

ОБЪЕДИНЁННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ

Лаборатория теоретической физики им.  
Н.Н.Боголюбова

**Р**

радиационные поправки

асходимости

регуляризация

енормировка

енормгруппа

и всё такое в примерах

в квантовой теории поля

Д.И.КАЗАКОВ

ДУБНА

2008

**Казаков Д.И.**

## **РАДИАЦИОННЫЕ ПОПРАВКИ, РАСХОДИМОСТИ, РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ, РЕНОРМИРОВКА, РЕНОРМГРУППА И ВСЁ ТАКОЕ В ПРИМЕРАХ В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ**

Настоящие лекции являются практическим руководством по вычислению радиационных поправок к функциям Грина в квантовой теории поля. Объясняется как возникают ультрафиолетовые расходимости, даётся их классификация, описана процедура перенормировки, позволяющая получать конечные ответы, излагаются основы группы перенормировок в КТП. Приведены многочисленные примеры вычислений в скалярных и калибровочных теориях с использованием размерной регуляризации. Обсуждаются квантовые аномалии. В заключении описана процедура избавления от инфракрасных расходимостей, возникающих при вычислении элементов матрицы рассеяния. Изложение основывается на стандартных учебниках по квантовой теории поля, список которых приведён в конце текста.

Лекции были прочитаны студентам 4-го курса кафедры "Физика элементарных частиц" факультета Общей и прикладной физики МФТИ.

**Kazakov D.I.**

## **RADIATIVE CORRECTIONS, DIVERGENCES, REGULARIZATION, RENORMALIZATION, RENORMALIZATION GROUP AND ALL THAT IN EXAMPLES IN QUANTUM FIELD THEORY**

The present lectures are a practical guide to the calculation of radiative corrections to the Green functions in quantum field theory. The appearance of ultraviolet divergences is explained, their classification is given, the renormalization procedure which allows one to get the finite results is described, and the basis of the renormalization group in QFT is presented. Numerous examples of calculations in scalar and gauge theories are given. Quantum anomalies are discussed. In conclusion the procedure which allows one to get rid of infrared divergences in S-matrix elements is described. The lectures are based on the standard quantum field theory textbooks, the list of which is given at the end of the text.

These lectures were given to the 4-th year students of the Department of General and Applied Physics of the Moscow Institute of Physics and Technology (Technical University).

Рис.— 42, список лит.— 13 наим.

# Содержание

<b>0</b>	<b>Предисловие</b>	<b>4</b>
<b>1</b>	<b>Лекция I: Радиационные поправки. Общий анализ расходящихся интегралов</b>	<b>5</b>
1.1	Радиационные поправки . . . . .	5
1.2	Расходимость интегралов . . . . .	6
1.3	Общий анализ УФ расходимостей . . . . .	7
1.4	Анализ размерностей . . . . .	9
<b>2</b>	<b>Лекция II: Регуляризация</b>	<b>12</b>
2.1	Евклидов интеграл и обрезание на верхнем пределе . . . . .	12
2.2	Регуляризация Паули-Вилларса . . . . .	14
2.3	Размерная регуляризация . . . . .	15
<b>3</b>	<b>Лекция III: Примеры вычислений. Однопетлевые интегралы</b>	<b>18</b>
3.1	Скалярная теория . . . . .	18
3.2	Квантовая электродинамика . . . . .	21
3.3	Квантовая хромодинамика . . . . .	24
<b>4</b>	<b>Лекция IV: Ренормировка. Общая идея</b>	<b>29</b>
4.1	Скалярная теория. Однопетлевое приближение . . . . .	30
4.2	Скалярная теория. Двухпетлевое приближение . . . . .	32
4.3	Общая структура R-операции . . . . .	36
<b>5</b>	<b>Лекция V: Ренормировка. Калибровочные теории и Стандартная Модель</b>	<b>40</b>
5.1	Квантовая электродинамика . . . . .	40
5.2	Квантовая хромодинамика . . . . .	41
5.3	Стандартная Модель фундаментальных взаимодействий . . . . .	42
<b>6</b>	<b>Лекция VI: Ренормгруппа</b>	<b>48</b>
6.1	Групповые уравнения и решения методом характеристик . . . . .	48
6.2	Эффективный заряд . . . . .	52
6.3	Размерная регуляризация и $\overline{MS}$ схема . . . . .	53
6.4	$\Lambda$ . . . . .	55
6.5	Бегущие массы . . . . .	58
<b>7</b>	<b>Лекция VII: Нуль заряда и асимптотическая свобода</b>	<b>61</b>
7.1	Нуль заряда . . . . .	61
7.2	Асимптотическая свобода . . . . .	62
7.3	Экранировка и антиэкранировка заряда . . . . .	64

<b>8</b>	<b>Лекция VIII: Аномалии</b>	<b>66</b>
8.1	Аксиальная аномалия . . . . .	66
8.2	Следствия аксиальной аномалии . . . . .	70
8.3	Конформная аномалия . . . . .	72
<b>9</b>	<b>Лекция IX: Инфракрасные расходимости</b>	<b>74</b>
9.1	Дважды логарифмическая асимптотика . . . . .	74
9.2	Излучение мягких фотонов . . . . .	76
9.3	Сокращение инфракрасных расходимостей . . . . .	81
<b>10</b>	<b>Лекция X: Коллинеарные расходимости</b>	<b>82</b>
10.1	Коллинеарные расходимости в безмассовой теории . . . . .	82
10.2	Кварковые распределения и функции расщепления . . . . .	85
10.3	Получение конечных ответов . . . . .	88
<b>11</b>	<b>Послесловие</b>	<b>90</b>
	<b>Литература</b>	<b>93</b>

## 0 Предисловие

В настоящее время существует много прекрасных учебников по квантовой теории поля. Список наиболее популярных из них приведён в библиографии к настоящим лекциям. Тем не менее, каждый, кто читает лекции по квантовой теории поля, сталкивается с проблемой отбора материала и написания методического пособия для студентов. Настоящие лекции и представляют собой такое методическое пособие, посвящённое вычислению радиационных поправок в КТП. Две проблемы, с которыми мы сталкиваемся на этом пути, это ультрафиолетовые и инфракрасные расходимости. Наша задача - показать, как избавиться от этих расходимостей и получить конечные поправки к сечениям элементарных процессов. Попутно излагаются методы вычислений диаграмм Фейнмана и способы регуляризации расходимостей. Более подробно излагается теория перенормировок и устранение ультрафиолетовых расходимостей в функциях Грина, что иллюстрируется на ряде примеров в скалярной теории и в калибровочных теориях. Излагается также сопряжённый с этим аппарат ренормализационной группы. Что касается инфракрасных расходимостей, то в литературе в основном обсуждаются ИК расходимости в электродинамике. В неабелевых теориях, а также и в КЭД с безмассовыми фермионами, ситуация заметно сложнее, здесь возникают также и коллинеарные расходимости. В последней лекции демонстрируется как можно избавиться от таких расходимостей с привлечением методов развитых в квантовой хромодинамике. Ещё один сюжет также связанный с расходимостями - это так называемые аномалии. Они тоже приводят к ультрафиолетово расходящимся вкладам от которых необходимо избавиться. Поэтому отдельная лекция посвящена аксиальным и конформным аномалиям.

Изложение материала пересекается с многими учебниками и частично заимствовано оттуда. Тем не менее, компоновка материала и многие вычисления принадлежат автору, поэтому в тексте не содержатся непосредственные ссылки на какие-либо учебники. Надо признать, что стиль изложения в различных учебниках сильно различается и читатель может выбрать себе книгу по вкусу. Мы в основном пользовались классической монографией Н.Н.Боголюбова и Д.В.Ширкова при изложении теории перенормировок, а также более современной книгой М.Пескина и Д.Шрёдера, которой мы следовали при обсуждении инфракрасных расходимостей.

Наш опыт чтения лекций по квантовой теории поля, теории перенормировок и ренормгруппе говорит, что этот материал по-прежнему остаётся весьма сложным для восприятия и не везде изложен достаточно просто. Зачастую приходится сталкиваться с непониманием сложной структуры теории поля, которая проявляется в теории перенормировок. Иногда перенормируемые теории упрощенно трактуются просто как теории с размерной константой связи в остальном не отличающиеся от перенормируемых. Коллинеарные расходимости, возникающие в теориях с безмассовыми частицами, также, несмотря на многолетнюю историю, не стали широко известной частью курса КТП. Здесь предпринята очередная попытка упрощенного изложения этого сложного материала. Разумеется, при этом пришлось пожертвовать некоторой строгостью и полнотой. Надеюсь, что в совокупности с существующей литературой, настоящие лекции послужат цели прояснения и усвоения аппарата квантовой теории поля и его приложения к физике элементарных частиц.

# 1 Лекция I: Радиационные поправки. Общий анализ расходящихся интегралов

## 1.1 Радиационные поправки

Формализм квантовой теории поля, являясь обобщением квантовой механики на случай бесконечного числа степеней свободы с несохранением числа частиц, позволяет описывать процессы рассеяния, аннигиляции, рождения и распада частиц с помощью ряда хорошо определённых правил. Как и в квантовой механике, сечение любого процесса даётся квадратом модуля амплитуды вероятности, вычисляемой по правилам Фейнмана для соответствующего лагранжиана, проинтегрированным по фазовому пространству. Поскольку точные вычисления амплитуд вероятностей не представляются возможными, прибегают к теории возмущений по малому параметру - константе взаимодействия (связи) - и получают ответ в виде степенного ряда. Ведущие члены такого ряда представляются диаграммами Фейнмана без петель – так называемыми древесными диаграммами. Примеры таких диаграмм для ряда характерных процессов в КЭД приведены на рис.1.

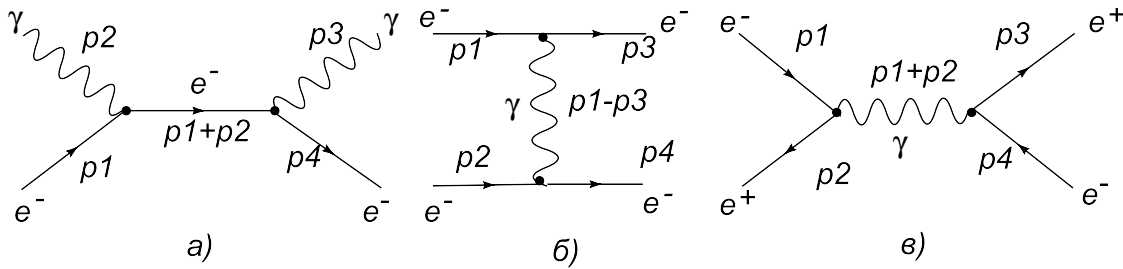


Рис. 1: Примеры древесных диаграмм различных процессов в КЭД: а) Комптоновское рассеяние, б) Мёллеровское рассеяние, в) аннигиляция пары частица-античастица. Указаны импульсы внешних (реальных) и внутренних (виртуальных) частиц

Все приведённые на Рис.1 диаграммы пропорциональны квадрату константы связи  $e^2$ . Они строятся по хорошо известным правилам Фейнмана и не содержат никакого интегрирования по импульсам (при работе в импульсном представлении), ибо, в силу закона сохранения четырёхимпульса, все импульсы определены однозначно.

Ситуация меняется при переходе к следующему порядку теории возмущений. Для примера на рис.2 представлены соответствующие диаграммы в случае комптоновского рассеяния.

Они получили название *радиационных поправок*, поскольку в электродинамике соответствуют испусканию и поглощению фотона. Это название принято и в других теориях для поправок по теории возмущений. Все эти диаграммы пропорциональны уже четвертой степени константы связи  $e^4$  и поэтому являются членами разложения следующего порядка малости по сравнению с древесными диаграммами. Однако, в отличие

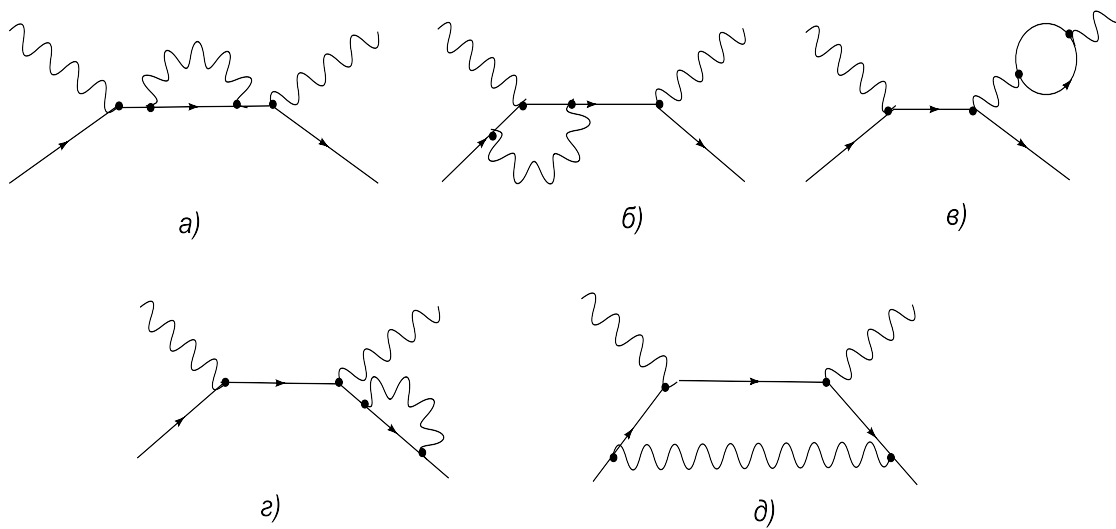


Рис. 2: Однопетлевые диаграммы для процесса комптоновского рассеяния

от древесных диаграмм, они содержат замкнутую петлю, которой по правилам Фейнмана соответствует интегрирование по бегущему по ней четырёхимпульсу. Всякой петле соответствует ветвление импульса аналогично ветвлению электрического тока в соответствии с правилами Кирхгофа, так что полный импульс сохраняется, но импульс текущий по каждой линии в петле – произволен. Поэтому по нему производится интегрирование.

## 1.2 Расходимость интегралов

Прежде чем вычислять радиационные поправки, рассмотрим как ведёт себя подынтегральное выражение и весь интеграл в целом. Для примера возьмём те же диаграммы комптоновского рассеяния представленные на рис.2. Интеграл, соответствующий диаграмме изображённой на рис.2.а) имеет вид

$$\int d^4k \frac{\gamma^\mu (\hat{p} - \hat{k} + m) \gamma^\mu}{[k^2 + i\epsilon][(p - k)^2 - m^2 + i\epsilon]}, \quad (1.1)$$

где пропагатор фотона записан в калибровке Фейнмана, а интегрирование производится в пространстве Минковского. Не будем пока вычислять этот интеграл (мы сделаем это позже), а посмотрим на подынтегральное выражение с точки зрения наличия сингулярностей, а также поведения при малых и больших значениях импульса.

Наличие полюсов в пропагаторах при импульсе равном квадрату массы не является проблемой при интегрировании, так как согласно правилам Фейнмана знаменатель содержит бесконечно малую мнимую добавку  $\sim \epsilon \rightarrow 0$ , задающую правила обхода полюсов. Принятый в (1.1) выбор соответствует причинной функции Грина.

Рассмотрим теперь поведение при  $k_\mu \rightarrow 0$ , так называемое *инфракрасное* поведение. Несмотря на то, что в знаменателе имеется  $k^2$ , мера 4-мерного интегрирования также пропорциональна  $k^4$ , так что сингулярность отсутствует. Это свойство присуще всем подобным интегралам. Сингулярности возникают только при определённых внешних импульсах находящихся на массовой поверхности и имеют физический смысл. Вне

массовой поверхности сингулярности отсутствуют. По этой причине мы не будем пока обсуждать инфракрасное поведение интегралов.

Рассмотрим наконец поведение при  $k_\mu \rightarrow \infty$ , так называемое *ультрафиолетовое* поведение. Заметим, что в знаменателе имеются 4 степени импульса, а в числителе - 1 плюс 4 степени в мере интегрирования. Итого  $5-4=1$ , т.е. интеграл линейно расходится при  $k_\mu \rightarrow \infty$ . Что это - свойство данного интеграла или общая ситуация? Что происходит с другими диаграммами?

Рассмотрим интеграл, соответствующий диаграмме изображённой на рис.2.б). Имеем согласно правилам Фейнмана

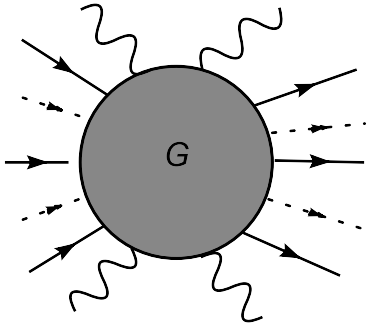
$$\int d^4k \frac{\gamma^\mu(\hat{p}_1 - \hat{k}) + m}{k^2[(p_1 - k)^2 - m^2]} \gamma^\nu(\hat{p}_2 - \hat{k}) + m \frac{\gamma^\mu}{[(p_2 - k)^2 - m^2]}. \quad (1.2)$$

Нас опять интересует поведение при  $k_\mu \rightarrow \infty$ . Подсчёт степеней импульса в числителе и знаменателе даёт: 6 в знаменателе и 2 в числителе плюс 4 в мере интегрирования. Итого  $6-6=0$ , т.е. интеграл расходится логарифмически при  $k_\mu \rightarrow \infty$ .

Здесь мы столкнулись с трудностью, называемой ультрафиолетовой расходимостью интегралов для радиационных поправок. Рассмотренные примеры являются не исключением, а скорее правилом. Поправки равны бесконечности и, тем самым, лишают смысла теорию возмущений по малому параметру. Выход из этого положения был найден с помощью теории перенормировок, которую мы рассмотрим позже, а сейчас попробуем оценить степень расходимости интегралов, встречающихся в теории поля с лагранжианом произвольного вида.

### 1.3 Общий анализ УФ расходимостей

Рассмотрим произвольную диаграмму Фейнмана  $G$ , изображённую на рис.3. и попробуем



$L$  - число петель

$n_b$  - число внешних бозонных линий

$n_f$  - число внешних фермионных линий

Рис. 3: Произвольная диаграмма содержащая  $L$  интегрирований

определить, расходится ли она ультрафиолетово или нет. Для этого мы должны подсчитать число степеней импульса в подынтегральном выражении: каждая внутренняя петля приносит интегрирование  $d^4p$ , что даёт 4 степени импульса; каждая производная в вершине даёт импульс в  $p$ -пространстве, т.е. 1; каждая внутренняя линия даёт пропагатор, который ведёт себя как  $p^{r_l}/p^2$ , т.е.  $r_l - 2$  - степени импульса, где  $r_l = 0, 1, 2$  для различных полей. Собирая все эти степени вместе, мы получаем величину, называемую *индексом расходимости диаграммы (УФ)*

$$\omega(G) = 4L + \sum \delta_v + \sum (r_l - 2), \quad (1.3)$$



где  $L$  есть число петель, а  $\delta_v$  есть число производных в вершине  $v$ .

Отсутствие ультрафиолетовых расходимостей означает, что  $\omega(G) < 0$ . Однако, следует быть осторожным, могут существовать подрасходимости в отдельных подграфах. Поэтому необходимое условие конечности есть

$$\text{Условие конечности (УФ): } \omega(\gamma_i) < 0, \quad \forall \gamma_i \subset G,$$

где  $\gamma_i$  суть все возможные подграфы графа  $G$ , включая сам граф  $G$ .

Однако, существует гораздо более простой способ ответа на тот же вопрос, без необходимости анализировать все диаграммы. Он может быть получен прямо из вида лагранжиана. Для этого введем величину, называемую *индексом вершины* (УФ)

$$\omega_v = \delta_v + b_v + \frac{3}{2}f_v - 4, \quad (1.4)$$

где  $\delta_v, b_v$  и  $f_v$  - числа производных, внутренних бозонных и фермионных линий, соответственно. Тогда индекс диаграммы (1.3) может быть записан как

$$\omega(G) = \sum \omega_v^{max} + 4 - n_b - \frac{3}{2}n_f, \quad (1.5)$$

где  $\omega_v^{max}$  соответствует вершине, где все линии внутренние,  $n_b$  и  $n_f$  - число внешних бозонных и фермионных линий, и мы использовали тот факт, что обычно  $r_l() = 0$  и  $r_l() = 1$ .

Уравнение (1.5) говорит нам о том, что конечность ( $\omega(G) < 0$ ) может иметь место, если  $\omega_v \leq 0$  и если число внешних линий достаточно велико. Перед тем как сформулировать общее утверждение, когда это происходит, рассмотрим несколько примеров.

Пример 1: Скалярная теория  $\mathcal{L}_{int} = -\lambda\varphi^4$ .

В этом случае  $\delta_v = 0$ ,  $f_v = 0$ ,  $b_v = 4$ , следовательно  $\omega_v^{max} = 0$ , и поэтому согласно (1.5)  $\omega(G) = 4 - n_b - \frac{3}{2}n_f$  и всё определяется числом внешних линий. Ситуация иллюстрируется на рис.4.

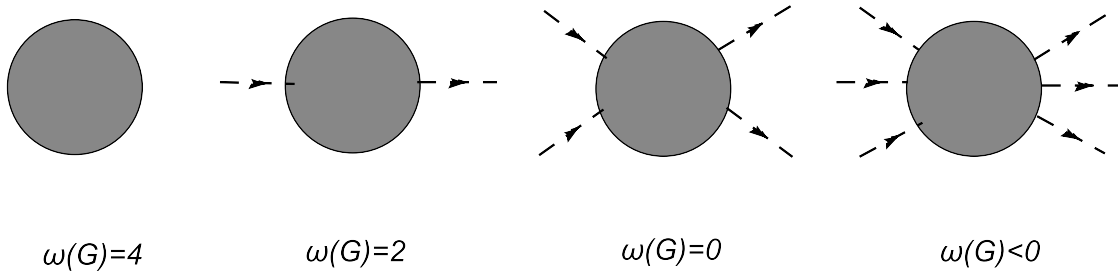


Рис. 4: Индексы расходимости диаграмм в скалярной теории

Мы видим, что существует ограниченное число расходящихся структур в теории  $\varphi^4$ . Это вакуумные графы, двух и четырехточечные функции. Все остальные диаграммы, имеющие более чем 4 внешние линии сходятся (хотя и могут содержать расходящиеся подграфы).

Пример 2: Квантовая электродинамика  $\mathcal{L}_{int} = \bar{\psi}\hat{A}\psi$ .

В этом случае  $\delta_v = 0, f_v = 2, b_v = 1, \omega_v^{max} = 0$ . Следовательно  $\omega(G) = 4 - n_b - \frac{3}{2}n_f$ , поэтому ситуация похожа на предыдущий пример и всё определяется внешними линиями. Расходятся вакуумные диаграммы ( $\omega(G) = 4$ ), пропагатор фотона ( $\omega(G) = 2$ ), пропагатор электрона ( $\omega(G) = 1$ ) и тройная вершина ( $\omega(G) = 0$ ). Остальные диаграммы сходятся.

Пример 3: Четырёхфермионное взаимодействие  $\mathcal{L}_{int} = G\bar{\psi}\psi\bar{\psi}\psi$ .

Здесь  $\delta_v = 0, f_v = 4, b_v = 0, \omega_v^{max} = 2$ , поэтому  $\omega(G) = 2N - \frac{3}{2}n_f$ . Следовательно, увеличивая число вершин, получаем всё новые расходящиеся диаграммы, независимо от числа внешних линий. Число расходящихся структур оказывается бесконечным.

Таким образом, ключевую роль играет максимальный индекс вершины. Все теории могут быть классифицированы согласно значению  $\omega_v^{max}$ :

$$\omega_v^{max} = \begin{cases} < 0 & , \\ 0 & , \\ > 0 & . \end{cases} \quad (1.6)$$

Как будет показано ниже, только для первых двух типов теорий мы можем справиться с ультрафиолетовыми расходимостями в теории возмущений с помощью процедуры перенормировок. Теории с  $\omega_v^{max} = 0$  называются *перенормируемыми*, теории с  $\omega_v^{max} > 0$  называются *неперенормируемыми*, а теории с  $\omega_v^{max} < 0$  называются *суперперенормируемыми*.

## 1.4 Анализ размерностей

Свойство теории по отношению к ультрафиолетовым расходимостям может быть переформулировано в терминах размерностей. Рассмотрим для этого произвольный член лагранжиана взаимодействия, который есть произведение полевых операторов и их производных

$$\mathcal{L}_I(x) = g \prod_{i,j} \varphi_i(x) \partial \varphi_j(x). \quad (1.7)$$

Рассмотрим действие, которое есть четырехмерный интеграл от лагранжевой плотности

$$A = \int d^4x \mathcal{L}(x), \quad (1.8)$$

и найдём размерность параметров в ур.(1.7). В качестве единицы измерения примем размерность массы равную 1. Тогда размерность длины  $[L] = -1$ , размерность времени также  $[T] = -1$ , размерность производной по координате  $[\partial_\mu] = 1$ , размерность импульса  $[p_\mu] = 1$ . Поскольку действие безразмерно (мы используем естественные единицы  $\hbar = c = 1$ )

$$[A] = 0,$$

то размерность лагранжиана равна

$$[\mathcal{L}] = 4, \quad (D - \text{в } D \text{ мерном пространстве.})$$

Отсюда можно найти размерности полей. Действительно, из кинетического члена для скалярного поля находим

$$[(\partial\phi)^2] = 4 \rightarrow [\phi] = 1, \quad \left(\frac{D-2}{2} \text{ в } D \text{ мерном пространстве}\right),$$

для спинорного поля

$$[\bar{\psi}\hat{\partial}\psi] = 4 \rightarrow [\psi] = \frac{3}{2}, \quad \left(\frac{D-1}{2} \text{ в } D \text{ мерном пространстве}\right),$$

для векторного поля

$$[(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2] = 4 \rightarrow [A_\mu] = 1, \quad \left(\frac{D-2}{2} \text{ в } D \text{ мерном пространстве}\right).$$

Это позволяет определить размерность константы связи в (1.7)

$$[g] = 4 - \delta_v - b_v - \frac{3}{2}f_v = -\omega_v^{max}. \quad (1.9)$$

Тогда классификация взаимодействий (1.6) может быть записана как

$$[g] = \begin{cases} > 0 & , \\ 0 & , \\ < 0 & . \end{cases} \quad (1.10)$$

Посмотрим, к какой категории относятся различные теории. Вычислим для этого размерности констант взаимодействия.

Иллюстрация

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\varphi^3} &= -\lambda\varphi^3 && \Rightarrow [\lambda] = 1, \quad . \\ \mathcal{L}_{\varphi^4} &= -\lambda\varphi^4 && \Rightarrow [\lambda] = 0, \quad . \\ \mathcal{L}_{QED} &= e\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi && \Rightarrow [e] = 0, \quad . \\ \mathcal{L}_{gauge} &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 = -\frac{1}{4}[\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf^{abc}A_\mu^b A_\nu^c]^2 && \Rightarrow [g] = 0, \quad . \\ \mathcal{L}_{Yukawa} &= y\bar{\psi}\varphi\psi && \Rightarrow [y] = 0. \quad . \end{aligned}$$

Итак, все эти модели перенормируемы.

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -h\varphi^6 && \Rightarrow [h] = -2, \quad . \\ \mathcal{L} &= G\bar{\psi}\psi\bar{\psi}\psi && \Rightarrow [G] = -2 \quad . \\ \mathcal{L} &= \kappa\bar{\psi}\partial_\mu V_\mu\psi && \Rightarrow [\kappa] = -1 \quad . \\ \mathcal{L} &= \gamma\bar{\psi}\partial_\mu\varphi\gamma^\mu\psi && \Rightarrow [\gamma] = -1. \quad . \end{aligned}$$

Все эти модели, напротив, перенормируемы. Отметим, что они включают четырехфермионное или ток на ток взаимодействие, используемое ранее в теории слабых взаимодействий.

Отсюда следует следующий вывод: единственными перенормируемыми взаимодействиями в четырёхмерном пространстве являются:

- i)  $\varphi^4$  взаимодействие;
- ii) юкавское взаимодействие;
- iii) калибровочное взаимодействие;
- iv) теория  $\varphi^3$  суперперенормируема. В ней существуют только две расходящиеся диаграммы, представленные на рис.5.

Если обратить внимание на спин частиц, участвующих во взаимодействии, то он также сильно ограничен. Перенормируемые взаимодействия содержат только поля спина

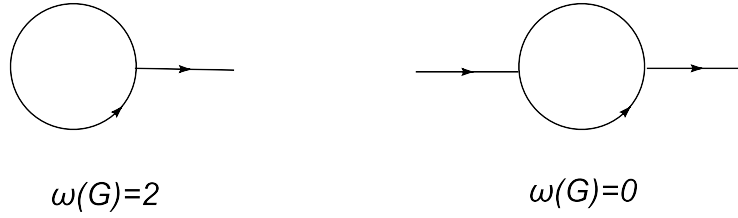


Рис. 5: Единственные расходящиеся диаграммы в теории  $\phi^3$

0, 1/2 и 1. Все модели со спином 3/2, 2 и т.д. – неперенормируемы. Последние включают также и гравитацию. Действительно, ведь константа взаимодействия – константа Ньютона – имеет размерность равную  $[G] = -2$ , т.е. квантовая гравитация – неперенормируема.

Поскольку мы не знаем, как обращаться с неперенормируемыми взаимодействиями из-за того, что ультрафиолетовые расходимости не поддаются контролю, остаются лишь три типа взаимодействий, из которых строится Стандартная Модель фундаментальных взаимодействий, а именно  $\phi^4$ , юкавское и калибровочные взаимодействия со скалярными, спинорными и векторными частицами.

Здесь следует сделать замечание относительно векторных полей с  $M \neq 0$ . Вспомним вид пропагатора массивного векторного поля

$$\overline{V_\mu V_\nu} = i \frac{g_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu / M^2}{M^2 - k^2 - i\epsilon}.$$

Он даёт  $r_l = 2$ , что ведет к некоторой модификации вышеприведённых формул и к неперенормируемости теории. Единственный известный способ избежать этой трудности есть спонтанное нарушение симметрии. В этом случае

$$\overline{V_\mu V_\nu} = i \frac{g_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu / k^2}{M^2 - k^2 - i\epsilon},$$

что даёт  $r_l = 0$  и теория оказывается перенормируемой. Этот механизм используется в Стандартной Модели для придания масс промежуточным векторным бозонам без нарушения перенормируемости.

## 2 Лекция II: Регуляризация

Появляющиеся бесконечности не являются ещё катастрофой для теории (вспомним, например, бесконечную собственную энергию заряда в собственном кулоновском поле), но требуют количественного выражения. Для получения конечной разности двух бесконечных величин им нужно придать какой-то конкретный смысл. Этого добиваются путём введения регуляризации расходящихся интегралов. Самым естественным способом регуляризации является обрезание интеграла на нижнем или верхнем пределе интегрирования. Существуют и другие способы регуляризации путём изменения подынтегрального выражения или меры интегрирования. Ниже мы рассмотрим три популярных вида регуляризации: обрезание на верхнем пределе в евклидовом пространстве ( $\Lambda$ -регуляризация), регуляризация Паули-Вилларса и размерная регуляризация.

### 2.1 Евклидов интеграл и обрезание на верхнем пределе

Все интегралы в квантовой теории поля записаны в пространстве Минковского, однако ультрафиолетовая расходимость возникает при больших значениях модуля импульса и её удобнее регуляризовать в Евклидовом пространстве. Переход к евклидову пространству достигается заменой нулевой компоненты импульса  $k_0 \rightarrow ik_4$ , так что квадраты всех импульсов и скалярные произведения меняют знак  $k^2 = k_0^2 - \vec{k}^2 \rightarrow -k_4^2 - \vec{k}^2 = -k_E^2$ , а мера интегрирования становится равной  $d^4k \rightarrow id^4k_E$ , причём интегрирование по 4-ой компоненте импульса идёт вдоль мнимой оси. Для перехода к интегрированию по действительной оси совершим (Виковский) поворот контура интегрирования на  $90^\circ$  (см. рис.6). Это возможно, ибо интеграл по большому кругу убывает и при повороте контур не пересекает полюса.

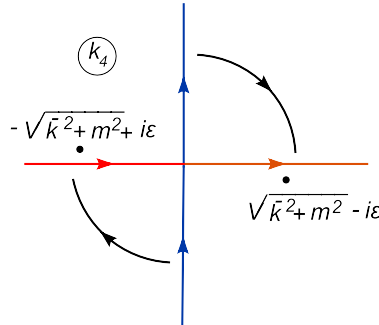


Рис. 6: Виковский поворот контура интегрирования

При переходе к Евклиду полюса в пропагаторах исчезают. Теперь интеграл в 4-мерном Евклидовом пространстве можно вычислять в сферических координатах и интеграл по модулю обрезать на верхнем пределе. Продемонстрируем, как этот приём работает в простейшем случае скалярной диаграммы, изображённой на рис.7. Соответ-

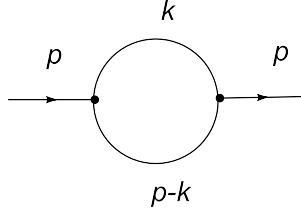


Рис. 7: Простейшая расходящаяся диаграмма в скалярной теории

ствующий псевдоевклидов интеграл имеет вид

$$I(p^2) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 k}{[k^2 - m^2][(p - k)^2 - m^2]}. \quad (2.1)$$

Перейдём к Евклидову пространству. Имеем

$$I(p_E^2) = \frac{i}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 k_E}{[k_E^2 + m^2][(p - k)_E^2 + m^2]} \quad (2.2)$$

(индекс Е в дальнейшем будем опускать).

Воспользуемся теперь весьма удобным представлением произведения нескольких скобок в знаменателе в виде одной скобки, используя так называемую параметризацию Фейнмана. Справедлива следующая общая формула

$$\frac{1}{A_1^{\alpha_1} A_2^{\alpha_2} \cdots A_n^{\alpha_n}} = \frac{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n)}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)\cdots\Gamma(\alpha_n)} \int_0^1 dx_1 dx_2 \cdots dx_n \frac{\delta(1 - x_1 - x_2 - \cdots - x_n) x_1^{\alpha_1-1} x_2^{\alpha_2-1} \cdots x_n^{\alpha_n-1}}{[A_1 x_1 + A_2 x_2 + \cdots + A_n x_n]^{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n}}. \quad (2.3)$$

Здесь  $\Gamma(\alpha)$  есть  $\Gamma$ -функция Эйлера, которая обладает следующими свойствами:

$$\Gamma(1) = 1, \quad \Gamma(n+1) = n!, \quad x\Gamma(x) = \Gamma(x+1), \quad \Gamma(1+x) = e^{-x\gamma_E + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-)^n x^n}{n}} \zeta(n),$$

где  $\gamma_E$  есть константа Эйлера, а  $\zeta(n)$  есть дзета-функция Римана.  $\Gamma$ -функция конечна при положительных значениях аргумента и имеет простые полюса при отрицательных целых значениях и в нуле.

В нашем случае ( $n = 2, \alpha_1 = \alpha_2 = 1$ ) ур.(2.3) имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{[k^2 + m^2][(p - k)^2 + m^2]} &= \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(1)\Gamma(1)} \int_0^1 \frac{dx_1 x_2 \delta(1 - x_1 - x_2)}{[[k^2 + m^2]x_1 + [(p - k)^2 + m^2]x_2]^2} \\ &= \int_0^1 \frac{dx}{[k^2 - 2pkx + p^2x + m^2]^2}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Таким образом, интеграл (2.2) записывается как

$$\begin{aligned} I(p^2) &= \frac{i}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \int \frac{d^4 k}{[k^2 - 2kpx + p^2x + m^2]^2} \\ &\stackrel{k \rightarrow k - px}{=} \frac{i}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \int \frac{d^4 k}{[k^2 + p^2x(1 - x) + m^2]^2}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Теперь интеграл зависит только от модуля  $k$  и можно перейти к сферическим координатам:

$$I(p^2) = \frac{i}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \Omega_4 \int_0^\Lambda \frac{k^3 dk}{[k^2 + p^2 x(1-x) + m^2]^2}, \quad (2.6)$$

где объём 4-мерной сферы равен  $\Omega_4 = 2\pi^2$  (в общем случае  $\Omega_D = \frac{2\pi^{D/2}}{\Gamma(D/2)}$ ). Интеграл по модулю импульса легко вычисляется

$$\frac{1}{2} \int_0^{\Lambda^2} \frac{k^2 dk^2}{[k^2 + p^2 x(1-x) + m^2]^2} = \frac{1}{2} \log\left(\frac{\Lambda^2}{p^2 x(1-x) + m^2}\right) + 1, \quad (2.7)$$

и, как видно, логарифмически расходится на верхнем пределе. Полный ответ имеет вид

$$I(p^2) = \frac{i}{16\pi^2} \int_0^1 dx \left( \log\left(\frac{\Lambda^2}{p^2 x(1-x) + m^2}\right) + 1 \right). \quad (2.8)$$

Последний интеграл по  $x$  тоже может быть вычислен и принимает простой вид в предельных случаях  $m = 0$  или  $p = 0$ . Теперь можно перейти обратно к пространству Минковского  $p_E^2 \Rightarrow -p^2$ .

Регуляризация с обрезанием на верхнем пределе является весьма наглядной и достаточно простой. Недостатком её является евклидова инвариантность, а не лоренцева, а также отсутствие калибровочной инвариантности. Поэтому она неудобна в калибровочных теориях. Однако, следует заметить, что неинвариантность регуляризации вполне допустима, ибо при снятии регуляризации инвариантность восстанавливается. Но всё-таки это сильно усложняет вычисления, так как нужно следить за соблюдением всех тождеств.

