

ЛБО-90!

*Конференция, посвященная
90-летию со дня рождения Л.Б. Окуня*

*8 июля 2019
ИТЭФ, Москва*

КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ: НОВЫЕ ВЫЗОВЫ

**Д.КАЗАКОВ
БЛТФ ОИЯИ**

Преамбула:

- Все успехи физики элементарных частиц основаны на квантовой теории поля
- Аппарат КТП претерпел мало изменений (СМ во многом повторяет КЭД), но КХД заметно расширила арсенал КТП (уравнения эволюции, ДГЛАП, БФКЛ, ...)

- Основу применения КТП составляет метод теории возмущений (диаграммы Фейнмана)
- Непертурбативные методы (за исключение решеточных калибровочных теорий) - фрагментарны

- Точные решения (до недавнего времени) удалось получить лишь в двумерных теориях
- Неперенормируемые теории, включая гравитацию в $D=4$, не поддаются систематическому анализу

Некоторые точные результаты в D=4

- Суперсимметрия позволила получить ряд точных утверждений справедливых во всех порядках ТВ (аналог Тождеств Уорда и Славнова-Тейлора)
- В N=1 суперсимметрии суперпотенциал не переформируется во всех порядках ТВ
- В N=4 D=4 все УФ расходимости в калибровочно-инвариантных величинах сокращаются во всех порядках ТВ - первая конечная теория с взаимодействием
- В N=2 D=4 теории УФ расходимости возникают только в 1 петле
- В N=1 D=4 теориях, подкручивая юкавские константы, можно построить конечную теорию
- Точная бета-функция Новикова-Шифмана-Вайнштейна-Захарова $N = 1 SYM$

Чистый ЯМ

$$\beta(\alpha) = -\frac{3\alpha^2 C_2}{2\pi(1 - C_2\alpha/2\pi)}$$

ЯМ с материей

$$\beta(\alpha) = -\frac{3\alpha^2(C_2 - T(R) + C(R)\gamma(\alpha))}{2\pi(1 - C_2\alpha/2\pi)}$$

- К.Степанянц построил явную схему перенормировок на основе регуляризации высшими производными, где реализуется схема НШВЗ

Спинорно-киральный формализм: Амплитуды

Любой светоподобный вектор $p_{(i)}^2 = 0$ можно представить в виде

Rev. in
BernDixonKosower 96

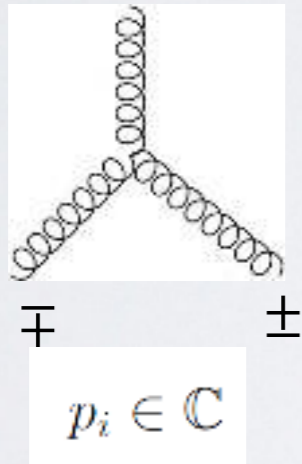
$$p_{\mu}^{(i)} \mapsto (\sigma^{\mu})_{\alpha\dot{\alpha}} p_{\mu}^{(i)} = \lambda_{\alpha}^{(i)} \tilde{\lambda}_{\dot{\alpha}}^{(i)}$$

$$\lambda_{\alpha} \in SL(2, \mathbb{C})$$

$$\epsilon^{\alpha\beta} \lambda_{\alpha}^{(i)} \lambda_{\beta}^{(j)} \equiv \langle ij \rangle = \sqrt{(p_i + p_j)^2} e^{i\phi_{ij}} = \sqrt{s_{ij}} e^{i\phi_{ij}}, \quad \phi_{ij} \in \mathbb{R} \quad ((\langle ij \rangle))^* \equiv [ij]$$

