BLTP Bogoliubov Laboratory of Theoretical Physics

Многопетлевые вычисления в ЛТФ: 40 лет прогресса

Люди и годы

1973-

ЛТФ ОИЯИ

Д.В.Ширков
В.В.Белокуров, А.А.Владимиров, Д.И.Казаков,
О.В.Тарасов, Л.В.Авдеев,
А.В.Котиков, М.Ю.Калмыков, В.В.Бытьев, М.Н.Тентюков,
В.Н.Велижанин, А.И.Онищенко,
А.В.Бедяков, А.Ф.Пикельнер

ИЯИ РАН

К.Г.Четыркин, Ф.В.Ткачев, А.Л.Катаев,
С.А.Ларин, С.Г.Горишний, А.И.Пенин

НИИЯФ МГУ

Н.И.Усюкина, А.И.Давыдычев, В.А.Смирнов, А.В.Смирнов, П.А.Байков

НИФИ СПбГУ

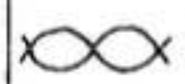
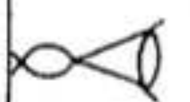
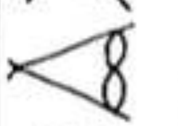
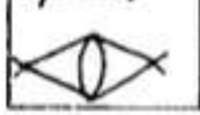
А.Н.Васильев, Ю.М.Письмак, Ю.Хонконен, М.В.Компанеец

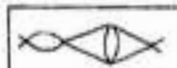
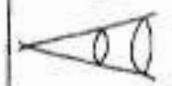
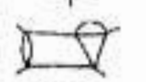
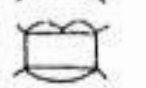
ИЯФ СО РАН А.Г.Грозин, Р.Ли

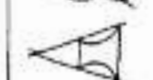
Постановка задачи

- Петлевая диаграмма Фейнмана - многократный интеграл по четырехмерном псевдоевклидову пространству
- При введении параметров и последующем вычислении интегралов по импульсам остаются параметрические интегралы по одному на каждую линию диаграммы
- Число диаграмм растёт факториально с порядком ТВ
- В калибровочных теориях число слагаемых в диаграмме растёт степенным образом с порядком ТВ
- Импульсные интегралы ультрафиолетово расходятся
- Для устранения расходимостей нужно применять регуляризацию и R- операцию
- Бесконечные вклады представляют собственный интерес, так как через ренормгруппу определяют УФ асимптотики теории
- Часто желательно получить точные аналитические формулы для расходимостей, которые задаются трансцендентными числами
- Не существует простого рецепта вычисления интегралов и даже их расходящихся частей (в рамках заданной регуляризации и процедуры вычитания расходимостей)

