Дополнение к главам 1 и 2.

Здесь мы приведем ряд полезных формул, иллюстрирующих наш подход к теории струны в евклидовом пространстве времени. Прежде всего определим двумерную метрику $g^{\alpha\beta}$ через вайлбайны e_i^α $(\alpha, \beta, i = 1, 2)$

$$(g^{-1})_{\alpha\beta} \equiv g^{\alpha\beta} = \sum_i e_i^\alpha \, e_i^\beta \quad , \quad det(g^{-1}) = det^{-1}(g) = (det\, e)^2 \, . \tag{2.7.1}$$

Рассмотрим теперь теорию бозонной струны (во внешнем гравитационном $h^{\mu\nu}(x)$ и антисимметричном $B^{\mu\nu}(x)$ полях) с действием

$$S = \int_M d^2\xi \, \left\{ \sqrt{g} \, g^{\alpha\beta} \, \partial_\alpha x_\mu(\xi) \; \partial_\beta x_\nu(\xi) \, h^{\mu\nu}(x(\xi)) + \epsilon^{\alpha\beta} \, \partial_\alpha x_\mu(\xi) \, \partial_\beta x_\nu(\xi) \, B^{\mu\nu}(x(\xi)) \right\} \, . \tag{2.7.2}$$

Здесь $\mu, \nu, \lambda = 0, \ldots, D-1$ – пространственно временной индексы (мы будем иногда опускать их в формулах) и $g = det(g)$. Уравнения движения, вытекающие из (2.7.2), в случае выполнения граничных условий (которые в свою очередь задают уравнения движения для концов открытой струны)

$$0 = \int_{\partial M} d\xi^\gamma \, \epsilon_{\gamma\alpha} \, \left\{ \sqrt{g} \, g^{\alpha\beta} \, \partial_\beta x_\nu \, h^{\mu\nu} + \epsilon^{\alpha\beta} \, \partial_\beta x_\nu \, B^{\mu\nu} \right\} \delta x_\mu \; ,$$

имеют вид

$$\begin{aligned} &\tfrac{1}{2} \, g_{\alpha\beta} \, (\partial_\gamma \, x_\mu \, \partial^\gamma \, x_\nu) \, h^{\mu\nu}(x) - \partial_\alpha \, x_\mu \, \partial_\beta \, x_\nu \, h^{\mu\nu}(x) = 0 \;\Rightarrow \\ &\tfrac{1}{2} \, \left(g_{\alpha\beta} \, g^{\gamma\delta} - \delta_\alpha^\gamma \, \delta_\beta^\delta - \delta_\beta^\gamma \, \delta_\alpha^\delta \right) \, \partial_\gamma \, x_\mu \, \partial_\delta \, x_\nu \, h^{\mu\nu}(x) = 0 \end{aligned} \tag{2.7.3}$$

$$2 \, \partial_\alpha \, \left(\sqrt{g} \, g^{\alpha\beta} \, \partial_\beta x_\nu \right) \, h^{\mu\nu} + \sqrt{g} \, \partial^\beta x_\lambda \, \partial_\beta x_\nu \, \Gamma^{\mu,\lambda\nu} + \epsilon^{\alpha\beta} \, \partial_\alpha x_\lambda \, \partial_\beta x_\nu \, H^{\mu\nu\lambda} = 0 \, . \tag{2.7.4}$$

Здесь $\partial^\alpha x_\lambda = g^{\alpha\beta} \, \partial_\beta x_\lambda$ и

$$\Gamma^{\mu,\lambda\nu}(x) = \partial^\lambda \, h^{\mu\nu} + \partial^\nu \, h^{\mu\lambda} - \partial^\mu \, h^{\lambda\nu} \; ,$$

$$H^{\mu\nu\lambda}(x) = \partial^\lambda \, B^{\mu\nu} + \partial^\nu \, B^{\lambda\mu} + \partial^\mu \, B^{\nu\lambda} \, .$$

Для получения уравнения (2.7.3) мы воспользовались равенством

$$\frac{\delta \, det(g)}{\delta \, g_{\alpha\beta}} = det(g) \, g^{\alpha\beta} \; , \tag{2.7.5}$$

которое справедливо для любого числа измерений. Эту формулу можно доказать следующим образом. Детерминант $det(g)$ в n мерном пространстве определяется в виде

$$\epsilon^{\alpha_1 \ldots \alpha_n} \, g_{\alpha_1\beta_1} \ldots g_{\alpha_n\beta_n} = det(g) \, \epsilon_{\beta_1 \ldots \beta_n} \, .$$

Т.о. мы имеем

$$det(g) = \frac{1}{n!} \, \epsilon^{\alpha_1 \ldots \alpha_n} \, g_{\alpha_1\beta_1} \ldots g_{\alpha_n\beta_n} \, \epsilon^{\beta_1 \ldots \beta_n} \; ,$$

где мы воспользовались равенством $\epsilon^{\alpha_1 \ldots \alpha_n} \, \epsilon_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} = n!$, которое доказывается по индукции. Далее следует (2.7.5)

$$\frac{\delta \, det(g)}{\delta \, g_{\alpha\beta}} = \frac{1}{(n-1)!} \, \epsilon^{\alpha\alpha_2 \ldots \alpha_n} \, g_{\alpha_2\beta_2} \ldots g_{\alpha_n\beta_n} \, \epsilon^{\beta\beta_2 \ldots \beta_n} = g^{\alpha\beta} det(g) \; ,$$

где для доказательства последнего равенства необходимо учесть, что

$$\left(\epsilon^{\alpha\alpha_2\ldots\alpha_n}\, g_{\alpha_2\beta_2}\cdots g_{\alpha_n\beta_n}\, \epsilon^{\beta\beta_2\ldots\beta_n}\right)\, g_{\alpha\gamma} = det(g)\, \epsilon_{\gamma\beta_2\ldots\beta_n}\, \epsilon^{\beta\beta_1\ldots\beta_n} = (n-1)!\, \delta^\beta_\gamma\, det(g)\ .$$

Введем комплексные комбинации вайлбайнов $e^\alpha_\pm = e^\alpha_1 \pm i\, e^\alpha_2$, тогда метрика представляется в виде

$$g^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\, \left(e^\alpha_+\, e^\beta_- + e^\alpha_-\, e^\beta_+\right)\ ,\quad \sqrt{det(g)} = \frac{2\, i}{e^2_+\, e^1_- - e^2_-\, e^1_+}\ .$$

Отметим здесь, что число независимых компонент у метрики $g^{\alpha\beta}$ равно трем, а у вайлбайна $e^\alpha_\pm$ равно четырем. Для того, чтобы сравнять число независимых компонент, мы должны рассматривать классы эквивалентности вайлбайнов по отношению к действию группы $U(1)$

$$e^\alpha_\pm \to \exp(\pm i\phi(\xi))\, e^\alpha_\pm\ . \tag{2.7.6}$$

Введем также комплексные производные

$$\begin{aligned} \partial_+ &= e^\alpha_+\partial_\alpha = e^1_+\ (\partial_1 + f\, \partial_2)\ , \\ \partial_- &= e^\alpha_-\partial_\alpha = e^1_-\ \left(\partial_1 + \overline{f}\, \partial_2\right)\ , \end{aligned} \tag{2.7.7}$$

где мы использовали проективные координаты

$$f = \frac{e^2_+}{e^1_+}\ ,\quad \overline{f} = \frac{e^2_-}{e^1_-}\ , \tag{2.7.8}$$