Решения безмассового ур. Дирака

Amplitudes



$$\epsilon_{\mu}^{+}(p) \mapsto \epsilon_{\alpha\dot{\alpha}}^{+}(p) = \frac{\lambda_{\alpha}^k \tilde{\lambda}_{\dot{\alpha}}^p}{\sqrt{2}\langle kp \rangle}$$

$$A_3(g_1^{-} g_1^{-} g_3^{+}) \sim \frac{\langle 12 \rangle^4}{\langle 12 \rangle \langle 23 \rangle \langle 31 \rangle}$$

$$A_3(g_1^{+} g_1^{+} g_3^{-}) \sim \frac{[12]^4}{[12][23][31]}$$

Вектор поляризации

$$\epsilon_{\mu}^{-}(p) \mapsto \epsilon_{\alpha\dot{\alpha}}^{-}(p) = \frac{\lambda_{\alpha}^p \tilde{\lambda}_{\dot{\alpha}}^k}{\sqrt{2}[kp]}$$

Классификация

$$\text{MHV}_n = \lambda_{tot} = n - 4$$

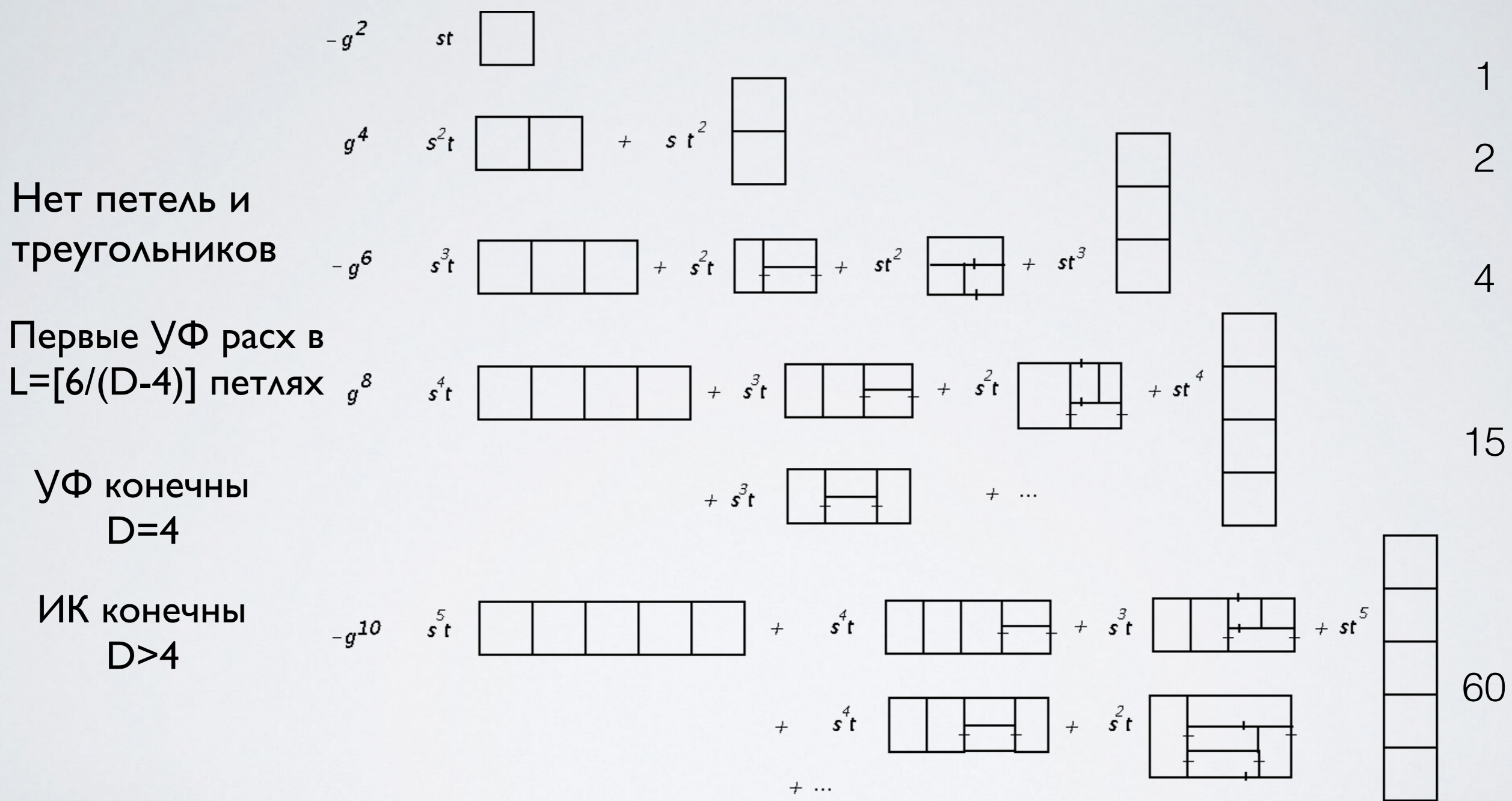
$$\text{N}^k \text{MHV}_n = \lambda_{tot} = n - 2k$$