Прелюдия

	Diagram	Singular contribution	Combinatorical factor for Z_2 and Z_4	Combinatorical factor for Z_{φ^2}
1		$\frac{1}{\varepsilon}$	$\frac{3}{2}\frac{n+8}{9}g$	$\frac{1}{2}\frac{n+2}{3}g$
		$-\frac{1}{4\varepsilon}$	$\frac{1}{6}\frac{n+2}{3}g^2$	
2		$-\frac{1}{\varepsilon^2}$	$-\frac{3}{4}\frac{n^2+6n+20}{27}g^2$	$-\frac{1}{4}\frac{(n+2)^2}{9}g^2$
		$-\frac{1-\varepsilon}{2\varepsilon^2}$	$-3\frac{5n+22}{27}g^2$	$-\frac{1}{2}\frac{n+2}{3}g^2$
		$\frac{1-\varepsilon/2}{6\varepsilon^2}$	$-\frac{1}{4}\frac{n^2+10n+16}{27}g^3$	
		$\frac{1}{\varepsilon^3}$	$\frac{3}{8}\frac{n^3+8n^2+24n+48}{81}g^3$	$\frac{1}{8}\frac{(n+2)^3}{27}g^3$
		$\frac{1-\varepsilon}{2\varepsilon^3}$	$\frac{3}{2}\frac{3n^2+22n+56}{81}g^3$	$\frac{1}{4}\frac{(n+2)^2}{9}g^3$
3		$\frac{1-9/4\,\varepsilon}{6\varepsilon^2}$	$\frac{1}{2}\frac{n^2+10n+16}{27}g^3$	$\frac{1}{6}\frac{(n+2)^2}{9}g^3$
		$\frac{2\zeta(3)}{\varepsilon}$	$\frac{5n+22}{27}g^3$	
		$\frac{1-\varepsilon-\varepsilon^2}{3\varepsilon^3}$	$\frac{3}{2}\frac{3n^2+22n+56}{81}g^3$	$\frac{1}{4}\frac{(n+2)(n+8)}{27}g^3$
		$\frac{1-\varepsilon-\varepsilon^2}{3\varepsilon^3}$	$\frac{3}{2}\frac{n^2+20n+60}{81}g^3$	
		$\frac{1-3\varepsilon+4\varepsilon^2}{6\varepsilon^3}$	$6\frac{n^2+20n+60}{81}g^3$	$\frac{(n+2)(n+8)}{27}g^3$
		$\frac{1-2\varepsilon+\varepsilon^2}{3\varepsilon^3}$	$\frac{3}{4}\frac{3n^2+22n+56}{81}g^3$	$\frac{1}{4}\frac{(n+2)^2}{9}g^3$

	$-\frac{1-2\varepsilon+\varepsilon^2}{3\varepsilon^4}$	$-\frac{3}{4}\frac{3n^3+24n^2+80n+136}{243}g^4$	$-\frac{1}{4}\frac{(n+2)^3}{27}g^4$	
	$-\frac{1-5\varepsilon+15\varepsilon^2-11\varepsilon^3+6\zeta(3)\varepsilon^3}{12\varepsilon^4}$	$-\frac{3}{2}\frac{n^3+14n^2+76n+152}{243}g^4$	$-\frac{1}{2}\frac{(n+2)^2(n+8)}{81}g^4$	
	$-\frac{5-10\varepsilon-\varepsilon^2+6\varepsilon^3}{24\varepsilon^4}$	$-\frac{1}{2}\frac{11n^2+76n+156}{243}g^4$	$-\frac{1}{4}\frac{(n+2)^2}{9}g^4$	
	$\frac{5\zeta(5)}{\varepsilon}$	$-3\frac{2n^2+55n+186}{243}g^4$		4
	$-\frac{\zeta(3)-3(\zeta(3)-\frac{1}{2}\zeta(4))\varepsilon}{2\varepsilon^2}$	$-6\frac{5n^2+62n+176}{243}g^4$		
	$-\frac{1-\frac{8}{3}\varepsilon+\frac{5}{3}\varepsilon^2+\frac{8}{3}\varepsilon^3}{8\varepsilon^4}$	$-6\frac{7n^2+72n+164}{243}g^4$		
	$-\frac{1-\varepsilon-\varepsilon^2-\varepsilon^3+2\zeta(3)\varepsilon^3}{4\varepsilon^4}$	$-\frac{3}{2}\frac{n^3+14n^2+76n+152}{243}g^4$		
	$-\frac{1-2\varepsilon-2\varepsilon^2+6\varepsilon^3-6\zeta(3)\varepsilon^3}{6\varepsilon^4}$	$-\frac{3}{8}\frac{n^3+13n^2+80n+144}{243}g^4$	$-\frac{1}{8}\frac{(n+2)^2(n+8)}{81}g^4$	
	$-\frac{1-3\varepsilon+\frac{7}{2}\varepsilon^2}{12\varepsilon^3}$	$-\frac{3}{4}\frac{n^3+18n^2+86n+128}{243}g^4$	$-\frac{1}{4}\frac{(n+2)^2(n+8)}{81}g^4$	
	$-\frac{1-\frac{11}{4}\varepsilon+\frac{121}{12}\varepsilon^2}{16\varepsilon^3}$	$-\frac{5n^2+32n+44}{81}g^4$	$-\frac{1}{6}\frac{(n+2)^2}{9}g^4$	