которые являются инвариантами относительно преобразований (2.7.6). Заметим, что выбор обозначений для комплексных производных (2.7.7) соответствует "выбору" коплексных координат $z_\pm = \frac{1}{2}(\xi^1 \mp i\, \xi^2)$. Это можно увидеть, положив $e^\alpha_i = \delta^\alpha_i$, при этом

$$\partial_\pm = \frac{\partial}{\partial z_\pm}\ ,\quad \xi^\alpha\, \partial_\alpha = z^+\, \partial_+ + z^-\, \partial_-\ ,\quad \xi^1 = z_+ + z_-\ ,\ \ \xi_2 = i\, (z_+ - z_-)\ .$$

В терминах функций f и $\overline{f}$ метрика имеет вид

$$\sqrt{det(g)}\, g^{\alpha\beta} = \frac{2\, i}{f - \overline{f}} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}(f+\overline{f}) \\ \frac{1}{2}(f+\overline{f}) & f\, \overline{f} \end{pmatrix}\ . \tag{2.7.9}$$

Очевидно, что

$$det^{-1/2}(g)\, g_{\alpha\beta} = \frac{2\, i}{f - \overline{f}} \begin{pmatrix} f\, \overline{f} & \frac{-1}{2}(f+\overline{f}) \\ \frac{-1}{2}(f+\overline{f}) & 1 \end{pmatrix}\ ,$$

и соответственно форма метрики может быть представлена как

$$\begin{aligned} d^2\, s = g_{\alpha\beta}\, d\xi^\alpha\, d\xi^\beta &= \sqrt{det(g)}\, \frac{2i}{f - \overline{f}}\ \left(d\xi^2 - f\, d\xi^1\right)\, \left(d\xi^2 - \overline{f}\, d\xi^1\right) = \\ &= i\, \sqrt{det(g)}\, \frac{|i - f|^2}{2(f - \overline{f})}\ |dz_- + \mu\, dz_+|^2\quad ,\quad \mu = \frac{f + i}{f - i}\ . \end{aligned}$$

где μ является $(1,-1)$ - формой при конформных преобразованиях $z_+ \to h(z_+)$ (т.е. $\mu dz_+/dz_-$ инвариантно) и называется коэффициентом Бельтрами.

В новых обозначениях уравнение (2.7.4) (в случае $\Gamma^{\lambda,\mu\nu}=0$, $H^{\mu\nu\lambda}=0$) можно переписать следующим образом

$$\partial_\alpha \left(\frac{1}{det(e)} \left(e_-^\alpha \, \partial_+ + e_+^\alpha \, \partial_- \right) x_\mu(\xi) \right) = 0 \; . \tag{2.7.10}$$

Заметим, что случай $H^{\mu\nu\lambda}=0$ (когда матрица $B^{\mu\nu}$ невырождена) соответствует симплектической геометрии с симплектической формой $\Omega = B^{\mu\nu} dx_\mu \wedge dx_\nu$. Рассмотрим функции $Z_\pm$, которые являются решениями уравнений Бельтрами

$$e_+^\alpha \partial_\alpha \, Z_- = \partial_+ \, Z_- = 0 \quad , \quad e_-^\alpha \partial_\alpha \, Z_+ = \partial_- \, Z_+ = 0 \; . \tag{2.7.11}$$

Для этих функций мы имеем тождество

$$\frac{1}{det(e)} \, e_\mp^\alpha \, \partial_\pm \, Z_\pm = \pm 2 \, i \, \mathcal{E}^{\alpha\beta} \, \partial_\beta \, Z_\pm \quad , \quad (\mathcal{E}^{12} = 1) \; ,$$

которое эквивалентно уравнениям

$$\left(\sqrt{det(g)} \, g^{\alpha\beta} \mp i \, \mathcal{E}^{\alpha\beta} \right) \, \partial_\beta \, Z_\pm = 0 \; .$$

Возникшие здесь проектора могут быть записаны в виде (это следует из (2.7.9))

$$\sqrt{det(g)} \, g^{\alpha\beta} \pm i \, \mathcal{E}^{\alpha\beta} = \sqrt{det(g)} \, e_\mp^\alpha \, e_\pm^\beta \; .$$

Таким образом общее решение уравнения (2.7.4), (2.7.10) может быть записано в виде

$$x_\mu(\xi) = x_\mu^{(+)}(Z_+) + x_\mu^{(-)}(Z_-) \quad ,$$

где $x^{(\pm)}(.)$ - произвольные функции на римановой поверхности топологически эквивалентной мировой поверхности струны (более точно $x^{(\pm)}(.)$ являются абелевыми интегралами 3-его рода [64]).

Канонический импульс имеет вид

$$p^\mu = \frac{1}{2} \, \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_1 x_\mu} = \sqrt{g} \, g^{1\beta} \, \partial_\beta x_\nu \, h^{\mu\nu} + \partial_2 x_\nu \, B^{\mu\nu} \; . \tag{2.7.12}$$

Прямым вычислением проверяется, что уравнения (2.7.3) представляются в виде

$$T_{\pm\pm} = (P^\mu \pm i \, x'_{\mu'} \, h^{\mu\mu'}) \, h_{\mu\lambda} \, (P^\lambda \pm i \, x'_{\lambda'} \, h^{\lambda\lambda'}) = 0 \; ,$$

где $x'_\mu = \partial_2 x_\mu$ и $P^\mu = p^\mu - x'_\nu \, B^{\mu\nu}$. Для скобки Пуассона

$$\{ x_\mu(\xi), \, p^\nu(\xi') \} = \{ x_\mu(\xi), \, P^\nu(\xi') \} = \delta_\mu^\nu \, \delta(\xi - \xi') \; ,$$

получаем

$$\{ P^\mu(\xi), \, P^\nu(\xi') \} = x'_\rho \, H^{\rho\nu\mu} \, \delta(\xi - \xi') \; .$$

Заметим теперь, что общекоординатные преобразования для вайлбайнов можно записать в виде

$$e^\alpha \, \partial_\alpha \longrightarrow \exp(\phi^\beta \, \partial_\beta) \, e^\alpha \, \partial_\alpha \, \exp(-\phi^\beta \, \partial_\beta) \tag{2.7.13}$$

где $\phi^\beta(\xi)$ инфинитезимальные параметры преобразования координат (задающие векторные поля на двумерной поверхности)

$$\xi^\beta \to X^\beta(\xi) = \exp(\phi^\alpha \, \partial_\alpha) \cdot \xi^\beta = \xi^\beta + \phi^\beta(\xi) + \dots \; .$$

$$d\xi^\beta \to dX^\beta(\xi) = d\xi^\beta + d\xi^\alpha \, \partial_\alpha(\phi^\beta) + \dots \quad , \quad \partial_\alpha \to \partial_\alpha - \partial_\alpha(\phi^\beta) \, \partial_\beta + \dots \; .$$

Из формулы (2.7.13) мы выводим правило преобразования вектора

$$\delta e^\alpha = \phi^\beta \, \partial_\beta(e^\alpha) - e^\beta \, \partial_\beta(\phi^\alpha) \equiv \mathcal{L}_\phi(e^\alpha) \; . \qquad (2.7.14)$$

Заметим, что из преобразования дифференциальной 1-формы

$$d\xi^\alpha \, \omega_\alpha \to d \, \Big(\exp(\phi^\beta \, \partial_\beta) \cdot \xi^\alpha\Big) \, \{\exp(\phi^\beta \, \partial_\beta) \, \omega_\alpha \, \exp(-\phi^\beta \, \partial_\beta)\} \; ,$$

