СУПЕРСИММЕТРИЧНОЕ РАСШИРЕНИЕ СТАНДАРТНОЙ МОДЕЛИ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ

Д.И.Казаков

Аннотация

Настоящие лекции посвящены суперсимметрии, новой симметрии, которая связывает бозоны и фермионы в физике элементарных частиц. Обсуждаются побудительные мотивы для введения суперсимметрии, представлены основные понятия суперсимметрии. Подробно рассмотрено суперсимметричное расширение Стандартной модели фундаментальных взаимодействий - Минимальная суперсимметричная стандартная модель (МССМ). Описаны феноменологические черты МССМ, а также возможные экспериментальные проявление суперсимметрии.

The present lectures contain an introduction to supersymmetry, a new symmetry that relates bosons and fermions, in particle physics. The motivation to introduce supersymmetry is discussed. The main notions of supersymmetry are introduced. The supersymmetric extension of the Standard Model - the Minimal Supersymmetric Standard Model - is considered in more detail. Phenomenological features of the MSSM as well as possible experimental signatures of SUSY are described.

Содержание

1 Введение: Что такое суперсимметрия

Суперсимметрия - это симметрия между *бозонами* и *фермионами*, которая призвана объединить все силы природы, включая гравитацию, в рамках единого формализма [?]-[?]. Современные взгляды на суперсимметрию в физике частиц основаны на струнной парадигме, хотя низкоэнергетические проявления суперсимметрии возможно могут быть обнаружены на современных коллайдерах и в неускорительных экспериментах.

Суперсимметрия возникла в результате стремления обобщить алгебру Пуанкаре на представления с различным спином [?]. Это оказалось весьма проблематичным в силу теоремы запрещающей такие перемешивания [?]. Выход был найден с помощью введения так называемых градуированных алгебр Ли, т.е. добавлением анти-коммутаторов к обычным коммутаторам алгебры Лоренца. Такое обобщение, описанное ниже, является единственно возможным в релятивистской теории поля.

Пусть Q есть генератор алгебры суперсимметрии. Действуя на бозонное состояние он переводит его в фермионное, и наоборот

$$\bar{Q}|boson>=|fermion> \quad \text{and} \quad Q|fermion>=|boson> .$$

Поскольку бозоны коммутируют друг с другом, а фермионы антикоммутируют, то из этого моментально следует, что суперсимметричные генераторы должны также антикоммутировать, т.е. они должны быть *фермионными* и изменять спин на полуцелую величину, а также изменять статистику. Действительно, ключевой элемент суперсимметричной алгебры есть

$$\{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}\} = 2\sigma^\mu_{\alpha,\dot{\alpha}} P_\mu, \tag{1.1}$$

где Q и $\bar{Q}$ суть генераторы суперсимметрии, а P_μ - генератор трансляций, т.е. четырёх-импульс.

В дальнейшем мы опишем суперсимметричную алгебру более подробно и построим её представления, которые необходимы для построения суперсимметричного обобщения Стандартной модели фундаментальных взаимодействий. Такое обобщение основано на квантовой теории поля с мягко нарушенной суперсимметрией и содержит СМ в качестве низко-энергетической теории.

Суперсимметрия обещает решить некоторые проблемы СМ и теорий Великого объединения. В дальнейшем мы дадим описание суперсимметрии как возможного ближайшего кандидата на роль новой физики на тэвной шкале энергий.

2 Мотивировка введения СУСИ в физику частиц

2.1 Объединение с гравитацией

Общая идея состоит в объединении всех сил природы, включая квантовую гравитацию. Однако гравитон - переносчик гравитации- имеет спин 2, в то время как все другие калибровочные бозоны (фотон, глюоны, W и Z промежуточные бозоны) имеют спин 1. Следовательно они прнадлежат различным представлениям группы Пуанкаре. Для того, чтобы перемешать их, можно воспользоваться преобразованиями суперсимметрии. Начиная с гравитона со спином 2 и действуя генераторами суперсимметрии, мы получаем следующую цепочку состояний:

$$spin\, 2 \quad \rightarrow \quad spin\, 3/2 \quad \rightarrow \quad spin\, 1 \quad \rightarrow \quad spin\, 1/2 \quad \rightarrow \quad spin\, 0.$$

Таким образом частичное объединение материи (фермионов) с силами (бозонами) возникает естественным образом в попытке объединить гравитацию с другими взаимодействиями.

Если взять инфинитезимальное преобразование $\delta_\epsilon = \epsilon^\alpha Q_\alpha$, $\bar{\delta}_{\bar{\epsilon}} = \bar{Q}_{\dot{\alpha}} \bar{\epsilon}^{\dot{\alpha}}$, то с помощью ур.(1.1) получим

$$\{\delta_\epsilon, \bar{\delta}_{\bar{\epsilon}}\} = 2(\epsilon\sigma^\mu\bar{\epsilon})P_\mu, \tag{2.1}$$

где ϵ есть параметр преобразования. Выбирая ϵ в локальном виде, т.е. функцией пространства-времени $\epsilon = \epsilon(x)$, находим с помощью ур.(2.1), что антикоммутатор двух преобразований суперсимметрии есть не что иное как локальная трансляция координат. А теория, которая инвариантна относительно локальных координатных преобразований, есть общая теория относительности или теория гравитации. Следовательно, выбирая суперсимметрию в локальном виде, мы естественным путём получаем общую теорию относительности, или теорию гравитации, или супергравитации [**?**].

2.2 Объединение калибровочных констант связи

Согласно *гипотезе* Великого объединения взаимодействий, калибровочная симметрия возрастает с энергией: Все известные взаимодействия являются различными ветвями единого взаимодействия связанного с простой калибровочной группой, включающей в себя группу Стандартной модели [**?**]. Объединение (или расщепление) происходит при высокой энергии.

Для достижения этой цели нужно рассмотреть, как константы связи изменяются с энергией. Это описывается уравнениями ренормгруппы. В Стандартной модели сильные и слабые константы взаимодействия, ассоциированные с неабелевыми калибровочными группами, убывают с энергией, в то время как электромагнитная, ассоциированная с абелевой группой, наоборот возрастает. Поэтому оказывается возможным, что при некоторой энергии они становятся равными.

После высокоточного измерения констант связи, связанных с группами $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$, стало возможным проверить гипотезу объединения количественно. Три константы связи, которые требуют сравнения есть

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= (5/3)g'^2/(4\pi) = 5\alpha/(3\cos^2\theta_W), \\
\alpha_2 &= g^2/(4\pi) = \alpha/\sin^2\theta_W, \\
\alpha_3 &= g_s^2/(4\pi)
\end{aligned} \tag{2.2}$$

где g', g и g_s суть обычные константы связи для групп $U(1)$, $SU(2)$ и $SU(3)$, соответственно, а α есть постоянная тонкой структуры. Множитель $5/3$ в определении α_1 включён для правильной нормировки генераторов.

В модифицированной минимальной схеме вычитаний ($\overline{MS}$) мировые средние констант связи при энергии Z^0, полученные из обработки данных на ускорителях LEP и Tevatron имеют вид [**?**]:

$$\begin{aligned}
\alpha^{-1}(M_Z) &= 128.978 \pm 0.027 \\
\sin^2\theta_{\overline{MS}} &= 0.23146 \pm 0.00017 \\
\alpha_s &= 0.1184 \pm 0.0031,
\end{aligned} \tag{2.3}$$

что даёт

$$\alpha_1(M_Z) = 0.017, \quad \alpha_2(M_Z) = 0.034, \quad \alpha_3(M_Z) = 0.118 \pm 0.003. \tag{2.4}$$

Предполагая, что СМ справедлива до шкалы объединения, можно затем использовать уравнения РГ для трёх констант связи. В лидирующем порядке они имеют вид:

$$\frac{d\tilde{\alpha}_i}{dt} = b_i\tilde{\alpha}_i^2, \quad \tilde{\alpha}_i = \frac{\alpha_i}{4\pi}, \quad t = log(\frac{Q^2}{\mu^2}), \tag{2.5}$$

где коэффициенты b_i в СМ равны $b_i = (41/10, -19/6, -7)$.