## 2.2 Регуляризация Паули-Вилларса

Другой способ регуляризации, который носит название регуляризации Паули-Вилларса, состоит во введении в рассмотрение дополнительных тяжёлых полей – полей Паули-Вилларса – с неправильным знаком кинетического члена. Эти поля не являются физическими полями и введены исключительно с целью регуляризации интегралов. Основной приём состоит в замене

$$\frac{1}{p^2 - m^2} \rightarrow \frac{1}{p^2 - m^2} - \frac{1}{p^2 - M^2}, \quad (2.9)$$

где  $M \rightarrow \infty$  - масса полей Паули-Вилларса. В результате пропагатор при больших импульсах убывает быстрее, что обеспечивает сходимость интегралов. Расходимости проявляют себя как логарифмы и степени  $M^2$  вместо параметра обрезания  $\Lambda^2$ .

Иногда используют разновидности регуляризации Паули - Вилларса, когда замену (2.9) производят не для каждого пропагатора, а для петли в целом. Такой способ регуляризации называется регуляризацией по циклам. Этот приём применяется в абелевых калибровочных теориях для петель образованных полями материи. При этом удаётся сохранить калибровочную инвариантность. Однако в неабелевых теориях мы сталкиваемся с трудностью в связи с наличием петель образованных калибровочными полями, которым нельзя придать массу, не нарушая калибровочную инвариантность. Эту проблему часто решают путём введения дополнительной регуляризации для векторных

частиц, например, с помощью высших производных. Здесь мы не будем останавливаться на этой регуляризации.

Положительным свойством регуляризации Паули-Вилларса является лоренц и калибровочная инвариантность (в абелевом случае), но она весьма сложна при вычислениях, поскольку приходится вычислять диаграммы с массами, в то время как безмассовые интегралы заметно проще.

## 2.3 Размерная регуляризация

Наиболее популярной в калибровочных теориях является так называемая размерная регуляризация. В этом случае модифицируется мера интегрирования.

Техника размерной регуляризации состоит в аналитическом продолжении от целых к нецелым размерностям пространства. Обычно мы переходим от размерности  $D$  к размерности  $D - 2\varepsilon$ , где  $\varepsilon \rightarrow 0$ . В частности нас будет интересовать переход от 4 к  $4 - 2\varepsilon$  измерениям. В этом случае все ультрафиолетовые и инфракрасные расходимости проявляются в виде полюсов по  $\varepsilon$ . Для аналитического продолжения в нецелое число измерений необходимо определить все основные объекты, такие как метрика, мера интегрирования,  $\gamma$  матрицы, пропагаторы, и т.д. И хотя это продолжение не единственно, можно определить самосогласованный набор правил, который позволяет проводить вычисления.

*Метрика:*  $g_4^{\mu\nu} \rightarrow g_{4-2\varepsilon}^{\mu\nu}$ . Хотя определить метрику в нецелом числе измерений достаточно затруднительно, на практике обычно достаточно одного соотношения, а именно  $g^{\mu\nu}g_{\mu\nu} = \delta_\mu^\mu = D = 4 - 2\varepsilon$ .

*Мера:*  $d^4q \rightarrow (\mu^2)^\varepsilon d^{4-2\varepsilon}q$ , где  $\mu$  есть параметр размерной регуляризации размерности массы. Интегрирование с такой мерой определяется аналитическим продолжением из целого числа измерений.

*$\gamma$  матрицы:* Обычное антикоммутиационное соотношение  $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$  по-прежнему выполняется, однако соотношения включающие размерность модифицируются:

$$\gamma^\mu\gamma_\mu = D = 4 - 2\varepsilon; \quad Tr\gamma^\mu\gamma^\nu = g^{\mu\nu}Tr1 = g^{\mu\nu} \begin{cases} 2^{[D/2]} \\ 4 \end{cases}.$$

Обычно выбирают  $Tr1 = 4$ . Тогда алгебра  $\gamma$ -матриц имеет вид

$$Tr\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma = Tr1[g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} + g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho} - g^{\nu\rho}g^{\mu\sigma}],$$

$$\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\mu = -\gamma^\mu\gamma^\mu\gamma^\nu + 2g^{\mu\nu}\gamma^\mu = -(4 - 2\varepsilon)\gamma^\nu + 2\gamma^\nu = -(2 - 2\varepsilon)\gamma^\nu, \quad \text{и т.д.}$$

Что не является хорошо определённым, так это  $\gamma^5$ -матрица, поскольку  $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$  и она не может быть продолжена на произвольное число измерений. Это создаёт проблему для размерной регуляризации, поскольку нет самосогласованного определения  $\gamma^5$ .

*Пропагатор:* В импульсном пространстве продолжение не составляет труда

$$\frac{1}{p^2 - m^2} \rightarrow \frac{1}{p^2 - m^2}.$$

Однако, в координатном пространстве имеем (положим  $m = 0$  для простоты)

$$\int \frac{d^4p}{p^2} e^{ipx} \sim \frac{1}{x^2} \Rightarrow \int \frac{d^{4-2\varepsilon}p}{p^2} e^{ipx} \sim \frac{1}{[x^2]^{1-\varepsilon}}.$$



*Интегрирование:* Основная идея состоит в том, чтобы вычислить интеграл в размерности пространства, где он сходится, а затем аналитически продолжить ответ в нужную размерность пространства.

Рассмотрим уже обсуждавшийся пример (2.1) и воспользуемся евклидовым представлением (2.5). Перепишем его формально в  $D$ -мерном пространстве

$$\int \frac{d^D k}{[k^2 + M^2]^2} = \frac{\Omega_D}{2} \int_0^\infty \frac{(k^2)^{D/2-1} dk^2}{[k^2 + M^2]^2}, \quad M^2 \equiv p^2 x(1-x) + m^2. \quad (2.10)$$

Интеграл по  $k^2$  теперь сводится к табличному

$$\int_0^\infty \frac{(k^2)^{D/2-1} dk^2}{[k^2 + M^2]^2} \stackrel{k^2 \rightarrow k^2 M^2}{=} (M^2)^{\frac{D}{2}-2} \int_0^\infty \frac{x^{D/2-1} dx}{(x+1)^2} = (M^2)^{\frac{D}{2}-2} \frac{\Gamma(\frac{D}{2})\Gamma(2-\frac{D}{2})}{\Gamma(2)}, \quad (2.11)$$

где мы полагаем, что размерность  $D$  такова, что интеграл существует. В данном случае это 2 и 3. Однако формула (2.11) позволяет осуществить аналитическое продолжение по  $D$  в область  $D = 4 - 2\varepsilon$ . При  $\varepsilon = 0$ , т.е. в 4 измерениях, интеграл не существует, так как  $\Gamma$ -функция имеет полюс в нуле, однако в окрестности нуля получаем регуляризованное выражение.

Собирая всё вместе получаем

$$I(p^2) = \frac{i}{(2\pi)^D} \frac{\Omega_D}{2} \int_0^1 dx \frac{\Gamma(D/2)\Gamma(2-D/2)}{[p^2 x(1-x) + m^2]^{2-D/2}}. \quad (2.12)$$

Подставим в это выражение  $D = 4 - 2\varepsilon$  и перейдём опять к псевдоевклидову пространству. Тогда

$$I(p^2) = \frac{i(-\pi)^{2-\varepsilon}}{(2\pi)^{4-2\varepsilon}} \Gamma(\varepsilon) \int_0^1 \frac{dx (\mu^2)^\varepsilon}{[p^2 x(1-x) - m^2]^\varepsilon}. \quad (2.13)$$

Разложив знаменатель в ряд по  $\varepsilon$ , окончательно получим

$$I(p^2) = \frac{i}{16\pi^2} \Gamma(1+\varepsilon) \left( \frac{1}{\varepsilon} - \int_0^1 dx \log \left[ \frac{p^2 x(1-x) - m^2}{-\mu^2} \right] + \log(4\pi) \right). \quad (2.14)$$

Сравнивая с формулой (2.8), мы видим, что ультрафиолетовая расходимость теперь имеет вид полюса по  $\varepsilon$  вместо логарифма обрезания. Это менее наглядно, зато размерная регуляризация гораздо проще в вычислениях и, к тому же, автоматически калибровочно инвариантна.

Выпишем некоторые основные интегралы, необходимые для однопетлевых вычислений. Они получаются аналитическим продолжением из целых значений  $D$ . Мы запишем их сразу в псевдоевклидовом пространстве.

$$\int \frac{d^D p}{[p^2 - 2kp + m^2]^\alpha} = i \frac{\Gamma(\alpha - D/2)}{\Gamma(\alpha)} \frac{(-\pi)^{D/2}}{[m^2 - k^2]^{\alpha-D/2}}, \quad (2.15)$$

$$\int \frac{d^{4-2\varepsilon} p}{[p^2 - 2kp + m^2]^2} = i \frac{\Gamma(\varepsilon)}{\Gamma(2)} \frac{(-\pi)^{2-\varepsilon}}{[m^2 - k^2]^\varepsilon}, \quad \Gamma(\varepsilon) \sim \frac{1}{\varepsilon} \rightarrow \infty,$$

$$\int \frac{d^{4-2\varepsilon} p \ p_\mu}{[p^2 - 2kp + m^2]^2} = i \frac{\Gamma(\varepsilon)}{\Gamma(2)} \frac{(-\pi)^{2-\varepsilon} k_\mu}{[m^2 - k^2]^\varepsilon}, \quad (2.16)$$

$$\int \frac{d^{4-2\varepsilon} p \ p_\mu p_\nu}{[p^2 - 2kp + m^2]^2} = i(-\pi)^{2-\varepsilon} \left[ \frac{\Gamma(\varepsilon)}{\Gamma(2)} \frac{k_\mu k_\nu}{[m^2 - k^2]^\varepsilon} + \frac{g^{\mu\nu}}{2} \frac{\Gamma(\varepsilon - 1)}{\Gamma(2)} \frac{1}{[m^2 - k^2]^{\varepsilon-1}} \right]$$

Ключевой является формула (2.15). Все остальные получаются из неё дифференцированием. Отметим сингулярность в правой части (2.15) при  $\alpha = D/2 - n$ ,  $n = 0, 1, \dots$ . Такие интегралы оказываются нерегуляризованными. Однако в практических вычислениях они обычно не возникают.

Остановимся на одном важном правиле, применяемом в размерной регуляризации и относящемся к безмассовым теориям. По определению принимается, что ноль в любой степени есть ноль. Так, например, равен нулю следующий интеграл

$$\int \frac{d^D k}{(k^2)^\alpha} = 0, \quad \forall \alpha. \quad (2.17)$$

На самом деле здесь происходит сокращение ультрафиолетовой и инфракрасной расходимостей, которые обе имеют вид полюса по  $1/\varepsilon$ . Здесь нет кажущегося на первый взгляд противоречия и такой способ действий оказывается самосогласованным при вычислениях размерно регуляризованных интегралов.

Это приводит, в частности, к тому, что все диаграммы типа "головастик" в безмассовом случае полагаются равными нулю. Однако в массивном случае они выживают и важны для выполнения калибровочной инвариантности. Как будет видно в дальнейшем, в Стандартной модели головастика дают вклад в перенормировку массы кварка, а также обеспечивают поперечность векторного пропагатора в теории со спонтанным нарушением симметрии.

### 3 Лекция III: Примеры вычислений. Однопетлевые интегралы

Все дальнейшие вычисления мы будем производить в рамках размерной регуляризации. Продемонстрируем, как описанные выше правила применяются в вычислениях диаграмм в ряде моделей квантовой теории поля.

#### 3.1 Скалярная теория

Начнём с простейшего скалярного случая и рассмотрим теорию описываемую лагранжианом

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)^2 - \frac{m^2}{2}\varphi^2 - \frac{\lambda}{4!}\varphi^4. \quad (3.1)$$

Правила Фейнмана в этом случае имеют вид:

$$\bullet \text{---} \bullet = \frac{i}{p^2 - m^2}, \quad \begin{array}{c} \diagup \\ \bullet \\ \diagdown \end{array} = -i\lambda$$

Найдём расходящиеся однопетлевые диаграммы. Как следует из рис.4, к ним относятся пропагатор скалярного поля и четверная вершина.

Пропагатор: В первом порядке имеется лишь одна диаграмма типа "головастик" изображённая на рис.8.

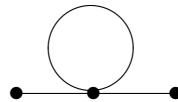


Рис. 8: Однопетлевая диаграмма пропагаторного типа

Соответствующий ей интеграл равен

$$J_1(p^2) = \frac{-i\lambda}{(2\pi)^{4-2\varepsilon}} \frac{i}{2} \int \frac{d^{4-2\varepsilon}k(\mu^2)^\varepsilon}{k^2 - m^2}, \quad (3.2)$$

где  $1/2$  - это комбинаторный множитель. Вычисляя интеграл (3.2) согласно формуле (2.16), находим

$$J_1(p^2) = \frac{-i\lambda}{(4\pi)^{2-\varepsilon}} \frac{\Gamma(-1 + \varepsilon)}{2\Gamma(1)} m^2 \left(\frac{\mu^2}{m^2}\right)^\varepsilon = \frac{i\lambda}{32\pi^2} m^2 \left[ \frac{1}{\varepsilon} + 1 - \gamma_E + \log(4\pi) - \log \frac{m^2}{\mu^2} \right] \quad (3.3)$$

Тот факт, что интеграл квадратично расходится, проявляется в возникновении множителя  $\Gamma(-1 + \varepsilon)$ , имеющего полюс как при  $\varepsilon = 0$ , так и при  $\varepsilon = 1$ . Однако, так как нас интересует предел  $\varepsilon \rightarrow 0$ , мы разлагаем ответ в ряд Лорана по  $\varepsilon$ . Как видно, и в случае квадратично расходящихся интегралов, расходимость имеет вид простого полюса по  $\varepsilon$ ,

но интеграл имеет размерность равную двум. Заметим, что при  $m = 0$  интеграл обращается в ноль, что является демонстрацией упомянутого общего свойства размерной регуляризации.

Вершина: Здесь также имеется только одна диаграмма, но внешние импульсы могут быть расставлены по-разному (см. рис.9). В итоге вклад в вершинную функцию состоит

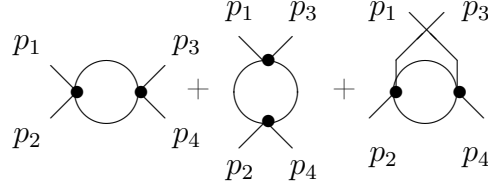


Рис. 9: Однопетлевая диаграмма вершинного типа

из трёх частей

$$I_1 = I_1(s) + I_1(t) + I_1(u),$$

где введены общепринятые обозначения для мандельштамовских переменных (мы полагаем здесь импульсы  $p_1$  и  $p_2$  входящими, импульсы  $p_3$  и  $p_4$  выходящими)

$$s = (p_1 + p_2)^2 = (p_3 + p_4)^2, \quad t = (p_1 - p_3)^2 = (p_2 - p_4)^2, \quad u = (p_1 - p_4)^2 = (p_2 - p_3)^2,$$

а интеграл равен

$$I_1(s) = \frac{(-i\lambda)^2}{48} \frac{(\mu^2)^\varepsilon}{(2\pi)^{4-2\varepsilon}} i^2 \int \frac{d^{4-2\varepsilon} k}{[k^2 - m^2][(p - k)^2 - m^2]} \quad (3.4)$$

( $1/48$  – комбинаторный коэффициент). Этот интеграл мы уже вычисляли и ответ имеет вид (2.14). Теперь же мы проведём вычисление другим, более простым способом, применимым в безмассовом случае.

Здесь уместно сделать два отступления. Первое касается вычисления комбинаторного коэффициента. Он возникает в результате разложения S-матрицы по теореме Вика. В случае, когда все частицы разные, как например в КЭД, комбинаторный коэффициент обычно равен единице. Учёт тождественности частиц, заложенный уже в лагранжиане (факторы  $1/2$  и  $1/4!$  в (3.1)), приводит к неединичным коэффициентам. Существует простой приём как вычислять комбинаторный коэффициент в таких случаях. Он равен  $1/\text{Sym}$ , где  $\text{Sym}$  есть симметричный фактор диаграммы. Рассмотрим пример диаграммы, представленной на рис.9. Если не различать расположение импульсов, то диаграмма обладает следующими симметриями: перестановка внешних линий, входящих в левую вершину; перестановка внешних линий, входящих в правую вершину; перестановка вершин; перестановка внутренних линий. Итого:  $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$ . Т.е. комбинаторный коэффициент равен  $1/16$ , но с учётом того, что мы различаем три различных расстановки импульсов, имеем  $1/48$ . Это же правило справедливо и для многопетлевых диаграмм и мы воспользуемся им в следующем разделе.

Второе отступление связано с вычислением безмассовых интегралов, что существенно упрощает выкладки и в некоторых случаях позволяет получать ответ не проводя, по сути дела, никаких явных интегрирований. Приведённый ниже способ вычисления безмассовых интегралов определённого типа основан на конформных свойствах безмассовых интегралов зависящих от одного аргумента и использует симметрию между импульсным и координатным представлением.

Ключевой является следующая формула для Фурье-образа пропагатора безмассовой частицы:

$$\int \frac{d^4 p e^{ipx}}{p^2} = \frac{i\pi^2}{x^2}, \quad (3.5)$$

которая обобщается на произвольную размерность пространства и степень пропагатора следующим образом

$$\int \frac{d^D p e^{ipx}}{(p^2)^\alpha} = i(-\pi)^{D/2} \frac{\Gamma(D/2 - \alpha)}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{(x^2)^{D/2 - \alpha}}. \quad (3.6)$$

Очевидно, эта формула справедлива и при интегрировании по координате вместо импульса. Таким образом переход от импульсного пространства к координатному и обратно осуществляется при помощи (3.6) и сопровождается появлением множителя  $\frac{\Gamma(D/2 - \alpha)}{\Gamma(\alpha)}$ .

Вернёмся к диаграмме на рис.9. В импульсном пространстве ей соответствует интеграл по импульсу бегущему по петле. Однако в координатном пространстве она представляет собой просто произведение двух пропагаторов и не содержит интегрирования. Поэтому интеграл в импульсном пространстве можно заменить на Фурье-образ квадрата пропагатора. Так как в безмассовом случае все пропагаторы как в импульсном, так и в координатном пространстве представляют собой степени  $p^2$  или  $x^2$ , то все они легко вычисляются с помощью формулы (3.6).

В случае интеграла (3.4) при  $m = 0$  нужно сначала каждый из двух пропагаторов мысленно перевести в координатное представление, что, согласно с (3.6), даст множитель  $(\frac{\Gamma(1-\varepsilon)}{\Gamma(1)})^2$ , затем перемножить получившиеся пропагаторы (получим  $1/(x^2)^{2-2\varepsilon}$ ) и перевести полученный результат обратно в импульсное представление, что даст множитель  $\frac{\Gamma(\varepsilon)}{\Gamma(2-2\varepsilon)}$  и степень импульса  $1/(p^2)^\varepsilon$  (ту же что и в аргументе последней  $\Gamma$ -функции). Помимо этого каждой петле соответствует множитель  $i(-\pi)^{2-\varepsilon}$ . Собирая всё вместе получим

$$\begin{aligned} I_1(s) &= \frac{(-i\lambda)^2}{48} \frac{(\mu^2)^\varepsilon i^2}{(2\pi)^{4-2\varepsilon}} \int \frac{d^{4-2\varepsilon} k}{k^2(p-k)^2} = \frac{\lambda^2}{48} \frac{i\pi^{2-\varepsilon}}{(2\pi)^{4-2\varepsilon}} \left(\frac{\mu^2}{-s}\right)^\varepsilon \frac{\Gamma(1-\varepsilon)\Gamma(1-\varepsilon)\Gamma(\varepsilon)}{\Gamma(1)\Gamma(1)\Gamma(2-2\varepsilon)} \\ &= \frac{i}{48} \frac{\lambda^2}{(4\pi)^{2-\varepsilon}} \left[\frac{\mu^2}{-s}\right]^\varepsilon \frac{1}{\varepsilon(1-2\varepsilon)} \frac{\Gamma^2(1-\varepsilon)\Gamma(1+\varepsilon)}{\Gamma(1-2\varepsilon)} = \frac{i}{48} \frac{\lambda^2}{16\pi^2} \left[\frac{1}{\varepsilon} + 2 - \gamma_E + \log 4\pi + \ln \frac{\mu^2}{-s}\right], \end{aligned}$$

что совпадает с формулой (2.14) при  $m = 0$ .

Описанный способ вычисления безмассовых интегралов применим к любым интегралам, зависящим от одного внешнего импульса (пропагаторного типа), и позволяет проводить вычисления в любом количестве петель просто выписывая соответствующие множители, без явного интегрирования. В том случае, когда интеграл зависит от большего числа внешних импульсов (типа треугольника или квадрата) и они не могут быть положены равными нулю, этот метод непосредственно не работает, но существует его модификация. Здесь мы не будем на этом останавливаться.

Четверная вершина в однопетлевом приближении тем самым равна (общий множитель  $1/4!\phi^4$  вынесен за скобку)

$$\Gamma_4 = -i\lambda \left\{ 1 - \frac{\lambda}{16\pi^2} \left( \frac{3}{2\varepsilon} + 3 - \frac{3}{2}\gamma_E + \frac{3}{2}\log 4\pi + \frac{1}{2}\ln \frac{\mu^2}{-s} + \frac{1}{2}\ln \frac{\mu^2}{-t} + \frac{1}{2}\ln \frac{\mu^2}{-u} \right) \right\}. \quad (3.7)$$

Как видно, константа Эйлера и логарифм  $4\pi$  всегда сопутствуют  $1/\varepsilon$  и могут быть поглощены в переопределение  $\mu^2$ .

## 3.2 Квантовая электродинамика

Рассмотрим теперь вычисления диаграмм в калибровочных теориях. Начнём с квантовой электродинамики. Лагранжиан КЭД имеет вид

$$\mathcal{L}_{QED} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi + e\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A_\mu)^2, \quad (3.8)$$

где тензор напряжённости электромагнитного поля равен  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ , а последний член в лагранжиане фиксирует калибровку. В дальнейшем мы выберем калибровку Фейнмана или диагональную калибровку ( $\xi = 1$ ).

Правила Фейнмана, соответствующие лагранжиану (3.8), показаны на рис.10.

The diagram shows three Feynman rules for QED. On the left, a fermion propagator is represented by a straight line with momentum  $p$  and mass  $m$ , with the rule  $i \frac{\hat{p} + m}{p^2 - m^2}$ . In the middle, a photon propagator is represented by a wavy line with momentum  $k$  and indices  $\mu, \nu$ , with the rule  $-i \frac{g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} (1-\xi)}{k^2}$ . On the right, a vertex is shown where a photon line with momentum  $k$  and index  $\mu$  meets two fermion lines with momenta  $p_1$  and  $p_2$ , with the rule  $i e \gamma^\mu$ .

Рис. 10: Правила Фейнмана в КЭД

В квантовой электродинамике расходимости возникают только в пропагаторе фотона, пропагаторе электрона и в вершинной части. Однопетлевые расходящиеся диаграммы изображены на рис.11.

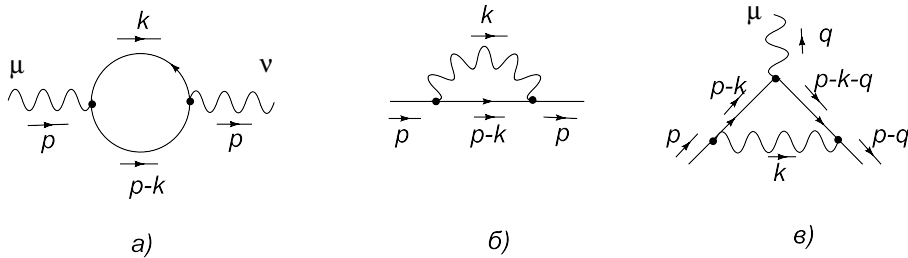


Рис. 11: Однопетлевые расходящиеся диаграммы в КЭД

Начнём с диаграммы поляризации вакуума (рис.11а)). Ей соответствует выражение

$$\Pi_{\mu\nu}(p) = (-) \frac{e^2}{(2\pi)^4} \int d^4k \frac{\text{Tr}[\gamma^\mu(m + \hat{k})\gamma^\nu(m + \hat{k} - \hat{p})]}{[m^2 - k^2][m^2 - (k - p)^2]}, \quad (3.9)$$

где знак "—" идёт из фермионной петли, а  $\hat{k} \equiv \gamma^\mu k_\mu$ . Перейдём вначале к размерности  $4 - 2\varepsilon$ . Интеграл (3.9) становится равным

$$\Pi_{\mu\nu}^{Dim}(p) = (-) \frac{e^2(\mu^2)^\varepsilon}{(2\pi)^{4-2\varepsilon}} \int d^{4-2\varepsilon}k \frac{\text{Tr}[\gamma^\mu(m + \hat{k})\gamma^\nu(m + \hat{k} - \hat{p})]}{[m^2 - k^2][m^2 - (k - p)^2]}. \quad (3.10)$$

Положим  $m = 0$  для простоты вычислений. Это позволит нам получить простой ответ в самом конце. Вычислим сначала след  $\gamma$ -матриц

$$\text{Tr}\gamma^\mu \hat{k} \gamma^\nu (\hat{k} - \hat{p}) = \text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^\nu \gamma^\sigma) k^\rho (k - p)^\sigma = 4k^\rho (k - p)^\sigma [g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho} - g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma}].$$

Теперь необходимо вычислить интеграл вида

$$I_{\rho\sigma}^{Dim}(p) = (-) \frac{(\mu^2)^\varepsilon}{(2\pi)^{4-2\varepsilon}} \int \frac{d^{4-2\varepsilon} k k^\rho (k-p)^\sigma}{k^2 (k-p)^2}.$$

Используя фейнмановскую параметризацию и производя интегрирования согласно приведённым выше формулам, имеем

$$\begin{aligned} I_{\rho\sigma}^{Dim}(p) &= (-) \frac{(\mu^2)^\varepsilon}{(2\pi)^{4-2\varepsilon}} \int_0^1 dx \int \frac{d^{4-2\varepsilon} k k^\rho (k-p)^\sigma}{[k^2 - 2pkx + p^2x]^2} \\ &= (-) i \frac{(-\mu^2)^\varepsilon \pi^{2-\varepsilon}}{(2\pi)^{4-2\varepsilon}} \left\{ -\Gamma(\varepsilon) \int_0^1 \frac{dx p^\rho p^\sigma x(1-x)}{[p^2x(1-x)]^\varepsilon} + \Gamma(\varepsilon-1) \frac{g^{\rho\sigma}}{2} \int_0^1 \frac{dx}{[p^2x(1-x)]^{\varepsilon-1}} \right\}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Для вычисления оставшегося интеграла используем табличный интеграл для бета функции Эйлера

$$\int_0^1 dx x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} = B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)},$$

что в нашем случае даёт

$$\int_0^1 dx x^{1-\varepsilon} (1-x)^{1-\varepsilon} = \frac{\Gamma(2-\varepsilon)\Gamma(2-\varepsilon)}{\Gamma(4-2\varepsilon)}.$$

Теперь интеграл (3.11) принимает вид

$$I_{\rho\sigma}^{Dim}(p) = \frac{i}{16\pi^2} (4\pi)^\varepsilon \left( -\frac{\mu^2}{p^2} \right)^\varepsilon \frac{\Gamma^2(2-\varepsilon)\Gamma(\varepsilon)}{\Gamma(4-2\varepsilon)} \left[ p^\rho p^\sigma + \frac{1}{2} \frac{g^{\rho\sigma} p^2}{1-\varepsilon} \right], \quad (3.12)$$

где мы воспользовались тем, что  $\Gamma(-1+\varepsilon) = -\frac{\Gamma(\varepsilon)}{1-\varepsilon}$ . Умножая получившееся выражение (3.12) на след

$$\begin{aligned} [g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho} - g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma}] p^\rho p^\sigma &= p^\mu p^\nu + p^\nu p^\mu - g^{\mu\nu} p^2 = 2p^\mu p^\nu - g^{\mu\nu} p^2, \\ [g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho} - g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma}] g^{\rho\sigma} p^2 &= g^{\mu\nu} p^2 + g^{\mu\nu} p^2 - g^{\mu\nu} (4-2\varepsilon) p^2 = -(2-2\varepsilon) p^2 g^{\mu\nu}, \end{aligned}$$

находим

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu}^{Dim}(p) &= i \frac{4e^2}{16\pi^2} (4\pi)^\varepsilon \left( -\frac{\mu^2}{p^2} \right)^\varepsilon \frac{\Gamma^2(2-\varepsilon)\Gamma(\varepsilon)}{\Gamma(4-2\varepsilon)} [2p^\mu p^\nu - g^{\mu\nu} p^2 - g^{\mu\nu} p^2] \\ &= -i \frac{8e^2}{16\pi^2} (4\pi)^\varepsilon \left( -\frac{\mu^2}{p^2} \right)^\varepsilon (g^{\mu\nu} p^2 - p^\mu p^\nu) \frac{\Gamma^2(2-\varepsilon)\Gamma(\varepsilon)}{\Gamma(4-2\varepsilon)}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Разлагая далее в ряд по  $\varepsilon$  с помощью соотношений

$$\Gamma(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} \Gamma(1+\varepsilon), \quad \Gamma(2-\varepsilon) = (1-\varepsilon)\Gamma(1-\varepsilon), \quad \Gamma(4-2\varepsilon) = (3-2\varepsilon)(2-2\varepsilon)(1-2\varepsilon)\Gamma(1-2\varepsilon),$$

окончательно получим

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu}^{Dim}(p) &= -i \frac{e^2}{16\pi^2} (4\pi)^\varepsilon \left( -\frac{\mu^2}{p^2} \right)^\varepsilon (g^{\mu\nu} p^2 - p^\mu p^\nu) \frac{4(1+5/3\varepsilon)}{3\varepsilon} e^{-\gamma\varepsilon} \\ &= -ie^2 \frac{g^{\mu\nu} p^2 - p^\mu p^\nu}{16\pi^2} \frac{4}{3} \left[ \frac{1}{\varepsilon} - \gamma_E + \log 4\pi + \log \frac{-\mu^2}{p^2} + \frac{5}{3} \right] \\ &= i(g^{\mu\nu} p^2 - p^\mu p^\nu) \Pi^{Dim}(p^2), \end{aligned} \quad (3.14)$$

где

$$\Pi^{Dim}(p^2) = -\frac{e^2}{16\pi^2} \frac{4}{3} \left[ \frac{1}{\varepsilon} - \gamma_E + \log 4\pi + \log \frac{-\mu^2}{p^2} + \frac{5}{3} \right]. \quad (3.15)$$

Имея выражение для поляризации вакуума, можно построить фотонный пропагатор, как показано на рис.12.

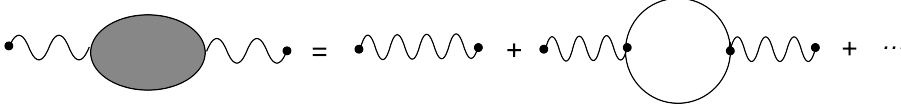


Рис. 12: Фотонный пропагатор в КЭД

Получаем

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu}(p) &= \frac{-i}{p^2} g^{\mu\nu} + \frac{-i}{p^2} g^{\mu\rho} \Pi_{\rho\sigma} \frac{-i}{p^2} g^{\sigma\nu} + \dots \\ &= \frac{-i}{p^2} g^{\mu\nu} - \frac{\Pi^{\mu\nu}}{p^4} + \dots = \frac{-i}{p^2} g^{\mu\nu} - \frac{i(g^{\mu\nu} - p^\mu p^\nu / p^2)}{p^2} \Pi(p^2) + \dots \\ &= \frac{-i}{p^2} (g^{\mu\nu} - \frac{p^\mu p^\nu}{p^2}) (1 + \Pi(p^2) + \dots) - \frac{i}{p^2} \frac{p^\mu p^\nu}{p^2}, \end{aligned}$$

где  $\Pi(p^2)$  даётся ур.(3.15). Отметим, что радиационные поправки к поляризованному оператору всегда пропорциональны поперечному тензору  $P_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - p_\mu p_\nu / p^2$ . Это есть следствие калибровочной инвариантности, которая, как было сказано, не нарушается при введении размерной регуляризации.

Рассмотрим теперь диаграмму собственной энергии электрона показанную на рис.11 б). Соответствующий интеграл равен

$$\Sigma(\hat{p}) = -\frac{e^2}{(2\pi)^4} \int d^4 k \frac{\gamma^\mu (\hat{p} - \hat{k} + m) \gamma^\mu}{k^2 [(p - k)^2 - m^2]}. \quad (3.16)$$

Перейдём к размерности  $4 - 2\varepsilon$ , свернём индексы  $\gamma$ -матриц и введём фейнмановскую параметризацию. Получим

$$\Sigma^{Dim}(\hat{p}) = -\frac{e^2 (\mu^2)^\varepsilon}{(2\pi)^{4-2\varepsilon}} \int_0^1 dx \int \frac{d^{4-2\varepsilon} k [-2(1-\varepsilon)(\hat{p} - \hat{k}) + (4-2\varepsilon)m]}{[k^2 - 2kpx + p^2x - m^2x]^2}. \quad (3.17)$$

Интеграл по  $k$  теперь вычисляется по стандартным формулам

$$\Sigma^{Dim}(\hat{p}) = -i \frac{e^2}{16\pi^2} \frac{(-\mu^2)^\varepsilon}{(4\pi)^{-\varepsilon}} \Gamma(\varepsilon) \int_0^1 dx \frac{-2(1-\varepsilon)\hat{p}(1-x) + (4-2\varepsilon)m}{[p^2x(1-x) - m^2x]^\varepsilon}. \quad (3.18)$$

Это выражение может быть разложено в ряд по  $\varepsilon$

$$\begin{aligned} \Sigma^{Dim}(\hat{p}) &= -i \frac{e^2}{16\pi^2} \left[ -\frac{\hat{p} - 4m}{\varepsilon} + \hat{p} - 2m - (\hat{p} - 4m)(-\gamma_E + \log(4\pi)) \right. \\ &\quad \left. + \int_0^1 dx [2\hat{p}(1-x) - 4m] \log \frac{p^2x(1-x) - m^2x}{-\mu^2} \right]. \end{aligned} \quad (3.19)$$



Отметим, что линейная расходимость интеграла нашла своё выражение в виде простого полюса по  $\varepsilon$ , а коэффициент имеет размерность 1 и лоренц-инвариантен (это либо  $\hat{p}$ , либо  $m$ ).