мы получаем правило

$$\delta \omega_\alpha = \phi^\beta \, \partial_\beta(\omega_\alpha) + \omega_\beta \, \partial_\alpha(\phi^\beta) \equiv \mathcal{L}_\phi(\omega_\alpha) \; , \qquad (2.7.15)$$

что естественно дает $\delta(\omega_\alpha \, e^\alpha) = \phi^\beta \, \partial_\beta \, (\omega_\alpha \, e^\alpha)$. На самом деле правые части уравнений (2.7.14) и (2.7.15) совпадают с производными Ли векторного поля e^α и дифференциальной формы ω_α вдоль векторного поля $\{\phi^\alpha\}$. Ясно, что общая формула для производной Ли вдоль поля ϕ^α для произвольного (p,q)-тензора вида $T^{\alpha_1 \dots \alpha_p}_{\beta_1 \dots \beta_q}$ может быть получена из преобразования

$$T(\xi)^{\alpha_1 \dots \alpha_p}_{\beta_1 \dots \beta_q} \to T(X)^{\gamma_1 \dots \gamma_p}_{\rho_1 \dots \rho_q} \, \prod_{i=1}^{p} \frac{\partial \xi^{\alpha_i}}{\partial X^{\gamma_i}} \, \prod_{j=1}^{q} \frac{\partial X^{\rho_j}}{\partial \xi^{\beta_j}} \; .$$

В частности для метрики $g_{\alpha\beta}$ имеем

$$\mathcal{L}_\phi(g_{\alpha\beta}) = \phi^\gamma \, \partial_\gamma g_{\alpha\beta} + g_{\gamma\beta} \, \partial_\alpha \phi^\gamma + g_{\alpha\gamma} \, \partial_\beta \phi^\gamma \; ,$$

и поле ϕ^α называется векторным полем Киллинга, если $\mathcal{L}_\phi(g_{\alpha\beta}) = 0$.

Используя преобразование (2.7.14), мы можем найти преобразование комплексных функций $f, \overline{f}$. Действительно для f (2.7.8) мы имеем

$$\begin{gathered} \delta f = \phi^\beta \partial_\beta(f) - (\partial_1 + f \partial_2)\phi^2 + f \, (\partial_1 + f \partial_2)\phi^1 = \\ = (\phi^2 - f \, \phi^1) \; \partial_2 \, (f) - f \, \partial_2 \; (\phi^2 - f \, \phi^1) - \partial_1 \, (\phi^2 - f \, \phi^1) \Rightarrow \end{gathered} \qquad (2.7.16)$$

$$\Rightarrow \Big[(\phi^2 - f \, \phi^1) \, \partial_2, \; \partial_1 + f \, \partial_2\Big] = \delta(\partial_1 + f \, \partial_2) \; . \qquad (2.7.17)$$

Отсюда вытекает глобальное преобразование для f

$$(\partial_1 + f \, \partial_2) \to \exp(\epsilon \, \partial_2) \, (\partial_1 + f \, \partial_2) \, \exp(-\epsilon \, \partial_2) \; , \;\; \epsilon \equiv \phi^2 - f \, \phi^1 \; , \qquad (2.7.18)$$

и аналогично для $\overline{f}$ мы имеем (что можно получить комплексным сопряжением)

$$(\partial_1 + \overline{f} \, \partial_2) \to \exp(\overline{\epsilon} \, \partial_2) \, (\partial_1 + \overline{f} \, \partial_2) \, \exp(-\overline{\epsilon} \, \partial_2) \; , \;\; \overline{\epsilon} \equiv \phi^2 - \overline{f} \, \phi^1 \; . \qquad (2.7.19)$$

Здесь $\epsilon(\xi)$ и $\overline{\epsilon}(\xi)$ являются новыми параметрами координатных преобразований вместо ϕ^α. Согласно (2.7.18), (2.7.19) и из уравнений Бельтрами (2.7.11) следует, что функции $Z_\pm(\xi)$ преобразуются по правилам

$$Z_- \to \exp(\epsilon \, \partial_2) \, Z_- \quad , \quad Z_+ \to \exp(\overline{\epsilon} \, \partial_2) \, Z_+ \; . \qquad (2.7.20)$$

Из (2.7.16) можно получить, что

$$\delta(\tfrac{1}{f}) = \left(\phi^1 - \tfrac{1}{f}\,\phi^2\right)\,\partial_1\,(\tfrac{1}{f}) - \tfrac{1}{f}\,\partial_1\,\left(\phi^1 - \tfrac{1}{f}\,\phi^2\right) - \partial_2\,(\phi^1 - \tfrac{1}{f}\,\phi^2) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (\partial_2 + \tfrac{1}{f}\,\partial_1) \to \exp(\nu\,\partial_1)\,(\partial_2 + \tfrac{1}{f}\,\partial_1)\,\exp(-\nu\,\partial_1)\;,\;\; \nu \equiv \phi^1 - \tfrac{1}{f}\,\phi^2\;, \tag{2.7.21}$$

Рассмотрим объект

$$\omega_\pm = d\xi^1\,\frac{e^2_\pm}{e^1_\pm}\,\partial_2 + d\xi^2\,\frac{e^1_\pm}{e^2_\pm}\,\partial_1 = -d + d\xi^1\,(\partial_1 + f_\pm\,\partial_2) + d\xi^2\,(\partial_2 + \frac{1}{f_\pm}\,\partial_1)\;,$$

где $f_+ = f$, $f_- = \overline{f}$, и изучим его поведение при общекоординатных преобразованиях.

Будем теперь считать, что ξ^1 является параметром эволюции, а ξ^2 – параметром на замкнутой струне. Это значит, что линии уровня $\xi^1 = const$ образуют набор замкнутых контуров. Напомним, что на начальной $\xi^1 = 0$ и конечной $\xi^1 = T$ линиях параметры преобразований ϵ, $\overline{\epsilon}$ не произвольны, а удовлетворяют соотношениям

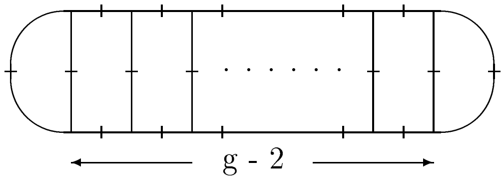
$$\epsilon(0,\xi^2) = \overline{\epsilon}(0,\xi^2)\;\;,\;\;\; \epsilon(T,\xi^2) = \overline{\epsilon}(T,\xi^2)\;, \tag{2.7.22}$$

которые эквивалентны тому, что функции $\epsilon(\xi)$ при $\xi^1 = 0, T$ являются вещественными. Т.к. $f = (g^{12} + i\,det(e))/g^{11}$, то условие вещественности ϵ имеет вид $det(e)\,\phi^1/g^{11} = 0$, откуда мы заключаем, что на линиях $\xi^1 = 0, T$ необходимо положить $\phi^1 = 0$ и соответственно вся замена координат сводится лишь к перепараметризации граничных контуров.