Решения ур.(2.5) имеют простой вид

$$\frac{1}{\tilde{\alpha}_i(Q^2)} = \frac{1}{\tilde{\alpha}_i(\mu^2)} - b_i log(\frac{Q^2}{\mu^2}). \tag{2.6}$$

Результат демонстрируется на Рис.1, где показана эволюция обратных констант связи как функций логарифма энергии. В лидирующем приближении эволюционные кривые имеют вид прямых линий. Поправки второго порядка малы и не приводят к видимому отклонению от прямых. На Рис.1 хорошо видно, что в СМ объединение констант связи в одной точке невозможно. Это исключено на уровне 8 стандартных отклонений. Такой результат означает, что объединение можно получить только в том случае если в интервале между электрослабой и планковской шкалой возникает какая-то новая физика.

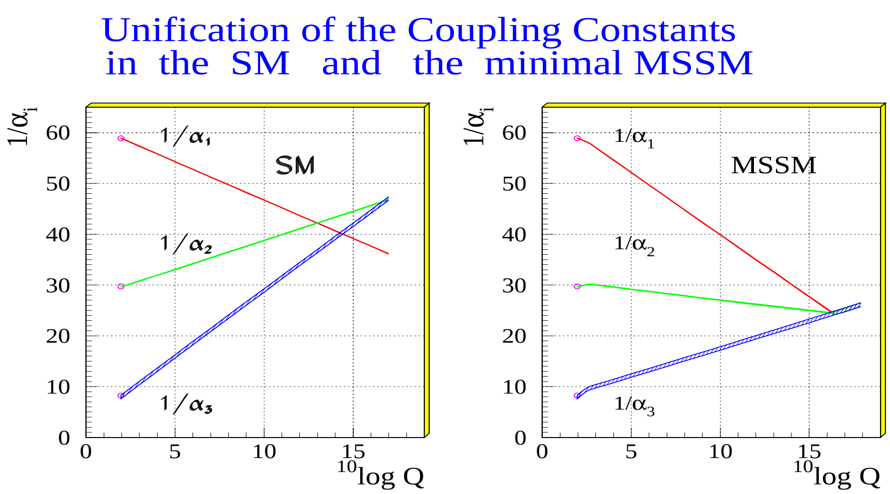

Рис. 1: Эволюция обратных констант связи в случае Стандартной модели (слева) и в случае суперсимметричного её расширения (МССМ) (справа).

В суперсимметричном случае наклоны РГ кривых модифицируются. Коэффициенты b_i в ур.(2.5) теперь равны $b_i = (33/5, 1, -3)$. Подразумевается , что суперсимметричные частицы дают вклад в эволюцию констант связи выше пороговой шкалы нарушения суперсимметрии. Оказывается, что в СУСИ модели возможно получить прекрасное объединение констант связи как это показано на Рис. 1. Из подгонки кривых находится шкала нарушения суперсимметрии M_{SUSY} и точка объединения M_{GUT} [?].

$$\begin{array}{rcl} M_{SUSY} & = & 10^{3.4\pm0.9\pm0.4}\ GeV, \\ M_{GUT} & = & 10^{15.8\pm0.3\pm0.1}\ GeV, \\ \alpha_{GUT}^{-1} & = & 26.3\pm1.9\pm1.0, \end{array} \tag{2.7}$$

Первая ошибка следует из неопределённости в измерении констант связи, а вторая следует из неорпеделённости в расщеплении масс суперсимметричных частиц.

Это наблюдение расценивалось как первое "указание"на суперсимметрию, в особенности в силу того, что M_{SUSY} была получена в интервале соответствующем соображениям тонкой подстройки, о чём пойдёт речь ниже.

2.3 Решение проблемы иерархий

Появление двух различных шкал $V \gg v$ в теориях Великого объединения, а именно M_W and M_{GUT}, приводит к серьёзной проблеме называемой *проблемой иерархий*. Существуют два аспекта этой проблемы.

Первый - это само существование иерархии. Для получения желаемой структуры спонтанно нарушенной теории, необходимо получить

$$\begin{array}{lllll} m_H & \sim & v & \sim & 10^2\ \ \mathrm{GeV} \\ m_\Sigma & \sim & V & \sim & 10^{16}\ \ \mathrm{GeV} \end{array} \qquad \frac{m_H}{m_\Sigma} \sim 10^{-14} \ll 1, \tag{2.8}$$

где H и Σ суть поля Хиггса, ответственные за спонтанное нарушение групп $SU(2)$ и ТВО, соответственно. Возникает вопрос, как получить такое маленькое число естественным путём?

Второй аспект проблемы иерархий связан с сохранением существующей иерархии. Даже если мы выберем иерархию согласно ур.(2.8), радиационные поправки разрушат её! Чтобы увидеть это рассмотрим радиационные поправки к массе лёгкого хиггсовского бозона. Соответствующие фейнмановские диаграммы представлены на Рис.2. Эти поправки, пропорциональные квадрату массы тяжёлой частицы, очевидно разрушают иерархию если только они не сокращаются. Такое весьма аккуратное сокращение с точностью $\sim 10^{-14}$ требует тонкой подстройки констант связи.

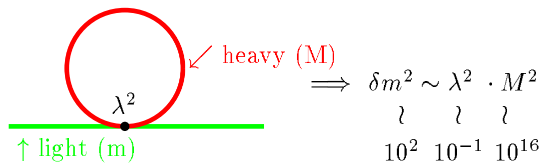

Рис. 2: Радиационные поправки к массе лёгкого хиггсовского бозона

Единственный путь получения такого сокращения квадратичных членов (также известного как сокращение квадратичных расходимостей) есть суперсимметрия. Более того, суперсимметрия автоматически сокращает све квадратичные поправки во всех порядках теории возмущений. Это происходит благодаря вкладам суперпартнёров обычных частиц. Вклады бозонных петель сокращаются с вкладами фермионных в силу наличия дополнительного множителя (-1) следующего из ферми статистики, как это показано на Рис .3. Здесь существуют два

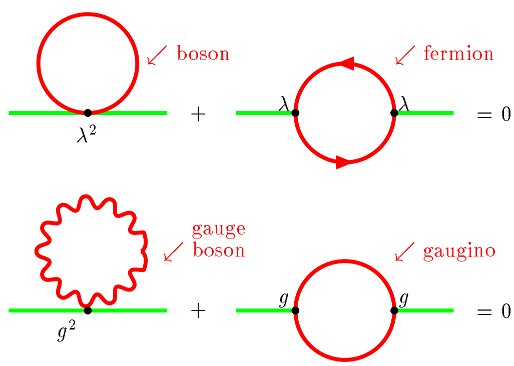

Рис. 3: Сокращение квадратичных членов (расходимостей)

типа вкладов. На верхнем рисунке представлены вклады тяжёлого хиггсовского бозона и его суперпартнёра. Сила взаимодействия определяется юкавской константой связи λ. На нижнем рисунке представлены вклады тяжёлого калибровочного бозона и тяжёлого калибрино, пропорциональные калибровочной константе связи g.

В обоих случаях имеет место сокращение квадратичных членов. Это сокращение справедливо с точностью до шкалы нарушения суперсимметрии, M_{SUSY}, которая не должна быть слишком большой (≤ 1 TeV) чтобы тонкая подстройка была естественной. Действительно, рассмотрим массу хиггсовского бозона. Требуя, для самосогласованности теории возмущений, чтобы радиационные поправки к массе не превосходили саму массу, получим

$$\delta M_h^2 \sim g^2 M_{SUSY}^2 \sim M_h^2. \tag{2.9}$$

Значит, если $M_h \sim 10^2$ GeV и $g \sim 10^{-1}$, то $M_{SUSY} \sim 10^3$ GeV для того, чтобы соотношение (2.9) было справндливо. Следовательно, мы опять получаем ту же оценку шкалы нарушения суперсимметрии $M_{SUSY} \sim 1$ TeV, что и из условия объединения констант связи.

Поэтому обычно говорят, что суперсимметрия решает проблему иерархий. Мы покажем ниже, что суперсимметрия может также объяснить и происхождение иерархии.