Наконец, рассмотрим вершинную диаграмму (рис.11в)). Ей соответствует интеграл

$$\Gamma_1(p, q) = \frac{e^3}{(2\pi)^4} \int d^4k \frac{\gamma^\nu(\hat{p} - \hat{k} - \hat{q} + m)\gamma^\mu(\hat{p} - \hat{k} + m)\gamma^\nu}{[(p - k - q)^2 - m^2][(p - k)^2 - m^2]k^2}. \quad (3.20)$$

Перейдём к размерности  $4 - 2\varepsilon$  и введём фейнмановскую параметризацию. Получим

$$\begin{aligned} \Gamma_1^{Dim}(p, q) &= \frac{e^3(\mu^2)^\varepsilon}{(2\pi)^{4-2\varepsilon}} \Gamma(3) \int_0^1 dx \int_0^x dy \\ &\times \int \frac{d^{4-2\varepsilon}k [\gamma^\nu(\hat{p} - \hat{k} - \hat{q} + m)\gamma^\mu(\hat{p} - \hat{k} + m)\gamma^\nu]}{[(p - k - q)^2 - m^2]y + ((p - k)^2 - m^2)(x - y) + k^2(1 - x)]^3}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Интеграл по  $k$  теперь вычисляется и даёт

$$\begin{aligned} \Gamma_1^{Dim}(p, q) &= ie \frac{e^2}{16\pi^2} \frac{(-\mu^2)^\varepsilon}{(4\pi)^{-\varepsilon}} \int_0^1 dx \int_0^x dy \\ &\left\{ \Gamma(1 + \varepsilon) \frac{[\gamma^\nu(\hat{p}(1 - x) - \hat{q}(1 - y) + m)\gamma^\mu(\hat{p}(1 - x) + \hat{q}y + m)\gamma^\nu]}{[(p - q)^2y(1 - x) + p^2(1 - x)(x - y) + q^2y(x - y) - m^2x]^{1+\varepsilon}} \right. \\ &\left. + \frac{\Gamma(\varepsilon)}{2} \frac{\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\mu\gamma^\rho\gamma^\nu}{[(p - q)^2y(1 - x) + p^2(1 - x)(x - y) + q^2y(x - y) - m^2x]^\varepsilon} \right\}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Как видно первый интеграл конечен, а второй логарифмически расходится. Разлагая в ряд по  $\varepsilon$ , получим

$$\begin{aligned} \Gamma_1^{Dim}(p, q) &= ie \frac{e^2}{16\pi^2} \left\{ \frac{\gamma^\mu}{\varepsilon} - 2\gamma^\mu - \gamma^\mu(\gamma_E - \log(4\pi)) \right. \\ &- 2\gamma^\mu \int_0^1 dx \int_0^x dy \log \left[ \frac{(p - q)^2y(1 - x) + p^2(1 - x)(x - y) + q^2y(x - y) - m^2x}{-\mu^2} \right] \\ &\left. + \int_0^1 dx \int_0^x dy \frac{\gamma^\nu(\hat{p}(1 - x) - \hat{q}(1 - y) + m)\gamma^\mu(\hat{p}(1 - x) + \hat{q}y + m)\gamma^\nu}{(p - q)^2y(1 - x) + p^2(1 - x)(x - y) + q^2y(x - y) - m^2x} \right\}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

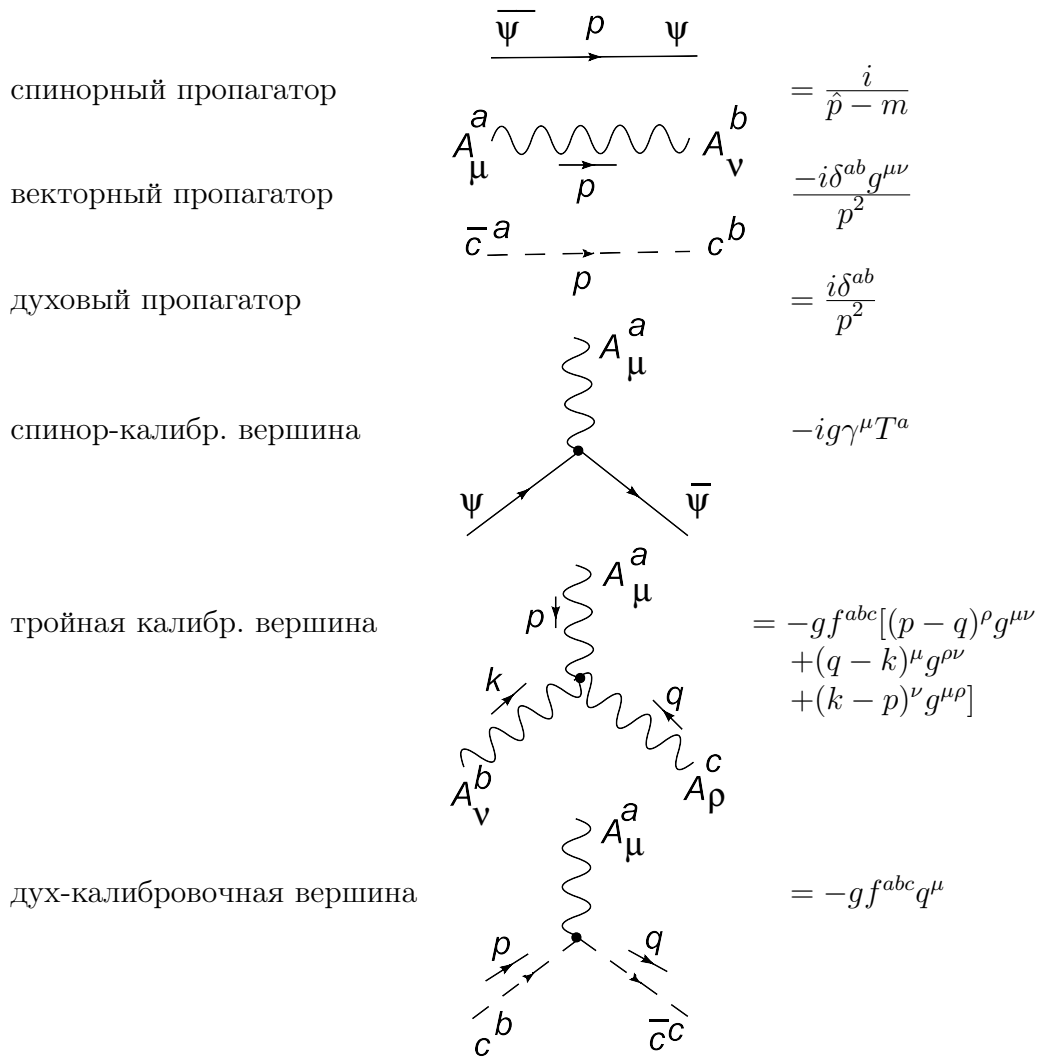
### 3.3 Квантовая хромодинамика

Обратимся теперь к неабелевым калибровочным теориям, в частности к КХД. Лагранжиан КХД имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{QD} &= -\frac{1}{4}(F_{\mu\nu}^a)^2 + \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi + g\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu^a T^a \psi - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A_\mu^a)^2 \\ &+ \partial_\mu \bar{c}^a \partial_\mu c^a + gf^{abc} \partial_\mu \bar{c}^a A_\mu^b c^c, \end{aligned} \quad (3.24)$$

где тензор напряжённости калибровочного поля равен  $F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf^{abc} A_\mu^b A_\nu^c$ , а последние слагаемые в лагранжиане отвечают духам Фаддеева-Попова.

Лагранжиану (3.24) отвечают правила Фейнмана следующего вида:



Рассмотрим однопетлевые расходящиеся диаграммы. Начнём с пропагатора глюонов. Помимо диаграммы изображённой на рис.11а), мы имеем дополнительные вклады в поляризацию вакуума от диаграмм, изображённых на рис.13. Первая учитывает самодействие глюонов, а вторая – вклад духов Фаддеева-Попова. (Как уже указывалось, диаграммы типа "головастик" учитывать не нужно, так как они автоматически обращаются в ноль.) Эти диаграммы зависят от выбора калибровки, и для их вычисления мы должны фиксировать калибровку. В дальнейшем мы выберем калибровку Фейнмана (или диагональную калибровку) для глюонного поля.

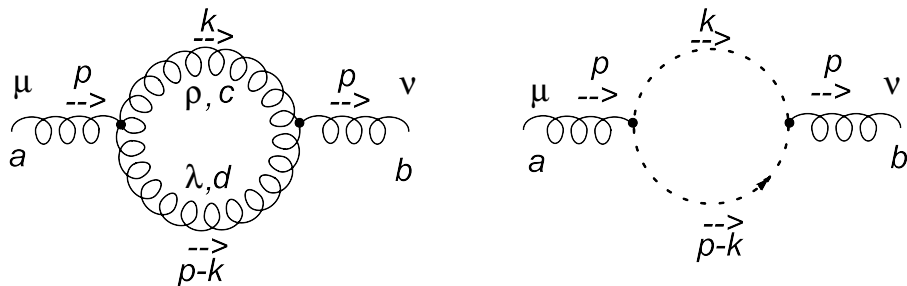


Рис. 13: Диаграммы поляризации вакуума в теории Янга-Миллса

Тогда для первой диаграммы получаем выражение

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu}^{ab}(p) &= \frac{g^2 C_A \delta^{ab}}{2(2\pi)^4} \int \frac{d^4 k}{k^2(k-p)^2} [(2p-k)^\rho g^{\mu\lambda} + (2k-p)^\mu g^{\rho\lambda} - (k+p)^\lambda g^{\mu\rho}] \\ &\times [(2p-k)^\rho g^{\lambda\nu} - (k+p)^\lambda g^{\nu\rho} + (2k-p)^\nu g^{\rho\lambda}], \end{aligned} \quad (3.25)$$

где  $1/2$  есть комбинаторный фактор, а  $C_A$  есть квадратичный оператор Казимира, для группы  $SU(N)$  равный  $N$ . Он возникает из свёртки структурных констант группы  $f^{abc}$

$$f^{abc} f^{dbc} = C_A \delta^{ad}.$$

Свёртывая индексы и переходя в  $4 - 2\varepsilon$  измерения, получаем

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu}^{Dim(ab)}(p) &= \delta^{ab} \frac{g^2 C_A}{2} \frac{(\mu^2)^\varepsilon}{(2\pi)^{4-2\varepsilon}} \int \frac{d^{4-2\varepsilon} k}{k^2(k-p)^2} \{g^{\mu\nu} [4p^2 + k^2 + (k-p)^2] \\ &+ (3-2\varepsilon)(2k-p)^\mu (2k-p)^\nu - (2p-k)^\mu (2p-k)^\nu - (k+p)^\mu (k+p)^\nu\}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Для вычисления интегралов используем приведённые выше формулы. Первый шаг есть параметризация Фейнмана (2.4). Дальнейшее импульсное интегрирование выполняется согласно ур.(2.16). Для интеграла (3.26) получаем

$$\Pi_{\mu\nu}^{Dim(ab)}(p) = i \frac{g^2 C_A \delta^{ab}}{(4\pi)^{2-\varepsilon}} \left[ \frac{-\mu^2}{p^2} \right]^\varepsilon \frac{\Gamma(\varepsilon) \Gamma(1-\varepsilon) \Gamma(2-\varepsilon)}{\Gamma(4-2\varepsilon)} [g^{\mu\nu} p^2 (\frac{19}{2} - 6\varepsilon) - p^\mu p^\nu (11 - 7\varepsilon)]. \quad (3.27)$$

Вторая диаграмма соответствует интегралу

$$\Pi_{\mu\nu}^{Dim(ab)}(p) = (-) C_A \delta^{ab} \frac{g^2 (\mu^2)^\varepsilon}{(2\pi)^{4-2\varepsilon}} \int d^{4-2\varepsilon} k \frac{k^\mu (k-p)^\nu}{k^2 (k-p)^2}, \quad (3.28)$$

где знак ”-” следует из ферми статистики духовых полей.

Вычисление теперь не составляет труда и даёт

$$\Pi_{\mu\nu}^{Dim(ab)}(p) = i \frac{g^2 C_A \delta^{ab}}{(4\pi)^{2-\varepsilon}} \left( -\frac{\mu^2}{p^2} \right)^\varepsilon \frac{\Gamma(\varepsilon) \Gamma(1-\varepsilon) \Gamma(2-\varepsilon)}{\Gamma(4-2\varepsilon)} [g^{\mu\nu} p^2 / 2 + p^\mu p^\nu (1-\varepsilon)]. \quad (3.29)$$

Складывая два вклада вместе, окончательно получаем

$$\Pi_{\mu\nu}^{Dim(ab)}(p) = i C_A \frac{2g^2 \delta^{ab}}{16\pi^2} (4\pi)^\varepsilon \left[ \frac{-\mu^2}{p^2} \right]^\varepsilon \frac{\Gamma(\varepsilon) \Gamma(1-\varepsilon) \Gamma(2-\varepsilon)}{\Gamma(4-2\varepsilon)} (5-3\varepsilon) [g^{\mu\nu} p^2 - p^\mu p^\nu] \quad (3.30)$$

или, разлагая в ряд по  $\varepsilon$ ,

$$\Pi_{\mu\nu}^{Dim(ab)}(p) = i C_A \delta^{ab} g^2 \frac{g^{\mu\nu} p^2 - p^\mu p^\nu}{16\pi^2} \frac{5}{3} \left[ \frac{1}{\varepsilon} - \gamma_E + \log 4\pi + \log \frac{-\mu^2}{p^2} + \frac{31}{15} \right]. \quad (3.31)$$

Действуя таким же образом, как в КЭД, можно вычислить вклад в глюонный пропагатор.

Отметим, что окончательный результат для суммы двух диаграмм опять пропорционален поперечному тензору  $P_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - p_\mu p_\nu / p^2$ . Это не так, однако, для диаграммы с калибровочными полями, а имеет место только если учесть вклад духовых полей.

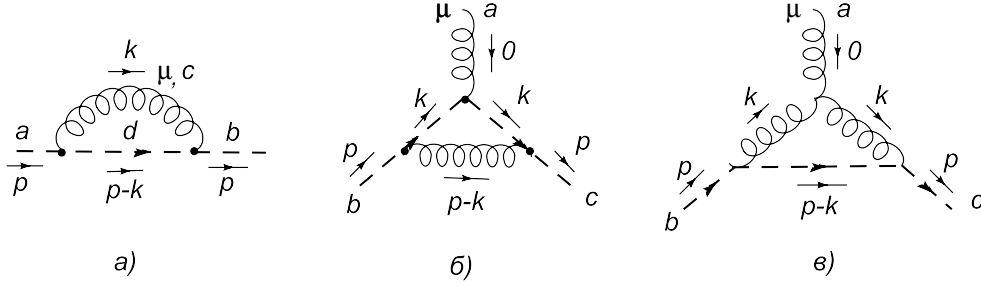


Рис. 14: Диаграммы собственной энергии духов и дух-дух-глюонной вершины в КХД

Заметим также противоположный знак ответа по сравнению с ур.(3.14). Это есть эффект неабелевой природы калибровочных полей. Он имеет весьма важные следствия, на которых мы остановимся позднее.

Рассмотрим также пропагатор духов. Здесь имеется лишь одна диаграмма изображённая на рис.14а).

Ей соответствует интеграл

$$\Pi^{Dim(ab)}(p) = -C_A \delta^{ab} \frac{g^2(\mu^2)^\varepsilon}{(2\pi)^{4-2\varepsilon}} \int d^{4-2\varepsilon} k \frac{k^\mu p^\mu}{k^2(k-p)^2}, \quad (3.32)$$

который равен

$$\begin{aligned} \Pi^{Dim(ab)}(p) &= -iC_A \delta^{ab} \frac{g^2}{2(4\pi)^{2-\varepsilon}} \left( \frac{-\mu^2}{p^2} \right)^\varepsilon p^2 \frac{\Gamma(\varepsilon)\Gamma(1-\varepsilon)\Gamma(1-\varepsilon)}{\Gamma(2-2\varepsilon)} \\ &= -iC_A \delta^{ab} \frac{g^2}{32\pi^2} p^2 \left[ \frac{1}{\varepsilon} - \gamma_E + \log 4\pi + \log \frac{-\mu^2}{p^2} + 2 \right]. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Аналогичным образом могут быть вычислены и вершинные диаграммы. Мы рассмотрим вершину взаимодействия калибровочного поля с духами, как более простую. Соответствующие диаграммы изображены на рис.14. Для упрощения выкладок мы положили один из импульсов равным нулю. Тогда первой диаграмме соответствует интеграл

$$V_{1\rho}^{Dim(abc)}(p) = i \frac{C_A}{2} f^{abc} \frac{g^3(\mu^2)^\varepsilon}{(2\pi)^{4-2\varepsilon}} \int d^{4-2\varepsilon} k \frac{k^\mu k^\rho p^\mu}{(k^2)^2(k-p)^2}. \quad (3.34)$$

Воспользуемся равенством  $kp = 1/2[k^2 + p^2 - (k-p)^2]$  и подставим в интеграл (3.34). Тогда первые два слагаемых сводятся к табличным, а последнее приводит к "головастику" и равно нулю. Собирая всё вместе, имеем

$$\begin{aligned} V_{1\rho}^{Dim(abc)}(p) &= -C_A \frac{1}{4} f^{abc} \frac{g^3}{(4\pi)^{2-\varepsilon}} \left( \frac{-\mu^2}{p^2} \right)^\varepsilon p^\rho \frac{\Gamma(\varepsilon)\Gamma(2-\varepsilon)\Gamma(1-\varepsilon)}{\Gamma(3-2\varepsilon)} (1+2\varepsilon) \\ &= -C_A \frac{1}{8} f^{abc} \frac{g^3}{16\pi^2} p^\rho \left[ \frac{1}{\varepsilon} - \gamma_E + \log 4\pi + \log \frac{-\mu^2}{p^2} + 4 \right]. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Вторая диаграмма даёт

$$V_{2\rho}^{Dim(abc)}(p) = -i \frac{C_A}{2} f^{abc} \frac{g^3(\mu^2)^\varepsilon}{(2\pi)^{4-2\varepsilon}} \int d^{4-2\varepsilon} k \frac{(p-k)^\mu p^\nu [k^\nu g^{\mu\rho} + k^\mu g^{\nu\rho} - 2k^\rho g^{\mu\nu}]}{(k^2)^2(k-p)^2}. \quad (3.36)$$

Свёртывая индексы в числителе, получаем  $(p-k)^\rho k p + p^\rho k(p-k) - 2k^\rho p(p-k)$ , что после интегрирования даёт

$$\begin{aligned} V_{2\rho}^{Dim(abc)}(p) &= -C_A \frac{3}{8} f^{abc} \frac{g^3}{(4\pi)^{2-\varepsilon}} \left(-\frac{\mu^2}{p^2}\right)^\varepsilon p^\rho \frac{\Gamma(\varepsilon)\Gamma(1-\varepsilon)\Gamma(1-\varepsilon)}{\Gamma(2-2\varepsilon)} \left(1 - \frac{2}{3}\varepsilon\right) \\ &= -C_A \frac{3}{8} f^{abc} \frac{g^3}{16\pi^2} p^\rho \left[\frac{1}{\varepsilon} - \gamma_E + \log 4\pi + \log \frac{-\mu^2}{p^2} + \frac{4}{3}\right]. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Складывая эти два вклада вместе, находим

$$V_\rho^{Dim(abc)}(p) = -C_A \frac{1}{2} f^{abc} \frac{g^3}{16\pi^2} p^\rho \left[\frac{1}{\varepsilon} - \gamma_E + \log 4\pi + \log \frac{-\mu^2}{p^2} + 2\right]. \quad (3.38)$$

Имея в виду, что на древесном уровне вершина имеет вид  $V_\rho^{tree(abc)}(p) = -g f^{abc} p^\rho$  получаем вершинную функцию в однопетлевом приближении

$$V_\rho^{(abc)}(p) = -g f^{abc} p^\rho \left\{ 1 + C_A \frac{1}{2} \frac{g^2}{16\pi^2} \left[\frac{1}{\varepsilon} - \gamma_E + \log 4\pi + \log \frac{-\mu^2}{p^2} + 2\right] \right\}. \quad (3.39)$$

## 4 Лекция IV: Ренормировка. Общая идея

Итак мы убедились, что интегралы для радиационных поправок действительно ультрафиолетово расходятся, как это следует из наивного подсчёта степени расходимости. Возникает вопрос, как получить осмысленный ответ для сечений процессов рассеяния, распада и пр. Для ответа на этот вопрос задумаемся, в чём причина расходимости интегралов при больших значениях импульса? В координатном пространстве большие значения импульса соответствуют малым расстояниям. Т.е. ультрафиолетовые расходимости отвечают сингулярностям на малых расстояниях. Действительно, простейшая расходящаяся петлевая диаграмма (рис.7) в координатном пространстве равна произведению двух пропагаторов. Каждый пропагатор однозначно определён как в импульсном, так и в координатном представлениях, но квадрат пропагатора уже не имеет хорошо определённого Фурье-образа – он ультрафиолетово расходится. Причина состоит в том, что квадрат пропагатора сингулярен при  $x^2 \rightarrow 0$  и ведёт себя как  $1/(x^2)^2$ . На самом деле причинная функция Грина (пропагатор) является т.н. обобщённой функцией, которая определена на гладких функциях. Она имеет  $\delta$ -образные сингулярности и требует доопределения для произведения нескольких таких функций в одной точке. А рассматриваемая диаграмма как раз и является таким произведением.

Общая теория устранения ультрафиолетовых расходимостей, носящая название  $\mathcal{R}$ -операции была развита в 50-х годах. Она состоит во введении в лагранжиан дополнительных локальных (или квазилокальных) слагаемых, называемых контрчленами, которые как раз и служат цели доопределения произведения обобщённых функций в совпадающих точках. Контрчлены приводят к дополнительным диаграммам, сокращающим исходные ультрафиолетовые расходимости. Нетривиальность этой процедуры, составляющей предмет теоремы Боголюбова-Парасюка, состоит в том, что все расходимости в координатном пространстве носят локальный характер, т.е. являются функциями от одной точки и могут содержать лишь конечное число производных. В теориях принадлежащих к перенормируемому классу, где число типов расходящихся диаграмм конечно, число типов таких контрчленов также конечно и повторяет слагаемые исходного лагранжиана. Это означает, что введение контрчленов в этом случае эквивалентно изменению коэффициентов перед различными слагаемыми, т.е. изменению нормировки этих слагаемых. Поэтому процедура устранения расходимостей получила название процедуры *перенормировки*.

Следует заметить, что параметры исходного лагранжиана, такие как массы, константы связи и сами поля, не являются, строго говоря, наблюдаемыми. Они могут быть и бесконечными. Важно то, чтобы перенормированные параметры, через которые выражаются окончательные ответы, имели смысл.

Ниже мы покажем на примере ряда перенормируемых теорий, как вводятся контрчлены в лагранжиан, как они приводят к перенормировке исходных параметров и как процедура перенормировки позволяет получить конечные ответы для функций Грина.

## 4.1 Скалярная теория. Однопетлевое приближение

Начнём с однопетлевого приближения и рассмотрим для простоты скалярную теорию (3.1). Она относится к перенормируемому типу, имеет конечное число типов ультрафиолетовых расходимостей. Однопетлевые расходящиеся диаграммы в этой теории были вычислены в лекции III. Нас интересуют сингулярные части, т.е. полюса по  $\varepsilon$ . Они имеют вид (ур.(3.3),(3.7))

$$\text{Пропагатор } \text{Sing } J_1(p^2) = -im^2\left(\frac{\lambda}{16\pi^2}\right)\left(-\frac{1}{2\varepsilon}\right),$$

$$\text{В } \text{Sing } \Gamma_4(s, t, u) = -i\lambda\left(\frac{\lambda}{16\pi^2}\right)\left(-\frac{3}{2\varepsilon}\right).$$

Отметим, что сингулярные части не зависят от импульса, т.е. их Фурье-образ имеет вид  $\delta$ -функции в координатном пространстве.

Чтобы устранить возникшие сингулярности введём в лагранжиан (3.1) дополнительные слагаемые – контрчлены, равные сингулярным членам с обратным знаком (множитель  $i$  соответствует S-матрице и следовательно не входит в лагранжиан), а именно

$$\Delta\mathcal{L} = \frac{1}{2\varepsilon} \frac{\lambda}{16\pi^2} \left(-\frac{m^2}{2}\phi^2\right) + \frac{\lambda}{16\pi^2} \frac{3}{2\varepsilon} \left(-\frac{\lambda}{4!}\phi^4\right). \quad (4.1)$$

Им соответствуют дополнительные вершины изображённые на рис.15, где крестом обо-



Рис. 15: Однопетлевые контрчлены в скалярной теории

значен вклад соответствующий (4.1). Тогда, с учётом новых диаграмм, формулы для пропагатора (3.3) и вершины (3.7) приобретут вид

$$J_1(p^2) = \frac{i\lambda}{32\pi^2} m^2 \left(1 - \gamma_E + \log(4\pi) - \log(m^2/\mu^2)\right). \quad (4.2)$$

$$\Delta\Gamma_4 = i\lambda \left\{ \frac{\lambda}{16\pi^2} \left(3 - \frac{3}{2}\gamma_E + \frac{3}{2}\log(4\pi) + \frac{1}{2}\ln\frac{\mu^2}{-s} + \frac{1}{2}\ln\frac{\mu^2}{-t} + \frac{1}{2}\ln\frac{\mu^2}{-u}\right) \right\}. \quad (4.3)$$

Заметим, что получившиеся выражения не содержат более бесконечностей, но содержат зависимость от параметра регуляризации  $\mu^2$ , который отсутствовал в исходной теории. Появление такой зависимости от размерного параметра присуще любой регуляризации и носит название размерной трансмутации, т.е. появлению нового масштаба в теории.

То, что мы проделали, эквивалентно *вычитанию* расходимостей из соответствующих диаграмм. Причём мы произвели вычитание исключительно сингулярных членов. Такой способ вычитания расходимостей носит название *схемы минимальных вычитаний* или *MS-схемы*. Возможны и другие способы вычитания, когда вычитаются также и конечные части. Например, удобно произвести вычитание сопутствующих полюсу слагаемых в виде константы Эйлера и логарифма  $4\pi$ . Такая схема вычитаний получила название *модифицированной схемы минимальных вычитаний* или  *$\overline{MS}$ -схемы*. Она эквивалентна переопределению параметра  $\mu^2$ . Ещё одной популярной схемой вычитаний

является т.н. *МОМ*-схема, когда вычитания производятся при фиксированных значениях импульсов. Например, в случае вершинной функции можно произвести вычитание в точке  $s = t = u = l^2$ . Такое вычитание называют вычитанием в симметричной точке.

Отличие различных способов вычитания расходимостей проявляется в конечных частях, причём в однопетлевом приближении это всего лишь константа не зависящая от импульса. Однако, в высших петлях различаются уже и слагаемые зависящие от импульса. Поэтому конечные части функций Грина зависят от *схемы вычитаний*. Заметим, что эта зависимость не сводится лишь к переопределению параметра  $\mu$ , ибо, как правило, имеется несколько расходящихся функций Грина и все они независимы.

Таким образом, в трёх обсуждавшихся схемах вычитаний имеем различные значения для вершинной функции

$$\begin{aligned}\Gamma_4^{MS} &= -i\lambda \left\{ 1 - \frac{\lambda}{16\pi^2} \left[ 3 - \frac{3}{2}\gamma_E + \frac{3}{2}\log 4\pi + \frac{1}{2}\ln \frac{\mu^2}{-s} + \frac{1}{2}\ln \frac{\mu^2}{-t} + \frac{1}{2}\ln \frac{\mu^2}{-u} \right] \right\}, \\ \Gamma_4^{\overline{MS}} &= -i\lambda \left\{ 1 - \frac{\lambda}{16\pi^2} \left[ 3 + \frac{1}{2}\ln \frac{\mu^2}{-s} + \frac{1}{2}\ln \frac{\mu^2}{-t} + \frac{1}{2}\ln \frac{\mu^2}{-u} \right] \right\}, \\ \Gamma_4^{MOM} &= -i\lambda \left\{ 1 - \frac{\lambda}{16\pi^2} \left[ \frac{1}{2}\ln \frac{l^2}{-s} + \frac{1}{2}\ln \frac{l^2}{-t} + \frac{1}{2}\ln \frac{l^2}{-u} \right] \right\}.\end{aligned}$$

Разными в этих случаях будут и контрчлены. Их удобно записать в виде

$$\Delta\mathcal{L} = -(Z - 1)\frac{m^2}{2}\phi^2 - (Z_4 - 1)\frac{\lambda}{4!}\phi^4, \quad (4.4)$$

где для различных схем вычитания имеем

$$\begin{aligned}Z^{MS} &= 1 + \frac{1}{2\varepsilon}\frac{\lambda}{16\pi^2}, \\ Z^{\overline{MS}} &= 1 + \left[ \frac{1}{2\varepsilon} + 1 - \gamma_E + \log(4\pi) \right] \frac{\lambda}{16\pi^2}, \\ Z_4^{MS} &= 1 + \frac{3}{2\varepsilon}\frac{\lambda}{16\pi^2}, \\ Z_4^{\overline{MS}} &= 1 + \left[ \frac{3}{2\varepsilon} - 3\gamma_E + 3\log(4\pi) \right] \frac{\lambda}{16\pi^2}, \\ Z_4^{MOM} &= 1 + \left[ \frac{3}{2\varepsilon} + 3 - 3\gamma_E + 3\log(4\pi) + \frac{3}{2}\ln \frac{\mu^2}{l^2} \right] \frac{\lambda}{16\pi^2}.\end{aligned} \quad (4.5)$$

Лагранжиан (3.1) вместе с контрчленами (4.4) можно записать как

$$\mathcal{L} + \Delta\mathcal{L} = Z_2\frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)^2 - Z\frac{m^2}{2}\varphi^2 - Z_4\frac{\lambda}{4!}\varphi^4 = \mathcal{L}_{Bare}, \quad (4.6)$$

где константы перенормировки  $Z$  и  $Z_4$  даются формулами (4.5), а константа  $Z_2$  в однопетлевом приближении равна 1.

Записывая "голый" лагранжиан в том же виде, что и исходный, но в терминах "голых" полей и параметров

$$\mathcal{L}_{Bare} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi_B)^2 - \frac{m_B^2}{2}\varphi_B^2 - \frac{\lambda_B}{4!}\varphi_B^4 \quad (4.7)$$



и сравнивая с (4.6), получим связь между "голыми" и перенормированными величинами

$$\varphi_B = \sqrt{Z_2}\varphi, \quad m_B^2 = Z Z_2^{-1} m^2, \quad \lambda_B = Z_4 Z_2^{-2} \lambda. \quad (4.8)$$

Смысл ур.(4.7) и (4.8) состоит в том, что однопетлевые радиационные поправки вычисленные с помощью лагранжиана (4.7) с параметрами выбранными согласно (4.8,4.5) – конечны.

## 4.2 Скалярная теория. Двухпетлевое приближение

Рассмотрим теперь двухпетлевые диаграммы. Для простоты и с целью довести все интегрирования до конца, мы ограничимся безмассовым случаем. Так как мы будем вычислять диаграммы вне массовой поверхности, то никаких инфракрасных расходимостей при этом не возникнет.

Пропагатор: В этом порядке имеется тоже только одна новая диаграмма изображённая на рис.16.

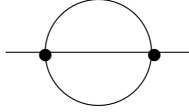


Рис. 16: Двухпетлевая диаграмма пропагаторного типа

Соответствующий интеграл равен

$$J_2(p^2) = \frac{(-i\lambda)^2}{3!} \frac{i^3(\mu^2)^{2\varepsilon}}{(2\pi)^{8-4\varepsilon}} \int \frac{d^{4-2\varepsilon}k d^{4-2\varepsilon}q}{q^2(k-q)^2(p-k)^2}$$

(1/3! - комбинаторный коэффициент). Воспользуемся теперь описанным выше способом вычисления безмассовых интегралов. Нужно перевести каждый из трёх пропагаторов в координатное представление, перемножить и перейти обратно в импульсное представление. Это сводится просто к выписыванию соответствующих множителей. Получим

$$\begin{aligned} J_2(p^2) &= \frac{i\lambda^2}{6} \frac{(i\pi^2)^{2-\varepsilon}}{(2\pi)^{8-4\varepsilon}} p^2 \left( \frac{\mu^2}{-p^2} \right)^{2\varepsilon} \frac{\Gamma(1-\varepsilon)\Gamma(1-\varepsilon)\Gamma(1-\varepsilon)\Gamma(-1+2\varepsilon)}{\Gamma(1)\Gamma(1)\Gamma(1)\Gamma(3-3\varepsilon)} \\ &= \frac{i}{6} \frac{\lambda^2}{(16\pi^2)^2} \left[ \frac{\mu^2}{-p^2} \right]^{2\varepsilon} \frac{p^2}{(2-3\varepsilon)(1-3\varepsilon)(1-2\varepsilon)2\varepsilon} = \frac{i}{24} \frac{\lambda^2}{(16\pi^2)^2} p^2 \left[ \frac{1}{\varepsilon} + \frac{13}{2} + 2 \ln \frac{\mu^2}{-p^2} \right], \end{aligned}$$

где константа Эйлера и логарифм  $4\pi$  опущены.

Возникшую ультрафиолетовую расходимость, полюс по  $\varepsilon$ , можно устранить введением (квази) локального контрчлена

$$\Delta\mathcal{L} = \frac{1}{2}(Z_2 - 1)(\partial\phi)^2, \quad (4.9)$$

где константа перенормировки волновой функции  $Z_2$  в  $\overline{MS}$  схеме получается взятием сингулярной части от интеграла с обратным знаком

$$Z_2 = 1 - \frac{1}{24\varepsilon} \left( \frac{\lambda}{16\pi^2} \right)^2. \quad (4.10)$$

После этого пропагатор в безмассовом случае приобретает вид

$$\begin{aligned}
 \bullet \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \bullet &= \bullet \text{---} \text{---} \text{---} \bullet + \bullet \text{---} \text{---} \text{---} \bullet = \bullet \text{---} \text{---} \text{---} \bullet \left\{ 1 + \text{---} \text{---} \text{---} \right\} = \\
 &= \frac{i}{p^2} \left\{ 1 - \frac{1}{24} \frac{\lambda^2}{(16\pi^2)^2} \left( \frac{13}{2} + 2 \ln \frac{\mu^2}{-p^2} \right) \right\}. \tag{4.11}
 \end{aligned}$$

Вершина: В данном порядке имеются две диаграммы (напомним, что в безмассовом случае все "головастики" равны нулю) изображённые на рис.17.



Рис. 17: Двухпетлевые диаграммы вершинного типа

Первая диаграмма, аналогично однопетлевому случаю, равна сумме  $s$ ,  $t$  и  $u$  каналов

$$I_{21} = I_{21}(s) + I_{21}(t) + I_{21}(u),$$

где каждый интеграл есть ни что иное, как квадрат однопетлевого

$$I_{21}(s) = \frac{(-i\lambda)^3}{96} \left( \frac{(\mu^2)^\varepsilon}{(2\pi)^{4-2\varepsilon}} i^2 \int \frac{d^{4-2\varepsilon}k}{k^2(p-k)^2} \right)^2 = -\frac{i}{96} \frac{\lambda^3}{(16\pi^2)^2} \left( \frac{1}{\varepsilon} + 2 + \ln \frac{\mu^2}{-s} \right)^2 \tag{4.12}$$

( $1/96$  - комбинаторный коэффициент).

Раскрывая скобку, мы здесь впервые сталкиваемся с наличием старшего полюса  $1/\varepsilon^2$  и сопутствующего ему младшего полюса  $\log(-\mu^2/s)/\varepsilon$ . Этот полюс совсем не безобиден, так как его фурье-образ не является локальной функцией. Это значит, что его нельзя устранить введением локального контрчлена в лагранжиан. Это обстоятельство представляло бы собой неустранимую проблему, если бы не тот факт, что у нас уже имеются однопетлевые контрчлены (4.1), которые порождают новые вершины, изображённые на рис.15. Соответственно, в порядке  $\lambda^3$  они приводят к дополнительным диаграммам показанным на рис.18.

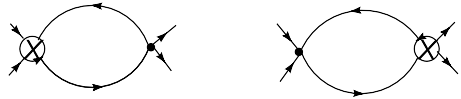
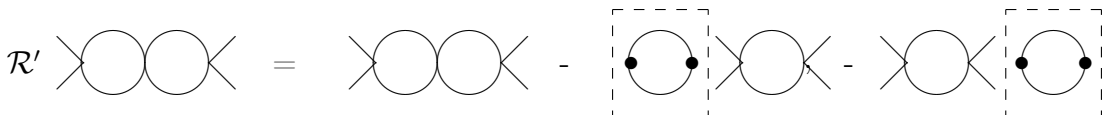


Рис. 18: Диаграммы с контрчленами в двухпетлевом приближении

Эти диаграммы соответствуют вычитанию расходимостей в подграфах (левом и правом) первой диаграммы на рис.17. Вычитание расходящихся подграфов ( $\mathcal{R}$ -операция без последнего вычитания, называемая  $\mathcal{R}'$  операцией) выглядит следующим образом:



где подграф обведённый штриховой линией означает его сингулярную часть, а оставшийся граф получается стягиванием сингулярного подграфа в точку.

Результат имеет вид

$$\begin{aligned}\mathcal{R}'I_{21}(s) &= -\frac{i}{4} \frac{\lambda^3}{(16\pi^2)^2} \left\{ \left( \frac{1}{\varepsilon} + 2 + \ln \frac{\mu^2}{-s} \right)^2 - \frac{2}{\varepsilon} \left( \frac{1}{\varepsilon} + 2 + \ln \frac{\mu^2}{-s} \right) \right\} = \\ &= -\frac{i}{4} \frac{\lambda^3}{(16\pi^2)^2} \left( -\frac{1}{\varepsilon^2} + 4 + \ln^2 \frac{\mu^2}{-s} + 4 \ln \frac{\mu^2}{-s} \right).\end{aligned}$$

Заметим, что после вычитаний подграфов сингулярная часть имеет локальный характер, т.е. в импульсном пространстве не зависит от  $\ln p^2$ . Члены первого порядка по  $1/\varepsilon$  отсутствуют в силу того, что диаграмма факторизуется на две диаграммы низшего порядка.