Нет необходимости в фиксации калибровки, гостах Фаддеева-Попова, БРСТ, формализме Баталина-Вилковисского, и т.д.

Пертурбативное разложение амплитуд (максимально суперсимметричные теории)

T. Dennen Yu-yin Huang 10 ,
S.Caron-Huot D.O'Connell 10

$$M_n = A_4/A_4^{tree} = 1 +$$



Универсальное разложение при всех D в максимальных СУЗИ теориях

Точный результат в D=4 (BDS - анзатц)

D=4 N=4

- Нет УФ расходимостей во всех петлях
- ИК и коллинеарные расход на массовой поверхности

BDS - анзатц:

Bern, Dixon, Smirnov 05

$$\mathcal{M}_n \equiv \frac{A_n}{A_n^{tree}} = 1 + \sum_{L=1}^{\infty} \left(\frac{g^2 N_c}{16\pi^2} \right)^L M_n^{(L)}(\epsilon) = \exp \left[\sum_{l=1}^{\infty} \left(\frac{g^2 N_c}{16\pi^2} \right)^l \left(f^{(l)}(\epsilon) M_n^{(1)}(l\epsilon) + C^{(l)} + E_n^{(l)}(\epsilon) \right) \right]$$

$$\mathcal{M}_n(\epsilon) = \exp \left[-\frac{1}{8} \sum_{l=1}^{\infty} \left(\frac{g^2 N_c}{16\pi^2} \right)^l \left(\frac{\gamma_{cusp}^{(l)}}{(l\epsilon)^2} + \frac{2G_0^{(l)}}{l\epsilon} \right) \sum_{i=1}^n \left(\frac{\mu^2}{-s_{i,i+1}} \right)^{l\epsilon} + \frac{1}{4} \sum_{l=1}^{\infty} \left(\frac{g^2 N_c}{16\pi^2} \right)^l \gamma_{cusp}^{(l)} F_n^{(1)}(0) + C(g) \right]$$

ИК и коллинеарные расходимости в размерной регуляризации

cusp аномальная разм

$$M_4^{(1-loop)}(\epsilon) = A_4^{(1-loop)} / A_4^{(tree)} = \frac{\Gamma(1-\epsilon)^2}{\Gamma(1-2\epsilon)} \left[\frac{1}{\epsilon^2} \left(\left(\frac{\mu^2}{s} \right)^\epsilon + \left(\frac{\mu^2}{-t} \right)^\epsilon \right) - \frac{1}{2} \log^2 \left(\frac{s}{-t} \right) - \frac{\pi^2}{3} \right] + \mathcal{O}(\epsilon)$$

Справедливо для амплитуд с 4 и 5 внешними ногами, далее появляется остаточный член