2.4 Астрофизика и космология

Светящаяся материя не составляет всю материю во Вселенной. Значительное количество материи составляет т.н. *тёмную материю*. Прямым указанием на существование тёмной материи являются кривые вращения галактик (см. Рис.4). Для объяснения этих кривых обычно предполагают существование галактического гало состоящего из несветящейся материи, которая участвует в гравитационном взаимодействии. Согласно последним данным [?] материя во Вселенной распределена

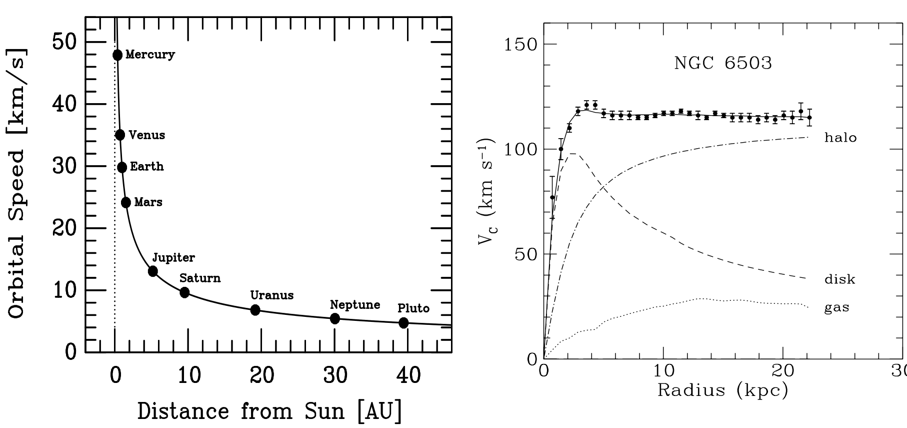

Рис. 4: Ротационные кривые для солнечной системы и для типичной галактики

следующим образом:

$$\Omega h^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \rho = \rho_{crit}$$

$$\Omega_{vacuum} \approx 73\%, \quad \Omega_{DarkMatter} \approx 23\%, \quad \Omega_{Baryon} \approx 4\%$$

Существуют два возможных вида тёмной материи: горячая тёмная материя, состоящая из лёгких релятивистских частиц, и холодная, состоящая из массивных слабовзаимодействующих частиц (WIMPs). Горячая тёмная материя могла бы состоять из нейтрино, но это проблематично с точки зрения механизма образования галактик. Что касается холодной тёмной материи, то в СМ нет подходящего кандидата на эту роль. В то же время, суперсимметрия предлагает прекрасного кандидата для холодной материи, а именно - нейтралино, легчайшую суперсимметричную частицу.

2.5 За пределами ТВО: суперструны

Другим мотивом для введения суперсимметрии является ещё более радикальное изменение основных положений связанное с конечной целью построения единой теории всего сущего. В настоящей момент имеется только одна жизнеспособная концепция, а именно теория суперструн [?]. В этой теории фундаментальными объектами выступают струны; замкнутые или открытые они являются нелокальными по своей природе. Обычные частицы рассматриваются как моды возбуждения струн. Взаимодействия струн носят локальный характер и генерируют соответствующие взаимодействия обычных частиц, включая гравитационное.

Для того, чтобы быть самосогласованной, теория струн должна быть конформно инвариантной на 2-мерной мировой поверхности струны и иметь стабильный вакуум. Первое требование справедливо в классической теории, но может нарушаться квантовыми аномалиями. Сокращение квантовых аномалий возможно, если размерность пространства-времени равна критической, что есть $D_c = 26$ для бозонной струны и $D_c = 10$ для фермионной.

Второе требование означает, что безмассовые струнные возбуждения (частицы СМ) - устойчивы. Это подразумевает отсутствие тахионов, состояний с мнимой массой, что можно гарантировать лишь в суперсимметричных струнных теориях!

3 Основы суперсимметрии

3.1 Алгебра суперсимметрии

В комбинации с обычной алгеброй Пуанкаре и алгеброй внутренней симметрии супер-Пуанкаре алгебра Ли содержит дополнительные СУ-

СИ генераторы Q^i_α и $\bar{Q}^i_{\dot{\alpha}}$ [?]

$$
\begin{aligned}
&[P_\mu, P_\nu] = 0,\\
&[P_\mu, M_{\rho\sigma}] = i(g_{\mu\rho}P_\sigma - g_{\mu\sigma}P_\rho),\\
&[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = i(g_{\nu\rho}M_{\mu\sigma} - g_{\nu\sigma}M_{\mu\rho} - g_{\mu\rho}M_{\nu\sigma} + g_{\mu\sigma}M_{\nu\rho}),\\
&[B_r, B_s] = iC^t_{rs}B_t,\\
&[B_r, P_\mu] = [B_r, M_{\mu\sigma}] = 0,\\
&[Q^i_\alpha, P_\mu] = [\bar{Q}^i_{\dot{\alpha}}, P_\mu] = 0,\\
&[Q^i_\alpha, M_{\mu\nu}] = \tfrac{1}{2}(\sigma_{\mu\nu})^\beta_\alpha Q^i_\beta, \quad [\bar{Q}^i_{\dot{\alpha}}, M_{\mu\nu}] = -\tfrac{1}{2}\bar{Q}^i_{\dot{\beta}}(\bar{\sigma}_{\mu\nu})^{\dot{\beta}}_{\dot{\alpha}},\\
&[Q^i_\alpha, B_r] = (b_r)^i_j Q^j_\alpha, \quad [\bar{Q}^i_{\dot{\alpha}}, B_r] = -\bar{Q}^j_{\dot{\alpha}}(b_r)^i_j,\\
&\{Q^i_\alpha, \bar{Q}^j_{\dot{\beta}}\} = 2\delta^{ij}(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\beta}}P_\mu,\\
&\{Q^i_\alpha, Q^j_\beta\} = 2\epsilon_{\alpha\beta}Z^{ij}, \quad Z_{ij} = a^r_{ij}b_r, \quad Z^{ij} = Z^+_{ij},\\
&\{\bar{Q}^i_{\dot{\alpha}}, \bar{Q}^j_{\dot{\beta}}\} = -2\epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}Z^{ij}, \quad [Z_{ij}, anything] = 0,\\
&\alpha, \dot{\alpha} = 1, 2 \quad i, j = 1, 2, \ldots, N.
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

Здесь P_μ и $M_{\mu\nu}$ являются ореraторами четырёх-импульса и углового момента, соответственно, B_r - генераторы внутренней симметрии, Q^i и $\bar{Q}^i$ суть спинорные СУСИ генераторы, а Z_{ij} - т.н. центральные заряды; $\alpha, \dot{\alpha}, \beta, \dot{\beta}$ есть спинорные индексы. В простейшем случае имеется один спинорный генератор Q_α (и сопряжённый к нему $\bar{Q}_{\dot{\alpha}}$), что соответствует обыкновенной или N=1 суперсимметрии. Когда $N > 1$ мы имеем дело с расширенной суперсимметрией.

Возникает естественный вопрос: сколько генераторов суперсимметрии возможно, т.е. чему равно число N? Для ответа на этот вопрос рассмотрим безмассовые состояния. Начнём с основного состояния маркированного энергией и спиральностью, т.е. проекцией спина частицы на направление движения, и предположим, что оно обращается в нуль при действии оператора суперсимметрии Q_i

$$\mathrm{Vacuum} = |E, \lambda>, \qquad Q_i|E, \lambda>= 0.$$

Тогда одно и многочастичные состояния могут быть построены с помощью операторов рождения как

Состояние	Выражение	# состояний
вакуум	$\lvert E,\lambda>$	1
$1-$ частичное сост.	$\bar{Q}_i\lvert E,\lambda>=\lvert E,\lambda+1/2>_i$	$\left(\begin{array}{c}N\\1\end{array}\right)=N$
$2-$ частичное сост.	$\bar{Q}_i\bar{Q}_j\lvert E,\lambda>=\lvert E,\lambda+1>_{ij}$	$\left(\begin{array}{c}N\\2\end{array}\right)=\frac{N(N-1)}{2}$
...	...	...
$N-$ частичное сост.	$\bar{Q}_1\bar{Q}_2...\bar{Q}_N\lvert E,\lambda>=\lvert E,\lambda+\frac{N}{2}>$	$\left(\begin{array}{c}N\\N\end{array}\right)=1$
Полное # состояний	$\sum_{k=0}^{N}\left(\begin{array}{c}N\\k\end{array}\right)=2^N=2^{N-1}$бозонов $+$	2^{N-1}ферм.

Энергия E не меняется, так как согласно (3.1) операторы $\bar{Q}_i$ коммутируют с гамильтонианом.

Таким образом имеем последовательность бозонных и фермионных состояний и полное число бозонов равно числу фермионов. Это является общим свойством суперсимметричных теорий. Однако, из CPT инвариантности следует, что число состояний удваивается, ибо CPT преобразования изменяют знак спиральности. Следовательно, в CPT инвариантных теориях нужно добавить состояния с противоположной спиральностью к уже имеющимся.

