к 90 летию Д.В.Ширкова

Ренормгруппа, дальше!... дальше!... дальше!...

Дмитрий Казаков

Лаборатория теоретической физики им. Н.Н.Боголюбова,

Объединённый институт ядерных исследований,

Дубна, Россия

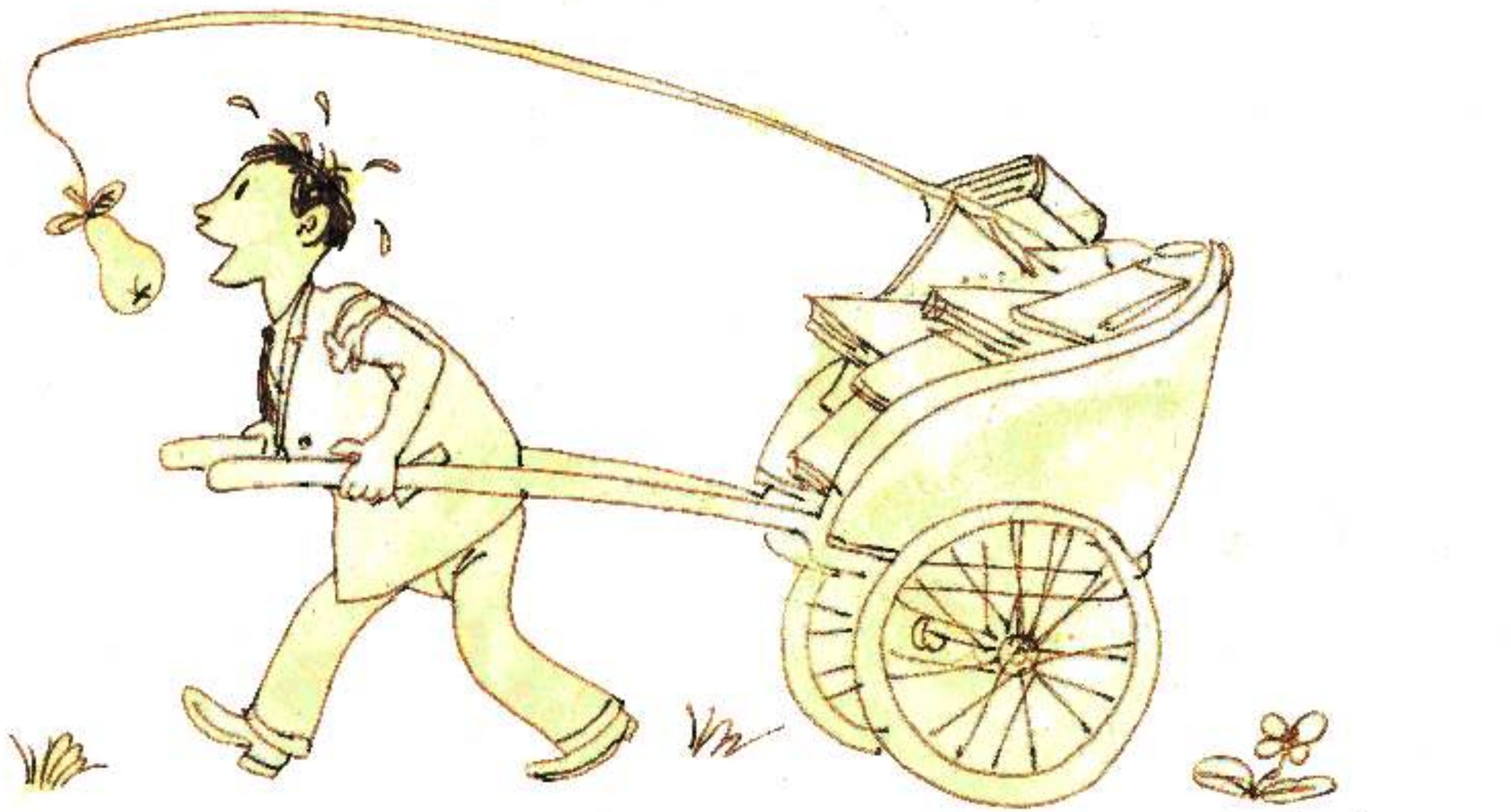
в сотрудничестве с

Л.Борком, А.Борлаковым, Д.Власенко, М.Компанейцем и Д.Толкачевым

Основано на: Phys. Lett. B734 (2014), arXiv:1404.6998 [hep-th]
JHEP 1511 (2015) 059, arXiv:1508.05570 [hep-th]
JHEP 1612 (2016) 154, arXiv:1610.05549v2 [hep-th]
Phys.Rev. D95 (2017) no.4, 045006 arXiv:1603.05501 [hep-th]
arXiv:1712.04348 [hep-th]

к 60 летию Д.В.Ширкова

Ренорм-группа - дальше!... дальше!... дальше!...



Диме Казакову.