	$-\frac{1-4\varepsilon+5\varepsilon^2+6\varepsilon^3-12\zeta(3)\varepsilon^3}{12\varepsilon^4}$	$-\frac{3}{2}\frac{11n^2+76n+156}{243}g^4$	$-\frac{1}{4}\frac{(n+2)(5n+22)}{81}g^4$	
	$-\frac{1-\varepsilon-\varepsilon^2-\varepsilon^3+2\zeta(3)\varepsilon^3}{4\varepsilon^4}$	$-\frac{3}{4}\frac{3n^3+24n^2+80n+136}{243}g^4$	$-\frac{1}{8}\frac{(n+2)(n^2+6n+20)}{81}g^4$	
	$-\frac{5-\frac{10}{3}\varepsilon-\frac{37}{4}\varepsilon^2}{48\varepsilon^3}$	$-\frac{5n^2+32n+44}{81}g^4$	$-\frac{1}{6}\frac{(n+2)^2}{9}g^4$	
	$-\frac{1-3\varepsilon+\varepsilon^2+5\varepsilon^3-6\zeta(3)\varepsilon^3}{12\varepsilon^4}$	$-\frac{3}{2}\frac{n^3+10n^2+72n+160}{243}g^4$	$-\frac{1}{4}\frac{(n+2)(n^2+6n+20)}{81}g^4$	
	$-\frac{3\zeta(3)-3(\zeta(3)+\frac{1}{2}\zeta(4))\varepsilon}{2\varepsilon^2}$	$-3\frac{5n^2+62n+176}{243}g^4$	$-\frac{1}{2}\frac{(n+2)(5n+22)}{81}g^4$	4
	$-\frac{1-3\varepsilon+\varepsilon^2+5\varepsilon^3}{12\varepsilon^4}$	$-\frac{3}{2}\frac{7n^2+72n+164}{243}g^4$	$-\frac{1}{4}\frac{(n+2)(5n+22)}{81}g^4$	
	$-\frac{1-\frac{8}{3}\varepsilon+\frac{5}{3}\varepsilon^2+\frac{8}{3}\varepsilon^3}{8\varepsilon^4}$	$-3\frac{11n^2+76n+156}{243}g^4$	$-\frac{1}{2}\frac{(n+2)(5n+22)}{81}g^4$	
	$-\frac{1-3\varepsilon+\varepsilon^2+5\varepsilon^3-6\zeta(3)\varepsilon^3}{12\varepsilon^4}$	$-3\frac{n^3+14n^2+76n+152}{243}g^4$	$-\frac{1}{2}\frac{(n+2)(n^2+6n+20)}{81}g^4$	
	$-\frac{1-6\varepsilon+15\varepsilon^2-30\varepsilon^3+24\zeta(3)\varepsilon^3}{24\varepsilon^4}$	$-6\frac{7n^2+72n+164}{243}g^4$	$-\frac{(n+2)(5n+22)}{81}g^4$	
	$-\frac{1-6\varepsilon+19\varepsilon^2-30\varepsilon^3}{24\varepsilon^4}$	$-6\frac{7n^2+72n+164}{243}g^4$	$-\frac{(n+2)(5n+22)}{81}g^4$	

Методы вычислений

- Размерная регуляризация - $D=4-2\varepsilon$
- IR-rearrangement (А.Владимиров)
- Полиномы Гегенбауэра (Четыркин, Ткачев, Катаев)
- Интегрирование по частям (Четыркин, Ткачев)
- Метод уникальностей - Соотношение звезда-треугольник (А.Н.Васильев и др., Казаков)
- R*- операция (Четыркин, Ткачев, Смирнов)
- Дифференциальные уравнения (Котиков)
- Функциональные уравнения (Казаков,Тарасов)
- Разложение по мастер-интегралам и классы трансцендентности (Котиков и др.)
- Разложение по обратным массам (в массивном случае)
- Компьютерная алгебра для:
  - генерации диаграмм
  - лоренцева алгебра (в калибровочных теориях)
  - приведение всех диаграмм к мастер интегралам
  - интегрирование по частям
  - разложения по массам