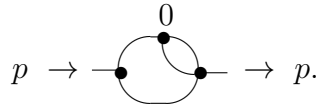
Вклад данной диаграммы в вершинную функцию равен

$$\begin{aligned}\Delta\Gamma_4 &= -i\lambda \left\{ \frac{1}{4} \frac{\lambda^2}{(16\pi^2)^2} \left( -\frac{3}{\varepsilon^2} + 12 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \ln^2 \frac{\mu^2}{-s} + 4 \ln \frac{\mu^2}{-s} + \ln^2 \frac{\mu^2}{-t} + 4 \ln \frac{\mu^2}{-t} + \ln^2 \frac{\mu^2}{-u} + 4 \ln \frac{\mu^2}{-u} \right) \right\}.\end{aligned}\quad (4.13)$$

И, соответственно, вклад в константу перенормировки четверной вершины в  $\overline{MS}$  схеме равен сингулярной части с обратным знаком

$$\Delta Z_4 = +\frac{3}{4\varepsilon^2} \left( \frac{\lambda}{16\pi^2} \right)^2. \quad (4.14)$$

Вторая диаграмма с перекрёстными членами содержит 6 вариантов. Рассмотрим один из них. Поскольку нас в данном случае интересуют сингулярные части, дающие вклад в константы перенормировки, произведём некоторые упрощения исходного интеграла. Воспользуемся чрезвычайно важным для вычислений свойством минимальной схемы вычитаний, что константы перенормировки зависят только от безразмерных констант связи и не зависят от масс и выбора внешних импульсов. Поэтому мы положим все массы равными нулю и, во избежание появления инфракрасных расходимостей, положим равным нулю один из внешних импульсов. Тогда диаграмма приобретёт пропагаторный вид



Соответствующий интеграл равен

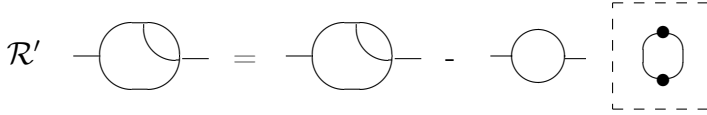
$$I_{22}(p^2) = \frac{(-i\lambda)^3}{48} \frac{(\mu^2)^{2\varepsilon}}{(2\pi)^{8-4\varepsilon}} i^4 \int \frac{d^{4-2\varepsilon} q d^{4-2\varepsilon} k}{q^2 (k-q)^2 k^2 (p-k)^2}$$

( $1/48$  – комбинаторный коэффициент). Поскольку, положив один из импульсов равным нулю, мы свели диаграмму к пропагаторному типу, опять можно воспользоваться методом вычисления безмассовых интегралов. Имеем

$$I_{22}(p^2) = \frac{i\lambda^3}{48} \frac{(\mu^2)^{2\varepsilon}}{(2\pi)^{8-4\varepsilon}} i\pi^2 \frac{\Gamma(1-\varepsilon)\Gamma(1-\varepsilon)\Gamma(\varepsilon)}{\Gamma(1)\Gamma(1)\Gamma(2-2\varepsilon)} \int \frac{d^{4-2\varepsilon} k}{(k^2)^{1+\varepsilon} (p-k)^2} =$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{i}{48} \frac{\lambda^3}{(16\pi^2)^2} \left( \frac{\mu^2}{-p^2} \right)^{2\varepsilon} \frac{\Gamma(1-\varepsilon)\Gamma(1-\varepsilon)\Gamma(\varepsilon)\Gamma(1-2\varepsilon)\Gamma(1-\varepsilon)\Gamma(2\varepsilon)}{\Gamma(1)\Gamma(1)\Gamma(2-2\varepsilon)\Gamma(1+\varepsilon)\Gamma(1)\Gamma(2-3\varepsilon)} = \\
&= -\frac{i}{48} \frac{\lambda^3}{(16\pi^2)^2} \left( \frac{\mu^2}{-p^2} \right)^{2\varepsilon} \frac{1}{2\varepsilon^2(1-2\varepsilon)(1-3\varepsilon)} = \\
&= -\frac{i}{48} \frac{\lambda^3}{(16\pi^2)^2} \left\{ \frac{1}{2\varepsilon^2} + \frac{5}{2\varepsilon} + 2 + \frac{\ln(-\mu^2/p^2)}{\varepsilon} + \ln^2 \frac{\mu^2}{-p^2} + 5 \ln \frac{\mu^2}{-p^2} \right\}.
\end{aligned}$$

Как видно, в данном случае мы опять имеем старший полюс по  $\varepsilon$  и соответственно младший полюс с логарифмом импульса. Причина их появления – наличие расходящегося подграфа. Здесь мы опять должны обратиться к контрчленам предыдущего порядка, которые устраняют расходимость из однопетлевого подграфа. Вычитание расходящихся подграфов ( $\mathcal{R}$ -операция без последнего вычитания) выглядит следующим образом:



или

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}'I_2(s) &= -\frac{i}{2} \frac{\lambda^3}{(16\pi^2)^2} \left\{ \left( \frac{\mu^2}{-p^2} \right)^{2\varepsilon} \frac{1}{2\varepsilon^2(1-2\varepsilon)(1-3\varepsilon)} - \left( \frac{\mu^2}{-p^2} \right)^\varepsilon \frac{1}{\varepsilon^2(1-2\varepsilon)} \right\} \\
&= -\frac{i}{2} \frac{\lambda^3}{(16\pi^2)^2} \left\{ \left( \frac{1}{2\varepsilon^2} + \frac{5}{2\varepsilon} + 2 + \frac{\ln(-\mu^2/p^2)}{\varepsilon} + \ln^2 \frac{\mu^2}{-p^2} + 5 \ln \frac{\mu^2}{-p^2} \right) - \right. \\
&\quad \left. - \left( \frac{1}{\varepsilon^2} + \frac{2}{\varepsilon} + 4 + \frac{\ln(-\mu^2/p^2)}{\varepsilon} + \frac{1}{2} \ln^2 \frac{\mu^2}{-p^2} + 2 \ln \frac{\mu^2}{-p^2} \right) \right\} = \\
&= -\frac{i}{2} \frac{\lambda^3}{(16\pi^2)^2} \left\{ -\frac{1}{2\varepsilon^2} + \frac{1}{2\varepsilon} - 2 + \frac{1}{2} \ln^2 \frac{\mu^2}{-p^2} + 3 \ln \frac{\mu^2}{-p^2} \right\}.
\end{aligned}$$

Опять после вычитания расходящегося подграфа сингулярная часть имеет локальный характер, т.е. в импульсном пространстве не зависит от  $\ln p^2$ .

Вклад в вершинную функцию от этой диаграммы равен

$$\Delta\Gamma_4 = -i\lambda \left\{ \frac{1}{2} \frac{\lambda^2}{(16\pi^2)^2} \left( -\frac{3}{\varepsilon^2} + \frac{3}{\varepsilon} - 12 + \frac{1}{2} \ln^2 \frac{\mu^2}{-p^2} + 3 \ln \frac{\mu^2}{-p^2} + \dots \right) \right\} \quad (4.15)$$

и соответственно

$$\Delta Z_4 = \left( \frac{3}{2\varepsilon^2} - \frac{3}{2\varepsilon} \right) \left( \frac{\lambda}{16\pi^2} \right)^2. \quad (4.16)$$

Таким образом, в силу (4.5) и (4.16) в двухпетлевом приближении константа перенормировки четверной вершины в  $\overline{MS}$  схеме имеет вид

$$Z_4 = 1 + \frac{3}{2\varepsilon} \frac{\lambda}{16\pi^2} + \left( \frac{\lambda}{16\pi^2} \right)^2 \left( \frac{9}{4\varepsilon^2} - \frac{3}{2\varepsilon} \right). \quad (4.17)$$

С учётом двухпетлевой перенормировки пропагатора (4.10) имеем

$$Z_\lambda = Z_4 Z_2^{-2} = 1 + \frac{3}{2\varepsilon} \frac{\lambda}{16\pi^2} + \left( \frac{\lambda}{16\pi^2} \right)^2 \left( \frac{9}{4\varepsilon^2} - \frac{17}{12\varepsilon} \right). \quad (4.18)$$

Утверждение состоит в том, что введённые таким образом контрчлены устраняют все ультрафиолетовые расходимости вплоть до двухпетлевого приближения и делают функции Грина, а с ними и радиационные поправки, конечными. При наличии массы, нужно добавить ещё и массовый контрчлен.

### 4.3 Общая структура R-операции

Сформулируем теперь общую процедуру получения конечных выражений для функций Грина вне массовой поверхности в произвольной локальной квантовой теории поля. Она состоит в следующем:

*В каждом порядке теории возмущений по константе связи в исходный лагранжиан вводятся (квази) локальные контрчлены. Они осуществляют вычитание расходимостей отвечающих диаграммам данного порядка. Вычитание расходимостей в подграфах обеспечивается контрчленами низшего порядка. После вычитания расходимостей в подграфах оставшиеся расходимости всегда носят локальный характер. Функции Грина данного порядка, вычисленные на основе исходного лагранжиана с учётом контрчленов, – ультрафиолетово конечны.*

Структура контрчленов как функций полевых операторов зависит от типа теории. Согласно обсуждаемой в первой лекции классификации, теории делятся на *суперперенормируемые* (конечное число расходящихся диаграмм), *перенормируемые* (конечное число типов расходящихся диаграмм) и *неперенормируемые* (бесконечное число типов расходящихся диаграмм). Соответственно, в первом случае имеем конечное число контрчленов; во втором случае имеем бесконечное число контрчленов, но они повторяют структуру исходного лагранжиана; а в последнем случае имеем бесконечное число структур с нарастающим количеством полей и производных.

В случае перенормируемых и суперперенормируемых теорий, так как контрчлены повторяют структуру исходного лагранжиана, результат введения контрчленов можно записать как

$$\mathcal{L} + \Delta\mathcal{L} = \mathcal{L}_{Bare} = \mathcal{L}(\phi_B, \{g_B\}, \{m_B\}), \quad (4.19)$$

т.е.  $\mathcal{L}_{Bare}$  есть тот же самый лагранжиан  $\mathcal{L}$ , но все поля, массы и константы связи являются "голыми" величинами и связаны с перенормированными мультипликативными равенствами

$$\phi_i^{Bare} = Z_i^{1/2}(\{g\}, 1/\varepsilon)\phi, \quad g_i^{Bare} = Z_g^i(\{g\}, 1/\varepsilon)g_i, \quad m_i^{Bare} = Z_m^i(\{g\}, 1/\varepsilon)m_i, \quad (4.20)$$

где константы перенормировки  $Z_i$  зависят от перенормированных параметров и параметра регуляризации (мы для определённости выбрали  $1/\varepsilon$ ). В некоторых случаях перенормировка может быть недиагональной, тогда константы перенормировки превращаются в матрицы.

Константы перенормировки неоднозначны и зависят от схемы вычитаний. Этот произвол, однако, не сказывается на наблюдаемых величинах выраженных через перенормированные параметры. Мы вернёмся к этому вопросу при обсуждении группы перенормировок. В калибровочных теориях  $Z_i$  могут также зависеть от выбора калибровки, хотя в минимальной схеме вычитаний константы перенормировки параметров лагранжиана, зарядов и масс, инвариантны.

В минимальных схемах константы перенормировки не зависят от размерных параметров типа масс и не зависят от расстановки внешних импульсов в диаграммах.

Это обстоятельство позволяет существенно упростить вычисление контрчленов, полагая массы и некоторые внешние импульсы равными нулю, как было продемонстрировано на примере двухпетлевых скалярных диаграмм выше. При этом, однако, нужно убедиться, чтобы не возникли искусственные инфракрасные расходимости. Так как в размерной регуляризации они также имеют вид полюсов по  $\varepsilon$ , это может привести к неправильным ответам.

В перенормируемой теории конечная функция Грина получается из "голой т.е. вычисленной исходя из "голового" лагранжиана, умножением на соответствующую константу перенормировки

$$\Gamma(\{p^2\}, \mu^2, g_\mu) = Z_\Gamma(1/\varepsilon, g_\mu) \Gamma_{Bare}(\{p^2\}, 1/\varepsilon, g_{Bare}), \quad (4.21)$$

где в  $n$ -ом порядке теории возмущений "голые" параметры в правой части должны быть выражены через перенормированные с помощью соотношений (4.20) взятых в  $n-1$  порядке. Оставшаяся константа  $Z_\Gamma$  порождает контрчлен  $n$ -ого порядка вида  $\Delta\mathcal{L} = (Z_\Gamma - 1)O_\Gamma$ , где оператор  $O_\Gamma$  отвечает соответствующей вершинной функции Грина. Если функция Грина сама по себе конечна (например многохвостка), то нужно только устранить расходимости в подграфах и соответствующая константа  $Z_\Gamma = 1$ .

Отметим при этом, что так как пропагатор является обратным оператором к квадратичному по полям оператору в лагранжиане, то перенормировка пропагатора также является обратной к перенормировке сильно-связной двухчастичной функции Грина

$$D(p^2, \mu^2, g_\mu) = Z_2^{-1}(1/\varepsilon, g_\mu) D_{Bare}(p^2, 1/\varepsilon, g_{Bare}). \quad (4.22)$$

Константа перенормировки пропагатора является константой перенормировки соответствующего поля, но сами поля, в отличие от масс и зарядов, не входят непосредственно в выражения для наблюдаемых.

Подчеркнём, что  $\mathcal{R}$ -операция работает независимо от того, является ли теория перенормируемой или нет. В локальной теории контрчлены всё равно локальны. Но только в перенормируемой теории контрчлены сводятся к мультипликативной перенормировке конечного числа полей и параметров.

Можно осуществить  $\mathcal{R}$ -операцию и для каждой диаграммы по-отдельности. Для этого нужно сначала вычесть расходимости в расходящихся подграфах, а затем вычесть оставшуюся расходимость самой диаграммы, которая должна быть локальной. Это служит хорошей проверкой того, что расходимости подграфов вычтены правильно. При этом  $\mathcal{R}$ -операция может быть символически записана в факторизованном виде

$$\mathcal{R}G = \prod (1 - M_\gamma)G, \quad (4.23)$$

где  $G$  есть исходная диаграмма,  $M$  есть вычитающий оператор (например вычитание сингулярной части регуляризованной диаграммы) и произведение идёт по всем расходящимся подграфам, включая саму диаграмму. Под подграфом здесь подразумевается сильносвязная поддиаграмма, состоящая из части вершин и линий диаграммы, которая сама по себе УФ расходится. Сильносвязной или одночастично неприводимой называется диаграмма, которая не распадается на несвязные части удалением одной линии.

Выше мы продемонстрировали применение  $\mathcal{R}$ -операции к двухпетлевым диаграммам в скалярной теории. Рассмотрим ещё ряд примеров диаграмм с большим числом петель, изображённых на рис.19. Они возникают в теории  $\phi^4$  в трёхпетлевом приближении.

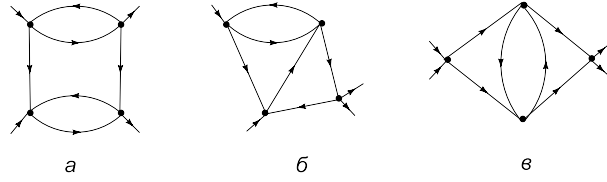


Рис. 19: Многопетлевые диаграммы в теории  $\phi^4$

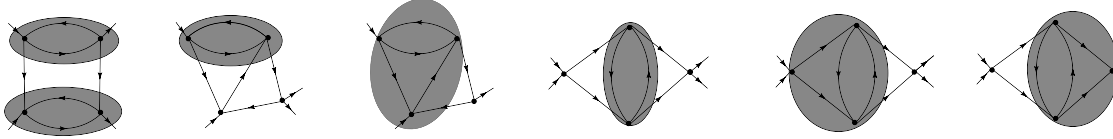


Рис. 20: Расходящиеся подграфы в диаграммах рис.19

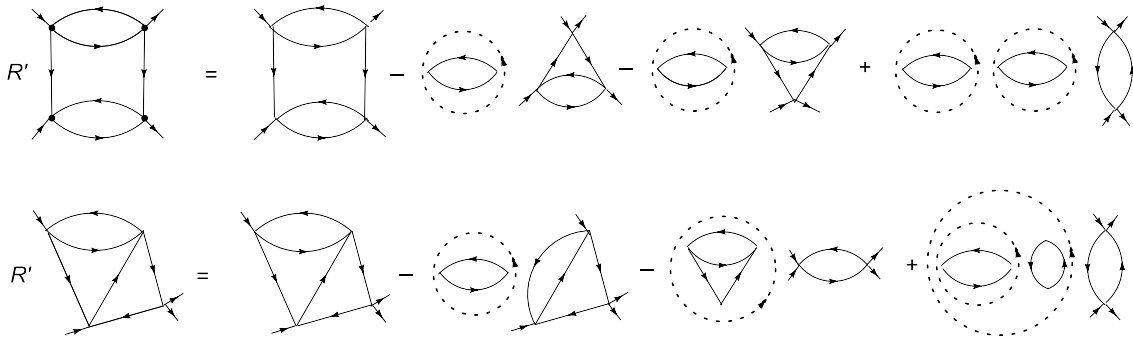
Чтобы осуществить  $\mathcal{R}$ -операцию для этих диаграмм нужно сначала выявить расходящиеся подграфы. Они показаны на рис.20.

Воспользуемся далее факторизованным представлением  $\mathcal{R}$ -операции в виде (10.14). Для трёх приведённых диаграмм имеем, соответственно,

$$\begin{aligned} RG_a &= (1 - M_G)(1 - M_{\gamma_1})(1 - M_{\gamma'_1})G_a, \\ RG &= (1 - M_G)(1 - M_{\gamma_2})(1 - M_{\gamma_1})G, \\ RG &= (1 - M_G)(1 - M_{\gamma_2})(1 - M_{\gamma'_2})(1 - M_{\gamma_1})G, \end{aligned}$$

где  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  - одно и двухпетлевые расходящиеся подграфы, показанные на рис.20.

Результат применения  $\mathcal{R}$ -операции без последнего вычитания ( $\mathcal{R}'$ -операции) для рассматриваемых диаграмм графически выглядит следующим образом:



Здесь, как и ранее, подграф обведённый штриховой линией означает его сингулярную часть, а оставшийся граф получается стягиванием сингулярного подграфа в точку.

Продemonстрируем, как  $\mathcal{R}'$ -операция работает для диаграммы рис.19а). При этом, так как результат  $\mathcal{R}'$ -операции не зависит от внешних импульсов, положим два импульса по диагонали равными нулю, так что интеграл примет пропагаторный вид. Для него удобно воспользоваться правилом вычисления таких интегралов путём перехода к фурье-образу, как это было объяснено ранее. Имеем

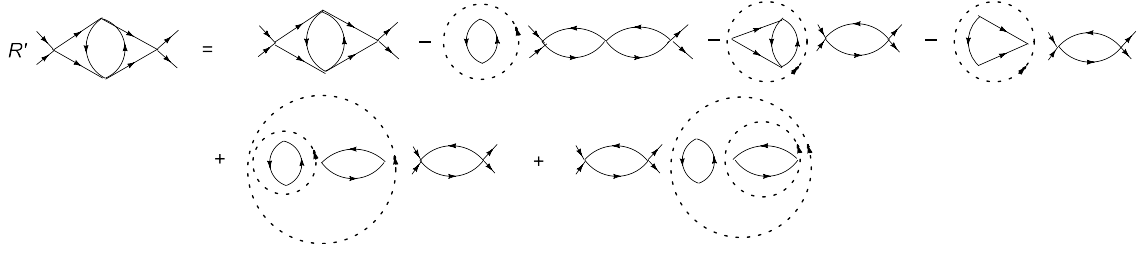


Рис. 21:  $\mathcal{R}'$ -операция для многопетлевых диаграмм

$$\begin{aligned}
 & \text{Diagram with two loops and external lines } p \text{ and } p \text{ (with labels 1)} = \left( \Gamma(1-\varepsilon) \frac{\Gamma^2(1-\varepsilon)\Gamma(\varepsilon)}{\Gamma(2-2\varepsilon)} \right)^2 \text{Diagram with one loop and external lines } p \text{ and } p \text{ (with labels } 1+\varepsilon \text{)} \\
 & = \left( \Gamma(1-\varepsilon) \frac{\Gamma^2(1-\varepsilon)\Gamma(\varepsilon)}{\Gamma(2-2\varepsilon)} \right)^2 \left( \Gamma(1-\varepsilon) \frac{\Gamma^2(1-2\varepsilon)\Gamma(3\varepsilon)}{\Gamma^2(1+\varepsilon)\Gamma(2-4\varepsilon)} \right) \left( \frac{\mu^2}{p^2} \right)^{3\varepsilon} \cong \frac{1}{\varepsilon^3(1-2\varepsilon)^2(1-4\varepsilon)} \left( \frac{\mu^2}{p^2} \right)^{3\varepsilon}.
 \end{aligned}$$

Мы использовали здесь принятую ранее угловую меру интегрирования в  $4 - 2\varepsilon$  мерном пространстве с домножением стандартных формул на  $\Gamma(1 - \varepsilon)$ , чтобы избежать ненужных трансцендентных функций. Следуя далее схеме, представленной на рис.21, получим

$$\begin{aligned}
 & \text{Diagram with one loop and external lines } p \text{ and } p \text{ (with labels 1)} = \frac{1}{\varepsilon} \Gamma(1-\varepsilon) \frac{\Gamma^2(1-\varepsilon)\Gamma(\varepsilon)}{\Gamma(2-2\varepsilon)} \text{Diagram with one loop and external lines } p \text{ and } p \text{ (with labels } 1+\varepsilon \text{)} \\
 & = \frac{1}{\varepsilon} \Gamma(1-\varepsilon) \frac{\Gamma^2(1-\varepsilon)\Gamma(\varepsilon)}{\Gamma(2-2\varepsilon)} \Gamma(1-\varepsilon) \frac{\Gamma(1-\varepsilon)\Gamma(1-2\varepsilon)\Gamma(2\varepsilon)}{\Gamma(1+\varepsilon)\Gamma(2-3\varepsilon)} \left( \frac{\mu^2}{p^2} \right)^{2\varepsilon} \cong \frac{1}{\varepsilon^3(1-2\varepsilon)(1-3\varepsilon)} \left( \frac{\mu^2}{p^2} \right)^{2\varepsilon}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \text{Diagram with two loops and external lines } p \text{ and } p \text{ (with labels 1)} = \frac{1}{\varepsilon^2} \Gamma(1-\varepsilon) \frac{\Gamma^2(1-\varepsilon)\Gamma(\varepsilon)}{\Gamma(2-2\varepsilon)} \left( \frac{\mu^2}{p^2} \right)^\varepsilon \cong \frac{1}{\varepsilon^3(1-2\varepsilon)} \left( \frac{\mu^2}{p^2} \right)^\varepsilon.
 \end{aligned}$$

Складывая всё вместе, получаем

$$\mathcal{R}' \text{Diagram with two loops and external lines } p \text{ and } p \text{ (with labels 1)} \cong \frac{1}{\varepsilon^3(1-2\varepsilon)^2(1-4\varepsilon)} \left( \frac{\mu^2}{p^2} \right)^{3\varepsilon} - 2 \frac{1}{\varepsilon^3(1-2\varepsilon)} \left( \frac{\mu^2}{p^2} \right)^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon^3(1-2\varepsilon)} \left( \frac{\mu^2}{p^2} \right)^\varepsilon = \frac{1-\varepsilon-\varepsilon^2}{\varepsilon^3}.$$

Отметим сокращение всех нелокальных вкладов. Сингулярная часть после проведения  $\mathcal{R}'$ -операции всегда локальна.

Осуществление  $\mathcal{R}'$ -операции для каждой диаграммы  $G$  позволяет найти вклад данной диаграммы в соответствующий контрчлен и, в случае перенормируемой теории, константу перенормировки, равную

$$Z = 1 - \mathcal{K} \mathcal{R}'G, \tag{4.24}$$

где  $\mathcal{K}$  означает взятие сингулярной части. Складывая вклады различных диаграмм, получаем итоговый контрчлен данного порядка или константу перенормировки.



## 5 Лекция V: Ренормировка. Калибровочные теории и Стандартная Модель

Рассмотрим теперь калибровочные теории. Отличие от скалярного случая состоит в том, что здесь возникают соотношения между различными константами перенормировки, которые следуют из калибровочной инвариантности. Если используемая регуляризация и схема перенормировки не нарушают симметрию, то эти соотношения выполняются автоматически. В противном случае, это является дополнительным требованием, налагаемым на контрчлены.

### 5.1 Квантовая электродинамика

Квантовая электродинамика (3.8) является перенормируемой теорией, следовательно контрчлены повторяют структуру лагранжиана. Их можно записать в виде

$$\Delta\mathcal{L}_{QED} = -\frac{Z_3 - 1}{4}F_{\mu\nu}^2 + (Z_2 - 1)i\bar{\psi}\hat{\partial}\psi - m(Z - 1)\bar{\psi}\psi + e(Z_1 - 1)\bar{\psi}\hat{A}\psi. \quad (5.1)$$

Член фиксирующий калибровку не перенормируется. В лидирующем порядке теории возмущений мы вычислили соответствующие диаграммы с использованием размерной регуляризации (см.(3.15),(3.19),(3.23)). Их сингулярные части с обратным знаком дают соответствующие константы перенормировки. Они равны, соответственно,

$$\begin{aligned} Z_1 &= 1 - \frac{e^2}{16\pi^2} \frac{1}{\varepsilon}, \\ Z_2 &= 1 - \frac{e^2}{16\pi^2} \frac{1}{\varepsilon}, \\ Z_3 &= 1 - \frac{e^2}{16\pi^2} \frac{4}{3\varepsilon}, \\ Z &= 1 - \frac{e^2}{16\pi^2} \frac{4}{\varepsilon}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Складывая (5.1) с (3.8), получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{QED} + \Delta\mathcal{L}_{QED} &= -\frac{Z_3}{4}F_{\mu\nu}^2 + Z_2i\bar{\psi}\hat{\partial}\psi - mZ\bar{\psi}\psi + eZ_1\bar{\psi}\hat{A}\psi - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A_\mu)^2 \\ &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu B}^2 + i\bar{\psi}_B\hat{\partial}\psi_B - mZZ_2^{-1}\bar{\psi}_B\psi_B + eZ_1Z_2^{-1}Z_3^{-1/2}\bar{\psi}_B\hat{A}_B\psi_B \\ &\quad - \frac{Z_3^{-1}}{2\xi}(\partial_\mu A_{\mu B})^2, \end{aligned} \quad (5.3)$$

что даёт

$$\psi_B = Z_2^{1/2}\psi, \quad A_B = Z_3^{1/2}A, \quad m_B = ZZ_2^{-1}m, \quad e_B = Z_1Z_2^{-1}Z_3^{-1/2}e, \quad \xi_B = Z_3\xi. \quad (5.4)$$

Калибровочная инвариантность здесь проявляется в двух местах. Во-первых, поперечность радиационной поправки к фотонному пропагатору означает, что член фиксирующий калибровку не перенормируется, а значит калибровочный параметр  $\xi$  перенормируется как поле. Во-вторых, калибровочная инвариантность связывает между собой вершинную функцию Грина и фермионный пропагатор (тождества Уорда), что ведёт к равенству  $Z_1 = Z_2$ . Поскольку используемая нами размерная регуляризация не нарушает калибровочной инвариантности, это равенство выполняется автоматически (см.(5.2)). Это значит, что перенормировка заряда в (5.4) определяется только фотонным пропагатором. Заметим, однако, что в неабелевой теории это, вообще говоря, не так.

## 5.2 Квантовая хромодинамика

Усложнения, возникающие в неабелевых теориях, связаны с тем, что появляется много вершин с одним и тем же зарядом, как это следует из калибровочной инвариантности. Следовательно, и перенормироваться они должны одинаково, т.е. возникают новые тождества, носящие название тождеств Славнова-Тейлора. Полный набор контрчленов в КХД выглядит следующим образом

$$\begin{aligned} \Delta\mathcal{L}_{QD} = & -\frac{Z_3 - 1}{4}(\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a)^2 - g(Z_1 - 1)f^{abc}A_\mu^a A_\nu^b \partial_\mu A_\nu^c \\ & -(Z_4 - 1)\frac{g^2}{4}f^{abc}f^{ade}A_\mu^b A_\nu^c A_\mu^d A_\nu^e + (\tilde{Z}_3 - 1)\partial_\mu \bar{c}^a \partial_\mu c^a + g(\tilde{Z}_1 - 1)f^{abc}\partial_\mu \bar{c}^a A_\mu^b c^c \\ & + i(Z_2 - 1)\bar{\psi}\hat{\partial}\psi - m(Z - 1)\bar{\psi}\psi + g(Z_{1\psi} - 1)\bar{\psi}\hat{A}^a T^a \psi, \end{aligned} \quad (5.5)$$

что при сложении с исходным лагранжианом даёт

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{QD} + \Delta\mathcal{L}_{QD} = & -\frac{Z_3}{4}(\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a)^2 - gZ_1 f^{abc}A_\mu^a A_\nu^b \partial_\mu A_\nu^c \\ & - Z_4 \frac{g^2}{4}f^{abc}f^{ade}A_\mu^b A_\nu^c A_\mu^d A_\nu^e - \tilde{Z}_3 \partial_\mu \bar{c}^a \partial_\mu c^a - g\tilde{Z}_1 f^{abc}\partial_\mu \bar{c}^a A_\mu^b c^c \\ & + iZ_2 \bar{\psi}\hat{\partial}\psi - mZ\bar{\psi}\psi + gZ_{1\psi}\bar{\psi}\hat{A}^a T^a \psi - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A_\mu^a)^2 \\ = & -\frac{1}{4}(\partial_\mu A_{\nu B}^a - \partial_\nu A_{\mu B}^a)^2 - gZ_1 Z_3^{-3/2}f^{abc}A_{\mu B}^a A_{\nu B}^b \partial_\mu A_{\nu B}^c \\ & - Z_4 Z_3^{-2}\frac{g^2}{4}f^{abc}f^{ade}A_{\mu B}^b A_{\nu B}^c A_{\mu B}^d A_{\nu B}^e + \partial_\mu \bar{c}_B^a \partial_\mu c_B^a + g\tilde{Z}_1 \tilde{Z}_3^{-1} Z_3^{-1/2}f^{abc}\partial_\mu \bar{c}_B^a A_{\mu B}^b c_B^c \\ & + \frac{Z_3^{-1}}{2\xi}(\partial_\mu A_{\mu B}^a)^2 + i\bar{\psi}_B \hat{\partial}\psi_B - mZ Z_2^{-1}\bar{\psi}_B \psi_B + gZ_{1\psi} Z_2^{-1} Z_3^{-1/2}\bar{\psi}_B \hat{A}_B^a T^a \psi_B. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Отсюда получаем соотношения на перенормированные поля и заряды:

$$\begin{aligned} \psi_B &= Z_2^{1/2}\psi, \quad A_B = Z_3^{1/2}A, \quad c_B = \tilde{Z}_3^{1/2}c, \\ m_B &= Z Z_2^{-1}m, \quad g_B = Z_1 Z_3^{-3/2}g, \quad \xi_B = Z_3 \xi, \\ Z_1 Z_3^{-1} &= \tilde{Z}_1 \tilde{Z}_3^{-1}, \quad Z_4 = Z_1^2 Z_3^{-1}, \quad Z_{1\psi} Z_2^{-1} = Z_1 Z_3^{-1}. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Последняя строчка равенств следует из требования одинаковой перенормировки заряда в различных вершинах и представляет собой тождества Славнова-Тейлора для сингулярных частей.

Явный вид констант перенормировки в низшем приближении следует из вычисленных нами ранее однопетлевых диаграмм (см. (3.14), (3.19), (3.23), (3.31), (3.33), (3.39)). Как обычно, нужно взять сингулярную часть с обратным знаком. Имеем в  $\overline{MS}$  схеме

$$\begin{aligned}
Z_2 &= 1 - \frac{g^2}{16\pi^2} \frac{C_F}{\varepsilon}, \\
Z_3 &= 1 + \frac{g^2}{16\pi^2} \left( \frac{5}{3\varepsilon} C_A - \frac{4}{3\varepsilon} T_f n_f \right), \\
Z &= 1 - \frac{g^2}{16\pi^2} \frac{4C_F}{\varepsilon}, \\
\tilde{Z}_1 &= 1 - \frac{g^2}{16\pi^2} \frac{C_A}{2\varepsilon}, \\
\tilde{Z}_2 &= 1 + \frac{g^2}{16\pi^2} \frac{C_A}{2\varepsilon}, \\
Z_g &= \tilde{Z}_1 \tilde{Z}_2^{-1} Z_3^{-1/2} = 1 - \frac{g^2}{16\pi^2} \left( \frac{11}{6\varepsilon} C_A - \frac{4}{3\varepsilon} T_f n_f \right),
\end{aligned} \tag{5.8}$$

где использованы следующие обозначения для операторов Казимира калибровочной группы:

$$f^{abc} f^{dbc} = C_A \delta^{ad}, \quad (T^a T^a)_{ij} = C_F \delta_{ij}, \quad Tr(T^a T^b) = T_F \delta^{ab}.$$

Для группы  $SU(N)$  и фундаментального представления фермионных полей они равны

$$C_A = N, \quad C_F = \frac{N^2 - 1}{2N}, \quad T_F = \frac{1}{2}.$$

### 5.3 Стандартная Модель фундаментальных взаимодействий

В Стандартной Модели фундаментальных взаимодействий кроме калибровочных взаимодействий и четверного взаимодействия Хиггсовских полей имеется также юкавское взаимодействие фермионов с полем Хиггса. Это взаимодействие также является перенормируемым и характеризуется юкавскими константами связи, по одной на каждый фермион. Особенностью СМ является также то, что массы у всех полей возникают в результате спонтанного нарушения симметрии, когда поле Хиггса приобретает вакуумное среднее. Поэтому массы не являются независимыми, а выражаются через константу связи умноженную на вакуумное среднее. Здесь возможны два подхода: считать юкавские константы независимыми и перенормировать их обычным образом, а затем выразить перенормированные массы через перенормированные константы, или взять за основу массы частиц и выразить через них юкавские константы. Первый подход обычно используют в минимальной схеме вычитаний, где перенормировки не зависят от масс. Напротив, в схеме МОМ, когда вычитание производится на массе (т.н. "on-shell" схема), за основу обычно берутся массы частиц. При таком способе вычитания полюс у пропагатора не сдвигается и перенормированная масса совпадает с физической массой частицы. Ниже мы рассмотрим перенормировки в СМ в схеме  $\overline{MS}$  и сосредоточимся на перенормировках полей и констант связи.

Другой особенностью Стандартной модели является то, что она является теорией с группой симметрии  $SU_c(3) \times SU_L(2) \times U_Y(1)$  спонтанно нарушенной до группы  $SU_c(3) \times U_{EM}(1)$ . А в теориях со спонтанно нарушенной симметрией, согласно теореме Голдстоуна, возникают безмассовые частицы – голдстоуновские бозоны. Эти частицы

действительно присутствуют в СМ, но не являются физическими степенями свободы и, благодаря эффекту Хиггса, поглощаются векторными бозонами, превращаясь в продольные степени свободы массивных векторных частиц.

Таким образом, возможны две формулировки СМ как теории со спонтанным нарушением симметрии: *унитарная* формулировка, в которой отсутствуют нефизические степени свободы, а у векторных бозонов имеются по три степени свободы; и т.н. *перенормируемая* формулировка, в которой присутствуют голдстоуновские бозоны, а у векторных частиц имеются две степени свободы. Две этих формулировки соответствуют на самом деле двум различным выборам калибровки в спонтанно нарушенной теории.

В унитарной калибровке мы имеем дело лишь с физическими степенями свободы, т.е. теория автоматически унитарна, чем и объясняется название этой калибровки. Однако, пропагатор массивных векторных частиц в этом случае имеет вид

$$G_{\mu\nu}(k) = -i \frac{g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{M^2}}{k^2 - M^2},$$

т.е. не убывает при импульсе стремящемся к бесконечности. Это приводит к тому, что расходимости диаграмм нарастают и теория оказывается формально перенормируемой, несмотря на безразмерность константы связи. Этот факт мы отмечали в первой лекции.

С другой стороны в перенормируемой калибровке, где у векторных полей есть две поперечные степени свободы, пропагатор ведёт себя как

$$G_{\mu\nu}(k) = -i \frac{g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2}}{k^2 - M^2},$$

что очевидно ведёт к перенормируемой теории (отсюда и название этой калибровки). Однако присутствие голдстоуновских бозонов ставит под сомнение унитарность теории, ибо возможны переходы из физических состояний в нефизические.

Поскольку все калибровки равноправны, то можно работать в любой из них, но в унитарной нужно доказывать перенормируемость, а в перенормируемой – унитарность. Калибровочная инвариантность наблюдаемых, сохраняющаяся и при спонтанном нарушении симметрии, должна по идее гарантировать выполнение обоих условий одновременно. Заметим, что при спонтанном нарушении симметрии, симметрия лагранжиана и взаимодействия не нарушается, а нарушается лишь симметрия граничных условий.

Строгое доказательство того, что теория является одновременно перенормируемой и унитарной, не вполне очевидно и, в конечном итоге, было удостоено Нобелевской премии, но увидеть это можно, если использовать некую промежуточную калибровку, называемую  $R_\xi$ -калибровкой. Член фиксирующий калибровку в этом случае выбирается в виде

$$-\frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A_\mu^a - \xi g F_i^a \chi_i)^2, \quad g F_i^a = \frac{v}{2} \begin{pmatrix} g & 0 & 0 \\ 0 & g & 0 \\ 0 & 0 & g \\ 0 & 0 & g' \end{pmatrix},$$

где  $v$  есть вакуумное среднее хиггсовского поля, а  $\chi_i$  – голдстоуновские бозоны. В этой калибровке векторный пропагатор имеет вид

$$G_{\mu\nu}(k) = -i \frac{g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2 - \xi M^2}(1 - \xi)}{k^2 - M^2}$$

и при  $\xi = 0$  соответствует перенормируемой калибровке, а при  $\xi \rightarrow \infty$  - унитарной. Поскольку же наблюдаемые не зависят от  $\xi$ , мы можем в исследовании вопроса о перенормируемости выбирать  $\xi = 0$ , а при исследовании унитарности полагать  $\xi = \infty$ . Поскольку здесь нас интересует в первую очередь перенормируемость СМ, мы будем работать в перенормируемой калибровке.