1.IV.87

Ренормгруппа в квантовой теории поля

Функция Грина

$$\Gamma = 1 + g^2 a_1 \log\frac{\mu^2}{Q^2} + g^4\left(a_2 \log^2\frac{\mu^2}{Q^2} + 2b_2\log\frac{\mu^2}{Q^2}\right) + \ldots$$

главные логарифмы   младший логарифм

Константа перенормировки

$$Z_\Gamma = 1 + g^2\frac{a_1}{\epsilon} + g^4\left(\frac{a_2}{\epsilon^2} + \frac{b_2}{\epsilon}\right) + \ldots$$

$$g \equiv g^2$$

Перенормировка заряда

$$g_{Bare} = (\mu^2)^\epsilon g Z_\Gamma \qquad g_{Bare} = (\mu^2)^\varepsilon\left[g + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n(g)}{\varepsilon^n}\right]$$

Полюсные уравнения

1 петля

$$\beta(g) = \left(g\frac{d}{dg} - 1\right)a_1(g),$$

$$\left(g\frac{d}{dg} - 1\right)a_n(g) = \beta(g)\frac{d}{dg}a_{n-1}(g), \quad n \geq 2.$$

$$a_1(g) = a_1 g^2 \quad \beta(g) = a_1 g^2$$

$$a_n(g) = a_1^n g^n$$

Ренормгруппа в квантовой теории поля

приближение главных логарифмов

$$a_n = a_1^n \qquad \boxed{\Gamma = \sum_{n=0} g^n a_n L^n = \frac{1}{1 - a_1 g L}}$$

уравнения ренормгруппы

$$\frac{d\overline{g}}{dL} = \beta(\overline{g}) \qquad \beta(g) = a_1 g^2 \qquad \bar{g} = \frac{g}{1 - a_1 g L}$$

$$\frac{d \log \Gamma}{dL} = \gamma(\overline{g}) \qquad \Gamma = \exp\left(\int_g^{\bar{g}} \frac{\gamma}{\beta} dg\right) \overset{\beta = g\gamma}{\Longrightarrow} \frac{1}{1 - a_1 g L}$$

Высшие петли $\quad \beta(g) = a_1 g^2 + 2 b_2 g^3 + \ldots$

Много зарядов $\quad \beta_1(g_1, g_2) = a_{11} g_1^2 + 2 b_{21} g_1^3 + 2 c_{21} g_1 g_2^2 \ldots$

$$\beta_2(g_1, g_2) = a_{12} g_2^2 + 2 b_{22} g_2^3 + 2 c_{22} g_2 g_1^2 \ldots$$

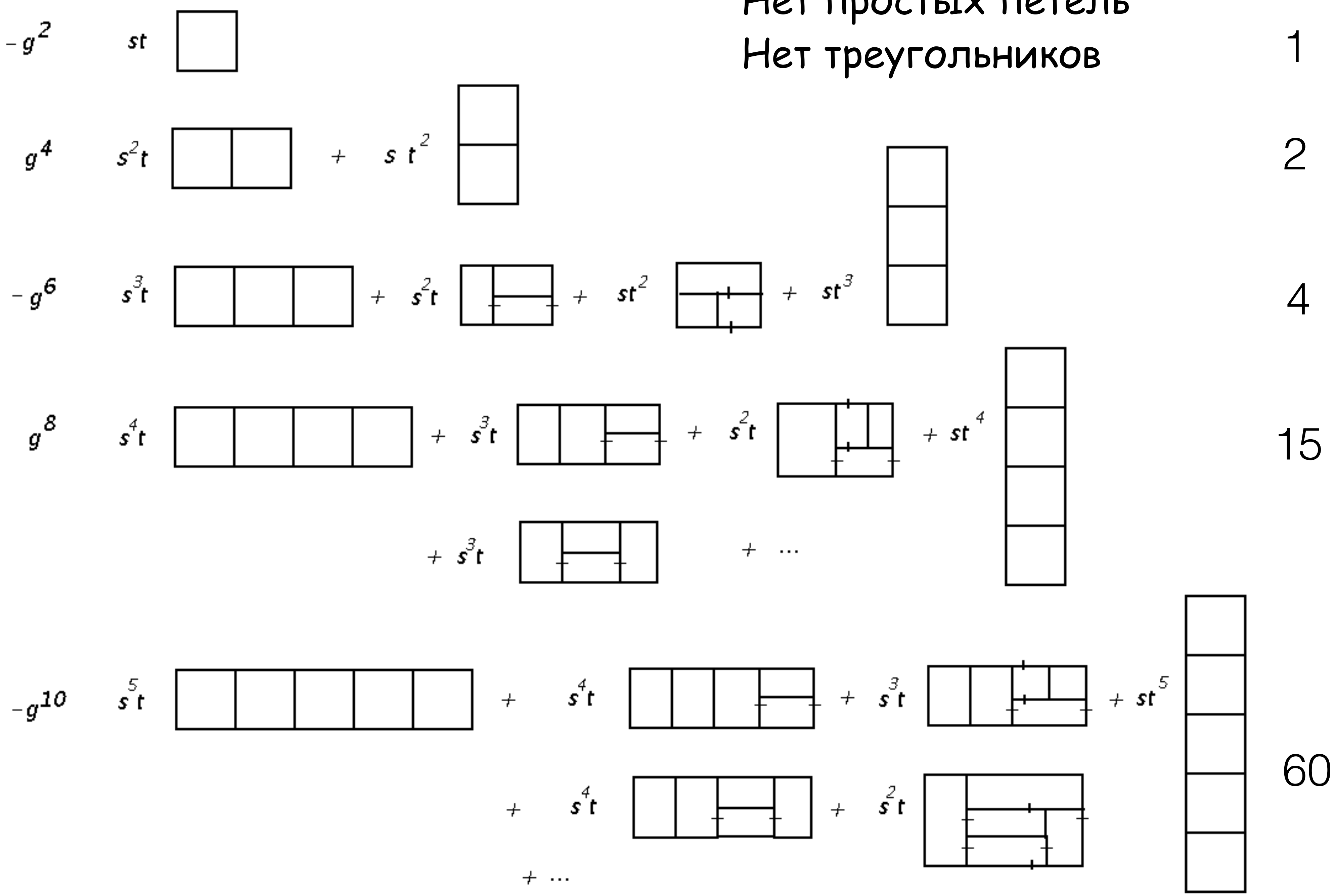
Пертурбативное разложение 4-х точечных амплитуд в суперсимметричной теории Янга-Миллса