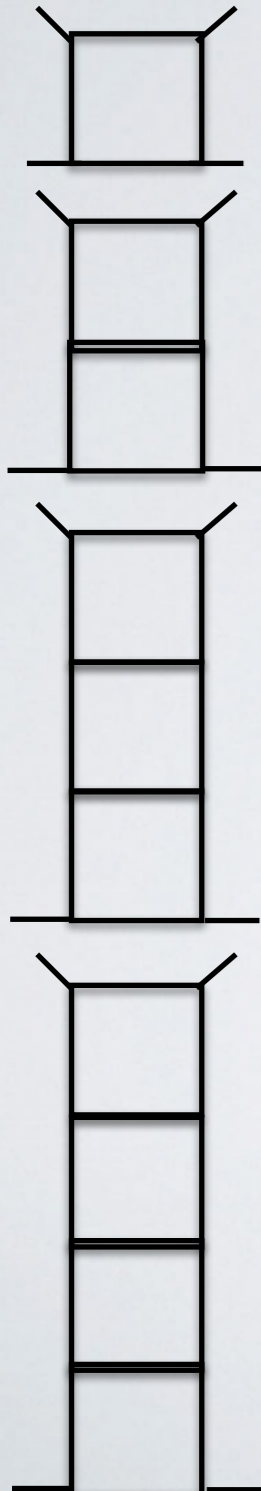
Пертурбативное разложение амплитуд

D=6 N=2

Ведущие двойные логарифмы

УФ конечны

Редже предел $s \rightarrow \infty, t < 0, fixed$



$$B_n(t, s) \simeq \frac{1}{s} \frac{L^{2n}(x)}{n!(n+1)!}, \quad L \equiv \log(s/t)$$

Bork, Kazakov, Vlasenko, 13

$$\frac{A_4}{A_4^{(0)}} \Big|_{L.L.} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-g^2 t/2)^n L^{2n}(x)}{n!(n+1)!}, \quad \text{where } g^2 \equiv \frac{g_{YM}^2 N_c}{64\pi^3}.$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-g^2 t/2)^n L^{2n}(x)}{n!(n+1)!} = \frac{I_1(2y)}{y}, \quad y \equiv \sqrt{g^2 |t|/2} L(x)$$

$$\frac{A_4}{A_4^{(0)}} \Big|_{L.L.} \sim \left(\frac{s}{t}\right)^{\alpha(t)-1}$$

!

Редже поведение

Точный результат $N_c \rightarrow \infty$

$$\alpha(t) = 1 + 2\sqrt{g^2 |t|/2} = 1 + \sqrt{\frac{g_{YM}^2 N_c |t|}{32\pi^3}}$$

Пертурбативное разложение амплитуд

D=6 N=2

Ведущие логарифмы $s \rightarrow \infty, t \rightarrow \infty$ УФ расходимости

$$M_4(s, t) = 1 + \Sigma_s(s, t) + \Sigma_t(s, t) \quad \Sigma_s = \sum_{n=3}^{\infty} (-z)^n S_n, \quad \Sigma_t = \sum_{n=3}^{\infty} (-z)^n T_n$$

s-channel term $S_n(s, t)$ t-channel term $T_n(s, t)$ $T_n(s, t) = S_n(t, s)$

Точное соотношение для всех диаграмм

Bork, Kazakov, Kompaneets, Vlasenko, 13

$$nS_n(s, t) = -2s \int_0^1 dx \int_0^x dy (S_{n-1}(s, t') + T_{n-1}(s, t')) \quad n \geq 4$$

$$t' = t(x - y) - sy$$

$$S_3 = -s/3, \quad T_3 = -t/3$$

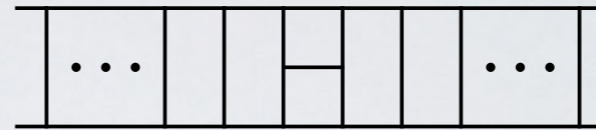
Дифф ур-е Обобщённое уравнение ренормгруппы $z \equiv \frac{g^2}{\epsilon} \leftrightarrow g^2 \log(\mu^2)$

$$z \frac{d}{dz} \Sigma_s(s, t, z) = sz - 2\Sigma_s(s, t, z) + 2sz \int_0^1 dx \int_0^x dy (\Sigma_s(s, t', z) + \Sigma_t(s, t', z))|_{t'=xt+yu}$$

Решение РГ уравнения

D=6 N=2

Горизонтальная лестница + теннисный корт



Ladder



Lddder 2

$$\Sigma_L(s, z) = \frac{2}{s^2 z^2} \left(e^{sz} - 1 - sz - \frac{s^2 z^2}{2} \right)$$

$$\Sigma_{L2} = \frac{1}{2s^2 z^2} \left[27 \left(e^{z/3} - 1 - \frac{z}{3} - \frac{1}{2} \frac{z^2}{9} - \frac{1}{6} \frac{z^3}{27} \right) \left(1 + 2 \frac{t}{s} \right) - \left(e^z - 1 - sz - \frac{1}{2} z^2 - \frac{1}{6} z^3 \right) \right]$$