Лагранжиан Стандартной Модели состоит из трёх частей

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{gauge} + \mathcal{L}_{Yukawa} + \mathcal{L}_{Higgs}. \quad (5.9)$$

Калибровочная часть полностью фиксируется условием калибровочной инвариантности, оставляя свободными лишь значения калибровочных констант связи

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{gauge} = & -\frac{1}{4}G_{\mu\nu}^a G_{\mu\nu}^a - \frac{1}{4}W_{\mu\nu}^i W_{\mu\nu}^i - \frac{1}{4}B_{\mu\nu} B_{\mu\nu} \\ & + i\bar{L}_\alpha \gamma^\mu D_\mu L_\alpha + i\bar{Q}_\alpha \gamma^\mu D_\mu Q_\alpha + i\bar{E}_\alpha \gamma^\mu D_\mu E_\alpha \\ & + i\bar{U}_\alpha \gamma^\mu D_\mu U_\alpha + i\bar{D}_\alpha \gamma^\mu D_\mu D_\alpha + (D_\mu H)^\dagger (D_\mu H), \end{aligned} \quad (5.10)$$

где использованы следующие обозначения для ковариантных производных:

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu}^a &= \partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a + g_s f^{abc} G_\mu^b G_\nu^c, \\ W_{\mu\nu}^i &= \partial_\mu W_\nu^i - \partial_\nu W_\mu^i + g\epsilon^{ijk} W_\mu^j W_\nu^k, \\ B_{\mu\nu} &= \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu, \\ D_\mu L_\alpha &= (\partial_\mu - i\frac{g}{2}\tau^i W_\mu^i + i\frac{g'}{2}B_\mu)L_\alpha, \\ D_\mu E_\alpha &= (\partial_\mu + ig'B_\mu)E_\alpha, \\ D_\mu Q_\alpha &= (\partial_\mu - i\frac{g}{2}\tau^i W_\mu^i - i\frac{g'}{6}B_\mu - i\frac{g_s}{2}\lambda^a G_\mu^a)Q_\alpha, \\ D_\mu U_\alpha &= (\partial_\mu - i\frac{2}{3}g'B_\mu - i\frac{g_s}{2}\lambda^a G_\mu^a)U_\alpha, \\ D_\mu D_\alpha &= (\partial_\mu + i\frac{1}{3}g'B_\mu - i\frac{g_s}{2}\lambda^a G_\mu^a)D_\alpha. \end{aligned}$$

Юкавская часть лагранжиана, необходимая для генерации масс кварков и лептонов также выбирается в калибровочно инвариантном виде и содержит произвольные юкавские константы (мы игнорируем для простоты массы нейтрино)

$$\mathcal{L}_{Yukawa} = y_{\alpha\beta}^L \bar{L}_\alpha E_\beta H + y_{\alpha\beta}^D \bar{Q}_\alpha D_\beta H + y_{\alpha\beta}^U \bar{Q}_\alpha U_\beta \tilde{H} + h.c., \quad (5.11)$$

где  $\tilde{H} = i\tau_2 H^\dagger$ .

Наконец, хиггсовская часть лагранжиана содержит потенциал хиггсовского поля, который выбирается так, чтобы у хиггсовского поля возникло ненулевое вакуумное среднее и потенциал в целом был бы устойчив

$$\mathcal{L}_{Higgs} = -V = m^2 H^\dagger H - \frac{\lambda}{2} (H^\dagger H)^2. \quad (5.12)$$

Здесь имеются две произвольные константы:  $m^2$  и  $\lambda$ . Духовые поля и члены фиксирующие калибровку для всех трёх групп симметрии опущены.

Лагранжиан СМ содержит следующий набор свободных параметров:

- 3 калибровочные константы  $g_s, g, g'$ ;
- 3 юкавские матрицы  $y_{\alpha\beta}^L, y_{\alpha\beta}^D, y_{\alpha\beta}^U$ ;
- хиггсовскую константу связи  $\lambda$ ;
- хиггсовский параметр массы  $m^2$ ;

Все частицы приобретают массы в результате спонтанного нарушения  $SU_{left}(2)$  симметрии за счёт ненулевого вакуумного среднего поля Хиггса

$$\langle H \rangle = \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v = m/\sqrt{\lambda}. \quad (5.13)$$

В результате калибровочная группа СМ спонтанно нарушается до подгруппы

$$SU_c(3) \otimes SU_L(2) \otimes U_Y(1) \Rightarrow SU_c(3) \otimes U_{EM}(1).$$

Физические слабые промежуточные бозоны становятся линейными комбинациями исходных калибровочных полей

$$W_\mu^\pm = \frac{W_\mu^1 \mp iW_\mu^2}{\sqrt{2}}, \quad Z_\mu = -\sin\theta_W B_\mu + \cos\theta_W W_\mu^3 \quad (5.14)$$

и приобретают массы

$$m_W = \frac{1}{\sqrt{2}}gv, \quad m_Z = m_W/\cos\theta_W, \quad \tan\theta_W = g'/g, \quad (5.15)$$

в то время как фотон

$$\gamma_\mu = \cos\theta_W B_\mu + \sin\theta_W W_\mu^3 \quad (5.16)$$

остаётся безмассовым.

Поля материи получают массы пропорциональные соответствующим юкавским константам:

$$M_{\alpha\beta}^u = y_{\alpha\beta}^u v, \quad M_{\alpha\beta}^d = y_{\alpha\beta}^d v, \quad M_{\alpha\beta}^l = y_{\alpha\beta}^l v, \quad m_H = \sqrt{2\lambda}v. \quad (5.17)$$

Получившиеся массовые матрицы необходимо диагонализировать, чтобы получить массы кварков и лептонов.

Явные массовые члены для кварков, лептонов,  $W$  и  $Z$  бозонов в лагранжиане СМ запрещены  $SU_{left}(2)$ -симметрией. Они бы нарушили калибровочную инвариантность, а с ней и перенормируемость теории. Для сохранения калибровочной инвариантности и используется механизм спонтанного нарушения симметрии, который, как было объяснено выше, позволяет получить перенормируемую теорию с массивными частицами.

Правила Фейнмана в СМ включают в себя правила Фейнмана для КЭД и КХД с добавлением новых вершин, соответствующих группе  $SU(2)$  и юкавскому взаимодействию, а также вершины взаимодействия с голдстоуновскими бозонами, если работать в перенормируемой калибровке. Мы не будем здесь приводить их полностью, ввиду их громоздкости, хотя общий вид их вполне очевиден.

Рассмотрим однопетлевые расходящиеся диаграммы в СМ. Помимо уже обсуждавшихся выше диаграмм в КЭД и КХД к ним относятся диаграммы представленные на рис.22. При этом мы опустили диаграммы с голдстоуновскими бозонами. Вычисления

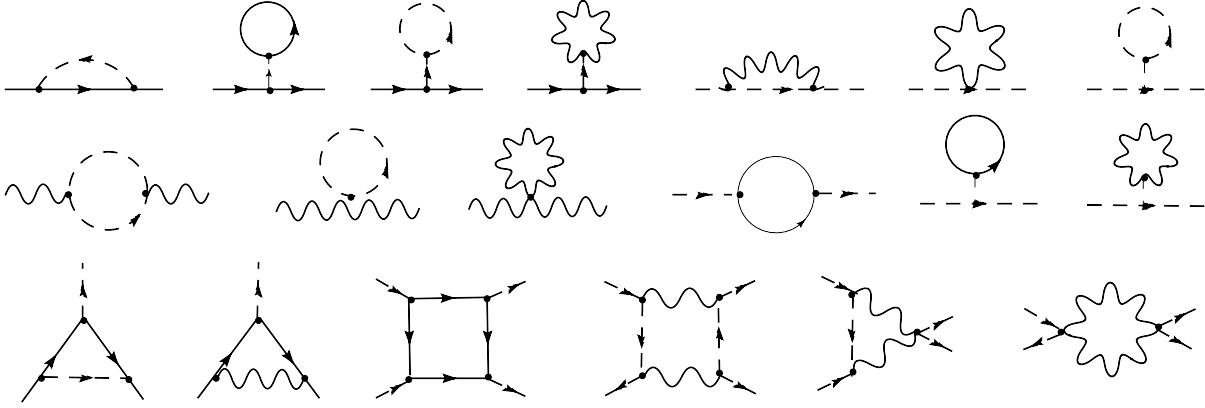


Рис. 22: Некоторые расходящиеся однопетлевые диаграммы в СМ. Пунктирная линия обозначает поле Хиггса, сплошная линия - поле кварка или лептона, волнистая линия - калибровочные поля

этих диаграмм подобны тем, что мы проделали выше, поэтому мы приведём лишь результаты для констант перенормировки полей и констант связи. Они имеют вид (для калибровочных полей использована калибровка фейнмана):

$$\begin{aligned}
Z_{2Q_L} &= 1 - \frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{16\pi^2} \left[ \frac{1}{36} g'^2 + \frac{3}{4} g^2 + \frac{4}{3} g_s^2 + \frac{1}{2} y_U^2 + \frac{1}{2} y_D^2 \right], \\
Z_{2u_R} &= 1 - \frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{16\pi^2} \left[ \frac{4}{9} g'^2 + \frac{4}{3} g_s^2 + y_U^2 \right], \\
Z_{2d_R} &= 1 - \frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{16\pi^2} \left[ \frac{1}{9} g'^2 + \frac{4}{3} g_s^2 + y_D^2 \right], \\
Z_{2L_L} &= 1 - \frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{16\pi^2} \left[ \frac{1}{4} g'^2 + \frac{3}{4} g^2 + \frac{1}{2} y_L^2 \right], \\
Z_{2e_R} &= 1 - \frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{16\pi^2} [g'^2 + y_L^2], \\
Z_{2H} &= 1 + \frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{16\pi^2} \left[ \frac{1}{2} g'^2 + \frac{3}{2} g^2 - 3y_U^2 - 3y_D^2 - y_L^2 \right], \\
Z_{3B} &= 1 - \frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{16\pi^2} \left[ \frac{20}{9} N_F + \frac{1}{6} N_H \right] g'^2 \quad \text{U}(1)_Y \\
Z_{3A} &= 1 + \frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{16\pi^2} \left[ 3 - \frac{32}{9} N_F \right] e^2 \\
Z_{3W} &= 1 + \frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{16\pi^2} \left[ \frac{10}{3} - \frac{1}{3} (N_F + 3N_F) - \frac{1}{6} N_H \right] g^2, \\
Z_{3G} &= 1 + \frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{16\pi^2} \left[ 5 - \frac{4}{3} N_F \right] g_s^2, \\
Z_{g_3^2} &= 1 + \frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{16\pi^2} \left[ -11 + \frac{4}{3} N_F \right] g_s^2, \\
Z_{g_2^2} &= 1 + \frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{16\pi^2} \left[ -\frac{22}{3} + \frac{4}{3} N_F + \frac{1}{6} N_H \right] g^2, \\
Z_{g'^2} &= 1 + \frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{16\pi^2} \left[ \frac{20}{9} N_F + \frac{1}{6} N_H \right] g'^2, \\
Z_{y_U^2} &= 1 + \frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{16\pi^2} \left[ -\frac{17}{12} g'^2 - \frac{9}{4} g^2 - 8g_s^2 + \frac{9}{2} y_U^2 + \frac{3}{2} y_D^2 + y_L^2 \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Z_{y_D^2} &= 1 + \frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{16\pi^2} \left[ -\frac{5}{12}g'^2 - \frac{9}{4}g^2 - 8g_s^2 + \frac{3}{2}y_U^2 + \frac{9}{2}y_D^2 + y_L^2 \right], \\
Z_{y_L^2} &= 1 + \frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{16\pi^2} \left[ -\frac{15}{4}g'^2 - \frac{9}{4}g^2 + \frac{9}{4}y_L^2 + 3y_U^2 + 3y_D^2 \right], \\
Z_\lambda &= 1 + \frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{16\pi^2} \left[ -\frac{3}{2}g'^2 - \frac{9}{2}g^2 + 2(3y_U^2 + 3y_D^2 + y_L^2) + 6\lambda \right. \\
&\quad \left. - 2(3y_U^4 + 3y_D^4 + y_L^4)/\lambda + \left( \frac{3}{8}g'^4 + \frac{9}{8}g^4 + \frac{3}{4}g^2g'^2 \right)/\lambda \right],
\end{aligned}$$

где для простоты мы игнорировали смешивания между поколениями и считали юкавские матрицы диагональными.

Различие от рассмотренных выше случаев состоит в том, что константа перенормировки скалярной константы содержит члены типа  $g^4/\lambda$  и  $y^4/\lambda$ . Это произошло потому, что при записи контрчлена для четверной вершины мы вынесли  $\lambda$  за скобку. Сами эти контрчлены пропорциональны  $g^4$  и  $y^4$  и не равны нулю. Тем самым, квантовые поправки генерируют новое взаимодействие, даже если оно изначально отсутствует. Поскольку калибровочные и юкавские взаимодействия относятся к перенормируемому типу, число типов контрчленов конечно и единственное новое взаимодействие, которое генерируется таким образом, если оно изначально отсутствовало, это четверное скалярное взаимодействие. С учётом этого взаимодействия модель – перенормируема.

В силу того, что массы частиц равны произведению соответствующих калибровочных или юкавских констант связи на вакуумное среднее хиггсовского поля, в минимальной схеме вычитаний отношения масс перенормируются так же, как отношения констант связи. Для перенормировки же массы как таковой нужно знать как перенормируется вакуумное среднее, либо непосредственно найти массовый контрчлен из диаграмм Фейнмана. В этом случае необходимо учесть все диаграммы типа "головастик" показанные на рис.22, включая и диаграммы с голдстоуновскими бозонами.

Приведём для примера полученную таким образом константу перенормировки массы  $b$ -кварка в СМ

$$\begin{aligned}
Z_{m_b} &= 1 + \frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{16\pi^2} \left[ \sum_l \frac{y_l^4}{\lambda} + 3 \sum_q \frac{y_q^4}{\lambda} - \frac{3}{2}\lambda + \frac{3}{4}(y_b^2 - y_t^2) \right. \\
&\quad \left. - \frac{3}{16} \frac{(g^2 + g'^2)^2}{\lambda} - \frac{3}{8} \frac{g^4}{\lambda} - 3Q_b(Q_b - T_b^3)g'^2 - 4g_s^2 \right]. \tag{5.18}
\end{aligned}$$

Результат для  $t$ -кварка получается заменой  $b$  на  $t$ . Для лёгких кварков юкавские константы столь малы, что в формуле (5.18) можно положить их равными нулю.

Заметим, что здесь опять мы получаем в знаменателе константу самодействия хиггсовских бозонов  $\lambda$ , которая возникает из диаграмм типа "головастик". Но, в отличие от предыдущего случая, константа  $Z_{m_q}$  уже не умножается на  $\lambda$  и знаменатель не сокращается. Это не приводит к проблемам для теории возмущений, поскольку по порядку величины  $\lambda \sim g^2 \sim y^2$  и разложение по петлям остаётся справедливым.



## 6 Лекция VI: Ренормгруппа

Сформулированная выше процедура устранения ультрафиолетовых расходимостей позволяет получить конечные выражения для любой функции Грина в произвольной локальной квантовой теории поля. В перенормируемых теориях эта процедура сводится к мультипликативной перенормировке параметров теории (зарядов и масс) и умножению функции Грина на её собственную константу перенормировки. Это справедливо при любой регуляризации и схеме вычитания. Так, например, в регуляризации с обрезанием и в размерной регуляризации соотношение между "голой" и перенормированной функциями Грина выглядит следующим образом:

$$\Gamma(\{p^2\}, \mu^2, \{g_\mu\}) = Z_\Gamma(\Lambda^2/\mu^2, \{g_\mu\})\Gamma_{Bare}(\{p^2\}, \Lambda, \{g_{Bare}\}), \quad (6.1)$$

$$\Gamma(\{p^2\}, \mu^2, \{g_\mu\}) = Z_\Gamma(1/\varepsilon, \{g_\mu\})\Gamma_{Bare}(\{p^2\}, 1/\varepsilon, \{g_{Bare}\}), \quad (6.2)$$

где  $\{p^2\}$  представляет собой набор внешних импульсов, а  $\{g\}$  – набор масс и констант связи, а

$$g_{Bare} = Z_g((\Lambda^2/\mu^2, \{g_\mu\})g \quad \text{или} \quad g_{Bare} = Z_g((1/\varepsilon, \{g_\mu\})g.$$

Очевидно, что операция умножения на константу  $Z$  обладает групповым свойством. Действительно, после устранения расходимостей можно домножить заряды, массы и функции Грина на конечные константы и это будет эквивалентно выбору другой схемы перенормировки. Поскольку эти конечные константы можно изменять непрерывно, мы имеем дело с непрерывной группой Ли, которая получила название группы перенормировок или ренормгруппы. Преобразования умножения констант и функций Грина на константы ренормировки называют преобразованиями Дайсона.

### 6.1 Групповые уравнения и решения методом характеристик

Остановимся в дальнейшем на размерной регуляризации и перепишем соотношение (6.2) следующим образом

$$\Gamma_{Bare}(\{p^2\}, 1/\varepsilon, \{g_{Bare}\}) = Z_\Gamma^{-1}(1/\varepsilon, \{g_\mu\})\Gamma(\{p^2\}, \mu^2, \{g_\mu\}). \quad (6.3)$$

Очевидно, что левая часть уравнения не зависит от параметра размерной трансмутации  $\mu$ , следовательно, не должна зависеть и правая. Это позволяет написать функциональные уравнения, которым должна удовлетворять перенормированная функция Грина. Дифференцируя по непрерывному параметру  $\mu$  можно также получить и дифференциальные уравнения, которые имеют практическую ценность: решая эти уравнения, можно получить улучшенное, по сравнению с теорией возмущений, выражение для функции Грина, просуммировав бесконечный ряд диаграмм Фейнмана.

Рассмотрим произвольную функцию Грина  $\Gamma$ , удовлетворяющую уравнению (6.2) и нормированную условием

$$\Gamma(\{p^2\}, \mu^2, 0) = 1.$$

Продифференцируем ур.(6.2) по  $\mu^2$ , что даёт:

$$\mu^2 \frac{d}{d\mu^2} \Gamma = \left( \mu^2 \frac{\partial}{\partial \mu^2} + \mu^2 \frac{\partial g}{\partial \mu^2} \frac{\partial}{\partial g} \right) \Gamma = \mu^2 \frac{d \ln Z_\Gamma}{d\mu^2} Z_\Gamma \Gamma_{Bare},$$

или

$$\left( \mu^2 \frac{\partial}{\partial \mu^2} + \beta(g) \frac{\partial}{\partial g} + \gamma_\Gamma \right) \Gamma(\{p^2\}, \mu^2, g_\mu) = 0, \quad (6.4)$$

где мы ввели т.н. бета функцию  $\beta(g)$  и аномальную размерность функции Грина  $\gamma_\Gamma(g)$ , определяемые равенствами

$$\beta = \mu^2 \frac{dg}{d\mu^2} \Big|_{g_{bare}}, \quad (6.5)$$

$$\gamma_\Gamma = -\mu^2 \frac{d \ln Z_\Gamma}{d\mu^2} \Big|_{g_{bare}}. \quad (6.6)$$

Уравнение (6.4) называется *ренормгрупповым уравнением* в частных производных (в форме Овсянникова). В англоязычной литературе его также называют уравнением Каллана-Симанчика.

Решение ренормгруппового уравнения (6.4) может быть получено методом характеристик и имеет следующий вид

$$\Gamma \left( e^t \frac{\{p^2\}}{\mu^2}, g \right) = \Gamma \left( \frac{\{p^2\}}{\mu^2}, \bar{g}(t, g) \right) e^{\int_0^t \gamma_\Gamma(\bar{g}(t, g)) dt}, \quad (6.7)$$

где характеристическое уравнение (мы для определённости ограничиваемся одной константой связи) записывается как

$$\frac{d}{dt} \bar{g}(t, g) = \beta(\bar{g}), \quad \bar{g}(0, g) = g. \quad (6.8)$$

Величина  $\bar{g}(t, g)$  называется *эффективным зарядом*.

Мы рассмотрим полезные свойства решения (6.7) позднее, а сначала получим ещё несколько подобных уравнений. Поскольку вершинная функция Грина обычно сопровождается константой связи, рассмотрим произведение

$$g \Gamma \left( \frac{\{p^2\}}{\mu^2}, g \right). \quad (6.9)$$

Если функция Грина  $\Gamma$  есть  $n$ -точечная функция, то перенормировка стоящей при ней константы связи  $g$  даётся произведением констант перенормировки вершины и входящих полей

$$g_{Bare} = Z_\Gamma Z_2^{-n/2} g.$$

Тогда произведение (6.9) перенормируется как

$$g \Gamma = Z_2^{n/2} g_{Bare} \Gamma_{Bare}.$$

Следовательно для такого произведения мы имеем такое же уравнение ренормгруппы (6.2) и такое же решение (6.7), но с константой перенормировки  $Z_\Gamma = Z_2^{n/2}$  и аномальной

размерностью  $\gamma_\Gamma = -n/2\gamma_2$ . (Напомним, что аномальная размерность пропагатора  $\gamma_2$  определяется дифференцированием обратной константы перенормировки  $Z_2^{-1}$ .)

Продолжая эту процедуру и перемножая вершинную функцию и пропагаторы входящих в неё полей, можно построить так называемый *инвариантный заряд*

$$\xi = g\Gamma\left(\frac{\{p^2\}}{\mu^2}, g\right) \prod_i^n D^{1/2}\left(\frac{p_i^2}{\mu^2}, g\right), \quad (6.10)$$

который является РГ-инвариантным, т.е. не перенормируется и подчиняется уравнению ренормгруппы без аномальной размерности. Инвариантный заряд играет важную роль в формулировке ренормгруппы равно как и эффективный заряд. В некоторых случаях, например, в МОМ-схеме вычитаний, эти два заряда совпадают.

Практическая ценность решения уравнения РГ (6.7) состоит в том, что оно позволяет просуммировать бесконечную серию логарифмов, идущих от диаграмм Фейнмана в инфракрасном ( $t \rightarrow -\infty$ ) или ультрафиолетовом ( $t \rightarrow \infty$ ) режиме и, тем самым, улучшить разложения, получаемые по теории возмущений по константе связи. Это, в свою очередь, расширяет область применимости теории возмущений и позволяет исследовать инфракрасные и ультрафиолетовые асимптотики функций Грина.

Чтобы продемонстрировать возможности метода ренормгруппы рассмотрим инвариантный заряд в теории с одной константой связи и для простоты ограничимся безмассовым случаем. Тогда разложение по теории возмущений имеет вид

$$\xi\left(\frac{p^2}{\mu^2}, g\right) = g(1 + bg \ln \frac{p^2}{\mu^2} + \dots), \quad (6.11)$$

причём бета-функция в однопетлевом приближении равна

$$\beta(g) = bg^2. \quad (6.12)$$

Заметим, что коэффициент  $b$  перед логарифмом в (6.11) совпадает с  $\beta$ -функцией (6.12). Это не является простым совпадением. Альтернативно  $\beta$ -функция может быть определена через производную от инвариантного заряда по логарифму импульса

$$\beta(g) = p^2 \frac{d}{dp^2} \xi\left(\frac{p^2}{\mu^2}, g\right) \Big|_{p^2=\mu^2}. \quad (6.13)$$

Это определение удобно в МОМ-схеме, где масса рассматривается не как заряд, а как параметр, от которого зависят все константы перенормировки. К обсуждению этого вопроса мы вернёмся ниже при рассмотрении различных определений массы.

Согласно уравнению (6.7) (с нулевой аномальной размерностью) РГ-улучшенное выражение для инвариантного заряда, соответствующее пертурбативному выражению (6.11), имеет вид

$$\xi_{RG}\left(\frac{p^2}{\mu^2}, g\right) = \xi_{PT}(1, \bar{g}\left(\frac{p^2}{\mu^2}, g\right)) = \bar{g}\left(\frac{p^2}{\mu^2}, g\right), \quad (6.14)$$

где мы сначала подставили в (6.7)  $p^2 = \mu^2$ , а затем заменили  $t$  на  $t = \ln p^2/\mu^2$ . При этом эффективный заряд является решением характеристического уравнения

$$\frac{d}{dt} \bar{g}(t, g) = b\bar{g}^2, \quad \bar{g}(0, g) = g, \quad t \equiv \ln \frac{p^2}{\mu^2}. \quad (6.15)$$

Решение этого уравнения есть

$$\bar{g}(t, g) = \frac{g}{1 - bgt}. \quad (6.16)$$

При разложении в ряд по  $g$ , геометрическая прогрессия (6.16) воспроизводит выражение (6.11), однако она суммирует бесконечную последовательность членов вида  $g^n t^n$ , идущих из диаграмм высших порядков. Эта последовательность называется приближением главных логарифмов (LLA) в КТП. Чтобы получить поправки к LLA нужно рассмотреть следующие члены разложения  $\beta$ -функции в ряд по  $g$ . Тогда уравнение РГ позволяет просуммировать бесконечную последовательность членов вида  $g^n t^{n-1}$ , которая называется следующей за главными логарифмами (NLLA), etc. Эта процедура позволяет описывать ведущие логарифмические асимптотики функций Грина по переменной  $t \rightarrow \pm\infty$ .

Рассмотрим теперь функцию Грина с ненулевой аномальной размерностью. Пусть её пертурбативное разложение имеет вид

$$\Gamma\left(\frac{p^2}{\mu^2}, g\right) = 1 + cg \ln \frac{p^2}{\mu^2} + \dots \quad (6.17)$$

Тогда аномальная размерность в однопетлевом приближении есть

$$\gamma(g) = cg. \quad (6.18)$$

Опять коэффициент перед логарифмом совпадает с аномальной размерностью, что не случайно. Аналогично (6.13) аномальная размерность может быть определена как производная от функции Грина по логарифму импульса

$$\gamma(g) = p^2 \frac{d}{dp^2} \ln \Gamma\left(\frac{p^2}{\mu^2}, g\right) \Big|_{p^2=\mu^2}. \quad (6.19)$$

Подставляя теперь (6.18) в (6.7), получаем в экспоненте выражение

$$\int_0^t \gamma(\bar{g}(t, g)) dt = \int_g^{\bar{g}} \frac{\gamma(g)}{\beta(g)} dg = \int_g^{\bar{g}} \frac{cg}{bg^2} dg = \frac{c}{b} \ln \frac{\bar{g}}{g},$$

что даёт для функции Грина РГ-улучшенное выражение

$$\Gamma_{RG} = \left(\frac{\bar{g}}{g}\right)^{-c/b} = \left(\frac{1}{1 - bgt}\right)^{c/b} \approx 1 + ct + \dots \quad (6.20)$$

Мы опять воспроизводим результат теории возмущений, но решение (6.20) снова содержит всю бесконечную последовательность главных логарифмов. Для того, чтобы получить следующее приближение (NLLA) нужно учесть следующий член разложения для аномальной размерности (6.18) вместе со следующим членом разложения  $\beta$ -функции (6.12).

Все приведённые формулы непосредственно обобщаются на случай многих констант связи и масс.

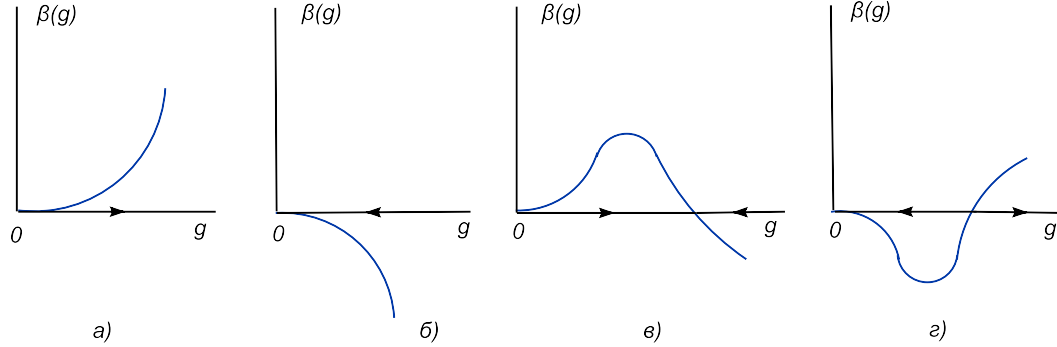


Рис. 23: Возможная форма  $\beta$ -функции. Стрелки показывают поведение эффективного заряда в ультрафиолетовом режиме ( $t \rightarrow \infty$ )

## 6.2 Эффективный заряд

В силу того, что эффективный заряд играет центральную роль в методе ренормгруппы, мы рассмотрим его подробнее. Поведение эффективного заряда определяется  $\beta$ -функцией. Качественно  $\beta$ -функция может иметь поведение показанное на рис.23. Мы ограничиваемся здесь областью малых значений константы связи.

В первом случае  $\beta$ -функция положительна, значит при увеличении импульса эффективный заряд неограниченно возрастает. Такая ситуация возникает в большинстве моделей КТП в однопетлевом приближении, когда  $\beta(g) = bg^2$  и  $b > 0$ . Решение уравнения РГ для эффективного заряда в этом случае имеет вид геометрической прогрессии (6.16). Оно характеризуется наличием полюса при высоких энергиях, называемого полюсом Ландау. Мы рассмотрим этот вопрос подробнее ниже.

Во втором случае  $\beta$ -функция отрицательна, значит при увеличении импульса эффективный заряд убывает. Такая ситуация также возникает в однопетлевом приближении, но когда  $b < 0$ , что имеет место в калибровочных теориях. Здесь также возникает полюс, но в инфракрасной области.

В третьем случае у  $\beta$ -функции имеется ноль: сначала она положительна, а потом - отрицательна. Значит при малых значениях начального значения заряда он возрастает, а при больших убывает. В обоих случаях при возрастании импульса заряд стремится к фиксированному значению, определяемому нулём  $\beta$ -функции. Это так называемая ультрафиолетово устойчивая *фиксированная точка*. Она возникает в некоторых моделях в высших порядках теории возмущений.

Наконец, в последнем случае также имеется фиксированная точка, но теперь при малом начальном значении заряда он убывает, а при большом - возрастает, т.е. с возрастанием импульса заряд стремится удалиться от фиксированной точки, она ультрафиолетово неустойчива. Зато при убывании импульса заряд стремится в фиксированную точку, поэтому она является инфракрасно устойчивой. Она возникает в некоторых моделях в низших измерениях, например, в статистической физике.

### 6.3 Размерная регуляризация и $\overline{MS}$ схема

Рассмотрим как вычисляются  $\beta$ -функция и аномальные размерности в различных квантовополевых моделях при использовании размерной регуляризации и минимальной схемы вычитаний. Заметим при этом, что при переходе от размерности 4 к  $4 - 2\varepsilon$  размерность константы связи меняется и "голый" заряд приобретает размерность  $[g_B] = 2\varepsilon$ . Поэтому соотношение между "голым" и перенормированным зарядами содержит фактор  $(\mu^2)^\varepsilon$

$$g_B = (\mu^2)^\varepsilon Z_g g. \quad (6.21)$$

Следовательно ещё до перенормировки, когда  $Z_g = 1$ , для компенсации этого фактора безразмерный заряд  $g$  должен зависеть от  $\mu$ . Дифференцируя (6.21) по  $\mu^2$  получим

$$0 = \varepsilon Z_g g + \frac{d \log Z_g}{d \log \mu^2} Z_g g + Z_g \frac{dg}{d \log \mu^2},$$

т.е.

$$\beta_{4-2\varepsilon}(g) \equiv \frac{dg}{d \log \mu^2} = -\varepsilon g + g \frac{d \log Z_g}{d \log \mu^2} = -\varepsilon g + \beta_4(g). \quad (6.22)$$

В  $\overline{MS}$ -схеме константы перенормировки определяются полюсными членами в разложении по  $1/\varepsilon$  в каждом порядке теории возмущений. Их можно представить в виде

$$Z_\Gamma = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n(g)}{\varepsilon^n} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=n}^{\infty} \frac{c_{nm} g^m}{\varepsilon^n}. \quad (6.23)$$

И аналогично

$$g_{Bare} = (\mu^2)^\varepsilon \left[ g + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n(g)}{\varepsilon^n} \right] = (\mu^2)^\varepsilon \left[ g + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=n}^{\infty} \frac{a_{nm} g^{m+1}}{\varepsilon^n} \right]. \quad (6.24)$$

Продифференцируем ур.(6.23) по  $\ln \mu^2$  и примем во внимание определения (6.5) и (6.22). Имеем

$$-[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n(g)}{\varepsilon^n}] \gamma_\Gamma(g) = [-\varepsilon g + \beta(g)] \frac{d}{dg} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n(g)}{\varepsilon^n}.$$

Приравнявая коэффициенты при степенях  $\varepsilon$ , получаем т.н. полюсные уравнения, связывающие коэффициенты при различных полюсах

$$\gamma_\Gamma(g) = g \frac{d}{dg} c_1(g), \quad (6.25)$$

$$g \frac{d}{dg} c_n(g) = [\gamma_\Gamma(g) + \beta(g) \frac{d}{dg}] c_{n-1}(g), \quad n \geq 2. \quad (6.26)$$

Как видно, коэффициенты при старших полюсах  $c_n$ ,  $n \geq 2$  полностью определяются коэффициентом при младшем полюсе  $c_1$  и  $\beta$ -функцией. В свою очередь,  $\beta$ -функция также находится из коэффициента при младшем полюсе в ур.(6.24). Чтобы увидеть это, продифференцируем ур.(6.24) по  $\ln \mu^2$ . Получим

$$\varepsilon \left[ g + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n(g)}{\varepsilon^n} \right] + [-\varepsilon g + \beta(g)] \left[ 1 + \frac{d}{dg} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n(g)}{\varepsilon^n} \right] = 0. \quad (6.27)$$

Приравнивая коэффициенты при степенях  $\varepsilon$ , находим

$$\beta(g) = \left(g \frac{d}{dg} - 1\right) a_1(g), \quad (6.28)$$

$$\left(g \frac{d}{dg} - 1\right) a_n(g) = \beta(g) \frac{d}{dg} a_{n-1}(g), \quad n \geq 2. \quad (6.29)$$

Таким образом, зная коэффициенты при младших полюсах, можно воспроизвести все старшие расходимости. Это значит, что они не являются независимыми, вся информация о расходимостях содержится в младшем полюсе. В частности, подставляя в (6.29) разложение (6.24) и решая получившиеся рекуррентные соотношения, получим для ведущего члена ряда

$$a_{nn} = a_{11}^n, \quad (6.30)$$

т.е. в ведущем порядке имеем геометрическую прогрессию

$$g_B = \mu^{2\varepsilon} \frac{g}{1 - ga_{11}/\varepsilon}, \quad (6.31)$$

что находит своё отражение в том, что в конечных частях для инвариантного заряда приближение главных логарифмов также имеет вид геометрической прогрессии (6.16).

Полученные полюсные уравнения легко обобщаются на случай нескольких констант связи, старшие полюса по-прежнему выражаются через младшие, хотя решения РГ уравнений в этом случае имеют более сложный вид.

Рассмотрим теперь несколько конкретных моделей и вычислим соответствующие  $\beta$ -функции и аномальные размерности.

#### Теория $\phi^4$

Константы перенормировки в  $\overline{MS}$ -схеме в двухпетлевом приближении даются формулами (4.10,4.14,4.18). Заметим, что коэффициент при старшем полюсе в ур.(4.18), а именно  $a_{22} = 9/4$ , является квадратом коэффициента при младшем полюсе  $a_{11} = 3/2$  в соответствии с ур.(6.30).

Воспользовавшись теперь ур.(6.25) и (6.28), получаем ( $g \equiv \lambda/16\pi^2$ )

$$\gamma_4(g) = \frac{3}{2}g - 3g^2, \quad (6.32)$$

$$\gamma_2(g) = \frac{1}{12}g^2, \quad (6.33)$$

$$\beta(g) = g(\gamma_4 + 2\gamma_2) = \frac{3}{2}g^2 - \frac{17}{6}g^2. \quad (6.34)$$

Как видно из ур.(6.34) первый коэффициент в  $\beta$ -функции равен  $3/2$ , т.е. в теория  $\phi^4$  относится к типу теорий показанных на рис.23а). В приближении главных логарифмов (LLA) в ней имеется полюс Ландау. В двухпетлевом приближении (NLLA) у  $\beta$ -функции появляется нетривиальный ноль и эффективный заряд приобретает ультрафиолетово стабильную точку, как показано на рис.23в). Однако, эта фиксированная точка опять пропадает в следующем приближении и не является надёжной. Здесь мы сталкиваемся с проблемой расходимости рядов теории возмущений в квантовой теории поля, которые являются так называемыми асимптотическими рядами, имеющими нулевой радиус сходимости.

### КЭД

В КЭД в однопетлевом приближении константы перенормировки в фейнмановской калибровке даются формулами (5.2). При этом в силу тождеств Уорда перенормировка заряда полностью определяется перенормировкой волновой функции фотона  $Z_3$  и является калибровочно-инвариантной. Ур.(5.2) позволяют определить аномальные размерности и  $\beta$ -функцию

$$\gamma_1(\alpha) = -\alpha, \quad (6.35)$$

$$\gamma_2(\alpha) = \alpha, \quad (6.36)$$

$$\gamma_3(\alpha) = \frac{4}{3}\alpha, \quad (6.37)$$

$$\gamma_m(\alpha) = -4\alpha, \quad (6.38)$$

$$\beta_\alpha(\alpha) = \frac{4}{3}\alpha^2, \quad (6.39)$$

где использовано обозначение  $\alpha \equiv e^2/16\pi^2$ .

Таким образом в КЭД в однопетлевом приближении эффективный заряд ведёт себя также, как и в теории  $\phi^4$  и имеет полюс Ландау в приближении главных логарифмов. В этой теории вычислен также и следующий член ряда в разложении  $\beta$ -функции. Он имеет тот же знак.

### КХД

В КХД вычисление  $\beta$ -функции может основываться на различных вершинах. Результат должен быть тем же самым в силу калибровочной инвариантности. Для упрощения вычислений мы выбрали ранее гост-гост-глюонную вершину. Константы перенормировки в однопетлевом приближении в фейнмановской калибровке имеют вид (5.8) и приводят к следующим аномальным размерностям и  $\beta$ -функции

$$\tilde{\gamma}_1(\alpha) = -\frac{C_2}{2}\alpha, \quad (6.40)$$

$$\tilde{\gamma}_2(\alpha) = -\frac{C_2}{2}\alpha, \quad (6.41)$$

$$\gamma_3(\alpha) = -\left(\frac{5}{3}C_2 - \frac{2}{3}n_f\right)\alpha, \quad (6.42)$$

$$\beta_\alpha(\alpha) = \alpha(2\tilde{\gamma}_1 + 2\tilde{\gamma}_2 + \gamma_3) = -\left(\frac{11}{3}C_A - \frac{2}{3}n_f\right)\alpha^2, \quad (6.43)$$

где как и в КЭД принято  $\alpha \equiv g^2/16\pi^2$ , оператор Казимира  $C_A$  в случае группы SU(3) равен 3, а  $n_f$  есть число кварковых ароматов.