Рассмотрим несколько примеров. Положим $N=1$ и $\lambda=0$. Тогда имеем следующие состояния :

$$N=1 \quad \lambda=0 \qquad \begin{array}{lcc}\text{helicity} & 0 & 1/2\\ \\ \#\text{ of states} & 1 & 1\end{array} \quad \stackrel{CPT}{\Longrightarrow} \quad \begin{array}{lcc}\text{helicity} & 0 & -1/2\\ \\ \#\text{ of states} & 1 & 1\end{array}$$

Следовательно, полный $N=1$ мультиплет имеет вид

$$N=1 \quad \begin{array}{lccc}\text{helicity} & -1/2 & 0 & 1/2\\ \#\text{ of states} & 1 & 2 & 1\end{array}$$

что соответствует одному комплексному скаляру и одному фермиону с двумя состояниями спиральности.

Это есть пример т.н. самосопряжённого мультиплета. Существуют также самосопряжённые мультиплеты с $N>1$ соответствующие расширенной суперсимметрии. Два нижеследующих примера отвечают $N=4$ суперсимметричному янг-миллсовскому мультиплету и $N=8$ мультиплету супергравитации

$N=4$	SUSY YM	спиральность	-1	$-1/2$	0	$1/2$	1
	$\lambda=-1$	# состояний	1	4	6	4	1

$N=8$	SUGRA	-2	$-3/2$	-1	$-1/2$	0	$1/2$	1	$3/2$	2
	$\lambda=-2$	1	8	28	56	70	56	28	8	1

Как видно, мультиплеты расширенной суперсимметрии весьма велики и содержат большое число частиц.

Ограничение на число СУСИ генераторов следует из требования самосогласованности соответствующей КТП.Число суперсимметрий и максимальный спин частиц в супермультиплете связаны между собой

$$N \leq 4S,$$

где S есть максимальный спин. Так как теории со спином больше 1 неперенормируемы, а теории со спином больше $5/2$ не согласованы с гравитацией, то отсюда следует ограничение на число СУСИ генераторов

$$\begin{array}{ll} N \leq 4 & \text{для ренормируемых теорий (YM),} \\ N \leq 8 & \text{для (супер)гравитации.} \end{array}$$

В дальнейшем мы будем рассматривать простейшую суперсимметрию, или $N=1$ суперсимметрию в отличие от расширенной суперсимметрии с $N>1$. В этом случае имеется два типа супермультиплетов: так называемый *киральный* мультиплет с $\lambda=0$, который содержит два физических состояния (ϕ,ψ) со спином 0 и $1/2$, соответственно, и *векторный* мультиплет с $\lambda=1/2$, который также содержит два физических состояния (λ, A_μ) со спином spin $1/2$ и 1, соответственно.

3.2 Суперпространство и суперполя

Элегантную формулировку преобразований суперсимметрии и супер инвариантов можно получить на языке суперпространства [**?**]. Суперпрострвнство отличается от обычного Евклидова (Минковского) пространства добавлением двух новых координат, θ_α и $\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}$, которые являются грассмановыми, т.е. антикоммутирующими пременными

$$\{\theta_\alpha, \theta_\beta\} = 0, \quad \{\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}, \bar{\theta}_{\dot{\beta}}\} = 0, \quad \theta_\alpha^2 = 0, \quad \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}^2 = 0, \quad \alpha, \beta, \dot{\alpha}, \dot{\beta} = 1, 2.$$

Таким образом, мы перходим от пространства к суперпространству

$$\begin{array}{ccc} \text{Пространство} & \Rightarrow & \text{Суперпространство} \\ x_\mu & & x_\mu, \theta_\alpha, \bar{\theta}_{\dot{\alpha}} \end{array}$$

СУСИ групповой элемент может быть построен в суперпространстве таким же способом, как и обыкновенная трансляция в обычном пространстве

$$G(x, \theta, \bar{\theta}) = e^{i(-x^\mu P_\mu + \theta Q + \bar{\theta}\bar{Q})}. \tag{3.2}$$

Это приводит к супертрансляции в суперпространстве

$$\begin{array}{rcl} x_\mu & \rightarrow & x_\mu + i\theta\sigma_\mu\bar{\varepsilon} - i\varepsilon\sigma_\mu\bar{\theta}, \\ \theta & \rightarrow & \theta + \varepsilon, \quad \bar{\theta} \rightarrow \bar{\theta} + \bar{\varepsilon}, \end{array} \tag{3.3}$$

где ε и$\bar{\varepsilon}$ суть грассмановы параметры преобразования. Из ур.(3.3) можно легко получить представления для суперзарядов (3.1) действующих в суперпространстве

$$Q_\alpha = \frac{\partial}{\partial\theta_\alpha} - i\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\partial_\mu, \quad \bar{Q}_{\dot{\alpha}} = -\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}} + i\theta_\alpha\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_\mu. \tag{3.4}$$

Для определения полей на суперпространстве рассмотрим представления группы супер-Пуанкаре (3.1) [**?**]. Простейшим является скалярное суперполе $F(x, \theta, \bar{\theta})$, которое есть суперинвариант. Его разложение в ряд Тейлора по θ и $\bar{\theta}$ содержит лишь несколько членов в силу нильпотентного характера грассмановых переменных. Однако это суперполе является приводимым представлением СУСИ. Чтобы получить неприводимое представление, определим *киральное* суперполе, которое подчиняется уравнению

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}}F = 0, \quad \text{где } \bar{D}_{\dot{\alpha}} = -\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}} - i(\theta\sigma^\mu)_{\dot{\alpha}}\partial_\mu \tag{3.5}$$

есть ковариантная производная на суперпространстве.

Для кирального суперполя грассманово разложение имеет вид ($y = x + i\theta\sigma\bar{\theta}$)

$$\Phi(y, \theta) \;=\; A(y) + \sqrt{2}\theta\psi(y) + \theta\theta F(y) \tag{3.6}$$

$$
\begin{aligned}
&= A(x) + i\theta\sigma^\mu\bar\theta\partial_\mu A(x) + \frac{1}{4}\theta\theta\bar\theta\bar\theta\Box A(x)\\
&+ \ \sqrt{2}\theta\psi(x) - \frac{i}{\sqrt{2}}\theta\theta\partial_\mu\psi(x)\sigma^\mu\bar\theta + \theta\theta F(x).
\end{aligned}
$$

Коэффициенты являются обыкновенными функциями от x, будучи обычными полями. Они называются *компонентами* суперполя. В ур.(3.7) имеются 2 бозонных (комплексное скалярное поле A) и 2 фермионных (вейлевское спинорное поле ψ) степеней свободы. Компонентные поля A иψ называются *суперпартнёрами*. Поле F является вспомогательным полем, оно имеет "неправильную"размерность и не имеет физического содержания. Оно требуется для замыкания алгебры (3.1) и может быть исключено, используя уравнения движения.

Таким образом, суперполе содержит равное число бозонных и фермионных степеней свободы. Под действием суперсимметрии они переходят друг в друга

$$
\begin{aligned}
\delta_\varepsilon A &= \sqrt{2}\varepsilon\psi,\\
\delta_\varepsilon\psi &= i\sqrt{2}\sigma^\mu\bar\varepsilon\partial_\mu A + \sqrt{2}\varepsilon F,\\
\delta_\varepsilon F &= i\sqrt{2}\bar\varepsilon\sigma^\mu\partial_\mu\psi.
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

Заметим, что вариация F-компоненты есть полная производная, т.е. исчезает при интегрировании по пространству-времени.

Можно построить также и антикиральное суперполе Φ^+, подчиняющееся уравнению

$$
D_\alpha\Phi^+ = 0, \quad \text{with} \ \ D_\alpha = \frac{\partial}{\partial\theta_\alpha} + i(\sigma^\mu\bar\theta)_\alpha\partial_\mu.
$$

Произведение киральных (антикиральных) суперполей Φ^2, Φ^3, и т.д. есть тоже киральное (антикиральное) суперполе, в то время как произведение кирального на антикиральное суперполе $\Phi^+\Phi$ есть общее суперполе.