A_4/A_4^{tree}

Нет простых петель
Нет треугольников

Первые УФ расходимости в L=[6/(D-4)] петлях

ИК конечно на массовой поверхности



T. Dennen Yu-yin Huang 10 ,
S.Caron-Huot D.O'Connell 10

Универсальное разложение для всех D в максимально суперсимметричных теориях в силу дуальной конформной инвариантности

Пертурбативное разложение 4-х точечных амплитуд

D=6 N=2

Лидирующие расходимости — **5 петель**

$$L.P. = 2stg^4\left[g^2\frac{s+t}{6\epsilon} + g^4\frac{s^2+st+t^2}{36\epsilon^2} + g^6\frac{s^3+\frac{2}{5}s^2t+\frac{2}{5}st^2+t^3}{216\epsilon^3}\right]$$

D=8 N=1

4 петли

$$\begin{aligned} L.P. &= -st\left[g^2\frac{1}{3!\epsilon} + g^4\frac{s^2+t^2}{3!4!\epsilon^2} + g^6\frac{4}{3}\frac{15s^4-s^3t+s^2t^2-st^3+15t^4}{3!4!5!\epsilon^3}\right. \\ &+ \left. g^8\frac{1}{63}\frac{16770s^6-536s^5t+412s^4t^2-384s^3t^3+412s^2t^4-536st^5+16770t^6}{3!4!5!6!\epsilon^4}\right]. \end{aligned}$$

D=10 N=1

4 петли

$$\begin{aligned} L.P. &= -st\left[g^2\frac{s+t}{5!\epsilon} + g^4\frac{8s^4+2s^3t+2st^3+8t^4}{5!7!\epsilon^2}\right. \\ &+ g^6\frac{2(2095s^7+115s^6t+33s^5t^2-11s^4t^3-11s^3t^4+33s^2t^5+115st^6+2095t^7)}{5!7!7!45\epsilon^3} \\ &+ g^8\frac{32(211218880s^{10}+753490s^9t-1395096s^8t^2+1125763s^7t^3-916916s^6t^4}{13!7!7!5!5\epsilon^4} \\ &\left.\frac{+843630s^5t^5-916916s^4t^6+1125763s^3t^7-1395096s^2t^8+753490st^9+211218880t^{10})}{13!7!7!5!5\epsilon^4}\right]. \end{aligned}$$

R-операция и локальные контрчлены

- **R-операция гарантирует локальность контрчленов после вычитания расходимостей в подграфах в любой локальной КТП**

$$\mathcal{R}'G = 1 - \sum_{\gamma} K\mathcal{R}'_{\gamma} + \sum_{\gamma,\gamma'} K\mathcal{R}'_{\gamma} K\mathcal{R}'_{\gamma'} - ...,$$

$$\mathcal{R}'G_n = \frac{A_n^{(n)}(\mu^2)^{n\epsilon}}{\epsilon^n} + \frac{A_{n-1}^{(n)}(\mu^2)^{(n-1)\epsilon}}{\epsilon^n} + ... + \frac{A_1^{(n)}(\mu^2)^{\epsilon}}{\epsilon^n}$$

Лидирующие полюса

$$+ \frac{B_n^{(n)}(\mu^2)^{n\epsilon}}{\epsilon^{n-1}} + \frac{B_{n-1}^{(n)}(\mu^2)^{(n-1)\epsilon}}{\epsilon^{n-1}} + ... + \frac{B_1^{(n)}(\mu^2)^{\epsilon}}{\epsilon^{n-1}}$$

$$+\text{lower order terms}$$

Подлидирующие полюса

Все члены типа $(log\mu^2)^m/\epsilon^k$ **должны сокращаться**

Лидирующие и подлидирующие расходимости

- **В неперенормируемых теориях, как и в перенормируемых, лидирующие расходимости определяются 1-петлевыми графами, а подлидирующие - 2-х петлевыми**

$$A_n^{(n)} = (-1)^{n+1}\frac{A_1^{(n)}}{n},$$

$$B_n^{(n)} = (-1)^n\left(\frac{2}{n}B_2^{(n)} + \frac{n-2}{n}B_1^{(n)}\right)$$

Лидирующие полюса из 1 петли

Подлидирующие полюса из двух петель

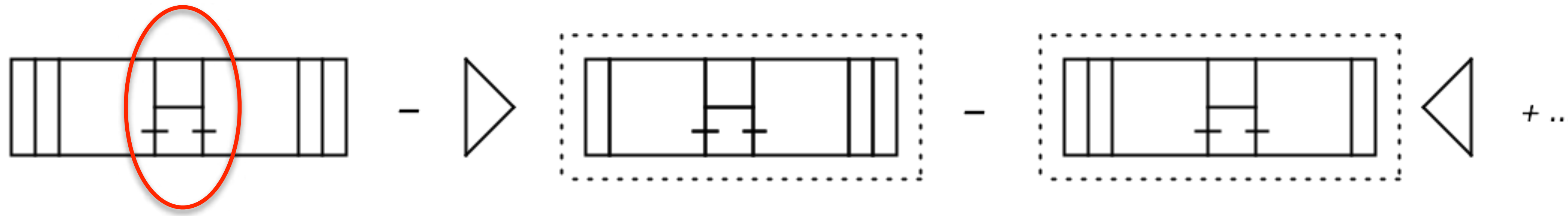
$A_1^{(n)},\ B_1^{(n)}$ **1-петлевой граф**

