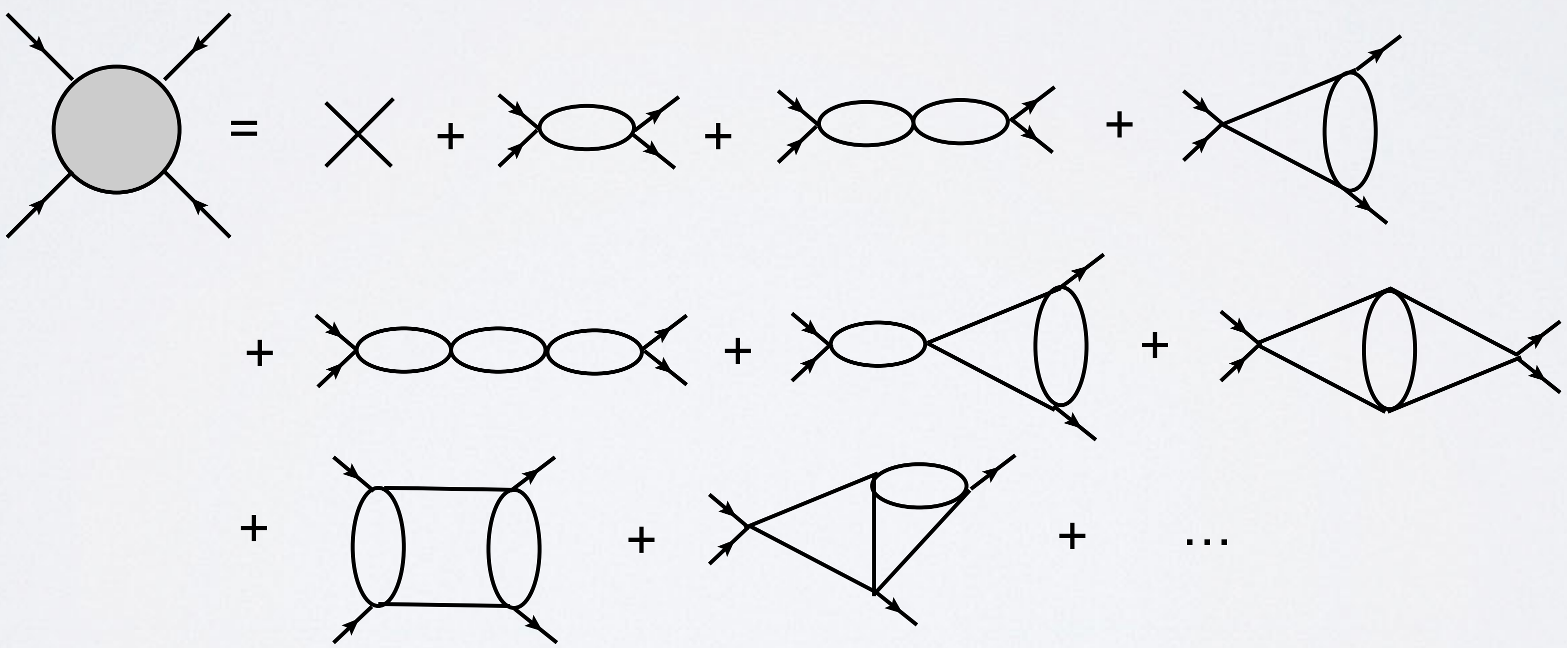
$\boxed{\phi^4_D}$ $\qquad D = 4, 6, 8, 10 \qquad [\lambda] = 2 - D/2$

Kazakov,18

2->2 амплитуда рассеяния на массовой поверхности $\quad m = 0 \qquad s + t + u = 0$

$$\Gamma_4(s,t,u) = \lambda(1 + \Gamma_s(s,t,u) + \Gamma_t(s,t,u) + \Gamma_u(s,t,u))$$

ТВ: $$\Gamma_s = \sum_{n=1}^{\infty}(-z)^n S_n, \quad \Gamma_t = \sum_{n=1}^{\infty}(-z)^n T_n, \quad \Gamma_u = \sum_{n=1}^{\infty}(-z)^n U_n, \quad z \equiv \frac{\lambda}{\epsilon}$$



ТВ разложение (показан только s-канал)