Мировые рекорды

- Скалярная теория φ^4 : 3 петли -1974 (Белокуров,Владимиров, Казаков, Славнов, Ширков)
  4 петли - 1978 (Владимиров, Казаков,Тарасов)
  5 петель - 1983 (Владимиров, Четыркин, Горишний, Ларин, Ткачев; Казаков)
  6 петель - 2016 (Компанеец, Панцер)
- КХД β-функция : 3 петли - 1980 (Владимиров, Тарасов, Жарков)
  4 петли - 1997 (Ларин, Вермасерен)
  5 петель -2016 (Байков, Четыркин)
- N=4 СУСИ β-функция: 3 петли -1980 (Авдеев, Владимиров, Тарасов)
  4 петли -2007 (Велижанин)
- N=2 СУСИ нелинейная сигма модель:
  расходимости 5 петель - 1986 (Грисару,Казаков, Занон)
- КХД структурные функции F_L в порядке α_s^2 -1990-92 (Казаков, Котиков)

Мировые рекорды

- N=4 СУСИ аномальные размерности

вильсоновских операторов: 2 петли - 2003 (Котиков, Липатов)
3 петли -2004 (Котиков, Липатов, Онищенко, Велижанин)

- N=4 СУСИ универсальные аномальные размерности

4, 5 и 6 петель - 2007 (Котиков, Липатов, Стаудахер, Реж, Велижанин)

- Полный набор β-функций в Стандартной модели

на уровне 3 петель - 2013-2014 (Бедняков, Пикельнер, Веретин)

- Интерсепт BFKL померона в N=4 СУСИ - первые 4 поправки - 2013 (Котиков, Липатов, Онищенко, Велижанин)
- Амплитуды в N=2 D=6 Супер Янг-Миллсе

лидирующие расходимости до 5 петель - 2014 (Борк, Власенко,Казаков, Компанеец, Толкачев)

- Амплитуды в N=1 D=8, N=1 D=10 Супер Янг-Миллсе

лидирующие расходимости до 4 петель - 2014 (Борк, Власенко,Казаков, Компанеец, Толкачев)

Смежные вопросы

- Суммирование расходящихся рядов ТВ

$$\beta(g) = \sum \beta_n g^n \qquad \beta_n \sim (-a)^n n! n^b \qquad \phi^4: \quad a = \frac{1}{16\pi^2}, \; b = 7/2$$

- Метод конформ - бореля 1979-80 (Владимиров, Казаков,Тарасов, Ширков)

$$\beta^{CB}(g) = \int_0^\infty \frac{dx}{g} e^{-x/g} (x\frac{d}{dx})^5 B(x), \qquad B(x) = a_2 x^2 (1 - a_3 w + a_4 w^2 - a_5 w^3 + ...).$$

$$w(x) = \frac{\sqrt{1+x} - 1}{\sqrt{1+x} + 1}$$

$$\beta(g) = \frac{3}{2}g^2 - \frac{17}{6}g^3 + 16.27g^4 - 135.80g^5 + 1420.69g^6 - 17543.39g^7 + ...$$

$$\beta_4^{CB}(g) = \frac{3}{2}g^2 - \frac{17}{6}g^3 + 16.27g^4 - 135.80g^5 + \underline{1404.59}g^6 - \underline{16537.80}g^7 + ...$$

$$\beta_5^{CB}(g) = \frac{3}{2}g^2 - \frac{17}{6}g^3 + 16.27g^4 - 135.80g^5 + 1420.69g^6 - \underline{17150.62}g^7 + ...$$

Смежные вопросы

- Классы трансцендентности

В терминах каких функций и в классе каких трансцендентных чисел следует искать ответы для фейнмановских диаграмм?