$B_2^{(n)}$ **2-петлевой граф**

R-операция и рекурркентные соотношения

D=6 N=2 Горизонтальная лестница + теннисный корт

R':



A_n $\qquad$ A_{n-1}

$$nA_n = -A_{n-1} \longrightarrow A_n = (-1)^n \frac{2}{n!} \qquad (-g^2 s)^n$$

Суммирование $\quad \Sigma_L = \sum_{n=3}^{\infty} A_n (-z)^n \qquad z \equiv \frac{g^2 s}{\epsilon}$

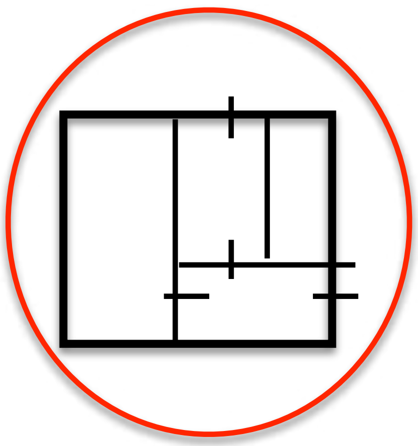
$$\boxed{\Sigma_L = \frac{2}{z^2}\left(e^z - 1 - z - \frac{z^2}{2}\right)}$$

$$\epsilon \to 0 \qquad \Sigma_L \to \left\{ \begin{array}{ll} \infty & s > 0 \\ -1 & s < 0 \end{array} \right.$$

R-операция и рекурркентные соотношения

D=6 N=2

Горизонтальная лестница + двойной теннисный корт



$$nA_n^t = -\frac{1}{3}A_{n-1}^t, \qquad nA_n^s = -A_{n-1}^s + \frac{1}{3}A_{n-1}^t$$

$$A_n^t = \frac{(-1)^n}{3^{n-3}}\frac{1}{n!}, \qquad A_n^s = \frac{1}{2}\frac{(-1)^n}{3^{n-3}}\frac{1}{n!} - \frac{1}{2}(-1)^n\frac{1}{n!}$$

$$(-g^2 s)^{n-1}(-g^2 t) \qquad (-g^2 s)^n$$

Суммирование

$$\Sigma_{L2} = \sum_{n=3}^{\infty} A_n^s(-z)^n + \frac{t}{s}A_n^t(-z)^n \qquad z \equiv \frac{g^2 s}{\epsilon}$$

$$\boxed{\Sigma_{L2} = \frac{1}{2s^2 z^2}\left[27(e^{z/3} - 1 - \frac{z}{3} - \frac{1}{2}\frac{z^2}{9} - \frac{1}{6}\frac{z^3}{27})(1 + 2\frac{t}{s}) - (e^z - 1 - sz - \frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{6}z^3)\right]}$$

Всепетлевое точное рекуррентное соотношение

D=6 N=2

s-канальный член $S_n(s,t)$ **t-канальный член** $T_n(s,t)$ $T_n(s,t) = S_n(t,s)$

Точное соотношение для ВСЕХ диаграмм

$$\boxed{nS_n(s,t) = -2s\int_0^1 dx\int_0^x dy\ \left(S_{n-1}(s,t') + T_{n-1}(s,t')\right)}$$

$$n \geq 4$$

$$t' = t(x-y) - sy$$

$$S_3 = -s/3,\ T_3 = -t/3$$

Суммирование $$\Sigma_k(s,t,z) = \sum_{n=k}^{\infty}(-z)^n S_n(s,t)$$

Дифф ур-е $$\frac{d}{dz}\Sigma_4(s,t,z) = 2s\int_0^1 dx\int_0^x dy\ \left(\Sigma_3(s,t',z) + \Sigma_3(t',s,z)\right)|_{t'=xt+yu}$$

$$\Sigma_4(s,t,z) = \Sigma_3(s,t,z) + S_3(s,t)z^3 \qquad \Sigma(s,t,z) = z^{-2}\Sigma_3(s,t,z)$$

$$\boxed{\frac{d}{dz}\Sigma(s,t,z) = s - \frac{2}{z}\Sigma(s,t,z) + 2s\int_0^1 dx\int_0^x dy\ \left(\Sigma(s,t',z) + \Sigma(t',s,z)\right)|_{t'=xt+yu}}$$

Лестничные диаграммы (ведущие расходимости)

D=8 N=1 **Горизонтальная лестница** $A_n^{(n)} = s^{n-1} A_n$

$$nA_n = -\frac{2}{4!}A_{n-1} + \frac{2}{5!}\sum_{k=1}^{n-2} A_k A_{n-1-k}, \quad n \geq 3$$

$A_1 = 1/6$ **1 петлевой квадрат**

Суммирование $\Sigma_m(z) = \sum_{n=m}^{\infty} A_n(-z)^n$

$$-\frac{d}{dz}\Sigma_3 = -\frac{2}{4!}\Sigma_2 + \frac{2}{5!}\Sigma_1\Sigma_1. \qquad \Sigma_3 = \Sigma_1 + A_1 z - A_2 z^2, \quad \Sigma_2 = \Sigma_1 + A_1 z, \quad A_1 = \frac{1}{3!}, \quad A_2 = -\frac{1}{3!4!}$$