Для произвольной функции киральных суперполей имеем

$$
\begin{aligned}
\mathcal{W}(\Phi_i) &= \mathcal{W}(A_i + \sqrt{2}\theta\psi_i + \theta\theta F) \qquad (3.8)\\
&= \mathcal{W}(A_i) + \frac{\partial\mathcal{W}}{\partial A_i}\sqrt{2}\theta\psi_i + \theta\theta\left(\frac{\partial\mathcal{W}}{\partial A_i}F_i - \frac{1}{2}\frac{\partial^2\mathcal{W}}{\partial A_i\partial A_j}\psi_i\psi_j\right).
\end{aligned}
$$

$\mathcal{W}$ называется *суперпотенциалом*, который заменяет обыччный потенциал для скалярных полей.

Для построения калибровочно инвариантного взаимодействия нам понадобится действительное векторное суперполе $V = V^+$. Это не киральное суперполе, а общее действительное суперполе со следующим грассмановым разложением:

$$
\begin{aligned}
V(x,\theta,\bar\theta) \;&=\; C(x) + i\theta\chi(x) - i\bar\theta\bar\chi(x) + \frac{i}{2}\theta\theta[M(x)+iN(x)] \\
&- \frac{i}{2}\bar\theta\bar\theta[M(x)-iN(x)] - \theta\sigma^\mu\bar\theta v_\mu(x) + i\theta\theta\bar\theta[\lambda(x) + \frac{i}{2}\bar\sigma^\mu\partial_\mu\chi(x)] \\
&- \; i\bar\theta\bar\theta\theta[\lambda + \frac{i}{2}\sigma^\mu\partial_\mu\bar\chi(x)] + \frac{1}{2}\theta\theta\bar\theta\bar\theta[D(x) + \frac{1}{2}\Box C(x)].
\end{aligned}
\tag{3.9}
$$

Физические степени свободы соответствующие действительному векторному суперполю V суть векторное калибровочное поле v_μ и майорановское спинорное поле λ. Все другие компоненты являются нефизическими и их можно исключить. Действительно, под действием абелевых (супер)калибровочных преобразований суперполе V изменяется как

$$
V \quad \to \quad V + \Phi + \Phi^+,
$$

где Φ и Φ^+ - некоторые киральные суперполя. В компонентах это выглядит следующим образом

$$
\begin{aligned}
C \quad &\to \quad C + A + A^*, \\
\chi \quad &\to \quad \chi - i\sqrt{2}\psi, \\
M + iN \quad &\to \quad M + iN - 2iF, \\
v_\mu \quad &\to \quad v_\mu - i\partial_\mu(A - A^*), \\
\lambda \quad &\to \lambda, \\
D \quad &\to D,
\end{aligned}
\tag{3.10}
$$

и соответствует обычному калибровочному преобразованию для физических компонент. Согласно ур.(3.10), можно выбрать калибровку (калибровку Весса-Зумино), где $C = \chi = M = N = 0$, оставляющую только физические степени свободы, за исключением вспомогательного поля D. В этой калибровке

$$
\begin{aligned}
V \;&=\; -\theta\sigma^\mu\bar\theta v_\mu(x) + i\theta\theta\bar\theta\bar\lambda(x) - i\bar\theta\bar\theta\theta\lambda(x) + \frac{1}{2}\theta\theta\bar\theta\bar\theta D(x), \\
V^2 \;&=\; -\frac{1}{2}\theta\theta\bar\theta\bar\theta v_\mu(x) v^\mu(x), \\
V^3 \;&=\; 0, \quad \text{и т.д.}
\end{aligned}
\tag{3.11}
$$

Можно также определить тензор напряжённости поля (аналог $F_{\mu\nu}$ в калибровочных теориях)

$$W_\alpha = -\frac{1}{4}\bar{D}^2 e^V D_\alpha e^{-V}, \quad \bar{W}_{\dot\alpha} = -\frac{1}{4}D^2 e^V \bar{D}_\alpha e^{-V}, \tag{3.12}$$

который является полиномом по полям в калибровке Весса-Зумино. (Здесь Ds суть суперковариантные производные.)

Тензор напряжённости есть киральное суперполе

$$\bar{D}_{\dot\beta} W_\alpha = 0, \quad D_\beta \bar{W}_{\dot\alpha} = 0.$$

В калибровке Весса-Зумино он полиномиален

$$W_\alpha = T^a \left(-i\lambda^a_\alpha + \theta_\alpha D^a - \frac{i}{2}(\sigma^\mu \bar\sigma^\nu \theta)_\alpha F^a_{\mu\nu} + \theta^2 (\sigma^\mu D_\mu \bar\lambda^a)_\alpha \right), \tag{3.13}$$

где

$$F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu v^a_\nu - \partial_\nu v^a_\mu + f^{abc} v^b_\mu v^c_\nu, \quad D_\mu \bar\lambda^a = \partial \bar\lambda^a + f^{abc} v^b_\mu \bar\lambda^c.$$

В абелевом случае ур.(3.12) упрощаются и принимают вид

$$W_\alpha = -\frac{1}{4}\bar{D}^2 D_\alpha V, \quad \bar{W}_{\dot\alpha} = -\frac{1}{4}D^2 \bar{D}_\alpha V.$$

3.3 Построение суперсимметричных лагранжианов

Давйте начнём с лагранжиана, который не имеет калибровочной симметрии. В суперполевых обозначениях СУСИ инвариантный лагранжиан есть полином по суперполям. Имея в виду, что в компонентах мы должны получить обычный вид лагранжиана и отмеченное выше свойство суперинвариантности высшей компоненты суперполя (F компоненты), общее выражение СУСИ инвариантного лагранжиана может быть записано в виде

$$\mathcal{L} = \Phi^+_i \Phi_i|_{\theta\theta\bar\theta\bar\theta} + [(\lambda_i \Phi_i + \frac{1}{2} m_{ij} \Phi_i \Phi_j + \frac{1}{3} g_{ijk} \Phi_i \Phi_j \Phi_k)|_{\theta\theta} + h.c.]. \tag{3.14}$$

Здесь и далее вертикальная черта означает соответствующий член тейлоровского разложения.

Первое слагаемое есть кинетический член. Он содержит киральное и антикиральное суперполя Φ_i и Φ^+_i, соответственно и есть функция грассмановых параметров θ и $\bar\theta$. Будучи разложенным по θ и $\bar\theta$, он приводит к обычным кинетическим членам для соответствующих компонентных полей.

Слагаемое в скобках образует суперпотенциал. Он построен только из киральных полей (плюс сопряжённое слагаемое, построенное из антикиральных) и является киральным суперполем. Так как произведения кирального и антикирального суперполя дают общее суперполе, то они не допустимы в суперпотенциале. Последний член разложения суперпотенциала по грассманову параметру θ суперсимметрично инвариантен и даёт обычный потенциал после избавления от вспомогательных полей.

Лагранжиан (3.14) может быть записан гораздо более элегантным образом если ввести суперпространство. Так жк как обычное действие есть интеграл по пространству-времени от лагранжевой плотности, так и в суперсимметричном случае действие есть интеграл по суперпространству. Пространственно-временная лагранжева плотность тогда может тбыть записана как интеграл по грассмаговым координатам [**?**, **?**]

$$\mathcal{L} = \int d^2\theta d^2\bar{\theta}\ \Phi_i^+\Phi_i + \int d^2\theta\ [\lambda_i\Phi_i + \frac{1}{2}m_{ij}\Phi_i\Phi_j + \frac{1}{3}y_{ijk}\Phi_i\Phi_j\Phi_k] + h.c. \quad (3.15)$$

где первое слагаемое есть кинетический член, а второе - суперпотенциал $\mathcal{W}$. Здесь вместо взятия соответствующих компонент мы использовали интегрирование по суперпространству согласно правилам грассманова интегрирования [**?**]

$$\int\ d\theta_\alpha = 0, \qquad \int \theta_\alpha\ d\theta_\beta = \delta_{\alpha\beta}.$$

Производя непосредственное интегрирование по грассмановым параметрам, мы получаем из ур.(3.15)

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= i\partial_\mu\bar{\psi}_i\bar{\sigma}^\mu\psi_i + A_i^*\Box A_i + F_i^*F_i \qquad (3.16)\\ &+ [\lambda_i F_i + m_{ij}(A_iF_j - \frac{1}{2}\psi_i\psi_j) + y_{ijk}(A_iA_jF_k - \psi_i\psi_jA_k) + h.c.]. \end{aligned}$$

Последние два слагаемых представляют собой взаимодействие. Чтобы получить лагранжиан в привычной форме мы должны разрешить связи

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial F_k^*} = F_k + \lambda_k^* + m_{ik}^*A_i^* + y_{ijk}^*A_i^*A_j^* = 0, \qquad (3.17)$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial F_k} = F_k^* + \lambda_k + m_{ik}A_i + y_{ijk}A_iA_j = 0. \qquad (3.18)$$

Выражая вспомогательные поля F и F^* из этих уравнений, окончательно получим

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= i\partial_\mu\bar{\psi}_i\bar{\sigma}^\mu\psi_i + A_i^*\Box A_i - \frac{1}{2}m_{ij}\psi_i\psi_j - \frac{1}{2}m_{ij}^*\bar{\psi}_i\bar{\psi}_j \\ &\quad -y_{ijk}\psi_i\psi_j A_k - y_{ijk}^*\bar{\psi}_i\bar{\psi}_j A_k^* - V(A_i, A_j), \qquad (3.19)\end{aligned}$$

где скалярный потенциал имеет вид $V = F_k^* F_k$. Мы вернёмся к обсуждению скалярного потенциала в суперсимметричных теорях ниже.