Рекуррентные соотношения для лидирующих полюсов

$$
\begin{aligned}
nS_n(s,t,u) \;=\;& \frac{s^{D/2-2}}{\Gamma(D/2-1)}\int_0^1 dx[x(1-x)]^{D/2-2}\left(S_{n-1}(s,t',u')+T_{n-1}(s,t',u')+U_{n-1}(s,t',u')\right) \\
+\;& \frac{1}{2}\frac{s^{D/2-2}}{\Gamma(D/2-1)}\int_0^1 dx[x(1-x)]^{D/2-2}\sum_{k=1}^{n-2}\sum_{p=0}^{(D/2-2)k}\sum_{l=0}^{p}\frac{1}{p!(p+D/2-2)!}\times \\
\times\;& \frac{d^p}{dt'^l du'^{p-l}}(S_k+T_k+U_k)\frac{d^p}{dt'^l du'^{p-l}}(S_{n-k-1}+T_{n-k-1}+U_{n-k-1})s^p[x(1-x)]^p t^l u^{p-l}
\end{aligned}
$$

$$t' = -xs, u' = -(1-x)s$$

Дифференциальное (РГ) уравнение

$$
\frac{d\Gamma_s(s,t,u)}{d\log\mu^2} = -\frac{\lambda}{2}\frac{s^{D/2-2}}{\Gamma(D/2-1)}\int_0^1 dx[x(1-x)]^{D/2-2}\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{p}\frac{1}{p!(p+D/2-2)!}\times
$$

$$
\times\left(\frac{d^p\bar{\Gamma}_4(s,t',u')}{dt'^l du'^{p-l}}\Big|_{\substack{t'=-xs,\\ u'=-(1-x)s}}\right)^2 s^p[x(1-x)]^p t^l u^{p-l}
$$

$$\Gamma_s(\log\mu^2=0)=0$$

Effective Potential in Scalar Theory in D=4

Generating functional for Green functions

$$Z(J) = \int \mathcal{D}\phi \ \exp\left(i \int d^4x \ \mathcal{L}(\phi, d\phi) + J\phi \right)$$

$$W(J) = -i \log Z(J)$$ IPI generating functional

Effective action

$$\Gamma(\phi) = W(J) - \int d^4x J(x)\phi(x)$$ Legendre transformation

$$e^{i\Gamma(\hat{\phi})} = \int \mathcal{D}\phi \ e^{i(S[\hat{\phi}+\phi]-\phi S'[\hat{\phi}])}$$

Shifted Classical action

$$S[\hat{\phi}+\phi] = S[\hat{\phi}] + \phi S'[\hat{\phi}] + \frac{1}{2}\phi^2 S''[\hat{\phi}] + \frac{1}{3!}\phi^3 S'''[\hat{\phi}] + \ldots$$