В общем случае - численное решение близкое по своим свойствам к лестничному приближению

$$\Sigma_s + \Sigma_t \sim e^{(s+t)z}$$

$$s + t = -u > 0, \quad \Sigma \rightarrow \infty$$

$$z \rightarrow \infty$$

$$s + u = -t > 0, \quad \Sigma \rightarrow \infty$$

$$t + u = -s < 0, \quad \Sigma \rightarrow const$$

D=8 N=1 Пертурбативное разложение амплитуд

Bork, Kazakov, Tolkachev, Vlasenko, 14

Ведущие логарифмы $s \rightarrow \infty, t \rightarrow \infty$ УФ расходимости

$$\begin{aligned}
 nS_n(s, t) = & -2s^2 \int_0^1 dx \int_0^x dy y(1-x) (S_{n-1}(s, t') + T_{n-1}(s, t'))|_{t'=tx+yu} \\
 + & s^4 \int_0^1 dx x^2(1-x)^2 \sum_{k=1}^{n-2} \sum_{p=0}^{2k-2} \frac{1}{p!(p+2)!} \frac{d^p}{dt'^p} (S_k(s, t') + T_k(s, t')) \times \\
 & \times \frac{d^p}{dt'^p} (S_{n-1-k}(s, t') + T_{n-1-k}(s, t'))|_{t'=-sx} (tsx(1-x))^p
 \end{aligned}$$

Дифф ур-е $S_1 = \frac{1}{12}, T_1 = \frac{1}{12}$

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dz} \Sigma(s, t, z) = & -\frac{1}{12} + 2s^2 \int_0^1 dx \int_0^x dy y(1-x) (\Sigma(s, t', z) + \Sigma(t', s, z))|_{t'=tx+yu} \\
 - & s^4 \int_0^1 dx x^2(1-x)^2 \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!(p+2)!} \left(\frac{d^p}{dt'^p} (\Sigma(s, t', z) + \Sigma(t', s, z))|_{t'=-sx} \right)^2 (tsx(1-x))^p.
 \end{aligned}$$

Решение РГ уравнения

D=8 N=1

Borlakov, Kazakov, Tolkachev, Vlasenko, 16

Горизонтальная лестница



Дифф ур-е $\frac{d}{dz} \Sigma_A = -\frac{1}{3!} + \frac{2}{4!} \Sigma_A - \frac{2}{5!} \Sigma_A^2$ $z = g^2 s^2 / \epsilon$

$$\Sigma_A(z) = -\sqrt{5/3} \frac{4 \tan(z/(8\sqrt{15}))}{1 - \tan(z/(8\sqrt{15}))\sqrt{5/3}} = \sqrt{10} \frac{\sin(z/(8\sqrt{15}))}{\sin(z/(8\sqrt{15}) - z_0)}$$

$$\Sigma(z) = -(z/6 + z^2/144 + z^3/2880 + 7z^4/414720 + \dots) \quad z_0 = \arcsin(\sqrt{3/8})$$

В общем случае - численное решение близкое по своим свойствам к лестничному приближению: имеется бесконечное количество полюсов в обеих направлениях