В низших петлях это логарифмы и полилогарифмы и, соответственно, дзета-функции Римана

$$\zeta(n) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^n}$$

уровень трансцендентности - n

Однако в высших петлях возникают обобщённые полилогарифмы Гончарова

$$G_{a_1,\dots a_n}(x), \quad a = |a_1| + \dots + |a_n|$$

уровень трансцендентности - a

$$\zeta(s_1,\dots,s_k) = \sum_{n_1>n_2>\cdots>n_k>0} \frac{1}{n_1^{s_1}\cdots n_k^{s_k}} = \sum_{n_1>n_2>\cdots>n_k>0} \prod_{i=1}^{k} \frac{1}{n_i^{s_i}},$$

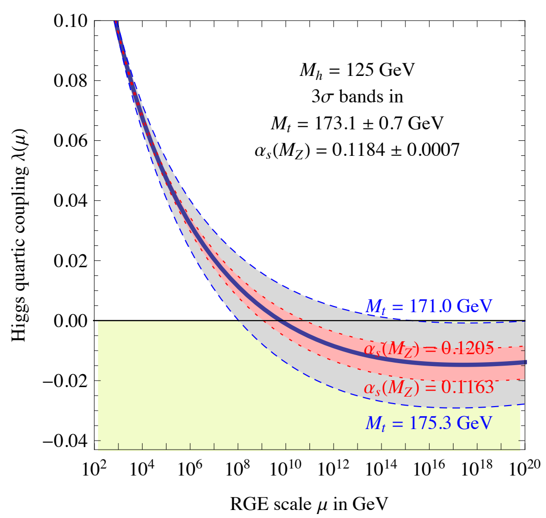
В n-петлях встречаются все числа до уровня трансцендентности n

В максимально суперсимметричном случае - только максимальный уровень

(Котиков, Липатов - 2007)