Как можно видеть из (6.43) если число кварковых ароматов не превосходит  $\frac{11}{2}C_A = \frac{33}{2}$ , то  $\beta$ -функция отрицательна и эффективный заряд убывает и стремится к нулю с ростом импульса. Такое поведение эффективного заряда называют *асимптотической свободой*. Она имеет место только в калибровочных теориях.

## 6.4 Л

Решение характеристического уравнения для эффективного заряда, которое является дифференциальным уравнением первого порядка, зависит от начальных условий. Поэтому решение типа (6.16) зависит от выбора начальной точки и значения заряда в этой



точке. Однако, такой выбор не однозначен, можно выбрать другую начальную точку и другое значение заряда и получить то же самое решение, как это показано на рис.24.

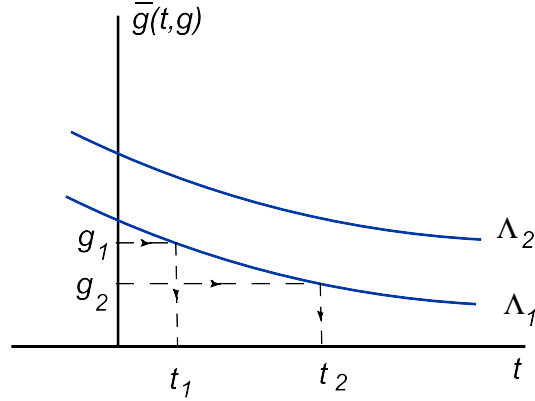


Рис. 24: Различные параметризации эффективного заряда. Каждая кривая характеризуется одним параметром  $\Lambda$

На самом деле каждая кривая характеризуется не двумя числами (начальной точкой и зарядом), а одним и переход от одной кривой к другой определяется выбором этого числа. Чтобы увидеть это, рассмотрим однопетлевое выражение для эффективного заряда и перепишем его в эквивалентной форме

$$\bar{g}\left(\frac{Q^2}{\mu^2}, g_\mu\right) = \frac{g_\mu}{1 - \beta_0 g_\mu \ln \frac{Q^2}{\mu^2}} = \frac{1}{\frac{1}{g_\mu} - \beta_0 \ln \frac{Q^2}{\mu^2}} \equiv -\frac{1}{\beta_0 \ln \frac{Q^2}{\Lambda^2}} = \bar{g}\left(\frac{Q^2}{\Lambda^2}\right), \quad (6.44)$$

где введено обозначение

$$\Lambda^2 = \mu^2 e^{-\frac{1}{\beta_0 g_\mu}}. \quad (6.45)$$

Эта величина в КХД называется  $\Lambda_{QCD}$ , но может быть введена в любой модели. Численное значение  $\Lambda$  определяется из эксперимента.

Уравнение (6.45) может быть обобщено на случай любого количества петель. Для этой цели перепишем уравнение РГ для эффективного заряда в т.н. форме Гелл-Манна–Лоу. Имеем

$$\ln \frac{Q^2}{\mu^2} = \int_{g_\mu}^{g_Q} \frac{dg}{\beta_g(g)}. \quad (6.46)$$

Комбинируя нижний предел интегрирования с  $\ln \mu^2$ , получаем

$$\ln \frac{Q^2}{\Lambda^2} = \int_{\Lambda^2}^{g_Q} \frac{dg}{\beta_g(g)}, \quad (6.47)$$

где

$$\Lambda^2 = \mu^2 \exp\left(\int_{g_\mu}^{g_Q} \frac{dg}{\beta_g(g)}\right), \quad (6.48)$$

что является обобщением ур.(6.45) на случай произвольного числа петель.

Введённая таким образом величина  $\Lambda$  не зависит от  $\mu$ , но зависит от схемы перенормировок, поскольку от неё зависит  $\beta$ -функция. Однако, к счастью, схемная зависимость

$\Lambda$  исчерпывается одной петлёй и потому пересчёт от одной схемы к другой может быть осуществлён точно (!). Действительно, поскольку  $\Lambda$  не зависит от  $\mu$ , выберем такое значение  $\mu$ , чтобы  $g_\mu \rightarrow 0$ . Тогда для  $\beta$ -функции можно воспользоваться пертурбативным разложением

$$\beta_g(g) = \beta_0 g^2 + \beta_1 g^3 + \dots$$

или

$$\int \frac{dg}{\beta_g(g)} = -\frac{1}{\beta_0 g} + \ln g + O(g).$$

В этом пределе отношение двух параметров  $\Lambda$  принадлежащих различным схемам вычитаний имеет вид

$$\ln \frac{\Lambda_1^2}{\Lambda_2^2} = -\frac{1}{\beta_0} \left[ \frac{1}{g_1} - \frac{1}{g_2} \right] + O(g) = -\frac{1}{\beta_0} [c_1 - c_2], \quad (6.49)$$

где коэффициенты  $c_1$  и  $c_2$  вычисляются в однопетлевом приближении. Они могут быть найдены из вычисления любой физической наблюдаемой в двух различных схемах

$$\begin{aligned} R &= g_1(1 + c_1 g_1 + \dots) \\ &= g_2(1 + c_2 g_2 + \dots). \end{aligned}$$

Поскольку  $\Lambda$  не зависит от  $g$ , можно выбрать любое сколь угодно малое значение  $g$  и ур.(6.49) будет всегда справедливо. Разность коэффициентов  $c_1 - c_2$  не зависит от выбора физической наблюдаемой  $R$  (хотя каждый из них зависит) и является универсальной.

Следует отметить, что обсуждаемые здесь величины типа инвариантного или эффективного заряда,  $\beta$ -функции и пр. не являются непосредственно наблюдаемыми. Поэтому их зависимость от схемы вычитаний не противоречит независимости предсказаний от способа расчёта. Мы производим разложение по константе связи, которая зависит от схемы вычитаний, но коэффициенты разложения также схемозависимы, в результате в пределах заданной точности, определяемой порядком теории возмущений, ответ является универсальным.

В минимальных схемах вычитаний, когда перенормировки зависят только от безразмерных констант связи, однопетлевые константы перенормировки, а следовательно и аномальные размерности и  $\beta$ -функция, одинаковы во всех схемах, различие начинается с двух петель. Исключение составляет  $\beta$ -функция в однозарядной теории, как КЭД, КХД или теория  $\phi^4$ , когда различие наступает в третьей петле. Действительно, если заданы две схемы вычитаний  $M_1$  и  $M_2$ , причём заряды связаны соотношением

$$g_2 = q(g_1) = g_1 + c g_1^2 + O(g_1^3),$$

то  $\beta$ -функции  $\beta_1(g_1)$  и  $\beta_2(g_2)$  выражаются одна через другую

$$\beta_2(g_2) = \frac{dq(g_1)}{dg_1} \beta_1(g_1)$$

и их пертурбативные разложения имеют вид

$$\begin{aligned} \beta_1(g_1) &= \beta_0 g_1^2 + \beta_1 g_1^3 + \beta_2 g_1^4 + \dots, \\ \beta_2(g_2) &= \beta_0 g_2^2 + \beta_1 g_2^3 + \beta'_2 g_2^4 + \dots \end{aligned}$$

причём первые два члена  $\beta$ -функции универсальны.

Что касается последующих членов ряда, то они зависят от схемы перенормировок и можно распорядиться этой зависимостью по своему усмотрению, например положить их все равными нулю. Тогда мы будем иметь точную  $\beta$ -функцию, но следует помнить, что она не является ценной сама по себе, а только в совокупности с разложением ТВ для функций Грина, для которых мы строим решение методом ренормгруппы. А это разложение в нашей "точной" схеме всё равно неизвестно.

## 6.5 Бегущие массы

В минимальной схеме вычитаний перенормировка массы осуществляется также как и перенормировка заряда, т.е. масса трактуется как дополнительный заряд и перенормируется мультипликативно, а именно

$$m_{Bare} = Z_m m,$$

где константа перенормировки массы  $Z_m$  не зависит от размерных параметров, а только от безразмерных констант связи. Поэтому в полной аналогии с эффективным зарядом вводится *эффективная* или "бегущая" масса, подчиняющаяся уравнению

$$\frac{d}{dt} \bar{m}(t, g) = \bar{m} \gamma_m(\bar{g}), \quad \bar{m}(0, g) = m_0. \quad (6.50)$$

Решая это уравнение совместно с уравнением для эффективного заряда (6.8), получаем

$$\bar{m}(t, g) = m_0 e^{\int_0^t \gamma_m(\bar{g}(t, g)) dt} = m_0 e^{\int_g^{\bar{g}} \frac{\gamma(g)}{\beta(g)} dg}. \quad (6.51)$$

В однопетлевом приближении

$$\beta(g) = bg^2, \quad \gamma_m(g) = cg$$

и явное решение имеет вид

$$m(t) = m_0 \left( \frac{g(t)}{g_0} \right)^{c/b} = \frac{m_0}{(1 - bgt)^{c/b}}.$$

Это есть бегущая масса!

Возникает естественный вопрос: что же тогда есть физическая масса частицы, измеряемая на эксперименте, и как она соотносится с бегущей массой и на какой шкале?

Для ответа на этот вопрос рассмотрим сначала причину, по которой масса "бежит". Это происходит из-за радиационных поправок, которые зависят от шкалы. Если взять значение импульса большее массы, т.е.  $p^2 > m^2$ , то происходит рождение виртуальных частиц, они распространяются внутри петель и дают вклад в "бег" массы. Напротив, если импульс меньше массы,  $p^2 < m^2$ , частицы не рождаются, они "отщепляются" и не дают вклада в радиационные поправки. В МОМ схеме это происходит автоматически, поскольку при импульсах много меньше массы соответствующая диаграмма просто вымирает. В минимальной же схеме этого не происходит, поэтому весьма естественно

остановить "бег" при значении импульса равным массе частицы  $p^2 = m^2$  и идентифицировать физическую массу с эффективной массой на шкале равной самой массе, т.е.

$$m^2 = \bar{m}^2(m^2).$$

Это определение, однако, оказывается правильным только с точностью до конечных поправок. Вернёмся к исходному определению массового члена в лагранжиане. Он выбирается так, чтобы пропагатор частицы, который есть обратный оператор к квадратичной по полям форме в лагранжиане, имел полюс при  $p^2 = m^2$ . Поэтому более адекватным является определение физической массы, как положение полюса пропагатора с учётом радиационных поправок, т.е.

физическая масса  $\equiv$  полюсная масса.

Такое определение массы не зависит от шкалы, является также схемно независимым и может иметь физический смысл. Полюсная масса может быть выражена через эффективную массу на произвольной шкале с конечными и вычислимыми поправками.

Рассмотрим в качестве примера массу кварка в КХД. Пропагатор кварка схематически изображён на рис.25.



Рис. 25: Кварковый пропагатор

Соответствующее выражение имеет вид

$$\begin{aligned} G(\hat{p}, m) &= \frac{i}{\hat{p} - m} + \frac{i}{\hat{p} - m} (iA\hat{p} + iBm) \frac{i}{\hat{p} - m} + \dots \\ &= \frac{i}{\hat{p} - m} \left[ 1 - \frac{A\hat{p} + Bm}{\hat{p} - m} + \dots \right] = \frac{i}{\hat{p} - m} \frac{1}{1 + \frac{A\hat{p} + Bm}{\hat{p} - m}} = \frac{i}{\hat{p} - m + A\hat{p} + Bm}. \end{aligned}$$

Полюсная масса определяется как корень уравнения

$$\hat{p}(1 + A(p^2)) - m(1 - B(p^2)) = 0, \quad (6.52)$$

что в низшем приближении даёт

$$m_{pole} = m \frac{1 - B(m^2)}{1 + A(m^2)} = m[1 - A(m^2) - B(m^2)].$$

Соответствующее выражение записывается как

Для вычисления функций  $A$  и  $B$  рассмотрим однопетлевую диаграмму, показанную на рис.26.

$$\Sigma = -\frac{g_s^2}{(2\pi)^4} C_F \int \frac{dk \gamma^\mu (\hat{p} - k + m) \gamma^\nu g^{\mu\nu}}{[(p - k)^2 - m^2] k^2} \quad (6.53)$$

и было вычислено нами ранее. Результат имеет вид (3.19)

$$A(p^2, m^2) = \frac{g_s^2}{16\pi^2} C_F \left[ \frac{1}{\varepsilon} - 1 - 2 \int_0^1 dx (1-x) \log \frac{p^2 x(1-x) - m^2}{-\mu^2} \right], \quad (6.54)$$

$$B(p^2, m^2) = \frac{g_s^2}{16\pi^2} C_F \left[ -\frac{4}{\varepsilon} + 2 + 4 \int_0^1 dx \log \frac{p^2 x(1-x) - m^2}{-\mu^2} \right]. \quad (6.55)$$

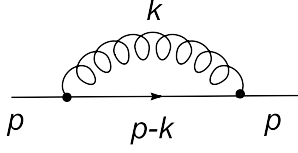


Рис. 26: Кварковый пропагатор в одной петле в КХД

После вычитания расходимостей в  $\overline{MS}$ -схеме получаем

$$A^{\overline{MS}}(p^2, m^2) = -\frac{g_s^2}{16\pi^2} C_F \left[ 1 + 2 \int_0^1 dx (1-x) \log \frac{p^2 x(1-x) - m^2}{-\mu^2} \right], \quad (6.56)$$

$$B^{\overline{MS}}(p^2, m^2) = \frac{g_s^2}{16\pi^2} C_F \left[ 2 + 4 \int_0^1 dx \log \frac{p^2 x(1-x) - m^2}{-\mu^2} \right]. \quad (6.57)$$

Отсюда, подставляя  $p^2 = m^2$ , находим

$$A^{\overline{MS}}(m^2, m^2) = 2 + \ln \frac{\mu^2}{m^2}, \quad B^{\overline{MS}}(m^2, m^2) = -6 - 4 \ln \frac{\mu^2}{m^2}. \quad (6.58)$$

Таким образом для радиационной поправки в полюсную массу имеем

$$m_{pole} = m(\mu) \left[ 1 + \frac{\alpha_s C_F}{4\pi} (4 + 3 \ln \frac{\mu^2}{m^2}) \right]. \quad (6.59)$$

Подставляя  $C_F = 4/3$  и  $\mu^2 = m^2$ , получаем искомое соотношение между полюсной массой и эффективной массой на шкале равной массе

$$m_{pole} = m(m) \left[ 1 + \frac{4}{3} \frac{\alpha_s}{\pi} \right]. \quad (6.60)$$

## 7 Лекция VII: Нуль заряда и асимптотическая свобода

Поскольку поведение эффективного заряда имеет столь существенные следствия, рассмотрим два характерных случая, которые реализуются в квантовой теории поля в однопетлевом приближении и возможно имеют место и в полной теории. Обычно принято говорить о поведении типа нуля заряда и асимптотической свободе. Поясним, что это означает.

### 7.1 Нуль заряда

Понятие нуля заряда возникло в КЭД при суммировании главных логарифмов. Это то, что возникает в методе ренормгруппы в однопетлевом приближении. Если записать выражение для перенормированного заряда через "голый" заряд, т.е. обернуть формулу (6.31), получим

$$g = \frac{g_B}{1 + \beta_0 g_B / \varepsilon} = \frac{g_B}{1 + \beta_0 g_B \log \Lambda^2}, \quad (7.1)$$

причём в этом случае первый коэффициент  $\beta$ -функции  $\beta_0 > 0$ . Тогда, при снятии регуляризации, т.е. при  $\varepsilon \rightarrow 0$  или  $\Lambda \rightarrow \infty$ , перенормированный заряд стремится к нулю независимо от значения "голового" заряда. Это и называется *нулём заряда*. Для эффективного заряда, рассмотренного нами ранее, нуль заряда отвечает поведению показанному слева на рис.27, которое характеризуется наличием полюса Ландау при высоких энергиях.

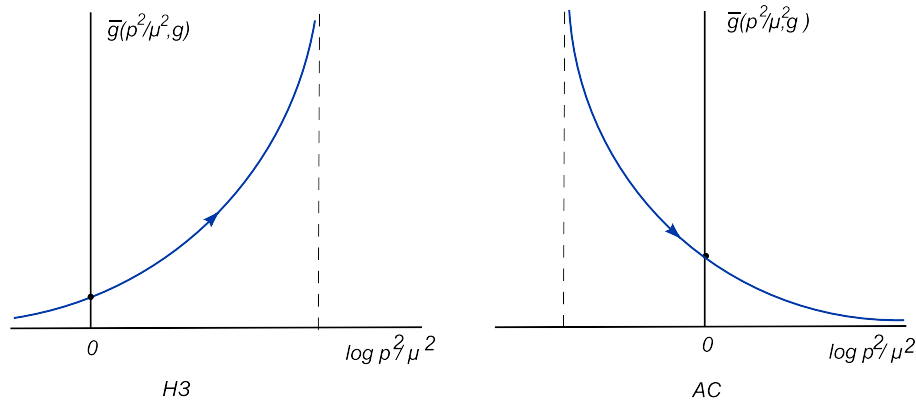


Рис. 27: Поведение эффективного заряда: нуль заряда (слева) и асимптотическая свобода (справа)

К нуль-зарядным теориям относится КЭД, теория  $\phi^4$  при положительном значении константы четверного взаимодействия, а также теория с взаимодействием типа юкавы, т.е. те теории, где  $\beta$ -функция положительна.

Очевидно, что в окрестности полюса теория возмущений не работает, поэтому однопетлевая формула в этой области неприменима. Однако при малых переданных импульсах однопетлевое приближение весьма приемлемо. Например, в КЭД эффективным параметром разложения является  $e^2/16\pi^2 = \alpha/4\pi \approx 1/137/4\pi \approx 5.8 \cdot 10^{-4}$  и поправки следующих петель (которые кстати сказать имеют тот же знак) существенной роли не играют. Поведение эффективного заряда в КЭД в области импульсов вплоть до 100 ГэВ получило экспериментальное подтверждение при измерении постоянной тонкой структуры на ускорителе ЛЭП. На масштабе равном массе Z-бозона  $M_Z$  постоянная тонкой структуры равна не  $1/137$ , а  $\alpha(M_Z) \approx 1/128$ , что находится в согласии с однопетлевой формулой.

Большие переданные импульсы в этом случае ограничены полюсом, если полюс не исчезает в полной теории. Как влияют высшие поправки теории возмущений на такое поведение остаётся неясным, ибо ряд теории возмущений является расходящимся и сделать однозначные выводы без привлечения дополнительной непертурбативной информации невозможно.

Наличие полюса Ландау свидетельствует о возникновении в теории нефизических духовых состояний. Чтобы увидеть это, рассмотрим фотонный пропагатор в КЭД, который в силу тождеств Уорда совпадает с инвариантным зарядом и в главном логарифмическом приближении имеет вид геометрической прогрессии

$$G(p^2) = -i \frac{g^{\mu\nu} - p^\mu p^\nu / p^2}{p^2} \frac{1}{1 - \frac{4}{3} \sum Q^2 \frac{\alpha_0}{4\pi} \log(-p^2/m^2)}, \quad (7.2)$$

где  $Q$  есть электрический заряд частицы (в единицах заряда электрона) распространяющейся по петле.

Это выражение имеет полюс в евклидовой области при  $p^2 = -m^2 e^{\frac{3\pi}{\alpha_0 Q^2 n_f}}$ . Подставляя  $m = m_e = 0.5$  МэВ,  $\alpha_0 \simeq 1/137$  и  $\sum Q^2 = [(4/9 + 1/9)3 + 1]3 = 8$ , получим  $p^2 \simeq -(5 \cdot 10^{31})^2$  ГэВ<sup>2</sup>. Т.е. полюс находится очень далеко, даже за планковской шкалой, и при низких энергиях на это можно не обращать внимание. Однако, наличие полюса означает присутствие нового асимптотического состояния, а вычет в полюсе определяет нормировку этого состояния. В случае полюса Ландау вычет отрицателен, т.е. получившееся состояние является духовым состоянием, оно имеет неправильный знак кинетического члена в лагранжиане. Это, в свою очередь, приводит к отрицательным вероятностям, что свидетельствует о внутренней противоречивости теории.

Обычно считается, что имеются два выхода из сложившейся ситуации: либо высшие поправки исправят поведение теории при больших импульсах, так что полюс Ландау исчезнет, либо нуль-зарядная теория сама по себе является противоречивой, но при высоких энергиях она вольётся в более общую теорию и поведение эффективного заряда исправится. Пример такого поведения дают теории Великого объединения, где КЭД вливается в неабелеву калибровочную теорию с асимптотически свободным взаимодействием. В обоих случаях поведение теории при высоких энергиях модифицируется. Зато, такая теория является инфракрасно свободной, т.е. при малых переданных импульсах эффективный заряд стремится к нулю.

## 7.2 Асимптотическая свобода

Термин *асимптотическая свобода* возник в КХД, когда было обнаружено, что в неабелевых калибровочных теориях знак первого коэффициента  $\beta$ -функции отрицателен.

Эффективный заряд при этом ведёт себя как показано на рис.27 справа и стремится к нулю при больших переданных импульсах. Это значит, что кварки при этом являются квази-свободными частицами, т.е. практически не взаимодействуют. Тем самым нашла своё объяснение т.н. партонная модель сильных взаимодействий при высоких энергиях, согласно которой протон проявляет себя как набор свободных составляющих (партонов) и при высоких энергиях взаимодействия осуществляется с каждым из партонов по отдельности, а их взаимодействие друг с другом роли не играет.

Проверка поведения эффективного заряда в КХД при высоких энергиях на различных ускорителях и в различных экспериментах подтвердила справедливость формул ренормгруппы, причём современная точность предполагает учёт следующих членов ряда теории возмущений. В КХД в схеме  $\overline{MS}$  вычислено 4 члена ряда. Ниже мы приводим выражение для двух-петлевой  $\beta$ -функции

$$\beta_\alpha(\alpha_s) = -\frac{1}{4\pi} \left[ 11 - \frac{2}{3} n_f \right] \alpha_s^2 - \frac{1}{(4\pi)^2} \left[ 102 - \frac{38}{3} n_f \right] \alpha_s^3 + O(\alpha_s^4). \quad (7.3)$$

Как видно, если число кварков невелико, оба коэффициента  $\beta$ -функции отрицательны. Все экспериментальные данные укладываются на единую кривую для эффективного заряда с параметром  $\Lambda_{QCD} \simeq 200$  МэВ (см. рис.28)

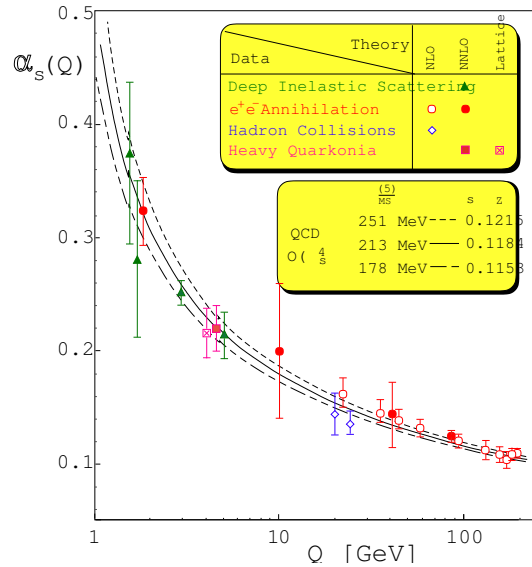


Рис. 28: Изменение эффективной константы сильных взаимодействий  $\alpha_s$  с энергией

В четырёхмерном пространстве асимптотическая свобода возникает только в неабелевых калибровочных теориях. Но в том случае, когда имеется несколько типов взаимодействий, как в Стандартной Модели, неабелев калибровочный заряд может "затянуть" в асимптотически свободную область и другие взаимодействия. Так, например, рассмотрим поведение юкавских констант связи в СМ. Для простоты возьмём лишь одну константу связи для топ-кварка и один калибровочный заряд. Тогда в однопетлевом приближении уравнения ренормгруппы для эффективных зарядов выглядят следующим образом:

$$\frac{dg}{dt} = -bg^2, \quad g \equiv \frac{g_s^2}{16\pi^2}, \quad (7.4)$$



$$\frac{dy}{dt} = y(ay - cg), \quad y \equiv \frac{y_t^2}{16\pi^2}, \quad t \equiv \log \frac{q^2}{q_0^2},$$

где коэффициенты  $b, a$  и  $c$  всегда положительны и для СМ равны 7, 9/2 и 8, соответственно. Решение этих уравнений имеет вид

$$g = \frac{g_0}{1 + bg_0 t}, \quad y = \frac{y_0 E}{1 - ay_0 F}, \quad (7.5)$$

$$E(t) = (g/g_0)^{c/b}, \quad F(t) = \int_0^t E(t') dt'.$$

В случае одной юкавской константы оно может быть записано и в явном виде

$$y = \frac{y_0 \left(\frac{g}{g_0}\right)^{c/b}}{1 + \frac{y_0}{g_0} \frac{a}{c-b} \left[\left(\frac{g}{g_0}\right)^{c/b-1} - 1\right]}. \quad (7.6)$$

Графически его можно представить на фазовой диаграмме изображённой на рис.29. При выборе начальных условий  $y_0 > (c-b)/a g_0$  юкавский заряд растёт с ростом им-

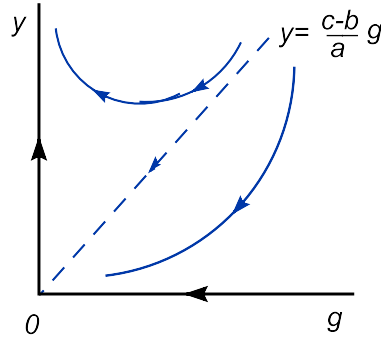


Рис. 29: Поведение юкавского и калибровочного зарядов при различных начальных условиях

пульса и обладает полюсом Ландау, а при  $y_0 \leq (c-b)/a g_0$  он демонстрирует асимптотически свободное поведение. Точно таким же образом в теориях Великого объединения можно добиться асимптотической свободы для всех зарядов.

Оборотной стороной асимптотической свободы при высоких энергиях является наличие полюса при малых импульсах или инфракрасного полюса. В этой области, также как и ранее, мы выходим за рамки применимости теории возмущений, ибо константа разложения растёт. Для определения истинного поведения заряда необходимо привлечения независимой непертурбативной информации. Однако, в случае КХД, область импульсов вблизи полюса  $p \sim \Lambda_{QCD}$  находится в области адронизации, т.е. там, где кварк-глюонное описание уже не является адекватным. Поэтому поведение заряда в этой области не описывается пертурбативной КХД.

### 7.3 Экранировка и антиэкранировка заряда

Эффект изменения заряда с переданным импульсом или с расстоянием, характерный для квантовой теории поля имеет свой аналог и в классической теории. Эта аналогия позволяет понять качественно причину изменения заряда.

Действительно, рассмотрим электромагнитные явления. Возьмём диэлектрическую среду и поместим в неё пробный заряд. Среда при этом поляризуется. Имеющиеся в ней электрические диполи выстроятся таким образом, чтобы экранировать заряд (см. рис.30). Это есть следствие закона Кулона: притяжение противоположных зарядов и отталкивание одноимённых. В этом состоит существо электрической экранировки заряда.

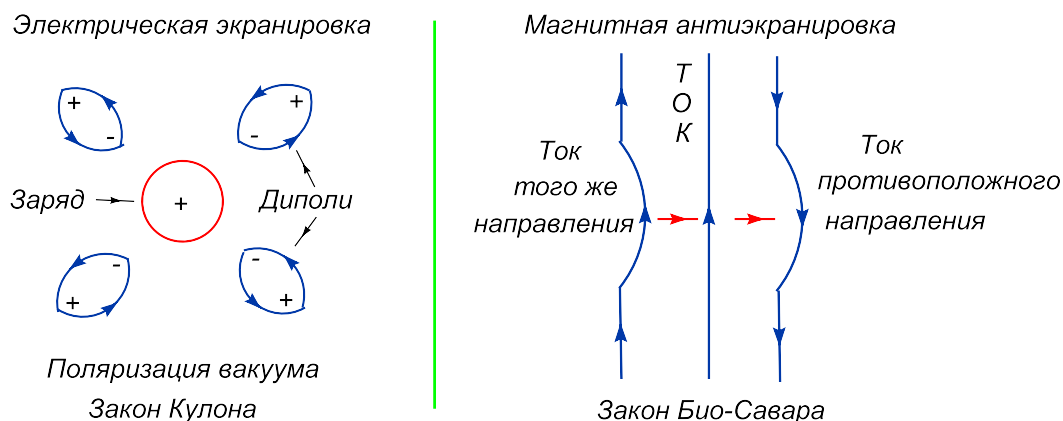


Рис. 30: Электрическая экранировка и магнитная антиэкранировка

Противоположная ситуация возникает в магнитной среде. Согласно закону Био-Савара электрические токи одного направления притягиваются друг к другу, в то время как противоположного – отталкиваются (см. рис. 30). Это приводит к явлению антиэкранировке электрических токов в магнитной среде.

В квантовой теории поля роль среды играет вакуум. Вакуум поляризуется в присутствии рождающихся пар виртуальных частиц. Частицы материи и поперечно поляризованные кванты калибровочных полей ведут себя при этом как электрические диполи в диэлектрике и вызывают экранировку заряда. В то же время, продольные кванты калибровочных полей ведут себя как токи и приводят к антиэкранировке. Эти два эффекта находятся в конкуренции (см. ур.(3.31) выше) и, например в КХД при малом числе кварков, эффект антиэкранировки превалирует.

Таким образом константы связи становятся функциями переданного импульса, которые и описываются уравнениями ренормгруппы.

## 8 Лекция VIII: Аномалии

Калибровочные теории приводят к ряду соотношений между различными операторами или их средними значениями, т.е. функциями Грина. Мы уже сталкивались с такими соотношениями носящими названия тождеств Уорда или тождеств Славнова-Тейлора. Они являются следствиями симметрии классической теории. В тех случаях, когда в теории имеются расходимости и используется та или иная регуляризация, соблюдение упомянутых тождеств зависит от инвариантности регуляризации, однако всегда можно так провести вычитание расходимостей, что конечные части будут удовлетворять этим тождествам.

Исключением из этого правила являются так называемые *аномалии*. Под аномалиями обычно понимается нарушение в квантовой теории какого-либо соотношения, например сохранения тока или тождества Уорда, вытекающего из свойств симметрии классической теории. Хорошо известными примерами квантовых аномалий является аномалия следа тензора энергии-импульса и аксиальная аномалия. Характерным признаком аномалии является невозможность устранения её переопределением каких-либо величин или параметров.

### 8.1 Аксиальная аномалия

Рассмотрим квантовую электродинамику. Определим векторный и аксиально-векторный токи

$$j_\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi, \quad j_\mu^5 = \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi. \quad (8.1)$$

В классической теории уравнения движения приводят к сохранению или частичному сохранению тока

$$\partial_\mu j_\mu = 0, \quad \partial_\mu j_\mu^5 = 2imj^5, \quad (8.2)$$

где  $j^5 = \bar{\psi}\gamma^5\psi$ .

С другой стороны, как следствие калибровочной инвариантности, векторная и аксиальная вершины удовлетворяют тождествам Уорда

$$(p - p')^\mu \Gamma_\mu(p, p') = S^{-1}(p) - S^{-1}(p'), \quad (8.3)$$

$$(p - p')^\mu \Gamma_\mu^5(p, p') = S^{-1}(p)\gamma^5 + \gamma^5 S^{-1}(p') + 2m\Gamma^5(p, p'), \quad (8.4)$$

где  $\Gamma_\mu$ ,  $\Gamma_\mu^5$  и  $\Gamma^5$  суть векторная, аксиальная и псевдоскалярная вершины, соответственно, а  $S$  – фермионный пропагатор.

Если посмотреть, как тождества (8.3,8.4) выполняются в теории возмущений, то прежде всего потребуется ввести какую-либо регуляризацию вследствие наличия ультрафиолетовых расходимостей. Если регуляризация калибровочно-инвариантна, то векторное тождество Уорда выполняется в каждом порядке ТВ. Для аксиального же тождества существуют два типа диаграмм, когда аксиальный ток стоит в выходящей линии или во внутренней фермионной петле (см. рис.31). Для первого типа диаграмм тождество (8.4) выполняется, а для второго – существует одна знаменитая треугольная



со знаменателем. В результате получим интеграл

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\text{Tr} [\hat{q}\gamma^5 \hat{k}\gamma^\nu (\hat{k} + \hat{p})\gamma^\lambda]}{k^2(k+p)^2},$$

который зависит только от  $p$  и после интегрирования в силу антисимметрии следа с матрицей  $\gamma^5$  обратится в ноль.

Во втором же слагаемом будем протаскивать  $\hat{k}$  налево, пока оно не умножится на  $\hat{k}$ , образуя  $k^2$ . В результате, на каждом шаге всегда будет возникать след от произведения четырёх  $\gamma$ -матриц с  $\gamma^5$ , для которого у нас есть формула с  $\epsilon$ -тензором. Получим в числителе

$$\begin{aligned} & -4i\epsilon^{\alpha\nu\beta\lambda}k^\alpha(k+p)^\beta[(k+q)^2 - q^2] + 8i\epsilon^{\alpha\nu\beta\rho}k^\alpha(k+p)^\beta q^\rho k^\lambda - 4i\epsilon^{\alpha\nu\lambda\rho}k^\alpha q^\rho [(k+p)^2 - p^2] \\ & -4i\epsilon^{\nu\alpha\lambda\rho}p^\alpha q^\rho k^2 + 8i\epsilon^{\alpha\beta\lambda\rho}k^\alpha p^\beta q^\rho k^\nu. \end{aligned}$$

Несмотря на то, что интеграл формально расходится, используя размерную регуляризацию и собирая все слагаемые вместе, мы в конечном счёте получим конечный ответ, равный

$$-\frac{e^2}{4\pi^2}\epsilon^{\mu\nu\rho\lambda}p^\mu q^\rho = -\frac{e^2}{4\pi^2}\epsilon^{\mu\nu\rho\lambda}p^\mu(q-p)^\rho, \quad (8.7)$$

К этому выражению нужно добавить такую же диаграмму, но с заменой  $p \leftrightarrow q - p, \nu \leftrightarrow \lambda$  и взять полусумму, но полученный ответ инвариантен относительно такой замены. Домножая (8.7) на  $A_\nu(p)A_\lambda((q-p))$  и переходя в координатное представление, получаем

$$\partial_\mu j_\mu^5 = \frac{e^2}{4\pi^2}\epsilon^{\mu\nu\rho\lambda}\partial_\mu A_\nu\partial_\rho A_\lambda = \frac{e^2}{16\pi^2}\epsilon^{\mu\nu\rho\lambda}F_{\mu\nu}F_{\rho\lambda}. \quad (8.8)$$

В результате возникает следующая модификация уравнений для дивергенции аксиального тока и аксиальной вершины

$$\partial_\mu j_\mu^5 = 2imj^5 + \frac{\alpha}{4\pi}F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}, \quad (8.9)$$

$$(p-p')^\mu\Gamma_\mu^5(p,p') = S^{-1}(p)\gamma^5 + \gamma^5 S^{-1}(p') + 2m\Gamma^5(p,p') - i\frac{\alpha}{4\pi}F(p,p'), \quad (8.10)$$

где  $F(p,p')$  – вершина со вставкой оператора  $F\tilde{F}$ . Появление правой части в уравнениях носит название *аномалии*, известной как аномалия Адлера-Белла-Джакива или треугольная аномалия.

Самым существенным здесь является даже не само нарушение тождества Уорда, а тот факт, что производя вычитание треугольной аномалии и добиваясь выполнения "нормального"тождества Уорда для аксиальной вершины, мы при этом нарушаем сохранение векторного тока. Иначе говоря, невозможно *одновременно* удовлетворить сохранению аксиального и векторного токов.