$\Sigma_A \equiv \Sigma_1$ **Дифф ур-е**

$$\boxed{\frac{d}{dz}\Sigma_A = -\frac{1}{3!} + \frac{2}{4!}\Sigma_A - \frac{2}{5!}\Sigma_A^2}$$

$z = g^2 s^2/\epsilon$

$$\boxed{\Sigma_A(z) = -\sqrt{5/3}\frac{4\tan(z/(8\sqrt{15}))}{1-\tan(z/(8\sqrt{15}))\sqrt{5/3}} = \sqrt{10}\frac{\sin(z/(8\sqrt{15}))}{\sin(z/(8\sqrt{15}) - z_0)}}$$

$$\Sigma(z) = -(z/6 + z^2/144 + z^3/2880 + 7z^4/414720 + \dots) \qquad z_0 = \arcsin(\sqrt{3/8})$$

Всепетлевое точное рекуррентное соотношение

D=8 N=1

s-канальный член $S_n(s,t)$ **t-канальный член** $T_n(s,t)$ $T_n(s,t)=S_n(t,s)$

Точное соотношение для ВСЕХ диаграмм

$$nS_n(s,t) = -2s^2\int_0^1 dx\int_0^x dy\; y(1-x)\;\left(S_{n-1}(s,t')+T_{n-1}(s,t')\right)|_{t'=tx+yu}$$

$$+\quad s^4\int_0^1 dx\; x^2(1-x)^2\sum_{k=1}^{n-2}\sum_{p=0}^{2k-2}\frac{1}{p!(p+2)!}\;\frac{d^p}{dt'^p}(S_k(s,t')+T_k(s,t'))\times$$

$$S_1=\frac{1}{12},\; T_1=\frac{1}{12} \qquad \times\frac{d^p}{dt'^p}(S_{n-1-k}(s,t')+T_{n-1-k}(s,t'))|_{t'=-sx}\;(tsx(1-x))^p$$

Суммирование $\Sigma_3(s,t,z)=\Sigma_1(s,t,z)-S_2(s,t)z^2+S_1(s,t)z,\;\;\Sigma_2(s,t,z)=\Sigma_1(s,t,z)+S_1(s,t)z$

Дифф ур-е

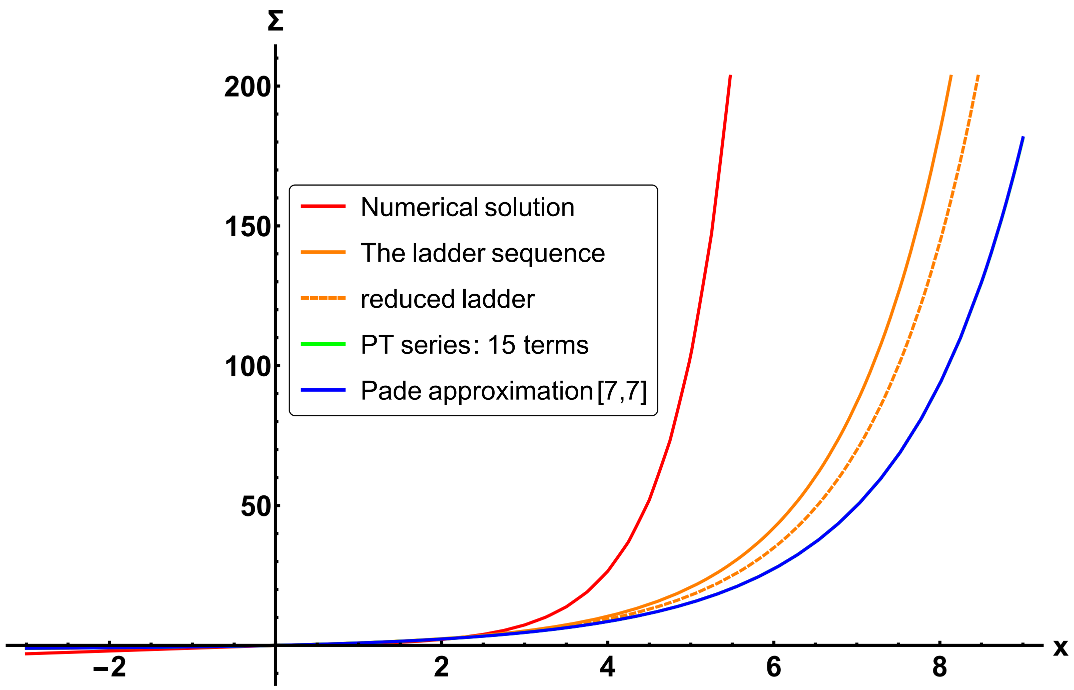
$$\frac{d}{dz}\Sigma(s,t,z) = -\frac{1}{12}+2s^2\int_0^1 dx\int_0^x dy\; y(1-x)\;\left(\Sigma(s,t',z)+\Sigma(t',s,z)\right)|_{t'=tx+yu}$$