Рассмотрим теперь калибровочно инвариантные суперсимметричные лагранжианы. Они должны содержать калибровочно инвариантное взаимодействие материальных полей и кинетический член и самодействие для самих калибровочных полей.

Начнём с кинетического члена для калибровочных полей. В калибровке Весса-Зумино имеем

$$W^\alpha W_\alpha|_{\theta\theta} = -2i\lambda\sigma^\mu D_\mu\bar{\lambda} - \frac{1}{2}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}D^2 + i\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F^{\rho\sigma}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}, \qquad (3.20)$$

где $D_\mu = \partial_\mu + ig[v_\mu,]$ есть обычная ковариантная производная, а последний, т.н. топологический, член есть полная производная.

Калибровочно инвариантный лагранжиан теперь принимает знакомый вид

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{1}{4}\int d^2\theta\ W^\alpha W_\alpha + \frac{1}{4}\int d^2\bar{\theta}\ \bar{W}^{\dot{\alpha}}\bar{W}_{\dot{\alpha}} \\ &= \frac{1}{2}D^2 - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - i\lambda\sigma^\mu D_\mu\bar{\lambda}. \qquad (3.21)\end{aligned}$$

Для получения калибровочно инвариантного взаимодействия с киральными суперполями материи, рассмотрим калибровочные (абелевы) преобразования последних

$$\Phi \ \to\ e^{-ig\Lambda}\Phi, \quad \Phi^+ \ \to\ \Phi^+ e^{ig\Lambda^+}, \quad V \ \to\ V + i(\Lambda - \Lambda^+),$$

где Λ есть калибровочный параметр (киральное суперполе).

Теперь очевидно, как построить калибровочно и суперсимметрично инвариантное взаимодействие (ср. с ковариантной производной в обычной калибровочной теории)

$$\Phi_i^+\Phi_i|_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}} \Rightarrow \Phi_i^+ e^{gV}\Phi_i|_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}} \qquad (3.22)$$

Полный суперсимметрично и калибровочно и ивариантный лагранжиан принимает вид

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{inv} &= \frac{1}{4}\int d^2\theta\ W^\alpha W_\alpha + \frac{1}{4}\int d^2\bar\theta\ \bar W^{\dot\alpha}\bar W_{\dot\alpha} + \int d^2\theta d^2\bar\theta\ \Phi_i^+ e^{gV}\Phi_i \\ &+ \int d^2\theta\ (\frac{1}{2}m_{ij}\Phi_i\Phi_j + \frac{1}{3}y_{ijk}\Phi_i\Phi_j\Phi_k) + h.c. \end{aligned} \tag{3.23}$$

Неабелево обобщение тривиально

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{SUSY\ YM} &= \frac{1}{4}\int d^2\theta\ Tr(W^\alpha W_\alpha) + \frac{1}{4}\int d^2\bar\theta\ Tr(\bar W^\alpha \bar W_\alpha) \qquad (3.24) \\ &+ \int d^2\theta d^2\bar\theta\ \bar\Phi_{ia}(e^{gV})^a_b\Phi_i^b + \int d^2\theta\ \mathcal{W}(\Phi_i) + \int d^2\bar\theta\ \bar{\mathcal{W}}(\bar\Phi_i), \end{aligned}$$

где $\mathcal{W}$ есть суперпотенциал, который должен быть инвариантным относительно группы симметрии конкретной модели.

В терминах компонент выше приведённый лагранжиан принимает вид

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{SUSY\ YM} &= -\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{a\mu\nu} - i\lambda^a\sigma^\mu D_\mu\bar\lambda^a + \frac{1}{2}D^aD^a \qquad (3.25) \\ &+ (\partial_\mu A_i - igv^a_\mu T^aA_i)^\dagger(\partial_\mu A_i - igv^a_\mu T^aA_i) - i\bar\psi_i\bar\sigma^\mu(\partial_\mu\psi_i - igv^a_\mu T^a\psi_i) \\ &- D^aA_i^\dagger T^aA_i - i\sqrt{2}A_i^\dagger T^a\lambda^a\psi_i + i\sqrt{2}\bar\psi_iT^aA_i\bar\lambda^a + F_i^\dagger F_i \\ &+ \frac{\partial\mathcal{W}}{\partial A_i}F_i + \frac{\partial\bar{\mathcal{W}}}{\partial A_i^\dagger}F_i^\dagger - \frac{1}{2}\frac{\partial^2\mathcal{W}}{\partial A_i\partial A_j}\psi_i\psi_j - \frac{1}{2}\frac{\partial^2\bar{\mathcal{W}}}{\partial A_i^\dagger\partial A_j^\dagger}\bar\psi_i\bar\psi_j. \end{aligned}$$

Избавляясь от вспомогательных полей D^a и F_i, мы воспроизводим обычное выражение для лагранжиана физических компонент.

3.4 Скалярный потенциал

В отличие от СМ, где скалярный потенциал произволен и ограничивается только требованиями калибровочной инвариантности, в суперсимметричных теориях он полностью определяется суперпотенциалом. Он состоит из вкладов возникающих от D и F членов. Кинетическая энергия калибровочных полей (см. ур.(3.21) содержит член вида $1/2D^aD^a$, а взаимодействие полей материи с калибровочными полями даёт (см. ур.(3.23) $gD^aT^a_{ij}A_i^*A_j$. Вместе они приводят к следующему выражению

$$\mathcal{L}_D = \frac{1}{2}D^aD^a + gD^aT^a_{ij}A_i^*A_j. \tag{3.26}$$

Отсюда следует уравнение движения для вспомогательного поля D

$$D^a = -gT^a_{ij}A^*_i A_j. \tag{3.27}$$

Подставляя его обратно в ур.(3.26), получаем вклад D-члена в потенциал

$$\mathcal{L}_D = -\frac{1}{2}D^a D^a \quad \Longrightarrow V_D = \frac{1}{2}D^a D^a, \tag{3.28}$$

где D имеет вид (3.27).

Вклад F-члена получается из самодействия полей материи ур.(3.16). Для суперпотенциала W общего вида имеем

$$\mathcal{L}_F = F^*_i F_i + (\frac{\partial W}{\partial A_i}F_i + h.c.). \tag{3.29}$$

Используя уравнения движения для вспомогательных полей F_i

$$F^*_i = -\frac{\partial W}{\partial A_i}, \tag{3.30}$$

получаем

$$\mathcal{L}_F = -F^*_i F_i \quad \Longrightarrow V_F = F^*_i F_i, \tag{3.31}$$

где F даётся ур.(3.30). Полный потенциал есть сумма этих двух вкладов

$$V = V_D + V_F. \tag{3.32}$$

Таким образом, форма лагранжиана практически фиксирована требованиями симметрии. Единственная свобода состоит в выборе набора полей материи, значения калибровочной константы связи g, юкавских констант связи y_{ijk} и масс частиц. В силу требования перенормируемости $V \leq A^4$ суперпотенциал должен быть ограничен кубичными членами $\mathcal{W} \leq \Phi^3$ как в ур.(3.15). При этом все члены супермультиплета имеют одну и ту жу массу, т.е. бозоны и фермионы вырождены по массе. Это свойство суперсимметричных теорий противоречит феноменологии и требует нарушения суперсимметрии.