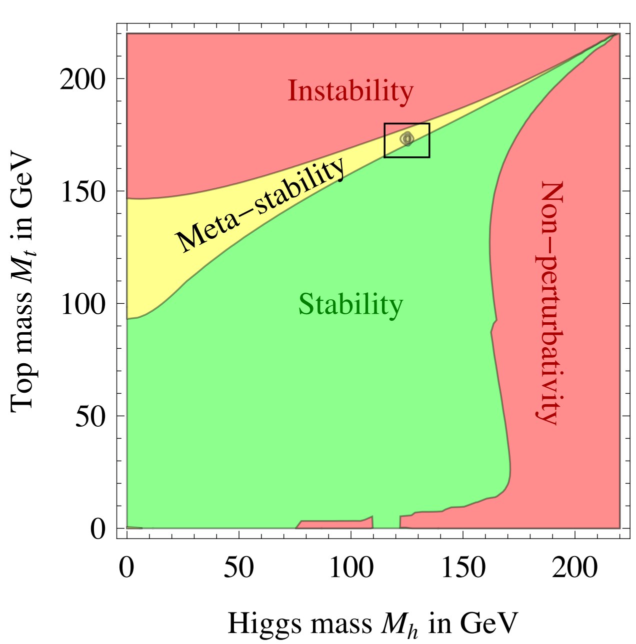
Приложения

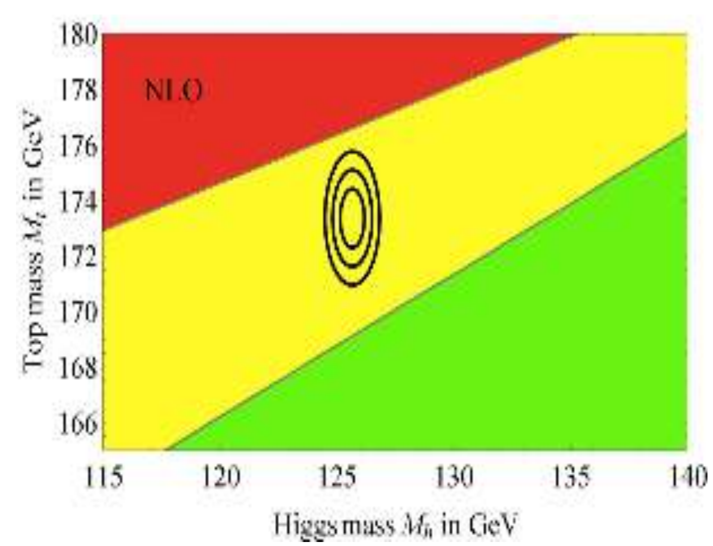
1. Прецизионная проверка Стандартной модели требует сейчас 2 и 3 петлевой точности, в КХД NNLL

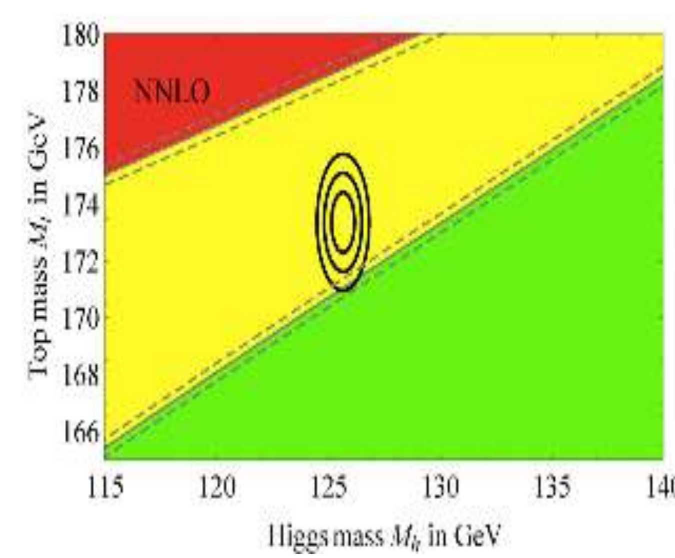


Измеренное значение массы хиггсовского бозона позволяет продолжить Стандартную Модель до Планковских масштабов

Бедняков, Пикельнер, Веретин, Книль,
Phys.Rev.Lett. 115 (2015) 201802)
Phys.Lett. B741 (2015) Nucl.Phys. B896 (2015)







Приложения

2. Поиски точных решений и интегрируемости требуют аналитических расчетов нескольких порядков ТВ для проверки различных гипотез

- Конечность N=4 СУСИ в 3 петлях -> доказательство конформной инвариантности теории во всех петлях

  Авдеев, Владимиров, Тарасов
- Построение конечных теорий с N=1 суперсимметрией

  Казаков, Тарасов; Казаков
- Построение конечных спонтанно-нарушенных суперсимметричных теорий

  Авдеев, Казаков, Кондрашук; Велижанин, Казаков,
- Проверка гипотезы AdS/CFT соответствия

  Котиков, Липатов; Котиков, Липатов, Онищенко, Велижанин
- Проверка гипотезы факторизации спиральных амплитуд

  Борк, Власенко,Казаков,Компанеец,Толкачев
- Проверка соответствия BFKL уравнению

  Котиков, Липатов;

Приложения

3. Приложения КТП к задачам вне физики частиц

- критические индексы фазовых переходов

На основе многопетлевых квантовополевых вычислений и применения процедуры суммирования асимптотических рядов ε-разложения получены критические индексы фазовых переходов второго рода, что явилось самым точным на тот момент вычислением в мировой литературе и было отмечено в Нобелевской лекции К.Вильсона (Владимиров, Казаков, Тарасов)

- исследование свойств графена

Вычисление оптической проводимости в модели графена на основе 2-х петлевых вычислений фермионной собственной энергии методами квантовой теории поля (Котиков, Тебер)