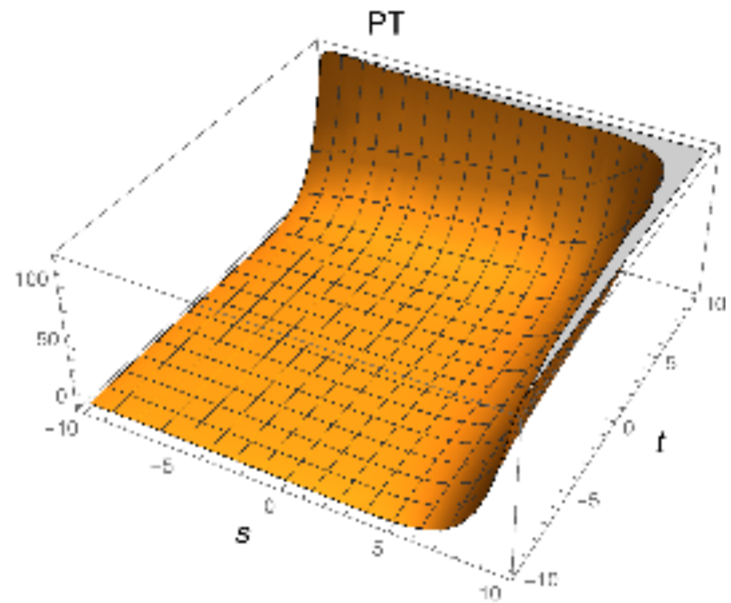
$$-s^4\int_0^1 dx\; x^2(1-x)^2\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{p!(p+2)!}\left(\frac{d^p}{dt'^p}(\Sigma(s,t',z)+\Sigma(t',s,z))|_{t'=-sx}\right)^2\;(tsx(1-x))^p.$$

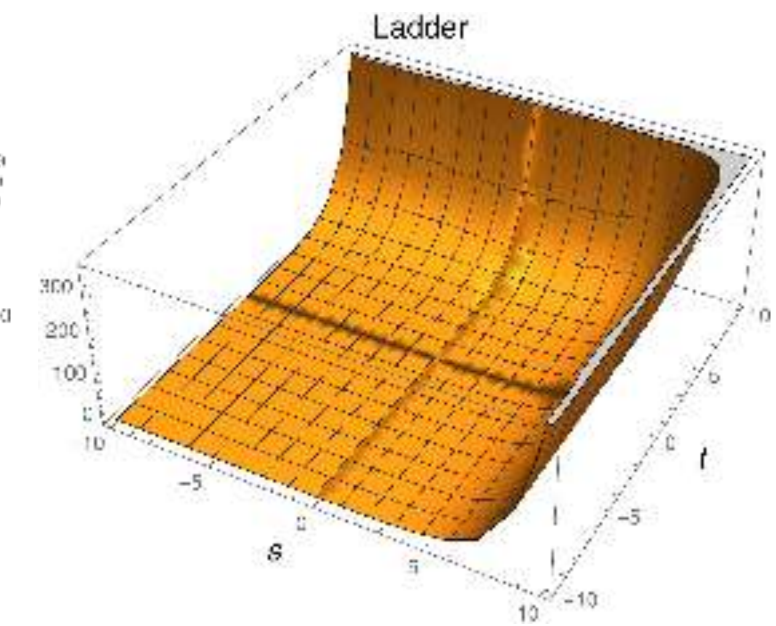
Всепетлевое решение (лидирующие расходимости)

D=6 N=2

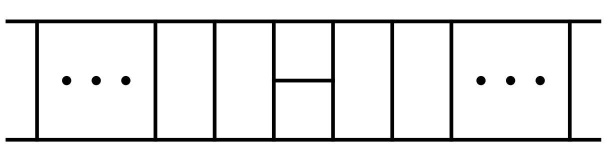
ТВ (15 членов)



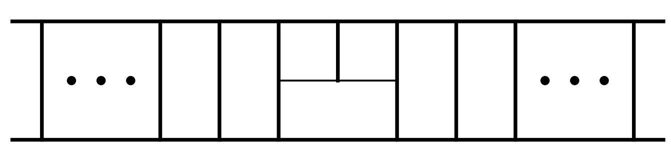




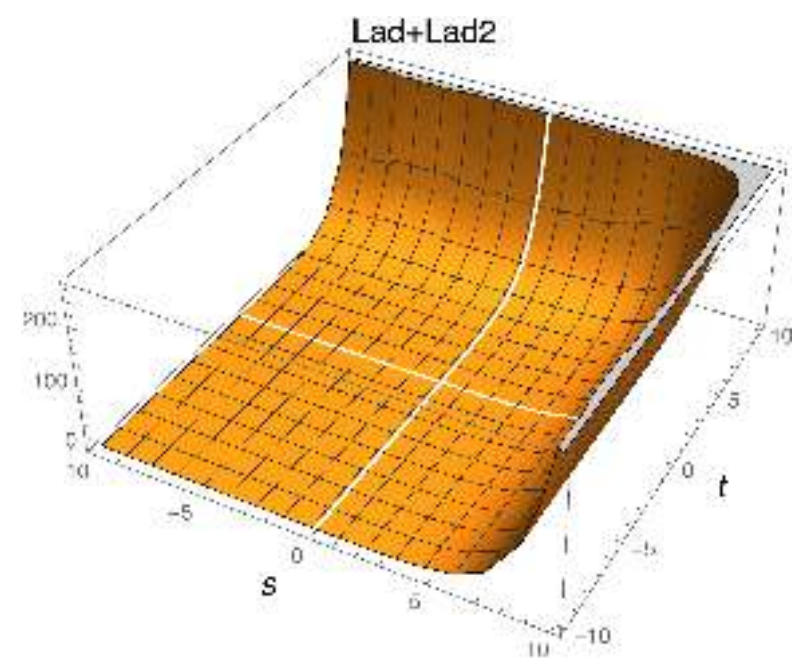
ТВ, Паде, Лестница и численное решение дляг t=s