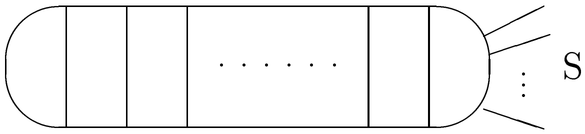
———————————————-

Пространство Тейхмюллера и гиперэллиптические кривые

Рассмотрим поверхность с $g > 1$- ручками (g- петель в диаграмме)



черточками обозначены необходимые разрезы поверхности на $2(g-1)$- панталон (= числу вершин в диаграмме). Число таких разрезов очевидно равно $3(g-1)$ (= комплексной размерности пространства Тейхмюллера). Если у поверхности имеются n- дырок, то соответствующая диаграмма имеет n- внешних концов



Число вершин у такой диаграммы равно $2(g-1)+S$, а число разрезов на панталоны равно $3(g-1)+S$.

Введем теперь координаты на пространстве Тейхмюллера, которые называются координатами Фенхеля-Нильсена. Разрезаем данную поверхность с S дырками на панты по $3(g-1)+S$ геодезическим C_i. Пусть длины этих геодезических равны l_i ($i = 1, \dots, 3(g-1)+S$), а длины дырок равны l_α ($\alpha = 1, \dots, S$). Известно, что пространство Тейхмюллера для пантов является вещественным трехмерным пространством и в качестве параметров на нем можно выбрать длины границ (см. [2*] У.Абикоф "Вещественно аналитическая теория пространства Тейхмюллера"). Пусть исходная поверхность допускает параметризацию такую, что некоторые из координатных линий, скажем линии $\xi_1 = const$, совпадают с разрезами и дырками. После этого склеиваем исходную поверхность снова по разрезам, но сдвигая параметризацию по линиям $\xi_2 = const$ на некоторые углы θ_i. Вещественные координаты $\{l_i, \theta_i, l_\alpha\}$ $6(g-1)+3\,S$ - мерного пространства называются координатами Фенхеля-Нильсена.

Ясно, что имеются классы гомотопных параметризаций, которые получаются друг из друга непрерывной деформацией (диффеоморфизмами). Негомотопные параметризации получаются разрезанием какой-либо ручки по геодезической на два рукава, затем непрерывной деформацией параметризации на одном из рукавов на угол 2π и склеиванием оставшегося рукава с первым, свернутым на 2π, рукавом.

Рассмотрим гиперэллиптическую кривую ($a_i \neq a_j$ если $i \neq j$)

$$y^2 = (z-a_1)\,(z-a_2)\cdots(z-a_{2(g+1)})\;, \tag{3.0.23}$$

которая соответствует двумерной поверхности рода g (сфера с g ручками). Действительно риманова поверхность (3.0.23) представляет собой двулистную поверхность. Каждый из листов имеет свою бесконечную точку $z_\pm = \infty$ и разрезан по $g+1$ отрезкам (a_1, a_2), $(a_3,\, a_4)$ и т.д., т.е. каждый из листов является сферой с $g+1$ разрезами. Т.о. риманова поверхность кривой (3.0.23) является результатом склейки двух сфер по $g+1$ разрезам, что эквивалентно двумерной поверхности рода g.

Нашей целью является построение голоморфных квадратичных дифференциалов $\omega = f(z)\,(dz)^2$ на поверхности вида (3.0.23). Будем рассуждать аналогично тому как строятся на поверхности (3.0.23) голоморфные 1-дифференциалы (см. книгу [1*] С.П.Новиков и др. "Теория солитонов ..."). Заметим, что ω может иметь особенности только в точках ветвления кривой (3.0.23), а также в других особых точках функции $f(z)$. Р-м поведение $f(z)\,(dz)^2$ в точках ветвления. В этих точках хорошей локальной координатой является координата y (действительно из рассмотрения параболы $y^2 = z$ сразу же следует, что в точке $z = 0$ хорошей координатой является координата y; см. также книгу [1*]). Продифференцируем (3.0.23) в окресности какой-нибудь точки ветвления a_i

$$2\,y\,dy = c_1\,dz + c_2\,(z-a_i)\,dz + \ldots \Rightarrow dy \sim \frac{dz(y)}{y}\;, \tag{3.0.24}$$

где c_i некоторые константы. Т.о. в окрестности точек ветвления ($y = 0$) голоморфный 2-дифференциал может иметь вид

$$f(z)y^{-2}(dz)^2 \ , \ \ f(z)y^{-1}(dz)^2 \ , \ \ f(z)(dz)^2 \ , \dots \ ,$$

где $f(z)$ не должна иметь полюсов и, т.о., является целой функцией $f(z) = a + b\,z + c\,z^2 + \dots$. Следовательно, остается изучить поведение базисных 2-дифференциалов

$$\omega_{k,m} = \frac{z^{k-1}\,(dz)^2}{y^m} \ , \quad (k = 1,\, 2, \dots \ ; \ \ m = 2,\, 1,\, 0, \dots) \ , \tag{3.0.25}$$

только в окрестности бесконечной точки $z = \infty$. Т.к. эта точка не является точкой ветвления (она была бы таковой, если бы мы рассматривали гиперэллиптическую кривую (3.0.23) с нечетным числом нулей $a_1, \dots, a_{2g+1}$), то в ее окрестности мы можем взять локальную координату E такую, что $z = 1/E$ (заметим, что в случае нечетного числа нулей локальная координата в точке ветвления $z = \infty$ выбирается с помощью замены $z = 1/\sqrt{E}$; см. книгу [1*]). При этом, когда $z \to \infty$, то $E \to 0$, и соответствующее поведение дифференциала (3.0.25) задается формулой ($y \sim z^{g+1} \sim E^{-(g+1)}$ при $z \to \infty,\ E \to 0$)

$$\omega_{k,m} \to E^{1-k}\,E^{-4}\,E^{m(g+1)}\,(dE)^2 \ . \tag{3.0.26}$$

Отсюда следует, что $m(g+1) - 3 - k \geq 0$, т.е. $k \leq m(g+1) - 3$ и из условия $1 \leq k$ мы имеем $4 \leq m(g+1)$. Т.к. $k \geq 1$ и $m \leq 2$ (см. (3.0.25)), то окончательно мы получаем следующий набор базисных голоморфных квадратичных дифференциалов

$$\begin{array}{r|c} g = 0 & \text{дифференциалов нет} \ , \\[2ex] g = 1 & m = 2 \Rightarrow k = 1 \Rightarrow \omega = y^{-2}\,(dz)^2 \ \ , \\[2ex] g \geq 2 & m = 2 \Rightarrow \omega_{k,2} = z^{k-1}\,y^{-2}\,(dz)^2 \ \ , \quad (k = 1,\, 2, \dots, 2(g+1) - 3) \ , \\[2ex] & m = 1 \Rightarrow \omega_{k,1} = z^{k-1}\,y^{-1}\,(dz)^2 \ \ , \quad (k = 1,\, 2, \dots, (g+1) - 3) \ , \end{array} \tag{3.0.27}$$

и, следовательно, мы получаем классический результат, что число базисных голоморфных квадратичных дифференциалов для $g = 0$ равно нулю, для $g = 1$ равно 1, а для $g \geq 2$ равно

$$[2(g+1) - 3] + [(g+1) - 3] = 3(g-1) \ .$$

Аналогично можно наити общую формулу для числа базисных голоморфных n-дифференциалов. Вместо формулы (3.0.25) мы имеем

$$\omega^{(n)}_{k,m} = \frac{z^{k-1}\,(dz)^n}{y^m} \ \ , \quad (k \geq 1\ ; \ \ m \leq n) \ . \tag{3.0.28}$$

Поведение этих дифференциалов в точке $z = 1/E = \infty$, $E = 0$ имеет вид

$$\omega_{k,m} \to E^{1-k}\,E^{-2n}\,E^{m(g+1)}\,(dE)^n \ . \tag{3.0.29}$$

Соответственно мы имеем $1 - k - 2n + m(g+1) \geq 0$, т.е.

$$1 \leq k \leq 1 - 2n + m(g+1) \Rightarrow \frac{2n}{g+1} \leq m \leq n \ . \tag{3.0.30}$$

Т.о. размерность d пространства голоморфных n-дифференциалов ($n > 0$) равна (для достаточно больших g)

$$d = [1 - 2n + (g+1)] + \ldots + [1 - 2n + n(g+1)] = n\,(1-2n) + \frac{n(n+1)}{2}\,(g+1) =$$
$$= \frac{n(n+1)}{2}\,g - \frac{3}{2}\,n\,(n-1)\ .$$

Как забавное следствие условия $d > 0$ мы имеем ограничение на род поверхности $g > 3(n-1)/(n+1)$ (т.е. для $g = 2$ допустимы только голоморфные дифференциалы с $n = 1, \ldots, 4$; для $g = 3, \ldots$ допустимы все дифференциалы).