3.5 Спонтанное нарушение суперсимметрии

Так как суперсимметричная алгебра ведёт к вырожденности масс в супермультиплете, то для объяснения отсутствия суперпартнёров при современных энергиях она должна быть нарушена. Существуют несколько путей нарушения суперсимметрии. Она может быть нарушена или непосредственно или спонтанно. Нарушая суперсимметрию, нужно быть осторожным, чтобы не разрушить сокращение квадратичных расходимостей, что ведёт к решению проблемы иерархий. Этого можно добиться путём спонтанного нарушения суперсимметрии.

В отличие от несуперсимметричных теорий, в СУСИ моделях энергия всегда неотрицательна. Действительно, согласно квантовой механике

$$E =< 0|\ H\ |0 >,$$

а в силу алгебры суперсимметрии (3.1) $\{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\} = 2(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\beta}} P_\mu$, и учитывая, что $tr(\sigma^\mu P_\mu) = 2P_0$, получаем

$$E = \frac{1}{4} \sum_{\alpha=1,2} < 0|\{Q_\alpha, \bar{Q}_\alpha\}|0 >= \frac{1}{4} \sum_\alpha |Q_\alpha|0 > |^2 \geq 0.$$

Следовательно

$$E =< 0|\ H\ |0 >\neq 0 \quad \text{тогда и только тогда, когда} \quad Q_\alpha|0 >\neq 0.$$

Следовательно, суперсимметрия спонтанно нарушена, т.е. вакуум не инвариантен ($Q_\alpha|0 >\neq 0$), *тогда и только тогда, когда* минимум суперпотенциала положителен, т.е. $E > 0$.

Спонтанное нарушение суперсимметрии достигается тем же путём как и нарушение электрослабой симметрии. Вводится поле чьё вакуумное среднее не равно нулю и ведёт к спонтанному нарушению симметрии. Однако, в силу специального характера суперсимметрии, это должно быть суперполе чьи вспомогательные F и D компоненты приобретают ненулевое среднее. Поэтому среди возможных механизмов нарушения суперсимметрии различают F и D механизмы.

i) Файе-Иллиопулос (D) механизм [**?**].
В этом случае к лагранжиану добавляется линейный D-член

$$\Delta\mathcal{L} = \xi V|_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}} = \xi \int d^4\theta\ V. \qquad (3.33)$$

Сам по себе он калибровочно и суперсимметрично инвариантен, но может привести к спонтанному нарушению и той и другой в зависимости от величины параметра ξ. Для иллюстрации мы приводим на Рис.5а типичный спектр в случае двух киральных мультиплетов. Недостаток этого механизма состоит в $U(1)$ калибровочной инвариантности. Он может быть использован в обобщениях Стандартной модели, но не в теориях Великого объединения.

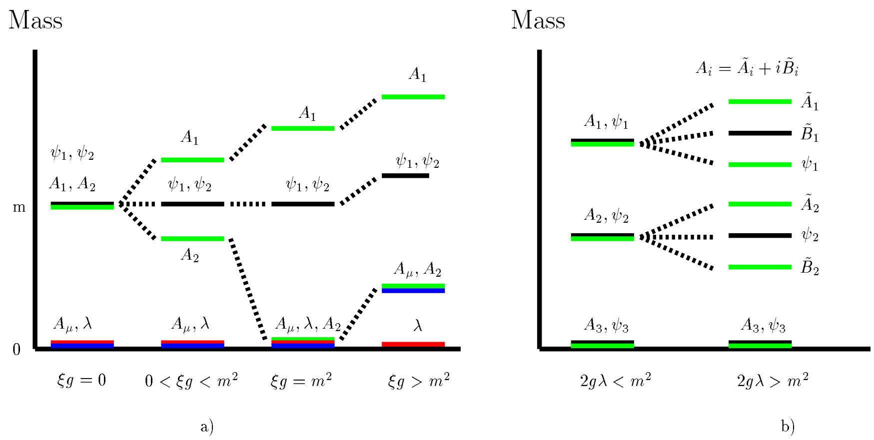

Рис. 5: Спектр спонтанно нарушенных суперсимметричных теорий

Спектр масс также не вполне удовлетворителен, поскольку справедливо следующее правило сумм

$$\sum_{bosonic\ states} m_i^2 = \sum_{fermionic\ states} m_i^2, \tag{3.34}$$

что не соответствует феноменологии.

ii) О'Райферти (F) механизм [**?**].

В этом случае требуются несколько киральных полей и суперпотенциал должен быть выбран таким образом, чтобы отсутствовали нулевые вакуумные средние у вспомогательных F компонент. Например, выбирая суперпотенциал в виде

$$\mathcal{W}(\Phi) = \lambda\Phi_3 + m\Phi_1\Phi_2 + g\Phi_3\Phi_1^2,$$

получаем следующие уравненения для вспомогательных полей

$$\begin{aligned} F_1^* &= mA_2 + 2gA_1A_3, \\ F_2^* &= mA_1, \\ F_3^* &= \lambda + gA_1^2, \end{aligned}$$

которые не имеют решений с $< F_i >= 0$, и суперсимметрия спонтанно нарушается. Типичный сперктр масс в этом случае показан на Рис.5b.

Недостатком этого механизма состоит в большой степени произвола в выборе суперпотенциала. Правило сумм (3.34) тоже оказывается справедливым в этом случае.

К сожалению, ни один из этих механизмов не может быть непосредственно использован в суперсимметричных расширениях СМ. Ни одно из полей СМ не может получить ненулевое вакуумное среднее у своих F или D компонент без нарушения $SU(3)$ или $U(1)$ калибровочной симметрии, поскольку они не являются синглетами по отношениям к этим группам. Это обстоятельство предполагает наличие других источников спонтанного нарушения суперсимметрии, которые мы рассмотрим ниже. Однако, все они основаны на тех же F и D механизмах.

4 СУСИ обобщение Стандартной модели. МССМ

Как уже упоминалось, в суперсимметричных теориях число бозонных степеней свободы равно числу фермионных. В то же время, в СМ имеется 28 бозонных и 90 фермионных степени свободы (с безмассовыми нейтрино, иначе - 96). Поэтому СМ в высшей степени несуперсимметрична. Добавляя новые частицы для суперсимметризации СМ, следует иметь в виду следующее:

• В СМ нет фермионов с квантовыми числами калибровочных бозонов;

• Хиггсовские поля, имеющие ненулевые вакуумные средние, не могут быть суперпартнёрами кварков и лептонов поскольку это привело бы к нарушению барионного и лептонного чисел;

• Требуется по крайней мере два комплексных киральных дублета хиггсовских полей, чтобы дать массы Up и Down кваркам.

Последнее является следствием формы суперпотенциала и киральности суперполей материи. Действительно, суперпотенциал должен быть инвариантным относительно калибровочной группы $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$. Если посмотреть на юкавские взаимодействия в Стандартной модели, то видно, что они действительно $U(1)$ инвариантны так как сумма гиперзарядов в каждой вершине равна нулю. В случае Up кварков это достигается при помощи сопряжённого хиггсовского дублета $\tilde{H} = i\tau_2 H^\dagger$ вместо H. Однако, в суперсимметричных теориях H есть киральное суперполе и следовательно суперпотенциал, который построен из киральных полей, может содержать только H, но не $\tilde{H}$, который есть антикиральное суперполе.

Другая причина, по которой необходим второй хиггсовский дублет, связана с киральными аномалиями. Известно, что киральные аномалии разрушают калибровочную инвариантность и, следовательно, перенормируемость теории. Они сокращаются в СМ между кварками и лептонами в каждом поколении. Однако, если ввести киральное хиггсовское суперполе, оно содержит поле хиггсино, которое является киральным фермионом, и содержит аномалии. Для их сокращения необходимо добавить второй хиггсовский дублет с противоположным гиперзарядом. Проэтому хиггсовский сектор в суперсимметричных моделях с необходимостью расширен, он содержит чётное количество дублетов.

Вывод: В суперсимметричных моделях суперсимметрия связывает *известные* бозоны с *новыми* фермионами и *известные* фермионы с *новыми* бозонами.

4.1 Состав полей

Рассмотрим состав полей Минимальной суперсимметричной стандартной модели (МССМ) [?]. Согласно предыдущей дискуссии, в минимальной версии мы удваиваем число частиц (вводя суперпартнёр для каждой частицы) и добавляем второй хиггсовский дублет (со своим суперпартнёром).