Classical external field

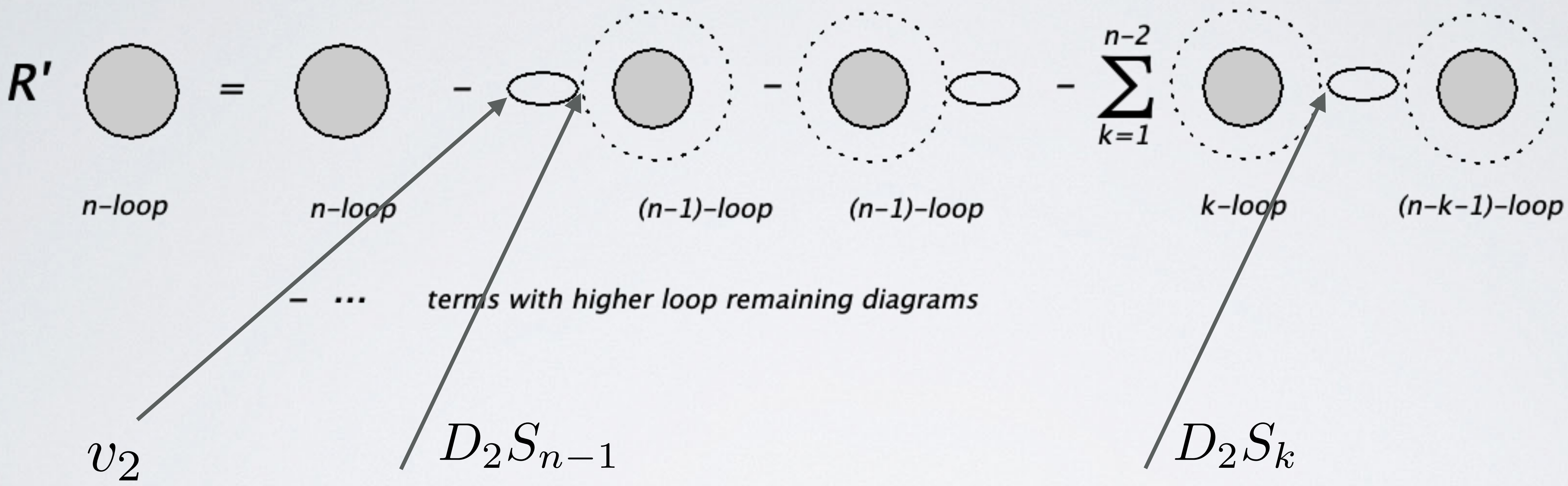
Field dependent mass

Interaction vertex

Recurrence relations for the leading poles

Kazakov, Iakhibbaev, Tolkachev 22

Action of R'-operation on divergent diagram



$$nS_n = \frac{1}{2}v_2 D_2 S_{n-1} + \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n-2} D_2 S_k D_2 S_{n-1-k}, \quad n \geq 2 \qquad S_1 = \frac{1}{4}v_2^2$$

$$nS_n = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{n-1} D_2 S_k D_2 S_{n-1-k}, \quad n \geq 1, \quad S_0 = V_0$$

RG pole equation for arbitrary potential

$$\Sigma(z,\phi) = \sum_{n=0}^{\infty}(-z)^n S_n(\phi) \qquad\qquad z = \frac{g}{\epsilon}$$

RG pole equation

$$\boxed{\frac{d\Sigma}{dz} = -\frac{1}{4}(D_2\Sigma)^2 \qquad\qquad \Sigma(0,\phi) = V_0(\phi)}$$

This a non-linear partial differential equation!

Effective potential

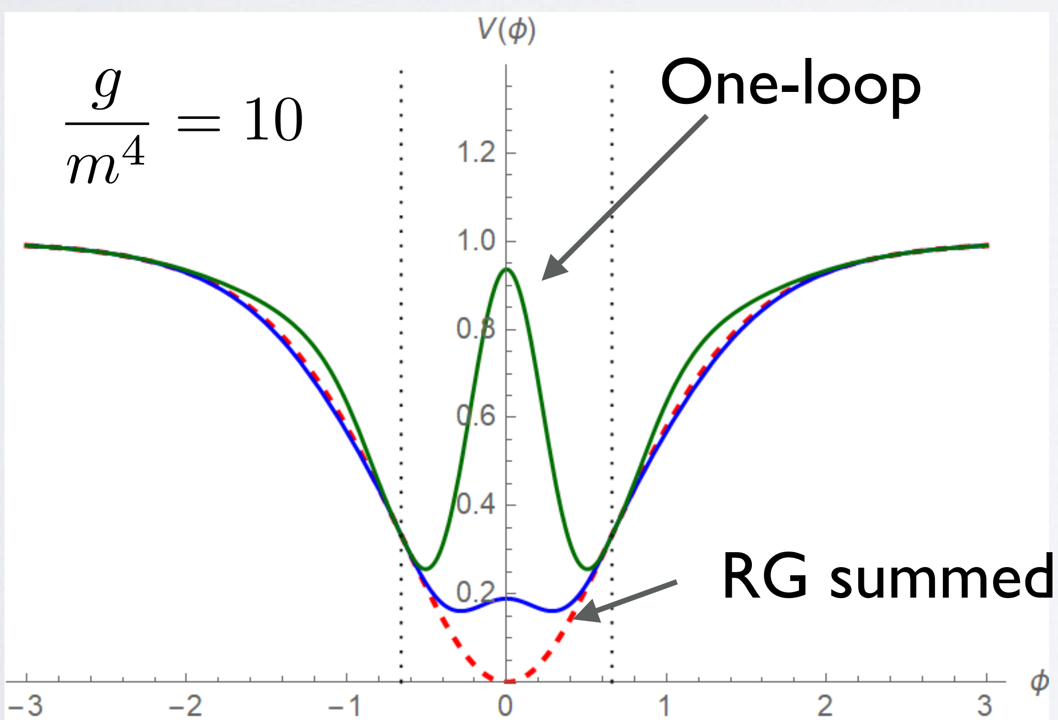
$$V_{eff}(g,\phi) = g\Sigma(z,\phi)|_{z\to -\frac{g}{16\pi^2}\log g v_2/\mu^2}\,. \qquad\qquad v_2(\phi) \equiv \frac{d^2V_0(\phi)}{d\phi^2}$$