Ladder



Lddder 2



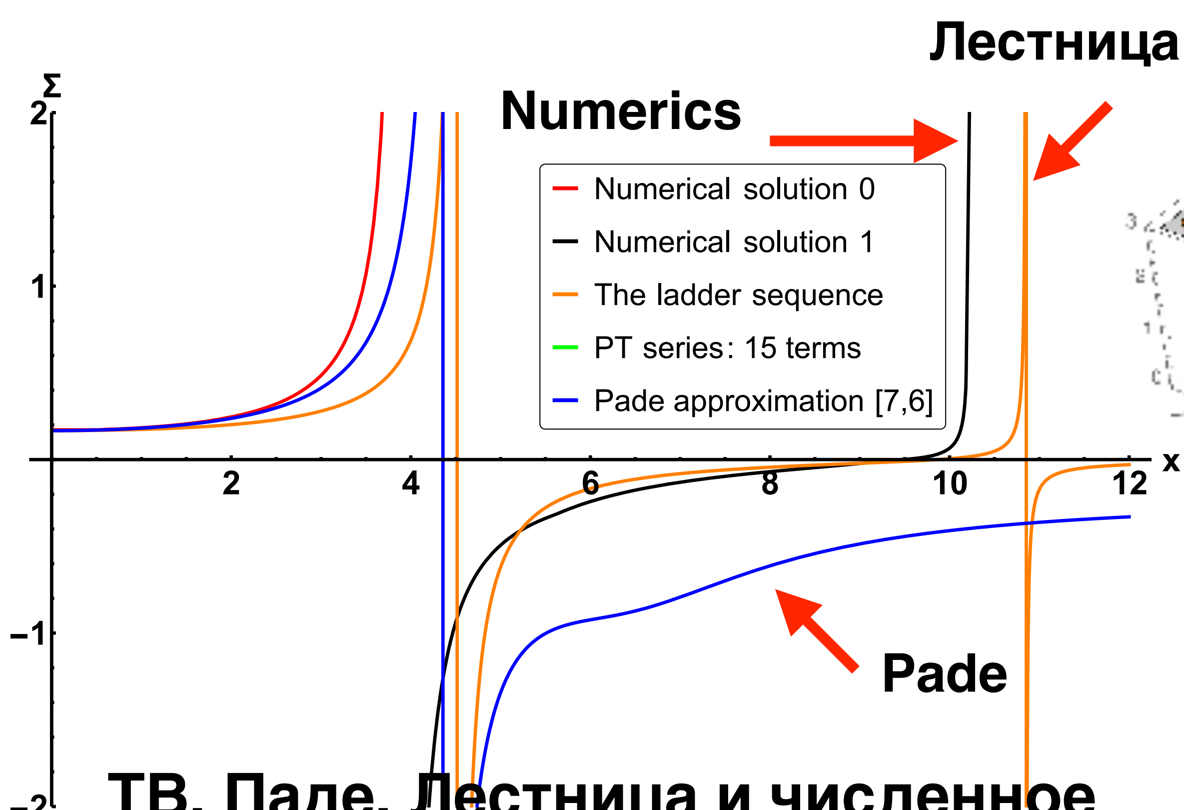
$$\boxed{\Sigma_L(s,z) = \frac{2}{s^2 z^2}\left(e^{sz} - 1 - sz - \frac{s^2 z^2}{2}\right)}$$

$$z = \frac{g^2}{\epsilon}$$

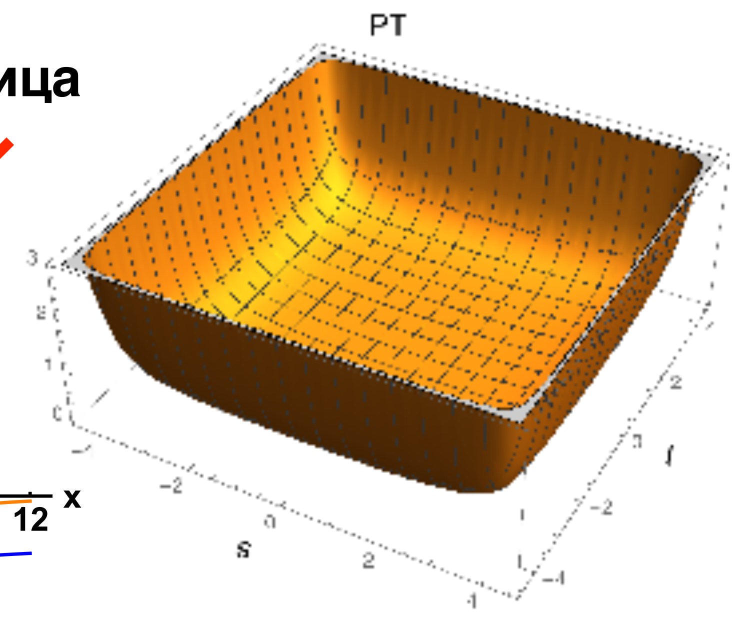
Численое решение полного уравнения близко в лестничному приближению