Таким образом, характерной особенностью суперсимметричного обобщения СМ является присутствие суперпартнёров (см. Рис.6) [?]. Если суперсимметрия не нарушена, суперпартнёры обычных частиц должны иметь тк же массы, что и сами частицы и должны наблюдаться. Считается, что их отсутствие при современных энергиях объясняется тем фактом, что они заметно тяжелее, т.е. суперсимметрия должна быть нарушена . Следовательно, если увеличить энергию ускорителей, то суперпартнёры должны рождаться.

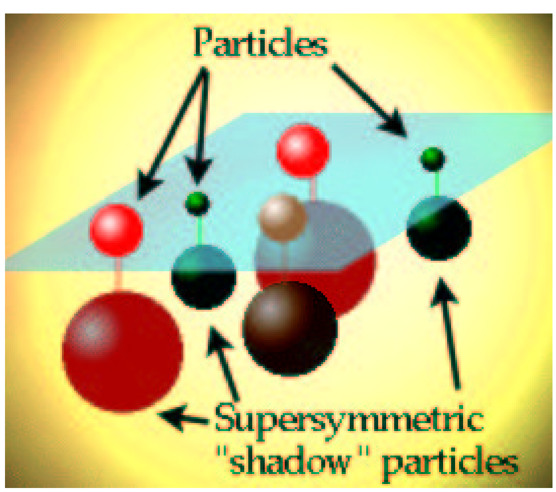

Рис. 6: Теневой мир СУСИ частиц

Состав полей МССМ выглядит следующим образом

Состав полей МССМ

С	Бозоны			Фермионы			$SU(3)$	$SU(2$	$U_Y(1)$
В									
$\mathbf{G^a}$	глюон	g^a		глюино	$\tilde{g}^a$		8	0	0
$\mathbf{V^k}$	Слабые	W^k	$(W^\pm, Z)$	вино, зино	$\tilde{w}^k$	$(\tilde{w}^\pm, \tilde{z})$	1	3	0
$\mathbf{V'}$	Гиперзаряд	B	(γ)	бино	$\tilde{b}(\tilde{\gamma})$		1	1	0
М									
$\mathbf{L_i}$	слептоны	$\tilde{L}_i = (\tilde{\nu}, \tilde{e})_L$		лептоны	$L_i = (\nu, e)_L$		1	2	-1
$\mathbf{E_i}$		$\tilde{E}_i = \tilde{e}_R$			$E_i = e_R$		1	1	2
$\mathbf{Q_i}$	скварки	$\tilde{Q}_i = (\tilde{u}, \tilde{d})_L$		кварки	$Q_i = (u, d)_L$		3	2	$1/3$
$\mathbf{U_i}$		$\tilde{U}_i = \tilde{u}_R$			$U_i = u_R^c$		3^*	1	$-4/3$
$\mathbf{D_i}$		$\tilde{D}_i = \tilde{d}_R$			$D_i = d_R^c$		3^*	1	$2/3$
Х									
$\mathbf{H_1}$	хиггс	H_1		хиггсино	$\tilde{H}_1$		1	2	-1
$\mathbf{H_2}$		H_2			$\tilde{H}_2$		1	2	1

Здесь и далее тильда обозначает суперпартнёр обычной частицы.

Присутствие дополнительного хиггсовского бозона в суперсимметричной модели есть новое свойство теории. В МССМ имеются два дублета с квантовыми числами (1,2,-1) и (1,2,1), соответственно:

$$H_1 = \begin{pmatrix} H_1^0 \\ H_1^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 + \frac{S_1 + iP_1}{\sqrt{2}} \\ H_1^- \end{pmatrix}, \; H_2 = \begin{pmatrix} H_2^+ \\ H_2^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_2^+ \\ v_2 + \frac{S_2 + iP_2}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

где v_i асуть вакуумные средние нейтральных компонент.

Следоавтельно, имеем 8=4+4=5+3 степеней свободы. Как и в случае СМ, 3 степени свободы могут быть откалиброваны и остаётся 5 физических состояний по сравнению с 1 в СМ. Поэтому в МССМ, как и любой двухдублетной модели, присутствуют пять физических хиггсовских бозонов: два нейтральных CP-чётных, один нейтральный CP-нечётный и два заряженных. Ниже мы рассмотрим собственные массовые состояния.

4.2 Лагранжиан МССМ

Лагранжиан МССМ состоит из двух частей; первая часть есть суперсимметричное обобщение Стандартной модели, а вторая представляет собой нарушение суперсимметрии, упомянутое выше.

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{SUSY} + \mathcal{L}_{Breaking}, \tag{4.1}$$

где

$$\mathcal{L}_{SUSY} = \mathcal{L}_{Gauge} + \mathcal{L}_{Yukawa} \tag{4.2}$$

и

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{Gauge} &= \sum_{SU(3),SU(2),U(1)} \frac{1}{4}\left(\int d^2\theta\ TrW^{\alpha}W_{\alpha} + \int d^2\bar{\theta}\ Tr\bar{W}^{\dot{\alpha}}\bar{W}_{\dot{\alpha}}\right) \\
&+ \sum_{Matter} \int d^2\theta d^2\bar{\theta}\ \Phi_i^{\dagger} e^{g_3\hat{V}_3 + g_2\hat{V}_2 + g_1\hat{V}_1}\Phi_i, \qquad (4.3)\\
\mathcal{L}_{Yukawa} &= \int d^2\theta\ (\mathcal{W}_R + \mathcal{W}_{NR}) + h.c. \qquad (4.4)
\end{aligned}$$

Индекс R у суперпотенциала относится к т.н. R-чётности [**?**], специальной симметрии, которая приваивает заряд "+"всем обычным частицам и заряд "$-$"их суперпартнёрам. Первая часть суперпотенциала $\mathcal{W}$ R-симметрична

$$W_R = \epsilon_{ij}(y^U_{ab}Q^j_aU^c_bH^i_2 + y^D_{ab}Q^j_aD^c_bH^i_1 + y^L_{ab}L^j_aE^c_bH^i_1 + \mu H^i_1H^j_2), \tag{4.5}$$

где $i, j = 1, 2, 3$ суть индексы группы $SU(2)$, а $a, b = 1, 2, 3$ - индексы поколений; цветовые индексы опущены. Эта часть лагранжиана почти полностью повторяет СМ за исключением того, что поля теперь- это суперполя, а не обычные поля СМ. Единственная разница состоит в том последнем члене, который описывает смешивание хиггсовских полей. Он отсутствует в СМ, поскольку там имеется только один хиггсовский дублет.

Вторая часть суперпотенциала R-несимметрична

$$W_{NR} = \epsilon_{ij}(\lambda^L_{abd}L^i_aL^j_bE^c_d + \lambda^{L\prime}_{abd}L^i_aQ^j_bD^c_d + \mu'_aL^i_aH^j_2) + \lambda^B_{abd}U^c_aD^c_bD^c_d. \tag{4.6}$$

Эти члены отсутствуют в СМ. Причина проста: невозможно заменить суперполя в ур.(4.6) на обычные поля, как в ур.(4.5) из-за требования лоренц инвариантности. Эти (первые три слагаемых в ур.(4.6)) или барионное (последнее слагаемое). Так как оба эффекта не наблюдаются в природе, то эти члены должны быть подавлены или исключены. Можно избавиться от таких членов, введя специальную симметрию, называемую R-симметрией. Это есть глобальная $U(1)_R$ симметрия

$$U(1)_R: \quad \theta \to e^{i\alpha}\theta, \quad \Phi \to e^{in\alpha}\Phi, \tag{4.7}$$

которая редуцируется до дискретной подгруппы Z_2, называемой R-чётностью. Квантовые числа по R-чётности для частиц спина S выглядят как $R = (-1)^{3(B-L)+2S}$ Следовательно, все обычные частицы имеют R-чётность $R = +1$, в то время как суперпартнёры имеют R-четность $R = -1$. R-чётность очевидно запрещает W_{NR} часть суперпотенциала. Однако, вполне возможно, что эти члены присутствуют, хотя экспериментальные пределы на такие константы связи весьма жёстки

$$\lambda^L_{abc}, \quad \lambda^{L\prime}_{abc} < 10^{-4}, \qquad \lambda^B_{abc} < 10^{-9}.$$