Заметим, что для $n = 0$ (голоморфные функции) мы получаем из (3.0.30) единственное константное решение $m = 0$, $k = 1$, а для $n = -1$ мы имеем размерность голоморфных векторных полей ???

$$g = 0,\ \ m = -2 \Rightarrow k = 1,\ \ m = -1 \Rightarrow k = 1, 2\ \ ,$$
$$g = 1,\ \ m = -1 \Rightarrow k = 1\ \ ,$$

и для $g \geq 2$ решений нет.

Если мы хотим изучить мероморфные дифференциалы (функции $f(z)$ имеют полюса) и получить теорему Римана-Роха для гиперэлиптических кривых, то поведение дифференциалов во всех полюсах $f(z)$ необходимо рассматривать также как мы рассматривали выше поведение ω в точке $z = \infty$.

Рассмотрим граф G с S- вершинами, R- ребрами, T- гранями (треугольниками). Очевидно, что $T/2 = R/3 \equiv k$. Эйлерова характеристика дается формулой $S - R + T = 2(1-g)$, где g- род двумерной поверхности, триангуляция которой дается графом G. Т.о. мы имеем $2 - 2g - S = -k$ и число ребер равно $3k = 6(g-1) + 3S$, что соответствует числу координат Фенхеля-Нильсена. Обозначим длины ребер как l_α. Вычитая из числа ребер число вершин S, т.е. рассматривая фактор-пространство $\{l_\alpha\}/r_s$, где числа r_s ($s = 1, \ldots, S$) ассоциированы с вершинами, мы получаем пр-во Тейхмюллера с четной размерностью $6(g-1) + 2S$, на котором можно ввести симплектическую форму Вейля. На самом деле струнный ленточный граф (ribbon graph) G^* является дуальным к графу G, который определяет триангуляцию двумерной поверхности и, очевидно, соответствие между ними следующее: $S^* = T$ (все новые вершины являются тройными), $T^* = S$, $R^* = R$, т.е. число ребер сохраняется, а число вершин и граней переходят друг в друга. Если мы начнем увеличивать ширину лент и стягивать дырки (грани T^*) в точки, то граф G^* превращается в замкнутую поверхность рода g с S дырками, размерность пр-ва Тейхмюллера которой равна $6(g-1)+2S$. Т.о. данная процедура стягивания T^* в точки и соответствует фактору по r_s. (см. R.Dijkgraaf, "Intersection Theory, Integrable Hierarchies and Topological Field Theory", New Symmetry in Quantum Field Theory, Ed. J.Frolich et al., Plenum Press, N.Y., 1992).

Нелинейные $sigma$-модели, кэллеровы пространства и суперсимметрия

$\phi^\mu(x)$: пространство-время $R^D \to \mathcal{M}$, где $\mathcal{M}$ тагет-многообразие с метрикой $g^{\mu\nu}(\phi)$. Действие имеет вид

$$S = \int dx\, \partial\phi^\mu\, \partial\phi^\nu\, g_{\mu\nu}(\phi) + \ldots$$

SUSY требует специальную геометрию для многообразия $\mathcal{M}$.

$$\begin{aligned} 2D: N=1 \ &\to Riemann\ \ Geometry \\ 2D: N=2 \ &\to Kaller\ \ Geometry \\ 2D: N=3(4) \ &\to hyper-Kaller\ \ Geometry \\ 4D: N=1 \ &\to Kaller\ \ Geometry \\ 4D: N=2 \ &\to hyper-Kaller\ \ Geometry \\ 4D,\ \ N \ &\to 2D,\ \ 2N\ \ (dim.\ \ reduction) \end{aligned}$$

Для того, чтобы описать кэллерову геометрию необходимо ввести паралельную комплексную структуру $I^\mu_\nu(\phi)$. Данный тензор должен удовлетворять условиям

$$1.)\ I^2 = I^\mu_\nu\, I^\nu_\lambda = -1^\mu_\lambda\ , \quad 2.)\ g_{\lambda\rho}\, I^\lambda_\nu\, I^\rho_\mu = g_{\nu\mu}\ , \quad 3.)\ \nabla_\mu\, I^\nu_\mu = 0\ . \tag{4.0.31}$$

Ясно, что такой тензор можно ввести только в четномерном пространстве $D = 2n$. Третье условие эквивалентно тождеству $d\,\omega = 0$, где 2-форма $\omega = 1/2\,\omega_{\mu\nu}\, d\phi^\mu\, d\phi^\nu$ и $\omega_{\mu\nu} = g_{\mu\lambda}\, I^\lambda_\nu = -\omega_{\nu\mu}$. Форма ω называется кэллеровской. Выберем локальные комплексные координаты в которых

$$I^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} i\,1 & 0 \\ 0 & -i\,1 \end{pmatrix}\ , \quad \phi^\mu = (z^i,\ \overline{z}^{\overline{j}})\ ,$$

$(\mu = i,\ \overline{j})$. Тогда второе условие из (4.0.31) эквивалентно $g_{ij} = g_{\overline{i}\overline{j}} = 0$, а третье условие дает $g_{i\overline{j}} = \partial_i \partial_{\overline{j}} K(z, \overline{z})$, где K - кэллеров потенциал.

Итак, $2D,\ N = 1$ SUSY не требует комплексной структуры, $2D,\ N = 2$ SUSY требует одну комплексную структуру, $2D,\ N = 3(4)$ SUSY требует две антикоммутирующие комплексные структуры.

$$I^2 = J^2 = -1\ , \quad I\,J = -J\,I\ .$$

Однако при этом сразу возникает третья комплексная структура $K = I \cdot J$, $K^2 = -1$, которая и дает эквивалентность $2D,\ \ N = 3$ SUSY и $2D,\ \ N = 4$ SUSY. Очевидно, что $E_a = (I, J, K)$ образует кватернионную алгебру $E_a\, E_b = \epsilon_{abc}\, E_c - \delta_{ab}$ и соответственно пространство имеет размерность $D = 4n$. Кватернионная алгебра обладает только одним неприводимым комплексным представлением размерности 2 и соответственно вещественным представлением размерности 4.

Несколько замечаний о гипер-кэллеровой геометрии.