Скалярная теория

$$\phi_D^4$$

$$D = 4, 6, 8, 10$$

$$[\lambda] = 2 - D/2$$

Kazakov, 18

2->2 амплитуда рассеяния на массовой поверхности

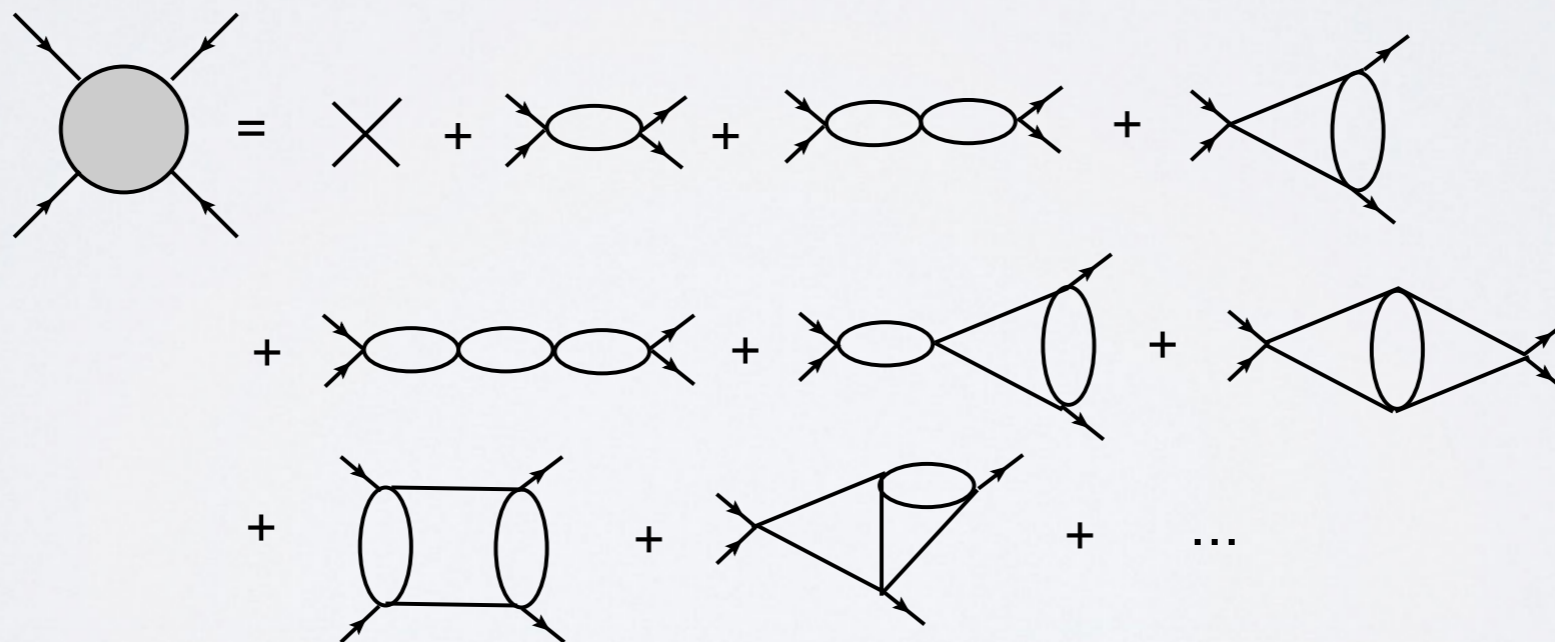
$$m = 0$$

$$s + t + u = 0$$

$$\Gamma_4(s, t, u) = \lambda(1 + \Gamma_s(s, t, u) + \Gamma_t(s, t, u) + \Gamma_u(s, t, u))$$

ТВ:

$$\Gamma_s = \sum_{n=1}^{\infty} (-z)^n S_n, \quad \Gamma_t = \sum_{n=1}^{\infty} (-z)^n T_n, \quad \Gamma_u = \sum_{n=1}^{\infty} (-z)^n U_n, \quad z \equiv \frac{\lambda}{\epsilon}$$



ТВ разложение (показан только s-канал)

Рекуррентные соотношения для лидирующих полюсов

$$\begin{aligned}
 nS_n(s, t, u) &= \frac{s^{D/2-2}}{\Gamma(D/2-1)} \int_0^1 dx [x(1-x)]^{D/2-2} (S_{n-1}(s, t', u') + T_{n-1}(s, t', u') + U_{n-1}(s, t', u')) \\
 &+ \frac{1}{2} \frac{s^{D/2-2}}{\Gamma(D/2-1)} \int_0^1 dx [x(1-x)]^{D/2-2} \sum_{k=1}^{n-2} \sum_{p=0}^{(D/2-2)k} \sum_{l=0}^p \frac{1}{p!(p+D/2-2)!} \times \\
 &\times \frac{d^p}{dt'^l du'^{p-l}} (S_k + T_k + U_k) \frac{d^p}{dt'^l du'^{p-l}} (S_{n-k-1} + T_{n-k-1} + U_{n-k-1}) s^p [x(1-x)]^p t^l u^{p-l}
 \end{aligned}$$