Заметим, что нарушение сохранения аксиального тока при сохранении векторного тока (8.9) можно получить, аккуратно вычисляя матричный элемент дивергенции аксиального тока в  $x$ -пространстве раздвижкой аргументов у полевых операторов. Рассмотрим для этого вакуумное среднее от дивергенции аксиального тока и, во избежании появления сингулярности при произведении двух полевых операторов в одной точке,

слегка раздвинем их аргументы. Тогда, для сохранения калибровочной инвариантности, нам придётся вставить между операторами экспоненту от вильсоновской линии. Аксиальный ток примет вид

$$j_\mu^5(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \{ \bar{\psi}(x + \varepsilon/2) \gamma^\mu \gamma^5 \exp[-ie \int_{x-\varepsilon/2}^{x+\varepsilon/2} dz^\nu A_\nu(z)] \psi(x - \varepsilon/2) \}, \quad (8.11)$$

и для дивергенции получим

$$\begin{aligned} \partial_\mu j_\mu^5(x) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \{ \partial_\mu \bar{\psi}(x + \varepsilon/2) \gamma^\mu \gamma^5 \exp[-ie \int_{x-\varepsilon/2}^{x+\varepsilon/2} dz^\nu A_\nu(z)] \psi(x - \varepsilon/2) \\ &+ \bar{\psi}(x + \varepsilon/2) \gamma^\mu \gamma^5 \exp[-ie \int_{x-\varepsilon/2}^{x+\varepsilon/2} dz^\nu A_\nu(z)] \partial_\mu \psi(x - \varepsilon/2) \\ &+ \bar{\psi}(x + \varepsilon/2) \gamma^\mu \gamma^5 [-ie \varepsilon^\nu \partial_\mu A_\nu(x)] \exp[-ie \int_{x-\varepsilon/2}^{x+\varepsilon/2} dz^\nu A_\nu(z)] \psi(x - \varepsilon/2) \}. \end{aligned} \quad (8.12)$$

Используя уравнения движения

$$\gamma^\mu \partial_\mu \psi = -ie \hat{A} \psi, \quad \partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu = ie \bar{\psi} \hat{A}$$

и сохраняя слагаемые порядка  $\varepsilon$ , находим

$$\begin{aligned} \partial_\mu j_\mu^5(x) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \{ \partial_\mu \bar{\psi}(x + \varepsilon/2) [-ie \hat{A}(x + \varepsilon/2) - ie \hat{A}(x - \varepsilon/2) \\ &\quad - ie \varepsilon^\nu \gamma^\mu \partial_\mu A_\nu(x)] \gamma^5 \psi(x - \varepsilon/2) \} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \{ \bar{\psi}(x + \varepsilon/2) [-ie \varepsilon^\nu \gamma^\mu (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)] \gamma^5 \psi(x - \varepsilon/2) \} \end{aligned} \quad (8.13)$$

Теперь нужно вычислить вакуумное среднее по фермионному вакууму (фотонное поле считается внешним), для чего нам понадобится переставить фермионные операторы. Перестановочная функция фермионных операторов сингулярна, что и служит причиной появления ненулевого слагаемого, аналогично тому, как расходимость интеграла по петле приводит к треугольной аномалии. Действительно, вычисляя пропагатор фермиона во внешнем фотонном поле и ограничиваясь первым порядком по фотонному полю, получим

$$S(y - z) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{ik(y-z)} \frac{i\hat{k}}{k^2} + \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{i(k+p)y} e^{-ikz} \frac{i(\hat{k} + \hat{p})}{(k+p)^2} (-ie \hat{A}(p)) \frac{i\hat{k}}{k^2} + \dots \quad (8.14)$$

Пропагатор (8.14) сингулярен при  $y \rightarrow z$ , однако первое слагаемое не даёт вклада в искомую дивергенцию, а второе приводит к выражению

$$\begin{aligned} \langle \bar{\psi}(x + \varepsilon/2) \gamma^\mu \gamma^5 \psi(x - \varepsilon/2) \rangle &= \\ &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{ipx} e^{-ik\varepsilon} \text{Tr} \left[ \frac{i(\hat{k} + \hat{p})}{(k+p)^2} (-ie \hat{A}(p)) \frac{i\hat{k}}{k^2} \gamma^\mu \gamma^5 \right] \\ &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{ipx} e^{-ik\varepsilon} \frac{4e \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} (k+p)_\nu A_\rho(p) k_\sigma}{(k+p)^2 k^2}. \end{aligned} \quad (8.15)$$

Для нахождения предела при  $\varepsilon \rightarrow 0$  можно разложить подынтегральное выражение при больших  $k$ , что даёт

$$\begin{aligned} \langle \bar{\psi}(x + \varepsilon/2) \gamma^\mu \gamma^5 \psi(x - \varepsilon/2) \rangle &= 4e\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{ipx} p_\nu A_\rho(p) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ik\varepsilon} \frac{k_\sigma}{k^4} \\ &= -4e\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} i\partial_\nu A_\rho(x) \frac{2\varepsilon_\sigma}{16\pi^2\varepsilon^2} = -e\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} iF_{\nu\rho}(x) \frac{\varepsilon_\sigma}{4\pi^2\varepsilon^2}, \end{aligned} \quad (8.16)$$

Подставляя это выражение в (8.13) находим

$$\partial_\mu j_\mu^5 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ -e\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} iF_{\nu\rho}(x) \frac{\varepsilon_\sigma}{4\pi^2\varepsilon^2} (-ie\varepsilon^\tau F_{\mu\tau}) \right\} = \frac{e^2}{16\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\nu\rho} F_{\sigma\mu}, \quad (8.17)$$

что совпадает с (8.9).

Аксиальная аномалия обладает одним чрезвычайно важным свойством: полученные формулы (8.9) и (8.10) являются *точными* во всех порядках теории возмущений, т.е. не имеют радиационных поправок. Более строго это утверждение звучит так: существует такая схема перенормировок (и она была построена явно), что радиационные поправки к аксиальной аномалии отсутствуют. Последнее утверждение составляет предмет теоремы Адлера-Бардина. Графически это означает сокращение вкладов диаграмм изображённых на рис.33, что было проверено прямым вычислением.

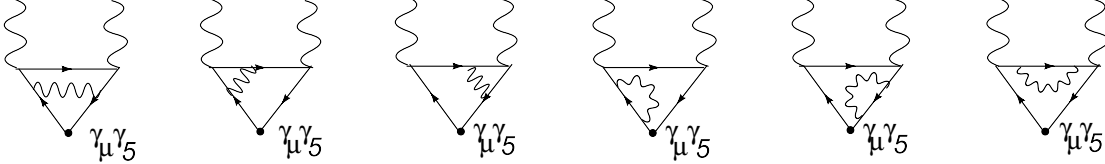


Рис. 33: Сокращение радиационных поправок к аксиальной аномалии

Теорема Адлера-Бардина справедлива и в неабелевых теориях. Она имеет важное следствие: если аномалия компенсируется в низшем порядке, то она не появится и в дальнейшем.

## 8.2 Следствия аксиальной аномалии

Зададимся вопросом: к каким следствиям приводит наличие аксиальной аномалии? Здесь нужно различать два случая: когда оператор аксиального тока является внешним оператором по отношению к лагранжиану теории или когда он присутствует в лагранжиане взаимодействия.

В первом случае наличие аномалии не ведёт к каким-либо неприятностям и даже может оказаться полезным. Так, например, в алгебре токов, описывающей низкоэнергетические взаимодействия адронов, аксиальная аномалия оказывается ответственной за распад нейтрального пиона  $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$  и находится в согласии с экспериментом.

Во втором же случае оказывается, что из-за треугольной аномалии обычные ультрафиолетовые перенормировки векторной вершины не устраняют всех расходимостей из аксиальной вершины. Это имеет губительные последствия для перенормируемости всей теории. Чтобы увидеть это, сравним, например, два процесса упругого рассеяния

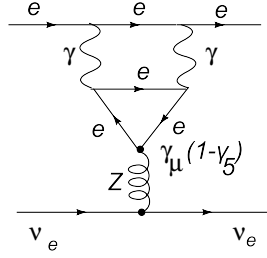


Рис. 34: Аномалия в процессе лептонного рассеяния в Стандартной Модели

лептонов:  $\nu_e + e \rightarrow \nu_e + e$  и  $\nu_\mu + e \rightarrow \nu_e + \mu$  в Стандартной Модели. Графически в низшем порядке они отличаются одной диаграммой, содержащей треугольную аномалию

В результате после перенормировки амплитуда  $\nu_\mu e$ -рассеяния имеет конечные радиационные поправки, а амплитуда  $\nu_e e$ -рассеяния – расходится. Это приводило к неперенормируемости теории и являлось серьёзной проблемой лево-право несимметричной модели с  $SU_L(2) \times U(1)$  симметрией до введения  $q$ -кварка. Замечательным образом  $q$ -кварк, введённый Глэшоу, Иллиопулосом и Майани для подавления нейтрального тока изменяющего странность, приводит к взаимной компенсации вкладов кварков и лептонов в треугольную аномалию, сохраняя перенормируемость теории.

В Стандартной Модели в силу её лево-правой несимметричности и наличия аксиальных токов у кварков и лептонов существуют несколько видов треугольных аномалий, причём в вершинах треугольника могут стоять все три калибровочных поля. Однако не все они приводят к аномалиям. В общем случае аномалия пропорциональна следу

$$Tr T^a \{T^b, T^c\},$$

где матрица  $T^a$  есть генератор соответствующей калибровочной группы в представлении, отвечающем тем полям, что распространяются по треугольнику. Непременным условием существования аномалии является наличие комплексных представлений и нетривиального антикоммутатора генераторов группы. Из простых групп Ли только группы  $SU(n)$ ,  $SO(4n + 2)$  и  $E_6$  имеют комплексные представления и из них только группа  $SU(n)$ ,  $n > 2$  и  $SO(6)$  имеют симметричный инвариант, необходимый для построения аномалии. Калибровочные теории, построенные на других группах, автоматически свободны от аномалий.

Неисчезающие аномалии, отвечающие группе симметрии СМ  $SU_c(3) \times SU_L(2) \times U_Y(1)$ , представлены на рис.35, где калибровочные поля, отвечающие группам  $U(1)$  и  $SU(2)$ , показаны ещё до смешивания. По треугольнику могут распространяться как левые, так и правые кварки и лептоны, при этом частицы различной спиральности дают вклад в аксиальную аномалию противоположного знака.

В первом случае аномалия пропорциональна следу куба оператора гиперзаряда  $Tr Y^3 = Tr Y_L^3 - Tr Y_R^3$  и её отсутствие достигается за счёт сокращения вкладов кварков и лептонов в каждом поколении

$$Tr Y^3 = 3 \left[ \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 - \left(\frac{4}{3}\right)^3 - \left(-\frac{2}{3}\right)^3 \right] + (-1)^3 + (-1)^3 - (-2)^3 = 0. \quad (8.18)$$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$   
 $u_L \quad d_L \quad u_R \quad d_R \quad \nu_L \quad e_L \quad e_R.$



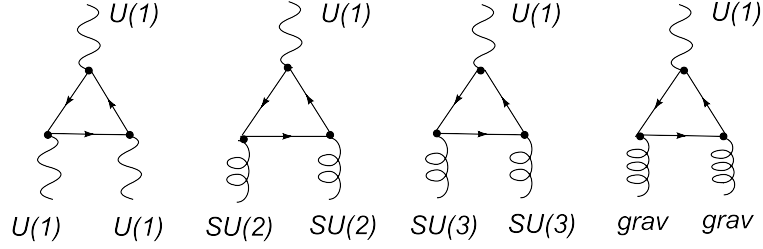


Рис. 35: Треугольные аномалии в Стандартной Модели

В последующих диаграммах аномалия пропорциональна соответственно

$$\begin{aligned}
 TrY_L &= 3 \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \right) - 1 - 1 = 0, \\
 TrY_q &= 3 \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{4}{3} - \left( -\frac{2}{3} \right) \right) = 0, \\
 TrY &= 3 \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{4}{3} - \left( -\frac{2}{3} \right) \right) - 1 - 1 - (-2) = 0.
 \end{aligned} \tag{8.19}$$

Тем самым аксиальная аномалия чудесным образом компенсируется во всех случаях и не нарушает перенормируемости СМ.

### 8.3 Конформная аномалия

Другим примером квантовой аномалии является конформная аномалия или аномалия следа тензора энергии-импульса. Требование конформной (масштабной) инвариантности состоит в инвариантности действия относительно преобразования

$$x_\mu \rightarrow x_\mu e^{-\sigma}, \quad \phi(xe^{-\sigma}) \rightarrow e^{\Delta\sigma} \phi(x), \tag{8.20}$$

где  $\Delta$  – размерность поля. Это условие выполняется в классическом лагранжиане, если в нём отсутствуют размерные параметры. В этом случае, согласно теореме Нётер, существует сохраняющийся ток, называемый током дилатации  $D^\mu = \Theta^{\mu\nu} x_\nu$ , так что

$$\partial_\mu D^\mu = \Theta^\mu_\mu,$$

где  $\Theta^\mu_\nu$  есть симметричный тензор энергии-импульса.

Проще всего это можно увидеть, определив тензор энергии-импульса как вариацию действия для полей материи по метрике пространства-времени во внешнем гравитационном поле

$$\Theta^{\mu\nu} = 2 \frac{\delta}{\delta g_{\mu\nu}} \int d^4x \mathcal{L}(x). \tag{8.21}$$

Масштабное преобразование можно представить как изменение метрики

$$g_{\mu\nu}(x) \rightarrow e^{2\sigma} g_{\mu\nu}(x). \tag{8.22}$$

Отсюда следует, что изменение лагранжиана под действием этого преобразования есть след от  $\Theta^{\mu\nu}$ . Отличие следа тензора энергии-импульса от нуля свидетельствует о нарушении масштабной (и, следовательно, конформной) инвариантности.

В квантовом случае из-за наличия ультрафиолетовых расходимостей возникает новый масштабный фактор. Это есть то самое явление размерной трансмутации, о котором мы говорили ранее. Поэтому масштабная инвариантность действия нарушается.

Поскольку константа связи становится зависящей от масштаба, её вариация при изменении масштаба (8.20) имеет вид

$$\delta g = \sigma \mu \frac{dg}{d\mu} = \sigma \beta(g). \quad (8.23)$$

Следовательно для вариации лагранжиана имеем

$$\delta \mathcal{L} = \sigma \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta g_i} \beta_i(\{g\}), \quad (8.24)$$

т.е.

$$\partial_\mu D^\mu = \Theta_\mu^\mu = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta g_i} \beta_i(\{g\}). \quad (8.25)$$

Это соотношение известно как *аномалия следа* тензора энергии-импульса.

Также, как и в случае аксиальной аномалии, соотношение (8.25) может быть проверено по теории возмущений. Однако в данном случае в ответ входит полная  $\beta$ -функция, определяемая во всех порядках ТВ.

## 9 Лекция IX: Инфракрасные расходимости

Ещё одной трудностью, которая подстерегает нас на пути получения конечных выражений для вероятностей физических процессов, является наличие так называемых *инфракрасных расходимостей*. Они возникают при вычислении матричных элементов матрицы рассеяния на массовой поверхности, т.е. когда соответствующие квадраты внешних импульсов равны квадратам масс, и в теории присутствуют безмассовые частицы, как, например, фотон или глюон. При этом инфракрасные расходимости бывают двух типов: расходимости при малых значениях импульса (собственно инфракрасные расходимости) и расходимости при параллельных импульсах (коллинеарные расходимости). В отличие от ультрафиолетовых расходимостей, инфракрасные расходимости имеют ясный физический смысл: безмассовая частица с очень малым импульсом не может быть зарегистрирована, а с импульсом параллельным импульсу другой частицы не может быть различима. По этой причине в теориях с безмассовыми частицами нужно правильно определить физический процесс, амплитуду которого мы собираемся вычислять.

### 9.1 Дважды логарифмическая асимптотика

Для иллюстрации рассмотрим процесс рождения мюонной пары в процессе  $e^+e^-$ -аннигиляции. Ведущие диаграммы этого процесса показаны на рис.36.

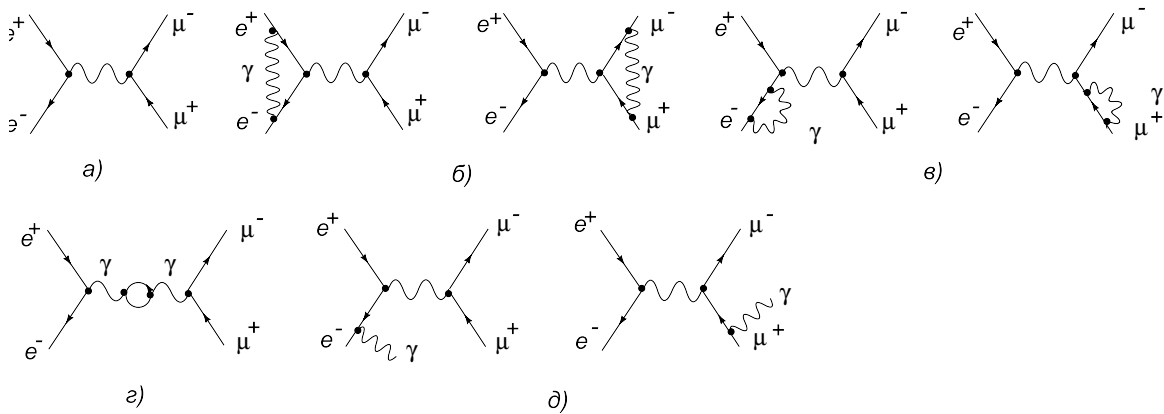


Рис. 36: Диаграммы, дающие вклад в реакцию  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$  в КЭД: а) лидирующий порядок, б),в),г) виртуальные поправки порядка  $\alpha$ , д) реальные поправки порядка  $\alpha$ .

Первая диаграмма представляет собой древесную амплитуду и представляет собой вклад низшего порядка теории возмущений. Радиационные поправки за счёт испускания виртуальных фотонов (рис.36 б)) являются поправкой к вершинной функции, рассмотренной нами ранее (см. (3.23)). Легко заметить, что если в этой формуле положить импульсы фермионов на массовую поверхность, т.е.  $p^2 = (p - q)^2 = m^2$ , то

во втором интеграле в знаменателе получим  $[-m^2x^2 + q^2y(x-y)]$ . Делая замену переменных  $y \rightarrow yx$ , так что все интегрирования производятся в пределах  $[0,1]$ , получим  $[-m^2x^2 + q^2x^2y(1-y)]$ , и интеграл (с учётом якобиана =  $x$ ) логарифмически расходится при  $x \rightarrow 0$ .

Возникающая расходимость является инфракрасной расходимостью, она так же как и ультрафиолетовая расходимость может быть регуляризована, например введением ненулевой массы фотона или обрезая интеграл по импульсам на нижнем пределе, или с помощью размерной регуляризации, но она не устраняется никакой перенормировкой.

Попробуем вычислить эту диаграмму на массовой поверхности, введя ненулевую массу фотона  $m_{ph}$  в виртуальную фотонную линию. Это не приведёт к нарушению калибровочной инвариантности, ибо, как мы увидим в дальнейшем, после сокращения ИК расходимостей массу фотона можно будет положить равной нулю.

Вернёмся к формуле (3.23), устраним УФ расходимость минимальным вычитанием, перейдём на массовую поверхность по фермионным полям и примем во внимание то, что внешние фермионные операторы удовлетворяют уравнению Дирака  $(\hat{p} - m)u(p) = 0$  и  $\bar{u}(p-q)(\hat{p} - \hat{q} - m) = 0$ . Тогда, после некоторого упражнения, для вершинной функции получим выражение

$$\Gamma_1^R(p, q) = ie \left[ F_1(q^2)\gamma^\mu + iF_2(q^2)\frac{\sigma^{\mu\nu}q^\nu}{2m} \right], \quad \sigma^{\mu\nu} \equiv i\frac{\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu}{2}, \quad (9.1)$$

где формфакторы  $F_i(q^2)$  имеют вид

$$F_1(q^2) = \frac{e^2}{16\pi^2} \left[ -2 - 2 \int_0^1 dx \int_0^1 dy x \log \left( \frac{-m^2x^2 + q^2x^2y(1-y)}{-\mu^2} \right) + \int_0^1 dx \int_0^1 dy x \frac{2m^2(2-2x-x^2) - 2q^2(1-xy)(1-x+xy)}{-m^2x^2 + q^2x^2y(1-y) - m_{ph}^2(1-x)} \right], \quad (9.2)$$

$$F_2(q^2) = \frac{e^2}{16\pi^2} \left[ \int_0^1 dx \int_0^1 dy x \frac{-4m^2x(1-x)}{-m^2x^2 + q^2x^2y(1-y) - m_{ph}^2(1-x)} \right]. \quad (9.3)$$

Формфактор  $F_2$  ИК сходится и не требует регуляризации. Полагая  $m_{ph} = 0$ , имеем

$$F_2(q^2) = \frac{\alpha}{4\pi} \int_0^1 dy \frac{2m^2}{m^2 - q^2y(1-y)}. \quad (9.4)$$

При  $q^2 = 0$  он легко вычисляется и равен

$$F_2(q^2 = 0) = \frac{\alpha}{2\pi}, \quad (9.5)$$

что является не чем иным, как первой поправкой к  $g$ -фактору или тем, что называется аномальным магнитным моментом электрона (мюона).

Формфактор же  $F_1$  ИК расходится. Вычислим его расходящуюся часть в пределе  $m_{ph} \rightarrow 0$ . В неё даёт вклад только второй интеграл в (9.2). Для упрощения интегрирования заметим, что расходимость определяется областью значений параметра  $x \sim 0$ . Поэтому положим в подынтегральном выражении всюду в числителе, а также в коэффициенте при  $m_{ph}$  в знаменателе,  $x = 0$ . Получим

$$F_1(q^2) \simeq \frac{e^2}{16\pi^2} \int_0^1 dy \int_0^1 x dx \frac{2(2m^2 - q^2)}{[-m^2 + q^2y(1-y)]x^2 - m_{ph}^2}. \quad (9.6)$$

Интеграл по  $x$  теперь легко вычисляется

$$F_1(q^2) \simeq \frac{\alpha}{4\pi} \int_0^1 dy \frac{2m^2 - q^2}{[-m^2 + q^2 y(1-y)]} \log \left( \frac{-m^2 + q^2 y(1-y) - m_{ph}^2}{-m_{ph}^2} \right). \quad (9.7)$$

Оставшийся интеграл по  $y$  также не представляет труда. Мы вычислим его в пределе  $-q^2 \rightarrow \infty$ . Тогда он приобретает вид

$$F_1(q^2) \simeq -\frac{\alpha}{4\pi} \int_0^1 dy \frac{q^2}{[-m^2 + q^2 y(1-y)]} \log \left( \frac{-q^2}{m_{ph}^2} \right) \simeq -\frac{\alpha}{2\pi} \log \left( \frac{-q^2}{m^2} \right) \log \left( \frac{-q^2}{m_{ph}^2} \right). \quad (9.8)$$

Полученное дважды логарифмическое поведение формфактора носит название *судаксовского* двойного логарифма. Он содержит инфракрасное обрезание в виде массы фотона. В амплитуде рождения мюонной пары имеются два таких формфактора, для электронной и мюонной вершины, соответственно. Поправки в фермионный и фотонный пропагаторы ИК расходимостей не содержат. Тем самым сечение реакции  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$  логарифмически расходится. Чтобы разобраться в причине появления ИК расходимости и найти рецепт её устранения, рассмотрим процесс рождения мюонной пары с точки зрения её наблюдения.

## 9.2 Излучение мягких фотонов

При аннигиляции электрон-позитронной пары рождается пара мюонов импульсы которых удовлетворяют закону сохранения и могут быть зарегистрированы. Однако они регистрируются с некоторой точностью и импульс меньше некоторого значения, зависящего от прибора, не фиксируется. Поэтому, если помимо мюонной пары рождается фотон с импульсом меньше этого значения, то такой процесс с испусканием дополнительного "мягкого"  $\gamma$ -кванта  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-\gamma$  экспериментально неотличим от исходного процесса  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ . Диаграммы соответствующие процессу  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-\gamma$  показаны на рис.36 д). Они содержат дополнительную вершину и, соответственно, дополнительную константу связи, однако при квадрировании дают поправку к основному процессу порядка  $\alpha$ , в точности как и радиационные поправки с испусканием виртуального фотона.

Сравним дифференциальные сечения процесса  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$  в однопетлевом приближении и  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-\gamma$  в древесном приближении. Имеем, соответственно,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-) = \left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_0 \left[ 1 - \frac{\alpha}{\pi} \log \left( \frac{-q^2}{m_{e,\mu}^2} \right) \log \left( \frac{-q^2}{m_{ph}^2} \right) + \dots + \mathcal{O}(\alpha^2) \right] \quad (9.9)$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-\gamma) = \left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_0 \left[ +\frac{\alpha}{\pi} \log \left( \frac{-q^2}{m_{e,\mu}^2} \right) \log \left( \frac{-q^2}{m_{ph}^2} \right) + \dots + \mathcal{O}(\alpha^2) \right] \quad (9.10)$$

где второе сечение мы приводим без вывода, который мы произведём ниже. Как следует из соотношений (9.9,9.10), каждое из этих сечений ИК расходится, но в сумме расходимости сокращаются и получается конечный ответ.

Что же в конечном счёте является наблюдаемым? На самом деле, ни первая, ни вторая реакции не являются наблюдаемыми по-отдельности. В реальном детекторе с ограниченной разрешающей способностью наблюдается процесс рождения мюонной пары плюс произвольное число мягких фотонов с энергией меньше порога регистрации.

В данном порядке теории возмущений мы должны сложить сечения двух процессов, чтобы получить наблюдаемое сечение

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right) = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-) + \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-\gamma, E < E_{min}). \quad (9.11)$$

Последнее сечение даётся той же формулой (9.10) с заменой во втором логарифме энергии фотона на  $E_{min}$ . Таким образом получаем

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right) = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_0 \left[ 1 - \frac{\alpha}{\pi} \log\left(\frac{-q^2}{m_{e,\mu}^2}\right) \log\left(\frac{-q^2}{E_{min}^2}\right) + \dots + \mathcal{O}(\alpha^2) \right]. \quad (9.12)$$

Как видно, при правильной постановке вопроса, сечение наблюдаемого процесса оказывается конечным и не зависящим от ИК регулятора. Зато оно зависит от разрешающей способности прибора  $E_{min}$  и при улучшении последней стремится к бесконечности. Однако и эта бесконечность является нефизической и представляет собой артефакт теории возмущений: когда логарифм становится большим, мы выходим за рамки применимости теории возмущений и необходимо произвести суммирование таких поправок аналогично тому, как это происходит с ультрафиолетовыми логарифмами суммируемыми с помощью ренормгруппы.

Итак, ИК расходимости возникают из-за вкладов фотонов с "мягкими" импульсами: реальных с энергией меньше  $E_{min}$  и виртуальных с  $k^2 < E_{min}^2$ . При этом важно, что импульсы фермионов лежат на массовой поверхности, иначе сингулярности в пропагаторе не возникает. Типичная диаграмма высшего порядка содержит большое число реальных и виртуальных фотонных линий (см. рис.37).

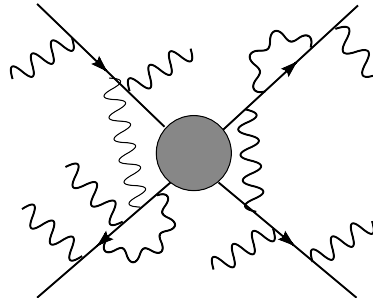


Рис. 37: Жёсткий процесс с рождением мягких фотонов

Попробуем просуммировать вклады таких мягких фотонов. Рассмотрим сначала внешнюю фермионную линию с вылетающими фотонами (реальными и виртуальными).

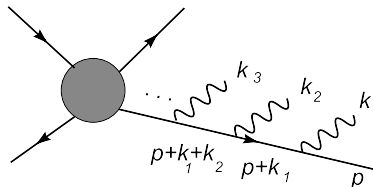


Рис. 38: Излучение мягких фотонов из фермионной линии

Ей соответствует следующее выражение

$$\begin{aligned} \bar{u}(p) (-ie\gamma^{\mu_1}) \frac{i(\hat{p} + \hat{k}_1 + m)}{2pk_1} (-ie\gamma^{\mu_2}) \frac{i(\hat{p} + \hat{k}_1 + \hat{k}_2 + m)}{2p(k_1 + k_2) + O(k^2)} \cdots \\ \cdots (-ie\gamma^{\mu_n}) \frac{i(\hat{p} + \hat{k}_1 + \cdots + \hat{k}_n + m)}{2p(k_1 + \cdots + k_n) + O(k^2)} iM. \end{aligned} \quad (9.13)$$

Воспользуемся теперь тем, что  $\bar{u}(p)$  удовлетворяет уравнению Дирака  $\bar{u}(p)(\hat{p} - m) = 0$  и опустим импульсы  $k_i \ll p$  в числителе. Тогда получим

$$\bar{u}(p)\gamma^{\mu_1}(\hat{p} + m)\gamma^{\mu_2}(\hat{p} + m)\cdots = \bar{u}(p)2p^{\mu_1}\gamma^{\mu_2}(\hat{p} + m)\cdots = \bar{u}(p)2p^{\mu_1}2p^{\mu_2}\cdots. \quad (9.14)$$

Тем самым (9.13) приобретает вид

$$\bar{u}(p) \left( e^{\frac{p^{\mu_1}}{pk_1}} \right) \left( e^{\frac{p^{\mu_2}}{p(k_1 + k_2)}} \right) \cdots \left( e^{\frac{p^{\mu_n}}{p(k_1 + \cdots + k_n)}} \right). \quad (9.15)$$

Следующий шаг – это суммирование по всем перестановкам фотонных линий или по всем перестановкам импульсов  $k_i$ . (Мы пока не различаем виртуальных и реальных фотонов и сделаем это позднее.) Эта операция нетривиальна, но приводит к простому результату. Имеем

$$\sum \frac{1}{pk_1} \frac{1}{p(k_1 + k_2)} \cdots \frac{1}{p(k_1 + k_2 + \cdots + k_n)} = \frac{1}{pk_1} \frac{1}{pk_2} \cdots \frac{1}{pk_n}. \quad (9.16)$$

Та же самая процедура может быть применена и к входящей фермионной линии. Разница лишь в том, что импульс фермиона направлен в обратную сторону, что приводит к замене  $(p + k_i)^2$  на  $(p - k_i)^2$  в пропагаторе, т.е. смене знака:  $p \rightarrow -p$  в знаменателе. Собирая оба фактора вместе имеем выражение для амплитуды испускания мягких фотонов из произвольных точек входящей и выходящей линии (рис.39).

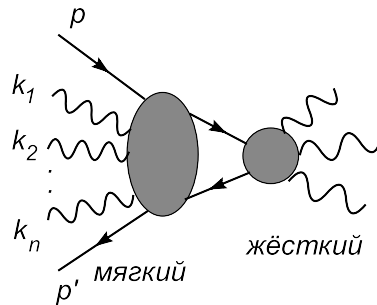


Рис. 39: Испускание мягких фотонов из произвольных точек входящей и выходящей линии

$$\mathcal{M} = \bar{u}(p') i\mathcal{M} u(p) e^{\left( \frac{p'^{\mu_1}}{p'k_1} - \frac{p^{\mu_1}}{pk_1} \right)} e^{\left( \frac{p'^{\mu_2}}{p'k_2} - \frac{p^{\mu_2}}{pk_2} \right)} \cdots e^{\left( \frac{p'^{\mu_n}}{p'k_n} - \frac{p^{\mu_n}}{pk_n} \right)}. \quad (9.17)$$

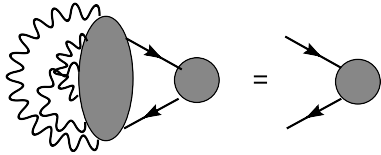
Теперь следует решить, какие фотоны реальные, а какие виртуальные. Виртуальный фотон можно получить, соединяя два фотонных импульса  $k_i$  и  $k_j$ , полагая  $k_i = -k_j =$

$k$ , умножая на пропагатор фотона и интегрируя по  $k$ . Таким образом для каждого виртуального фотона получим выражение

$$\frac{e^2}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{-i}{k^2} \left( \frac{p'}{p'k} - \frac{p}{pk} \right) \left( \frac{p'}{-p'k} - \frac{p}{-pk} \right), \quad (9.18)$$

где множитель  $1/2$  компенсирует двойной учёт при перестановке  $k_i$  и  $k_j$ . Получившийся интеграл при внимательном рассмотрении оказывается ни чем иным как вершинной функцией в однопетлевом приближении, т.е. формфактором  $F_1(q^2)$ .

Если число виртуальных фотонов равно  $n$ , то получаем  $n$  множителей типа (9.18) и кроме того фактор  $1/n!$ , возникающий за счёт того, что перестановка импульсов не меняет результата. Полный ответ получается суммированием по всем мягким виртуальным фотонам, что даёт



$$\times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_1^n}{n!} = \bar{u}(p') i\mathcal{M} u(p) \exp(F_1). \quad (9.19)$$

Если же испускается реальный фотон, то вместо пропагатора нужно умножить на вектор поляризации, просуммировать по всем поляризациям и проинтегрировать квадрат матричного элемента по фазовому объёму фотона. В этом случае возникает множитель

$$I(q^2) = e^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{-g^{\mu\nu}}{2|k|} \left( \frac{p'^\mu}{p'k} - \frac{p^\mu}{pk} \right) \left( \frac{p'^\nu}{p'k} - \frac{p^\nu}{pk} \right), \quad (9.20)$$

который представляет из себя элемент сечения процесса  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-\gamma$ . Интегрирование по модулю трёх-импульса  $\vec{k}$  здесь нужно производить в пределах  $(m_{ph}, E_{min})$ . Сворачивая индексы, получим

$$I(q^2) = -\frac{e^2}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{2|k|} \left( \frac{p'^2}{(p'k)^2} - 2\frac{p'p}{(pk)(p'k)} + \frac{p^2}{(pk)^2} \right). \quad (9.21)$$

Первый и последний интегралы равны друг другу. Рассмотрим последний и выберем систему отсчёта, где  $\vec{p} = 0$ . Тогда имеем

$$I_1 = -\frac{e^2}{(2\pi)^3} 4\pi \int_{m_{ph}}^{E_{min}} \frac{k^2 dk}{2k} \frac{m^2}{(mk)^2} = -\frac{\alpha}{2\pi} \log\left(\frac{E_{min}^2}{m_{ph}^2}\right). \quad (9.22)$$

Рассмотрим теперь второй интеграл и также выберем систему отсчёта  $\vec{p} = 0$ , а потом ковариантизуем ответ. Имеем

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{e^2}{(2\pi)^3} 2\pi \int_{m_{ph}}^{E_{min}} \frac{k^2 dk}{k} \int_{-1}^1 d\cos\theta \frac{m\sqrt{\vec{p}'^2 + m^2}}{(mk)(\sqrt{\vec{p}'^2 + m^2}k - |\vec{p}'|k\cos\theta)} \\ &= \frac{\alpha}{2\pi} \log\left(\frac{E_{min}^2}{m_{ph}^2}\right) \frac{\sqrt{\vec{p}'^2 + m^2}}{|\vec{p}'|} \log\left(\frac{\sqrt{\vec{p}'^2 + m^2} - |\vec{p}'|}{\sqrt{\vec{p}'^2 + m^2} + |\vec{p}'|}\right). \end{aligned} \quad (9.23)$$



Ковариантизуем теперь этот ответ, имея в виду, что  $q = p - p'$ ,  $p^2 = p'^2 = m^2$  и, следовательно,  $q^2 = 2m^2 - 2m\sqrt{p'^2 + m^2}$ . Получим

$$I_2(q^2) = \frac{\alpha}{2\pi} \log\left(\frac{E_{min}^2}{m_{ph}^2}\right) \frac{2m^2 - q^2}{\sqrt{-q^2(4m^2 - q^2)}} \log\left(\frac{2m^2 - q^2 - \sqrt{-q^2(4m^2 - q^2)}}{2m^2 - q^2 + \sqrt{-q^2(4m^2 - q^2)}}\right). \quad (9.24)$$

Тем самым

$$I(q^2) = \frac{\alpha}{2\pi} \log\left(\frac{E_{min}^2}{m_{ph}^2}\right) \left[ \frac{2m^2 - q^2}{\sqrt{-q^2(4m^2 - q^2)}} \log\left(\frac{2m^2 - q^2 - \sqrt{-q^2(4m^2 - q^2)}}{2m^2 - q^2 + \sqrt{-q^2(4m^2 - q^2)}}\right) - 2 \right]. \quad (9.25)$$

В пределе  $-q^2 \rightarrow \infty$  получаем ответ

$$I(q^2) \rightarrow \frac{\alpha}{\pi} \log\left(\frac{E_{min}^2}{m_{ph}^2}\right) \log\left(\frac{-q^2}{m^2}\right), \quad (9.26)$$

совпадающий с (9.10).

Если излучается  $n$  реальных фотонов, то получим  $n$  таких множителей и симметричный фактор  $1/n!$  в силу тождественности конечных частиц. Сечение реакции с излучением произвольного числа фотонов с энергией меньше чем  $E$ , тем самым, равно

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{d\sigma}{d\Omega} (e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^- + n\gamma) = \frac{d\sigma}{d\Omega} (e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-) \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{I^n}{n!} = \frac{d\sigma}{d\Omega} (e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-) e^I. \quad (9.27)$$

Объединяя результаты для реальных и виртуальных фотонов, получим окончательное выражение для измеряемого сечения процесса и испусканием произвольного числа фотонов с энергией меньше  $E_{min}$

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right) &= \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_0 \times \exp(2F_1) \times \exp(I) \\ &= \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_0 \exp\left[-\frac{\alpha}{\pi} \log\left(\frac{-q^2}{m_{e,\mu}^2}\right) \log\left(\frac{-q^2}{m_{ph}^2}\right)\right] \exp\left[\frac{\alpha}{\pi} \log\left(\frac{-q^2}{m_{e,\mu}^2}\right) \log\left(\frac{E_{min}^2}{m_{ph}^2}\right)\right] \\ &= \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_0 \exp\left[-\frac{\alpha}{\pi} \log\left(\frac{-q^2}{m_{e,\mu}^2}\right) \log\left(\frac{-q^2}{E_{min}^2}\right)\right]. \end{aligned} \quad (9.28)$$

Полученное выражение справедливо во всех порядках теории возмущений. Экспоненциальный множитель не зависит от ИК обрезания, но зависит от разрешающей способности прибора. Он носит название *формфактора Судакова*. При стремлении  $E_{min}$  к нулю, он убывает и в пределе обращается в ноль. В этом находит проявление то обстоятельство, что амплитуда рождения фермионной пары без сопровождающих её мягких фотонов действительно равна нулю: заряженная частица при рассеянии с необходимостью испускает низкочастотные электромагнитные волны. Это значит, что сечение чисто упругого рассеяния электронов без учёта испускания тормозных квантов должно обращаться в ноль, что как раз и следует из формулы (9.28).