1.) Многообразие $\mathcal{M}^{4n}$ является гипер-кэллеровым если оно обладает тремя паралельными комплексными структурами, образующими кватернионную алгебру. На самом деле это означает, что число комплексных структур бесконечно, т.к. можно выбрать $E = \sum_{a=1}^3 c_a\, E_a$, где $E^2 = -1$ дает $\sum c_a^2 = 1$, т.е. c_a определяют сферу S^2. Другими словами комплексные структуры соответствуют точкам на двумерной сфере. Т.о. мы можем рассматривать расширенное пространство $\mathcal{M}^{4n} \times S^2$

2.) Группа голономий $\mathcal{M}^{4n}$ принадлежит группе $Sp(n) = USp(2n) \in U(2n)$. Напомним, что $U(m)$ есть группа голономий общего кэллерова многообразия с комплексной размерностью m. Группа голономий определяется как группа вращений касательного вектора при паралельном переносе по любому замкнотому контуру на многообразии. Такое вращение в случае общего риманого многообразия дается тензором кривизны $R^\mu_{\nu\lambda\rho}$ и принадлежит группе $O(D)$. Для частных случаев $D = 2m$ кэллерова многообразия мы имеем $U(m)$, Калаби - Яо многообразие $D = 2m$ – $SU(m)$ и для гипер-кэллерова мн. $D = 4n$ – $Sp(n) = USp(2n) \in SU(2n)$.

Эти два утверждения дают, что гипер-кэллерово многообразие является ричи-плоским, т.е. дают пример Эйнштейновского многообразия. Заметим, что $N = 1$, $D = 4$ гипер-Кэллеровы многообразия определяют само-дуальные гравитационные инстантоны.

Кэллеровы многообразия:

1.) Кэллерова метрика строится очень легко

$$K(z,\overline{z}) \longrightarrow g_{i\bar{j}} = \partial_i \partial_{\bar{j}} \, K(z,\overline{z}) \; .$$

2.) Соответствие межлу Кэллеровыми многообразиями и $4D, N = 1$ off-shell σ-моделями устанавливается действием

$$S = \int d^4x \, d^4 \, \theta \, K(\Phi, \overline{\Phi}) \; , \quad \overline{D}_{\alpha'} \Phi = 0 \; .$$

Обобщение на гипер-Кэллеров случай:
гипер-Кэллерово многообразие $\mathcal{M}^{4n} \times S^2$ задается аналитическими функциями K^{+a} и K^{+4}, которые определяют метрику $g_{\mu\nu}$. Действие и связи имеют вид (Galperin, Ivanov, Ogievetsky, Sokachev, 1988)

$$S = \int d^4x \, d^4\theta^{-4} \, du \, \{q^+_a \, D^{++} \, K^{a+}(q,u) + K^{+4}(q,u)\} \; ,$$

$$u^+_i \, D^i_\alpha \, q^+ = u^+_i \, \overline{D}^i_{\alpha'} \, q^+ = 0 \; ,$$

координаты $q^+(x, \, \theta^+, \, u^{\pm})$ определяют гармоническое суперпространство $R^{4|8} \times S^2 = \{(x^m, \, \theta^\alpha_i, \, \overline{\theta}^i_{\alpha'}) \times (u^{\pm}_i)\}$ и $\theta^+_\alpha = u^+_i \, \theta^i_\alpha$.

Complex and simplectic manifolds

Let $\mathcal{M}$ be the phase space with $2n$ coordinates q_a. Consider a Hamiltonian system with the action

$$S = \int_{\mathcal{D}} \Omega - \int_{\partial\mathcal{D}} \mathcal{H} + \mathcal{B} \; , \tag{5.0.32}$$

where $\mathcal{D}$ is a 2-dimensional disk, $\Omega = \tilde{\Omega}^{ab}(q) \, dq_a \wedge dq_b$ is a closed 2-form $d\Omega = 0$, $\mathcal{H}$ is a Hamiltonian 1-form and $\mathcal{B}$ are boundary terms. One can consider the first term in eq. (5.0.32) as 2- dimensional Wess-Zumino term. Let the 2-form Ω be exact: $\Omega = dP$. Then the action for the system (5.0.32) can be written in the form

$$S = \int_0^T dt \; [P^a(q) \, \dot{q}_a - \mathcal{H}(q)] + \mathcal{B} \; , \tag{5.0.33}$$

where $t \in [0,T]$ is an evolution parameter and $\mathcal{H}(q)$ is the Hamiltonian. The variational principle, $\delta S = 0$, gives the equations of motion and boundary conditions

$$\dot{q}_a = \Omega_{ab} \; \partial^b \, \mathcal{H} \; , \quad P^a(q) \, \delta q_a \big|^{t=T}_{t=0} + \delta\mathcal{B} = 0 \; .$$

Here

$$\Omega_{ab}(q) = \{q_a, \, q_b\} = -\Omega_{ba}(q) \; , \tag{5.0.34}$$

is inverse to the matrix

$$\tilde{\Omega}^{ab} = (\partial^a \, P^b - \partial^b \, P^a) = -\tilde{\Omega}^{ba} \; .$$

The matrix Ω_{ab} has $2n$ eigenvectors α_a and $\overline{\alpha}_a$ $(\alpha = 1, \ldots, n)$

$$\begin{gathered}\Omega_{ab}\,\alpha^b = i\lambda_\alpha\, g_{ab}\,\alpha^b\;, \quad \Omega_{ab}\,\overline{\alpha}^b = -i\lambda_\alpha\, g_{ab}\,\overline{\alpha}^b\;, \\ \alpha^a\, g_{ab}\,\beta^b = (\alpha,\,\beta) = 0\;, \quad \alpha^a\, g_{ab}\,\overline{\beta}^{\,b} = (\alpha,\,\overline{\beta}) = \delta_{\alpha\beta}\,(\alpha,\,\overline{\alpha})\;,\end{gathered} \tag{5.0.35}$$

where $\lambda_\alpha \in \mathbf{R}$, $g_{ab}(q)$ is a real symmetric nondegenerate matrix and $\alpha, \beta = 1, \ldots, n$. Complex vectors α, $\overline{\alpha}$ generate complete system

$$g_{ab} = \sum_\alpha \frac{1}{(\alpha\overline{\alpha})}\,(\alpha_a\overline{\alpha}_b + \alpha_b\overline{\alpha}_a)\;, \quad \Omega_{ab} = \sum_\alpha \frac{i\lambda_\alpha}{(\alpha\overline{\alpha})}\,(\alpha_a\overline{\alpha}_b - \alpha_b\overline{\alpha}_a)\;, \tag{5.0.36}$$

$$g^{ab} = \sum_\alpha \frac{1}{(\alpha\overline{\alpha})}\,(\alpha^a\overline{\alpha}^b + \alpha^b\overline{\alpha}^a)\;, \quad \tilde{\Omega}^{ab} = -\sum_\alpha \frac{i\lambda_\alpha^{-1}}{(\alpha\overline{\alpha})}\,(\alpha^a\overline{\alpha}^b - \alpha^b\overline{\alpha}^a)\;, \tag{5.0.37}$$

$$\delta^a_b = \sum_\alpha \frac{1}{(\alpha\overline{\alpha})}\,(\alpha^a\overline{\alpha}_b + \alpha_b\overline{\alpha}^a)\;.$$

Note that $\Omega^{-1}_{ab} = \tilde{\Omega}^{ab} = -\Omega^{ab}(= -g^{ac}\Omega_{cd}g^{db})$ only for the case $\lambda_\alpha = 1$. Note, that one can obtain this situation if change the metic

$$g_{ab} \longrightarrow g_{ab} = \sum_\alpha \frac{\lambda_\alpha}{(\alpha\overline{\alpha})}\,(\alpha_a\overline{\alpha}_b + \alpha_b\overline{\alpha}_a)\;, \tag{5.0.38}$$