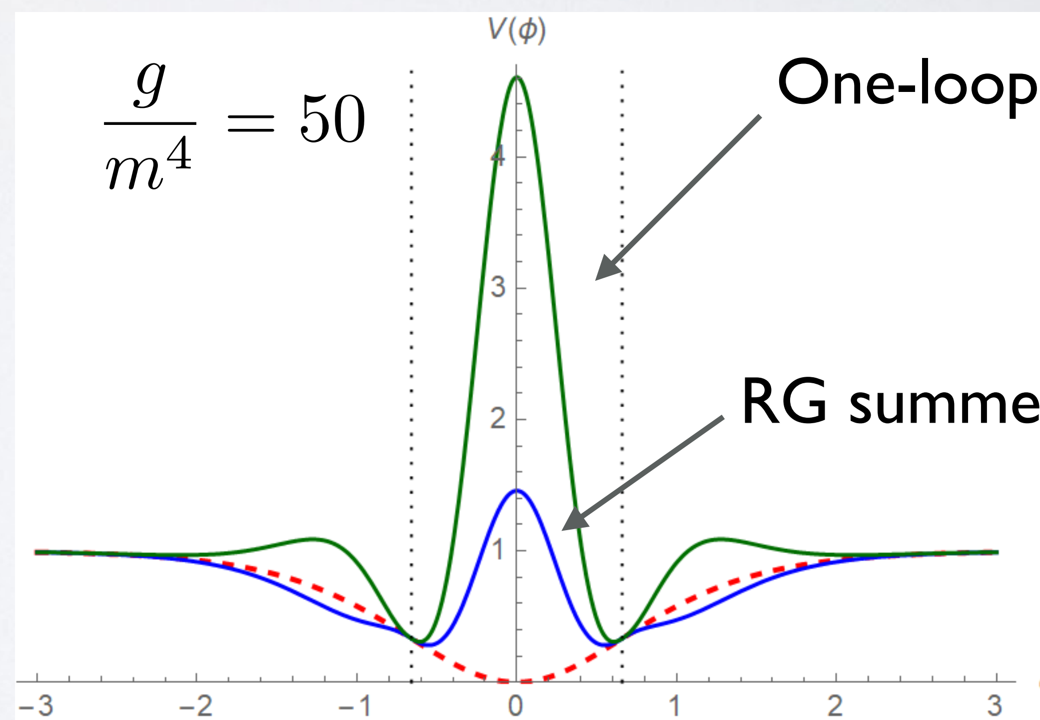
Example III: Inflation Potential

$$gV_0 = g\tanh^2(\phi/m)$$

$$\frac{d\Sigma}{dz} = -\frac{1}{4}\left(\frac{d^2\Sigma}{d\phi^2}\right)^2 \qquad \Sigma\left(\frac{z}{m^4}, \frac{\phi}{m}\right) \qquad \begin{array}{l} \Sigma|_{\phi\to\infty} \to 1 \\ \Sigma'|_{\phi\to\infty} \to 0 \end{array} \qquad z = \frac{g}{\epsilon}$$

$$V_{eff}(g,\phi) = g\Sigma(z,\phi)|_{z\to -\frac{g}{16\pi^2}\log g v_2/\mu^2}\,. \qquad v_2(\phi) \equiv \frac{d^2V_0(\phi)}{d\phi^2}$$





- Peak at the origin
- Additional minima

Неперенормируемые теории

- Новые подходы позволяют получать однозначные результаты даже в неперенормируемых теориях (амплитуды и эффективный потенциал в лидирующем приближении)

- Непротиворечивое описание амплитуд рассеяния на массовой поверхности кажется возможным

Заключение

- В КТП имеются новые результаты, которые возможно позволят расширить круг «разрешённых» теорий
- Новые точные результаты основываются на скрытых симметриях (дуальная конформная инвариантность, …), и могут в конечном итоге привести к интегрируемости взаимодействующих теорий