Оценим величину судакковского формфактора для какого-нибудь реального процесса. Хорошим примером является сечение  $e^+e^-$ -аннигиляции в адроны, которое в ведущем порядке во постоянной тонкой структуры описывается одной диаграммой с обменом  $Z$ -бозоном в  $s$ -канале. Сечение имеет максимум в  $Z$ -бозонном пике, где описывается

Брейт-Вигнеровской резонансной формулой. Энергия при этом равна массе  $Z$ -бозона  $M_Z$ , а разрешающую способность прибора можно положить равной ширине  $Z$ -бозона  $\Gamma_Z$ . Подставляя значения  $M_Z = 91.187$  ГэВ,  $\Gamma_Z = 2.496$  ГэВ,  $m_e = 0.5$  МэВ,  $\alpha = 1/128$  в выражение для формфактора (9.28), получим

$$\exp \left[ -\frac{\alpha}{\pi} \log\left(\frac{M_Z^2}{m_e^2}\right) \log\left(\frac{M_Z^2}{\Gamma_Z^2}\right) \right] \approx 0.648.$$

Как видно, формфактор, несмотря на малость постоянной тонкой структуры, весьма заметно отличается от единицы и его необходимо учитывать при анализе экспериментальных данных.

### 9.3 Сокращение инфракрасных расходимостей

Рассмотренный нами пример является типичным для КЭД и мы можем сформулировать общее утверждение касательно инфракрасных расходимостей для элементов  $S$ -матрицы.

*Инфракрасные расходимости в радиационных поправках к сечению любого физического процесса в КЭД сокращаются в каждом порядке теории возмущений, если к сечению упругого процесса добавить неупругое сечение процесса с испусканием любого числа дополнительных фотонов, проинтегрированное по фазовому объёму с условием, что суммарная энергия фотонов не превышает некоторую величину  $E_{min}$ .*

Это утверждение справедливо также и для сечений процессов в неабелевых калибровочных теориях, таких как электрослабая теория, и для некоторых процессов в КХД, хотя в них, из-за самодействия неабелевых калибровочных полей, не происходит полной факторизации вкладов с собиранием в экспоненту и доказательство этого утверждения представляет некоторую проблему. Тем не менее, для ряда процессов результат имеет тот же вид. Так, например, электромагнитный формфактор в КХД имеет тот же судаковский вид (9.28), но с заменой  $\alpha \rightarrow C_F \alpha_s$ .

Тем самым можно сказать, что задача получения ультрафиолетово и инфракрасно конечных радиационных поправок к сечениям физических процессов решается в два этапа: во-первых, с помощью процедуры перенормировки устраняются ультрафиолетовые расходимости, что поддаётся полному контролю в перенормируемых теориях; во-вторых, определяя правильный физический процесс, включающий испускание мягких квантов, сокращаются инфракрасные расходимости.

Как мы увидим ниже, это оказывается недостаточным в неабелевых калибровочных теориях с безмассовыми калибровочными полями. Они содержат дополнительные расходимости, что требует внесения дополнения к описанной процедуре. Мы рассмотрим этот вопрос в последней лекции.

## 10 Лекция X: Коллинеарные расходимости

### 10.1 Коллинеарные расходимости в безмассовой теории

Полученный результат (9.28) для сечения рождения мюонной пары в процессе  $e^+e^-$ -аннигиляции с дополнительным испусканием мягких фотонов является характерным для теорий с массивными фермионами и безмассовым фотоном. Он может быть обобщён на неабелевы теории с безмассовым глюоном, хотя самодействие глюонов представляет некоторую проблему для доказательства сокращения ИК расходимостей. Заметим, однако, что формула (9.28) содержит логарифмическую сингулярность по массе фермионов и при обращении последней в нуль содержит новую расходимость. Это не представляло бы проблемы так как все фермионы являются массивными, но массы электрона и лёгких кварков столь малы по сравнению с характерными энергиями процесса рассеяния, что с хорошей точностью ими разумно пренебречь. Что касается КХД, то при рассмотрении процессов с глюонами в начальном состоянии, в силу самодействия глюонов, мы сталкиваемся с этой проблемой для глюонных амплитуд.

Проанализируем, в чём состоит причина появления новой расходимости после того, как расходимость при малых импульсах фотона регуляризована введением фотонной массы. Обратимся с этой целью к формуле (9.17) для вклада реальных либо виртуальных фотонов. Разница состоит в том, что в одном случае интегрирование идёт по четырёхмерному импульсу виртуального фотона, а в другом – по трёхмерному импульсу реального фотона, но существенным является то, что в случае безмассового электрона пропагатор в обоих случаях имеет вид

$$\frac{1}{2pk} = \frac{1}{2(p^0k^0 - \vec{p}\vec{k})} \simeq \frac{1}{2(|\vec{p}||\vec{k}| - |\vec{p}||\vec{k}| \cos \theta)} = \frac{1}{2|\vec{p}||\vec{k}|(1 - \cos \theta)}, \quad (10.1)$$

где угол  $\theta$  есть угол между импульсами электрона и фотона (в случае виртуального фотона мы воспользовались тем фактом, что вклад в сингулярность идёт из области импульсов фотона, близких к массовой поверхности).

Таким образом, возникающая в безмассовом случае новая расходимость проистекает из интегрирования по углам, а не по модулям, как в случае ИК расходимости, и связана с коллинеарностью импульсов двух частиц. По этой причине она носит название *коллинеарной расходимости*. Чтобы избавиться от этой расходимости можно, по аналогии с ИК расходимостью, ввести разрешающую способность прибора по углу. Это бы отвечало тому обстоятельству, что две безмассовые частицы имеющие почти параллельные импульсы не отличимы от одной частицы с тем же суммарным импульсом. Следовательно, наблюдаемое сечение должно включать помимо основного процесса процесс испускания мягких фотонов и процесс испускания коллинеарных фотонов с кинематически разрешёнными абсолютными значениями импульсов.

Однако, в реальной жизни, кварки и лептоны являются массивными, хотя некоторые из них имеют очень малые массы, поэтому, как уже указывалось, проблема коллинеарных расходимостей возникает для процессов с глюонами. Поскольку глюоны не являются свободными частицами, а содержатся внутри адронов, то всякий процесс с глюонами

соседствует с аналогичным процессом с кварками и имеет смысл рассматривать их сообща. По этой причине обычно говорят об *инклюзивных* процессах, когда помимо частиц основного процесса рассматривается рождение всех кинематически разрешённых частиц, в частности глюонов. При этом мы не накладываем на энергию глюонов никакого ограничения, не вводим разрешающей способности прибора по энергии или по углу, а суммируем по всем возможностям. Оказывается, однако, что этого недостаточно для получения конечного ответа. Необходимо ещё учесть возможность существования коллинеарных глюонов в начальном состоянии и только после этого получается конечный ответ для сечения наблюдаемого процесса.

Многопетлевой анализ в этом случае значительно сложнее и является предметом теоремы Киношиты-Ли-Науэнберга, которая гласит:

*Инфракрасные и коллинеарные расходимости в безмассовой теории сокращаются в сечении любого процесса, если учесть, что в начальном и конечном состоянии присутствует произвольное число мягких квантов, а также частицы, летящие параллельно друг другу с тем же суммарным импульсом. Вероятности этих процессов, проинтегрированные по фазовому объёму дополнительных мягких (коллинеарных) частиц в начальном и конечном состояниях, необходимо сложить с вероятностью исходного процесса.*

В качестве иллюстрации рассмотрим модельный пример рассеяния электрона на протоне (кварке) и положим все массы равными нулю. Нас будут интересовать радиационные поправки в первом порядке по константе сильного взаимодействия  $\alpha_s$ . Соответствующие диаграммы приведены на рис.40.

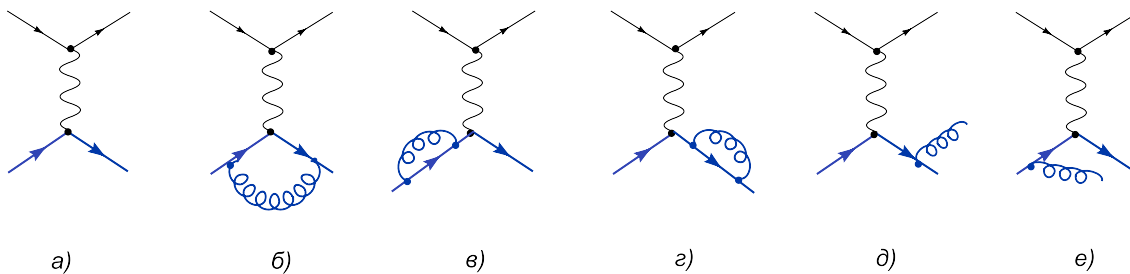


Рис. 40: Процесс рассеяния электрона на кварке в первом порядке по  $\alpha_s$ : а) - борновская диаграмма, б)-г) - поправки за счёт виртуальных глюонов, д)-е) - поправки за счёт реальных глюонов

Мы уже вычисляли матричные элементы соответствующие этим диаграммам, но теперь мы поступим несколько иным способом. Поскольку ультрафиолетовые расходимости, возникающие в диаграммах б)-г), взаимно сокращаются в силу тождества Уорда к КЭД ( $Z_1 = Z_2$ ), то все возникающие расходимости носят исключительно инфракрасный и коллинеарный характер. Для их выделения мы воспользуемся размерной регуляризацией. Тогда оба вида расходимостей проявятся в виде полюсов по  $\epsilon$ , причём из-за наличия обеих расходимостей возникнут полюса как первого, так и второго порядка.

Начнём с виртуальных поправок. Диаграммы собственной энергии в) и г) в безмассовом случае тождественно равны нулю, в силу отмеченного выше свойства безмассовых интегралов, зависящих от одного аргумента равного нулю ( $p^2 = 0$  на массовой поверх-

ности). Как уже объяснялось, здесь происходит сокращение УФ и ИК расходимостей. Поэтому все расходимости в вершинной диаграмме б) можно считать инфракрасными (УФ должны сокращаться с УФ расходимостями из диаграмм собственной энергии, а они в свою очередь сократились с ИК). Интеграл же для вершинной части определяется двумя формфакторами  $F_1(q^2)$  и  $F_2(q^2)$  (9.1). Взяв за исходное выражение для вершинной функции формулу (3.22), положим  $m = 0$  и перейдём на массовую поверхность. Получим

$$F_1(q^2) = -C_F \frac{\alpha_s}{4\pi} \left( \frac{\mu^2}{-q^2} \right)^\varepsilon \left( \frac{2}{\varepsilon^2} + \frac{3}{\varepsilon} + 8 \right), \quad (10.2)$$

$$F_2(q^2) = 0, \quad (10.3)$$

где вместо логарифма массы фотона в качестве ИК регулятора мы имеем полюс по  $\varepsilon$ . Во избежании появления трансцендентных чисел мы воспользовались удобным определением угловой меры в пространстве  $4 - 2\varepsilon$  измерений и домножили стандартное выражение на  $\Gamma(1 - \varepsilon)/(4\pi)^\varepsilon$ . Тогда константы типа  $\gamma_E$ ,  $\log(4\pi)$  и  $\zeta(2)$  исчезают из промежуточных ответов. В силу последующего сокращения расходимостей такое переопределение не влияет на окончательный ответ.

Тем самым, вклад в сечение диаграмм с виртуальным глюоном имеет вид

$$\left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{virt} = \left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_0 \left[ 1 - 2C_F \frac{\alpha_s}{4\pi} \left( \frac{\mu^2}{-t} \right)^\varepsilon \left( \frac{2}{\varepsilon^2} + \frac{3}{\varepsilon} + 8 \right) \right], \quad (10.4)$$

где дифференциальное сечение в борновском приближении даётся формулой

$$\left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_0 = \frac{\alpha^2}{2E^2} \left( \frac{s^2 + u^2 - \varepsilon t^2}{t^2} \right) \left( \frac{\mu^2}{s} \right)^\varepsilon. \quad (10.5)$$

В системе ц.м.  $s = E^2$ ,  $t = -E^2/2(1 - \cos\theta)$ ,  $u = -E^2/2(1 + \cos\theta)$ , где угол  $\theta$  есть угол на который рассеивается электрон.

Рассмотрим теперь диаграммы с испусканием реальных глюонов д) и е). Помимо квадрирования каждой из них нужно также учесть и интерференционный член. Вычисление по существу повторяет то, что мы проделали в КЭД, но вместо массы фотона мы опять воспользуемся размерной регуляризацией и не будем ограничивать область интегрирования по импульсу дополнительного глюона. Вычисление несколько громоздко, после свёртки всех индексов фазовый интеграл принимает вид

$$d\sigma_{2 \rightarrow 3} = \frac{1}{2\pi E^2} \int d^D p_3 \delta^+(p_3^2) \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \delta^+(k^2) \delta^+((p_4 - k)^2) |M|_{p_4=p_1+p_2-p_3}^2 \quad (10.6)$$

$$|M|^2 = \frac{e^4 g^2}{4} 8 \frac{M_0 + \epsilon M_1 + \epsilon^2 M_2}{t(s+t+u)},$$

$$M_0 = 4s - 8p_1 k - 4p_2 k + \frac{-8(p_1 k)^2 + 4(2s+t)p_1 k - (3s^2 + t^2 + u^2 + 2st)}{p_2 k},$$

$$M_1 = -4(s+u) + 8p_1 k + 8p_2 k + \frac{8(p_1 k)^2 - 4(s+t+u)p_1 k + 2(s+t+u)^2 - 2(u+s)t}{p_2 k}$$

$$M_2 = 4(s+t+u) - 4p_2 k - \frac{(s+t+u)^2}{p_2 k} = -\frac{(s+t+u+2p_2 k)^2}{p_2 k}.$$

Удобно перейти к сферическим координатам и перейти в систему ц.м. После интегрирования по фазовому объёму результат можно представить в форме

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{real} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_0 \left[ 2C_F \frac{\alpha_s}{4\pi} \left(\frac{\mu^2}{-t}\right)^\epsilon \left(\frac{2}{\epsilon^2} + \frac{3}{\epsilon} + 8\right) \right] + C_F \frac{\alpha^2 \alpha_s}{E^2 4\pi} \left(\frac{\mu^2}{s}\right)^\epsilon \left(\frac{\mu^2}{-t}\right)^\epsilon \left(\frac{f_1}{\epsilon} + f_2\right), \quad (10.7)$$

где функции  $f_1$  и  $f_2$  в системе ц.м. равны ( $x = \cos \theta$ )

$$f_1 = -2 \frac{(1-x)(x^3+5x^2-3x+5) \log\left(\frac{1-x}{2}\right) - (x-1)^2(x+1)(x-11)/4}{(1-x)^2(1+x)^2}, \quad (10.8)$$

$$f_2 = -\frac{1}{(1-x)^2(1+x)^2} \left[ (1-x)(x^3+5x^2-3x+5) \log^2\left(\frac{1-x}{2}\right) + \frac{1}{2}(1-x)(3x^3+15x^2+77x-31) \log\left(\frac{1-x}{2}\right) + (1+x)^2(x^2+5x+3)\pi^2 - 12(9x^2+2x+5) Li_2\left(\frac{1+x}{2}\right) + \frac{1}{2}(1-x)(1+x)(5x^2-42x-23) \right]. \quad (10.9)$$

Как видно из сравнения сечений для процесса с виртуальными глюонами (10.4) и с реальными глюонами (10.7), в сумме квадратичные полюса взаимно сокращаются, но полного сокращения расходимостей, как это было бы в массивном случае, не происходит. Оставшиеся расходимости в виде полюса первого порядка носят коллинеарный характер. Как уже указывалось, для их сокращения нужно правильно определить начальные состояния. Дело в том, что в случае безмассового кварка он может испустить почти коллинеарный глюон, который будет нести часть первоначального импульса и, в таком случае, невозможно отличить одну частицу, распространяющуюся со скоростью света, от двух летящих параллельно.

## 10.2 Кварковые распределения и функции расщепления

Для учёта такой возможности вернёмся к процессу рассеяния и предположим, что начальный кварк испустил параллельный глюон (см. рис.41). Две частицы могут быть почти коллинеарны, с малым относительным поперечным импульсом. Три 4-импульса

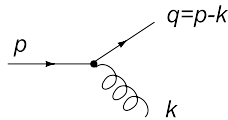


Рис. 41: Диаграмма соответствующая расщеплению кварка на кварк и глюон

можно выбрать в виде:

$$p = (p; 0, 0, p), \quad q \approx (zp; p_\perp, 0, zp), \quad k \approx ((1-z)p; -p_\perp, 0, (1-z)p),$$

так что все они удовлетворяют условию  $p^2 = q^2 = k^2 = 0$  с точностью до членов порядка  $p_\perp^2$ . Удобно, однако, воспользоваться несколько иным приёмом, а именно выбрать импульсы так, чтобы они удовлетворяли условию массовой поверхности с точностью до  $p_\perp^4$ , но зато пожертвовать условием сохранения энергии в порядке  $p_\perp^2$ . Преимущество

такого подхода состоит в том, что тогда можно использовать формулы для спиноров и векторов поляризации на массовой поверхности. Поэтому мы выберем импульсы в виде

$$p = (p; 0, 0, p), \quad q \approx (zp + \frac{p_{\perp}^2}{2zp}; p_{\perp}, 0, zp), \quad k \approx ((1-z)p + \frac{p_{\perp}^2}{2(1-z)p}; -p_{\perp}, 0, (1-z)p).$$

Квадрат матричного элемента, соответствующего процессу расщепления на массовой поверхности в этом случае может быть записан в стандартном виде

$$|M(q \rightarrow qG)|^2 = \frac{g^2}{2} {}_F Tr(\gamma^{\mu} \hat{p} \gamma^{\nu} \hat{q}) \sum_{pol} \epsilon^{*\mu} \epsilon^{\nu}, \quad (10.10)$$

где множитель  $1/2$  соответствует усреднению по спину. Здесь мы должны учитывать лишь физические поперечные поляризации глюона, т.е. положить

$$\sum_{pol} \epsilon^{*\mu} \epsilon^{\nu} \rightarrow \delta^{ij} - \frac{k^i k^j}{(\vec{k})^2},$$

что даёт

$$|M(q \rightarrow qG)|^2 = 4g^2 {}_F \left[ p^0 q^0 - \frac{(\vec{p}\vec{k})(\vec{q}\vec{k})}{(\vec{k})^2} \right], \quad (10.11)$$

или, подставляя значения импульсов,

$$|M(q \rightarrow qG)|^2 = C_F \frac{2g^2 p_{\perp}^2}{z(1-z)} \frac{1+z^2}{1-z}, \quad z < 1. \quad (10.12)$$

Найденное выражение не зависит от выбора импульсов и носит универсальный характер.

Теперь можно вычислить сечение интересующего нас процесса. Графически это будет та же диаграмма рис.40 е), но дополнительный глюон будет относиться не к конечному состоянию, а к начальному. Здесь мы воспользуемся стандартными правилами Фейнмана, когда закон сохранения энергии не нарушается, но виртуальная частица находится вне массовой поверхности. Поскольку в интересующем нас случае виртуальным является кварк с импульсом  $q$ , удобно выбрать импульсы в виде

$$p = (p; 0, 0, p), \quad q \approx (zp - \frac{p_{\perp}^2}{2(1-z)p}; p_{\perp}, 0, zp), \quad k \approx ((1-z)p + \frac{p_{\perp}^2}{2(1-z)p}; -p_{\perp}, 0, (1-z)p).$$

В этом случае

$$q^2 = -\frac{p_{\perp}^2}{1-z}. \quad (10.13)$$

Тогда сечение процесса можно записать в факторизованном виде

$$d\sigma(p) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 k}{2k^0} |M_{q \rightarrow qG}|^2 \left(\frac{1}{q^2}\right)^2 \left(\frac{p^0 z}{p^0}\right) d\sigma(pz), \quad (10.14)$$

где множитель  $(\frac{p^0 z}{p^0})$  обязан своим происхождением тому, что сечение нормируется на энергию начальных частиц, а мы заменили кварк с энергией  $p^0$  на кварк с энергией  $zp^0$ .

Воспользуемся тем, что в новых переменных дифференциал  $d^3k$  может быть переписан как

$$d^3k = pdzd^2p_\perp = pdz\pi dp_\perp^2,$$

и подставим значения матричного элемента (10.12) и  $q^2$  из (10.17). Имеем

$$\begin{aligned} d\sigma(p) &= C_F \frac{2}{16\pi^2} \int \frac{pdzdp_\perp^2}{(1-z)p} \frac{(1-z)^2}{p_\perp^4} \frac{2p_\perp^2}{z(1-z)} \frac{1+z^2}{1-z} z d\sigma(pz) \\ &= C_F \frac{\alpha_s}{2\pi} \int \frac{dzdp_\perp^2}{p_\perp^2} \frac{1+z^2}{1-z} d\sigma(pz). \end{aligned} \quad (10.15)$$

Интеграл по поперечному импульсу расходится в нуле и это есть проявление коллинеарной расходимости. Верхний предел не имеет большого значения, он ограничен кинематическими соображениями. Мы будем считать, что интегрирование по  $p_\perp^2$  идёт от нуля до некоторой шкалы  $Q^2$ . В дальнейшем мы увидим, как можно менять значение этой шкалы по аналогии с тем, как можно менять ультрафиолетовую шкалу  $\mu^2$ .

Для выделения возникшей расходимости воспользуемся размерной регуляризацией. Переходя от размерности поперечного интегрирования 2 к  $2 - 2\varepsilon$ , получим

$$\begin{aligned} d\sigma(p) &= C_F \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_0^1 dz \frac{1+z^2}{1-z} \int_0^{Q^2} \frac{(p_\perp^2)^{-\varepsilon} (-\mu^2)^\varepsilon dp_\perp^2}{p_\perp^2} d\sigma(pz) \\ &= C_F \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_0^1 dz \frac{1+z^2}{1-z} \frac{1}{\varepsilon} \left( -\frac{\mu^2}{Q^2} \right)^\varepsilon d\sigma(pz). \end{aligned} \quad (10.16)$$

В полученном выражении, на первый взгляд, остался полюс в подынтегральном выражении при  $z \rightarrow 1$ . Однако это только кажущаяся сингулярность. Она возникла из матричного элемента (10.12), который мы вычислили только при  $z < 1$  и он требует доопределения при  $z \rightarrow 1$ . Мы вернёмся к этому вопросу ниже, а сначала остановимся на интерпретации соотношения (10.16).

Введём понятие распределения начального кварка по доле переносимого им импульса  $z$ :  $q(z)$ . Тогда исходное распределение соответствует  $q(z) = \delta(1-z)$ , а испускание глюона приводит к тому, кварк несёт долю импульса равную  $z$ , а глюон -  $(1-z)$ , причём вероятность этого события даётся так называемыми *функциями расщепления*  $P_{qq}(z)$  и  $P_{qG}(1-z)$ . В низшем порядке теории возмущений по  $\alpha_s$  кварковое и глюонное распределения могут быть записаны в виде

$$q(z, Q^2) = \delta(1-z) + \frac{\alpha_s}{2\pi} \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{\mu^2}{Q^2} \right)^\varepsilon P_{qq}(z), \quad (10.17)$$

$$G(z, Q^2) = \frac{\alpha_s}{2\pi} \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{\mu^2}{Q^2} \right)^\varepsilon P_{qG}(1-z), \quad (10.18)$$

где функции расщепления определяются соответствующими матричными элементами, один из которых для  $P_{qq}(z)$  был нами вычислен в лидирующем порядке по  $\alpha_s$  выше (см. (10.12)). Результат имеет следующий вид

$$P_{qq}(z) = C_F \left( \frac{1+z^2}{(1-z)_+} + \frac{3}{2} \delta(1-z) \right), \quad (10.19)$$

$$P_{qG}(z) = \frac{z^2 + (1-z)^2}{2}. \quad (10.20)$$



Обратим внимание на то, что формула (10.19) содержит упомянутое выше доопределение функции  $P_{qq}(z)$  в точке  $z = 1$ , а именно: значок ” + ” следует понимать как следующее правило интегрирования

$$\int_0^1 dz \frac{f(z)}{(1-z)_+} \equiv \int_0^1 dz \frac{f(z) - f(1)}{(1-z)},$$

а коэффициент перед  $\delta$ -функцией определяется условием сохранения числа кварков

$$\int_0^1 q(x, Q^2) dz = 1 \Rightarrow \int_0^1 P_{qq}(z) dz = 0.$$

Таким образом, уравнение (10.16) вместе с борновской диаграммой может быть записано в виде

$$d\sigma(p) = \int_0^1 dz q(z, Q^2) d\sigma(pz), \quad (10.21)$$

где кварковое распределение  $q(z, Q^2)$  даётся ур.(10.19).

Кажется, на первый взгляд, странным, что в ответ входит масштаб  $Q^2$ , на котором определено кварковое распределение. Однако, он имеет физическую интерпретацию. Это есть мера коллинеарности испускаемых глюонов, которые мы не можем различить. Т.е. он относится к определению начального состояния. На самом деле, в безмассовом случае мы не можем определить начальное состояние содержащее лишь один кварк, он существует в совокупности с набором коллинеарных глюонов. (То же самое относится и к безмассовому электрону с коллинеарными фотонами). Этот масштаб иногда называют масштабом факторизации, на этом масштабе сечение рассеяния (10.21) приобретает факторизованный вид. Масштаб факторизации можно изменять. Зависимость кварковых и глюонных распределений от масштаба описывается так называемыми уравнениями DGLAP, хорошо известными в КХД.

### 10.3 Получение конечных ответов

Итак, помимо двух вкладов в сечение от реальных и виртуальных глюонов имеется ещё один вклад связанный с расщеплённым начальным состоянием (10.16). В низшем порядке теории возмущений по  $\alpha_s$  он может быть записан в виде

$$\left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{split} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_0^1 dz \left( \frac{\mu^2}{Q_f^2} \right)^\varepsilon P_{qq}(z) \frac{d\sigma_0}{d\Omega}(pz), \quad (10.22)$$

где борновское сечение даётся формулой (10.5) с заменой начального импульса кварка  $p$  на  $pz$ , а шкала факторизации  $Q_f^2$ , является произвольной величиной, относящейся к определению функции распределения. При этом шкала  $Q_f^2$  может зависеть от  $z$ . Весьма естественно выбрать шкалу факторизации равной характерному масштабу рассматриваемого процесса. Так, в нашем случае, этот выбор соответствует  $Q_f^2 = -\hat{t}$ , где  $\hat{t}$  есть мандельштамовский параметр  $t$  для процесса, в котором  $p$  заменён на  $pz$ . Имеем  $\hat{t} = t \frac{2z}{(z+1)+(z-1)x}$ . Это приводит к следующему результату

$$\left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{split} = C_F \frac{\alpha^2}{2E^2} \frac{\alpha_s}{2\pi} \left( \frac{\mu^2}{s} \right)^\varepsilon \left( \frac{\mu^2}{-t} \right)^\varepsilon \left( -\frac{f_1}{\varepsilon} + f_3 \right), \quad (10.23)$$

где  $f_1$  даётся формулой (10.8), а

$$\begin{aligned}
f_3 = & -\frac{1}{(1-x)^2(1+x)^2} \left[ 2(1-x)(x^3 + x^2 - 33x + 7) \log\left(\frac{1-x}{2}\right) \right. \\
& + 12(9x^2 + 2x + 5) Li_2\left(\frac{1+x}{2}\right) - (1+x)^2(x^2 + 5x + 3)\pi^2 \\
& \left. - \frac{1}{2}(1-x)(1+x)(11x^2 - 19) \right]. \tag{10.24}
\end{aligned}$$

Складывая полученное выражение с (10.4) и (10.7), мы видим, что последняя расходимость сокращается и окончательное конечное выражение для сечения электрон-кваркового рассеяния с учётом возможного рождения глюона в начальном или конечном состоянии имеет вид ( $x = \cos \theta$ )

$$\begin{aligned}
\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right) &= \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{virt} + \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{real} + \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{split} \tag{10.25} \\
&= \frac{\alpha^2}{2E^2} \left\{ \frac{x^2 + 2x + 5}{(1-x)^2} - \frac{\alpha_s}{2\pi} \frac{C_F}{(1-x)(1+x)^2} \left[ (x^3 + 5x^2 - 3x + 5) \log^2 \frac{1-x}{2} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{2}(7x^3 + 19x^2 - 55x - 3) \log \frac{1-x}{2} - (1+x)(3x^2 + 21x + 2) \right] \right\}.
\end{aligned}$$

Это выражение и является окончательным ответом для сечения физического процесса электрон-кваркового рассеяния, где начальное и конечное состояния включают в себя мягкие и коллинеарные глюоны. Оно включает в себя определение начального состояния, и может быть пересчитано при альтернативном выборе масштаба факторизации, аналогично тому, как это имеет место с ультрафиолетом масштабом, на котором определена константа взаимодействия. Тем самым, мы практически имеем дело не с рассеянием индивидуальных безмассовых частиц, а с рассеянием когерентных состояний с определённым значением импульса. Только такой процесс имеет физический смысл.

На рис.42 показано дифференциальное сечение этого процесса как функция угла рассеяния электрона:  $\frac{E^2}{\alpha^2} \frac{d\sigma}{d\Omega}$ . При этом мы выбрали величину сильной константы связи  $\alpha_s = 0.2$ , а  $C_F = 4/3$ . Как видно, учёт радиационной поправки  $\sim \alpha_s$  практически не меняет результат, отличие от борновского приближения составляет менее процента, что оправдывает использование теории возмущений.

Подчеркнём ещё раз, что полученный ответ для сечения наблюдаемого процесса зависит от: а) схемы вычитания ультрафиолетовых расходимостей, что находит своё проявление, в частности, в появлении ультрафиолетового масштаба  $\mu^2$  (сократился в нашем случае с низшем порядке теории возмущений) и б) определения начального когерентного состояния, проявляющегося в наличии масштаба факторизации  $Q_f^2$ . Единство описания физических процессов состоит в том, что выбирая УФ и ИК масштабы тем или иным образом и фитируя экспериментальные данные для какого-либо процесса, можно пересчитать полученные значения для бегущей константы связи и кваркового (лептонного) распределения для любого другого выбора масштаба. Тем самым, результат для наблюдаемых величин не зависит от конкретного выбора этих масштабов и является универсальным.

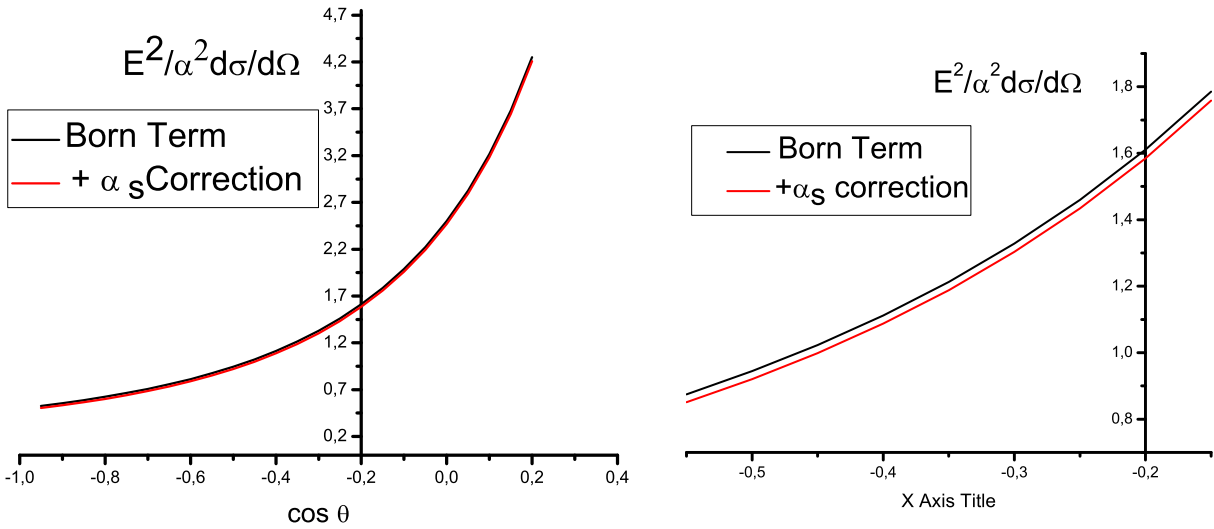


Рис. 42: Дифференциальное сечение  $eq$  рассеяния в борновском приближении и с учётом  $\alpha_s$  поправки. На правом рисунке показан фрагмент графика в большем масштабе

## 11 Послесловие

Локальная квантовая теория поля, как основа математического аппарата физики элементарных частиц, является логическим продолжением квантовой механики. Она основана на том же идейном базисе, но, описывая систему с бесконечным числом степеней свободы, допускает рождение и уничтожение частиц в результате взаимодействия. Современная формулировка основывается на представлении взаимодействия, которое исходит из существования асимптотических состояний свободных полей. В S-матричном подходе мы предполагаем, что эти поля взаимодействуют локальным образом в пространстве-времени и, вычисляя элементы S-матрицы, можно найти вероятности происходящих процессов. При этом наиболее разработанным и почти единственным надёжным методом таких расчётов является теория возмущений по константе взаимодействия, аналогично тому, как это имеет место в квантовой механике. Однако, в силу гораздо более сложной структуры квантовой теории поля, методы теории возмущений сталкиваются с трудностями, не имеющими аналогов в квантовой механике, а именно – с расходимостью интегралов для радиационных поправок. В настоящих лекциях мы продемонстрировали, как бороться с этими расходимостями, имеющими как ультрафиолетовую, так и инфракрасную природу, и как получать конечные ответы для вероятностей физических процессов. Мы не ставили себе целью воспроизвести доказательство ключевых теорем, таких как теорема Боголюбова-Парасюка или Киношity-Ли-Науэнберга, а продемонстрировали на конкретных примерах, как они работают. Явные вычисления позволяют воочию убедиться в справедливости конечных выводов.

Следует отметить, что уже в самом аппарате квантовой теории поля заложены фи-

зические принципы, которым, иногда сами того не сознавая, мы вынуждены следовать. Так, например, ультрафиолетовые расходимости ограничивают вид взаимодействия и, в отличие от квантовой механики, существуют лишь несколько допустимых видов лагранжианов. Недаром, перенормируемость сыграла столь важную роль в становлении Стандартной Модели. Другой пример – это понятие асимптотических состояний. Даже стартуя со свободных полей в рамках теории возмущений по константе взаимодействия, в результате требования сокращения инфракрасных расходимостей, мы приходим к определению физических начальных и конечных состояний, являющихся, по сути дела, когерентными состояниями.

Тот факт, что гравитационное взаимодействие не удаётся включить в общую схему, возможно означает, что локальная квантовая теория поля имеет ограниченную область применимости и её заменит более общая конструкция, может быть нелокальная, как в теории струн, может быть многомерная, как в теории бран. Однако, при всём при этом, в низкоэнергетическом пределе мы имеем локальную квантовую теорию поля, хотя, возможно, выходящую за пределы Стандартной Модели, которую мы здесь рассматривали.

## Благодарности

Автор признателен А.В.Беднякову, Л.В.Борку, Г.С.Вартанову, А.А.Владимирову, М.И.Высоцкому, А.Г.Грозину, А.В.Жибоедову, С.В.Михайлову и Н.Г.Стефанису за многочисленные полезные обсуждения. Работа выполнена при частичной поддержке гранта РФФИ № 08-02-00856 и гранта поддержки научных школ Министерства науки и образования РФ № НШ-1027.2008.2

## Литература

- [1] Н.Н.Боголюбов и Д.В.Ширков, Введение в теорию квантованных полей, 4-е изд. - Москва, Наука, 1984.
- [2] М.Пескин и Д.Шредер, Введение в квантовую теорию поля, Ижевск, 2001.
- [3] С.Вайнберг, Квантовая теория поля, Москва, Физматлит, 2003.
- [4] Н.Н.Боголюбов и Д.В.Ширков, Квантовые поля, 3-е изд. - Москва, Физматлит, 2005.
- [5] Т.-П.Ченг и Л.-Ф.Ли, Калибровочные теории в физике элементарных частиц, Москва, Мир, 1987.
- [6] А.И.Ахиезер и В.Б.Берестецкий, Квантовая электродинамика, 4-е изд. - Москва, Наука, 1981.
- [7] М.Б.Волошин и К.А.Тер-Мартirosян, Теория калибровочных взаимодействий элементарных частиц, Москва, Энергоатомиздат, 1984.
- [8] Дж.Д.Бьёркен и С.Д.Дрел, Релятивистская квантовая теория, Москва, Наука, 1978.
- [9] К.Ициксон и Ж.-Б.Зюбер, Квантовая теория поля, Москва, Мир, 1984.
- [10] П.Рамон, Теория поля. Современный вводный курс, Москва, Мир, 1984.
- [11] А.А.Славнов и Л.Д.Фаддеев, Введение в квантовую теорию калибровочных полей, 2-е изд. - Москва, Наука, 1988.
- [12] D.Bardin and G.Passarino, The Standard Model in the Making, Oxford, UK : Clarendon, 1999.
- [13] A.Grozin, Lectures on QED and QCD, Singapore, World Scientific, 2007.