In this case one can define an almost complex structure J^a_b:

$$J^c_a = \Omega_{ab}\, g^{bc} = \sum_\alpha \frac{i}{(\alpha\overline{\alpha})}\,(\alpha_a\,\overline{\alpha}^c - \overline{\alpha}_a\,\alpha^c)\;, \tag{5.0.39}$$

$J^a_b\, J^b_c = -\delta^a_c$ compatible with the metric (5.0.38)

$$J^c_a\, g_{cd}\, J^d_b = g_{ab} \quad \Rightarrow \quad J^c_a\, g_{cb} = -g_{ac}\, J^c_b = \Omega_{ab}\;, \quad J^c_a\,\Omega_{cd}\, J^d_b = \Omega_{ab}\;. \tag{5.0.40}$$

It is convenient to introduce the projectors

$$(P^{(\pm)})^b_a = \frac{1}{2}\,\left(\delta^b_a \pm i\, J^b_a\right)\;, \quad (P^{(+)})^b_a = \sum_\alpha \frac{\overline{\alpha}_a\,\alpha^b}{(\alpha\overline{\alpha})}\;, \quad (P^{(-)})^b_a = \sum_\alpha \frac{\alpha_a\,\overline{\alpha}^b}{(\alpha\overline{\alpha})}\;, \tag{5.0.41}$$

$$2\,\left(P^{(+)}\otimes P^{(+)} + P^{(-)}\otimes P^{(-)}\right) = (1\otimes 1 - J\otimes J)\;.$$

It is clear that the 2-form $\Omega_{ab}\, dq^a \wedge dq^b$ is of the type $\Omega^{(1,1)}$. Indeed, in view of the relations (5.0.40) one can prove that

$$dq^a\wedge dq^d\,(P^{(\pm)})^b_a\,\Omega_{bc}\,(P^{(\pm)})^c_d = 0\;, \quad dq^a\wedge dq^d\,(P^{(+)})^b_a\,\Omega_{bc}\,(P^{(-)})^c_d = \frac{1}{2}\, dq^a\wedge\Omega_{ab}\, dq^b \;\Rightarrow$$

$$\Omega = dq^a\wedge dq^d\,[(P^{(+)})^b_a\,\Omega_{bc}\,(P^{(-)})^c_d + (P^{(-)})^b_a\,\Omega_{bc}\,(P^{(+)})^c_{d]}\;,$$

and also we have (see (5.0.40))

$$dq^a\otimes dq^d\,(P^{(\pm)})^b_a\, g_{bc}\,(P^{(\pm)})^c_d = 0\;, \quad dq^a\otimes dq^d\,(P^{(+)})^b_a\, g_{bc}\,(P^{(-)})^c_d = \frac{i}{2}\, dq^a\otimes g_{ab}\, dq^b \;\Rightarrow$$

$$d\,s^2 = i\,dq^a \otimes dq^d\,[(P^{(+)})^b_a\,g_{bc}\,(P^{(-)})^c_d + (P^{(-)})^b_a\,g_{bc}\,(P^{(+)})^c_d]\;,$$

An almost complex structure is said to be complex structure if the Niejenhuis tensor

$$\begin{gathered}N^c_{ab} = \partial_b J^c_a - \partial_a J^c_b + J^q_a\,J^p_b\,(\partial_q J^c_p - \partial_p J^c_q) = (J^q_a\,J^p_b - \delta^q_a\,\delta^p_b)\,(\partial_q J^c_p - \partial_p J^c_q) = \\ = \partial_b J^c_a - \partial_a J^c_b + (J^p_b\,\partial_p J^q_a - J^p_a\,\partial_p J^q_b)\,J^c_q = -N^c_{ba}\end{gathered} \tag{5.0.42}$$

vanishes. Indeed, one can find the identity

$$\begin{gathered}[\partial_a \pm i J^c_a \partial_c,\, \partial_b \pm i J^d_b \partial_d] = \Big(J^c_b\,\partial_c J^d_a - J^c_a\,\partial_c J^d_b \pm i(\partial_a J^d_b - \partial_b J^d_a)\Big)\,\partial_d = \\ = \Big\{(J^c_b\,\partial_c J^q_a - J^c_a\,\partial_c J^q_b)\,(\delta^d_q \pm i\,J^d_q) \mp i N^d_{ab}\Big\}\;\partial_d\;,\end{gathered} \tag{5.0.43}$$

and in the case $N^d_{ab} = 0$ we obtain the integrable structure. Note that the Niejenhuis tensor also satisfies

$$N^c_{ab}\,J^d_c = (\partial_b J^c_a - \partial_a J^c_b)\,J^d_c + J^q_a\,\partial_q J^d_b - J^q_b\,\partial_q J^d_a\;,\quad J^d_a\,J^f_b\,N^c_{df} = -N^c_{ab}\;, \tag{5.0.44}$$

and in view of (5.0.41) and (5.0.43) we have ??????

$$\frac{1}{4}\,N^d_{ab} = i\sum_{\alpha,\beta}\frac{\overline{\alpha}_a\,\overline{\beta}_b}{(\overline{\alpha}\alpha)(\overline{\beta}\beta)}\Big(\partial_\alpha\beta^d - \partial_\beta\alpha^d\Big) = i\sum_{\alpha,\beta}\frac{\overline{\alpha}_a\,\overline{\beta}_b - \overline{\alpha}_b\,\overline{\beta}_a}{(\overline{\alpha}\alpha)(\overline{\beta}\beta)}\Big(\partial_\alpha\beta^d\Big)$$

$$\frac{1}{4}\,N^d_{ab} = \frac{1}{4}\,\overline{N}^d_{ab} = -i\sum_{\alpha,\beta}\frac{\alpha_a\,\beta_b}{(\overline{\alpha}\alpha)(\overline{\beta}\beta)}\Big(\partial_{\overline{\alpha}}\overline{\beta}^d - \partial_{\overline{\beta}}\overline{\alpha}^d\Big) = -i\sum_{\alpha,\beta}\frac{\alpha_a\,\beta_b - \alpha_b\,\beta_a}{(\overline{\alpha}\alpha)(\overline{\beta}\beta)}\Big(\partial_{\overline{\alpha}}\overline{\beta}^d\Big)$$

Note, that since the Niejenhuis tensor N^c_{ab} is a tensor then, one can change in (5.0.42) the derivatives ∂_a by covariant derivative ∇_a

$$N^c_{ab} = \nabla_b J^c_a - \nabla_a J^c_b + J^q_a\,J^p_b\,(\nabla_q J^c_p - \nabla_p J^c_q)\;, \tag{5.0.45}$$

and for covariantly constant almost complex structure $\nabla_a J^c_b = 0$ we have $N^c_{ab} = 0$. Thus, covariantly constant almost complex structure is a complex structure.

Proposition. Let J^a_b be an integrable complex structure. Then, the set of 2-forms $\rho^c = (\partial_a\,J^c_b)\,dq^a \wedge dq^b$ are of the $\Omega^{(1,1)}$ type and vice versa.
Proof. Indeed, using (5.0.42) and (5.0.44) one can deduce

$$8\,(P^{(\pm)})^p_a\,(\partial_p\,J^c_q)\,(P^{(\pm)})^q_b\,dq^a \wedge dq^b = \Big(-N^c_{ab} \pm i\,N^d_{ab}\,J^c_d\Big)\;dq^a \wedge dq^b = -(P^{(\mp)})^c_d\,N^d_{ab}\,dq^a \wedge dq^b\;.$$

As it is needed. Let $\zeta = \zeta_a dq^a$ is a 1-form. Define $J(\zeta) = \zeta_a\,J^a_b\,dq^b$. Then, the consequence of the Proposition is $d(J(d\,f)) \in \Omega^{(1,1)}$ for $f \in \Omega^{(0,0)}$.