$$t' = -xs, u' = -(1-x)s$$

Дифференциальное (РГ) уравнение

$$\begin{aligned}
 \frac{d\Gamma_s(s, t, u)}{d \log \mu^2} &= -\frac{\lambda}{2} \frac{s^{D/2-2}}{\Gamma(D/2-1)} \int_0^1 dx [x(1-x)]^{D/2-2} \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{l=0}^p \frac{1}{p!(p+D/2-2)!} \times \\
 &\times \left(\frac{d^p \bar{\Gamma}_4(s, t', u')}{dt'^l du'^{p-l}} \Big|_{\substack{t' = -xs, \\ u' = -(1-x)s}} \right)^2 s^p [x(1-x)]^p t^l u^{p-l}
 \end{aligned}$$

$$\Gamma_s(\log \mu^2 = 0) = 0$$

Решение РГ уравнения

$$D = 4$$

$$s \sim t \sim u \sim E^2$$

$$\frac{d\bar{\Gamma}_4}{d \log \mu^2} = -\lambda \frac{3}{2} \bar{\Gamma}_4^2, \quad \bar{\Gamma}_4(\log \mu^2 = 0) = 1 \quad \rightarrow \quad \bar{\Gamma}_4 = \frac{1}{1 + \frac{3}{2} \lambda \log(\mu^2 / E^2)}$$

Общее решение при произвольном D

$$\bar{\Gamma}_4(s, t, u) = \mathcal{P} \frac{1}{1 + \frac{1}{2} \frac{\Gamma(D/2-1)}{\Gamma(D-2)} \lambda (s^{D/2-2} + t^{D/2-2} + u^{D/2-2}) \log(\mu^2 / E^2)}$$

\mathcal{P} - символ упорядочения в смысле рекуррентного соотношения

$$\Gamma_4(s, t, u) = \mathcal{P} \frac{\lambda}{1 + \lambda A_1^{(1)} \log(\mu^2 / E^2)} = \mathcal{P} \sum_{n=0}^{\infty} (-\lambda)^n \log^n(\mu^2 / E^2) (A_1^{(1)})^n$$

$$\mathcal{P}(A_1^{(1)})^n = \int_0^1 dx \sum_{k=0}^{n-1} \overrightarrow{\mathcal{P}(A_1^{(1)})^k} A_1^{(1)} \overleftarrow{\mathcal{P}(A_1^{(1)})^{n-1-k}},$$

Высокоэнергетическое поведение амплитуды рассеяния в теории ϕ_D^4

$$\Gamma_4(s, t, u) = \mathcal{P} \frac{\lambda}{1 + \frac{1}{2} \frac{\Gamma(D/2-1)}{\Gamma(D-2)} \lambda (s^{D/2-2} + t^{D/2-2} + u^{D/2-2}) \log(\mu^2/E^2)}$$

$$s \sim t \sim u \sim E^2$$

$D = 4$ $3/2 > 0$ полюс Ландау при $E \rightarrow \infty$

$D = 6$ $s + t + u = 0$ Лидирующие расходимости (логарифмы) сокращаются во всех петлях

$D = 8$ $s^2 + t^2 + u^2 > 0$ полюс Ландау при $E \rightarrow \infty$

$D = 10$ $s^3 + t^3 + u^3 = 3stu > 0$ $s > 0, t, u < 0$ полюс Ландау при $E \rightarrow \infty$

Вывод: ϕ_D^4 имеет полюс Ландау при $E \rightarrow \infty$

Заключение

- В КТП имеются новые результаты, которые возможно позволят расширить круг «разрешённых» теорий
- Новые точные результаты основываются на скрытых симметриях (дуальная конформная инвариантность, ...), и могут в конечном итоге привести к интегрируемости взаимодействующих теорий