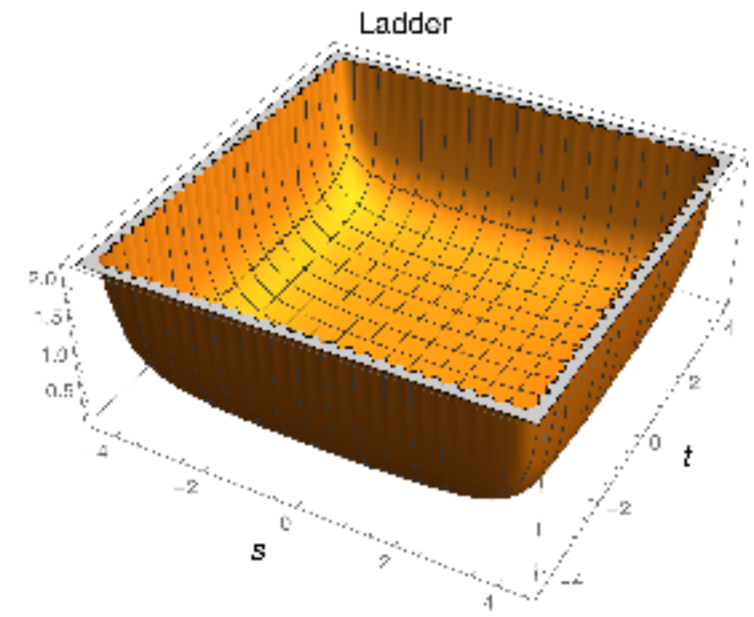
Всепетлевое решение (лидирующие расходимости)

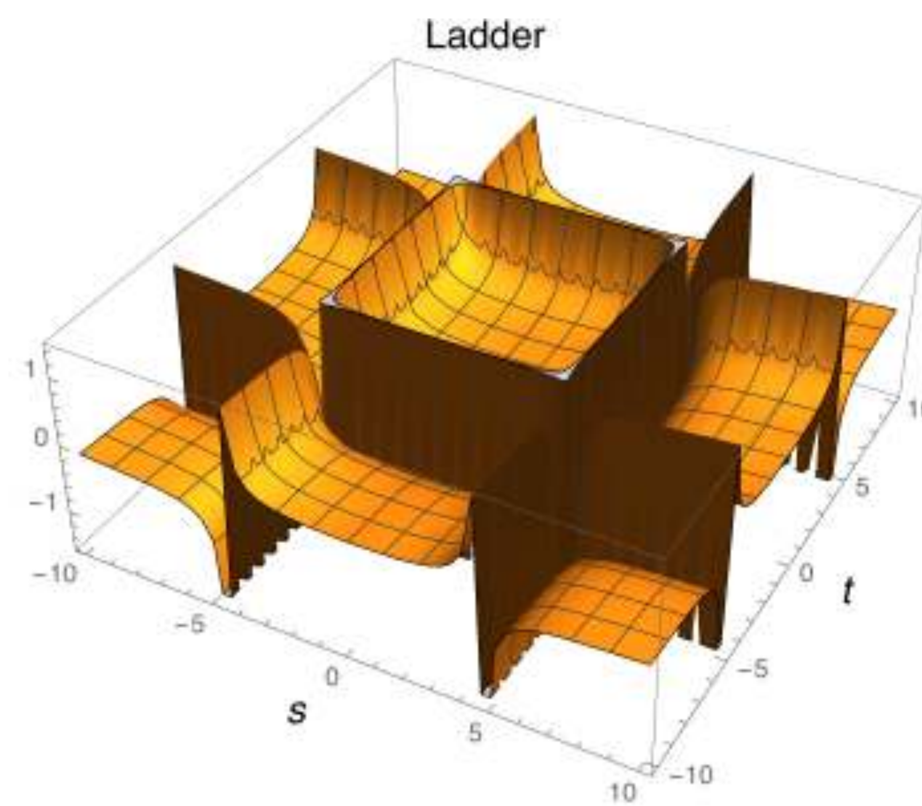
D=8 N=1

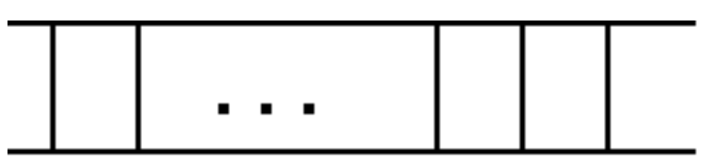


ТВ, Паде, Лестница и численное решение дляг t=s









$$z = \frac{g^2}{\epsilon}$$

$$\boxed{\Sigma_L(s,z) = -\sqrt{5/3}\,\frac{4\tan(zs^2/(8\sqrt{15}))}{1-\tan(zs^2/(8\sqrt{15}))\sqrt{5/3}}}$$

Выводы

- **R-операция работает в неперенормируемых теориях как и в перенормируемых и обеспечивает локальность контрчленов**
- **Локальность контролеров позволяет написать рекуррентные полюсные соотношения в любых теориях**
- **Рекуррентные соотношения позволяют вычислить лидирующие расходимости во ВСЕХ петлях алгебраически, начиная с одной петли**
- **Рекуррентные соотношения позволяют вычислить подлидирующие расходимости во ВСЕХ петлях алгебраически, начиная с двух петель**
- **Сумма всех лидирующих расходимостей удовлетворяет интегро-дифференциальному уравнению, которое является обобщением уравнения РГ на неперенормируемый случай**
- **Эта процедура очевидно работает и далее для всех расходимостей как в перенормируемых теориях**