In the case when J^a_b is the complex structure ($N^a_{bc} = 0$), one can define $d\omega = \partial\omega + \overline{\partial}\omega$, where

$$\partial = dq^a\,(P^{(+)})^b_a\,\partial_b\;,\quad \overline{\partial} = dq^a\,(P^{(-)})^b_a\,\partial_b\;,\quad d = \partial + \overline{\partial}\;,$$

and introduce the differential forms $\omega \in \Omega^{(p,q)}$ such that

$$\partial:\;\;\Omega^{(p,q)} \to \Omega^{(p+1,q)}\;,\quad \overline{\partial}:\;\;\Omega^{(p,q)} \to \Omega^{(p,q+1)}\;.$$

Since the symplectic 2-form Ω is closed we have $\partial\Omega = 0 = \overline{\partial}\Omega$ and from $\Omega \in \Omega^{(1,1)}$ we deduce that locally $\Omega_{\alpha\overline{\beta}} = \partial_\alpha \overline{\partial}_\beta K \equiv -\Omega_{\overline{\beta}\alpha}$, where K is called Kähler prepotential. Thus, complex and symplectic manifolds should automatically be Kähler manifolds.

Introduce operators z, $\overline{z}$:

$$z_\alpha = \sum_a \alpha^a q_a \; , \quad \overline{z}_\alpha = \sum_a \overline{\alpha}^a q_a \; , \quad q_a = \sum_\alpha \frac{1}{(\alpha, \overline{\alpha})} \, (\alpha_a \, \overline{z}_\alpha + \overline{\alpha}_a \, z_\alpha) \; , \tag{5.0.46}$$

and in view of (7.0.56) and (7.0.54) we have

$$\{\overline{z}_\alpha, \, \overline{z}_\beta\} = \dots \; , \quad \{z_\alpha, \, z_\beta\} = \dots \; , \quad \{z_\alpha, \, \overline{z}_\beta\} = -i\lambda_\alpha \, \delta_{\alpha\beta} \, (\alpha, \overline{\alpha}) + \dots \; . \tag{5.0.47}$$

Proposition 1. *Boundary conditions can be specified by the boundary terms $\mathcal{B}$ in the Action (5.0.33):*

$$\mathcal{B} = \frac{1}{2} \left[q^i \, \Omega \, P_i \, q(0) - q^f \, \Omega \, P_f \, q(T) \right] \; , \tag{5.0.48}$$

where $q_A^{f,i}$ are fixed supervectors in $\mathcal{M}$ and matrices $P_{f,i}$ are constant projectors ($P^2 = P$) in $\mathcal{M}$ of the rank n. These projectors should satisfy the conditions $P^T \, \Omega = \Omega \, (1 - P)$, where T denotes a transposition $(P^T)_{ab} = P_{ba}$. Substituting the boundary terms (5.0.48) into (5.0.33) is equivalent to fixing the initial and final states of the system by the conditions: $(1 - P_i) \, q(0) = q^i$, $(1 - P_f) \, q(T) = q^f$.

References

1. T. Eguchi, P.B. Gilkey and A.J. Hanson, "Gravitation, Gauge Theories and Differential Geometry", Phys. Rep. **66** No. 6 (1980) 213 – 393.

Симплектическая структура на проективном пространстве CP^n

Обозначим комплексные координаты на C^{n+1} за $z_k \in C$ $(k = 0, 1, 2 \dots, n)$. Для пространства CP^n имеем эквивалентность $z_k \to u \, z_k$ $\forall u \in C$. На C^{n+1} выбирается простейшая симплектическая структура (z_k, $\overline{z}_k$ являются осцилляторами)

$$\{\overline{z}_k, \, z_l\} = \delta_{kl} \; \Rightarrow \Omega = \sum_k \overline{z}_k \wedge z_k \; . \tag{6.0.49}$$

В окрестности $z_0 \neq 0$ можно выбрать локальные координаты $Z_k = z_k / z_0$ (на физическом языке это эквивалентно выбору калибровки $z_0 = 1$). Однако для цели построения симплектической структуры на CP^n удобнее выбрать координаты

$$Z_k = z_k (\sum \overline{z}_l z_l)^{-1/2} \; , \quad \sum_k \overline{Z_k} \, Z_k = 1 \; , \tag{6.0.50}$$

такие, что $Z_k \to e^{i\,\phi} \, Z_k$ при $z_k \to u \, z_k$, где $u = e^{i\,\phi} \, \rho$. Для этих координат получаем скобку Пуассона

$$\{\overline{Z_k}, \, Z_l\} = 2 \left(\frac{\delta_{kl}}{\sum \overline{z}_l z_l} - \frac{\overline{z}_k \, z_l}{(\sum \overline{z}_l z_l)^2} \right) \; . \tag{6.0.51}$$

Эта скобка Пуассона определяет 2-форму ($z_k \to w_k$)

$$\Omega = \left(\frac{\sum_k d\overline{w}_k \wedge dw_k}{\sum \overline{w}_l w_l} - \frac{\sum_{k,l} (\overline{w}_k dw_k) \wedge (d\overline{w}_l w_l)}{(\sum \overline{w}_l w_l)^2} \right) \tag{6.0.52}$$

которая по построению равна

$$\Omega = d(\overline{Z}_k) \wedge d(Z_k) \; ,$$

и таким образом является замкнутой. Форма (6.0.52) определяет симплектическую структуру проективного пространства $CP^n = \{(z_0 : z_1 : \ldots : z_n)\}$ в афинной карте $w_k = z_k/z_0$ (см. В.И.Арнольд "Математические методы классической механики").

Дополнение к главам 3 и 4.

Let us consider Yang-Baxter equation

$$\hat{R}_1 \, \hat{R}_2 \, \hat{R}_1 = \hat{R}_2 \, \hat{R}_1 \, \hat{R}_2 \; .$$

Solution of this equation $\hat{R}$ is called closed if one can define Ψ- matrix in the form

$$Tr_2(\hat{R}_{12} \, \Psi_{23}) = P_{13} = Tr_2(\Psi_{12} \, \hat{R}_{23}) \; , \tag{7.0.53}$$

and introduce two important invertible matrices D and $\overline{D}$

$$D_1 = Tr_2(\Psi_{12}) \quad , \quad \overline{D}_2 = Tr_1(\Psi_{12}) \; . \tag{7.0.54}$$

We get immedeatly from (7.0.53) and (7.0.54) the identities

$$Tr_{\hat{R}2}(\hat{R}_{12}) \equiv Tr_2(D_2 \hat{R}_{12}) = I_1 \quad , \quad Tr_1(\overline{D}_1 \hat{R}_{12}) = I_2 \; , \tag{7.0.55}$$

We define also the Φ- matrix

$$Tr_2(\hat{R}^{-1}_{12} \, \Phi_{23}) = P_{13} = Tr_2(\Phi_{12} \, \hat{R}^{-1}_{23}) \; , \tag{7.0.56}$$

and introduce two matrices $D^{(-)}$ and $\overline{D}^{(-)}$

$$D^{(-)}_1 = Tr_2(\Phi_{12}) \quad , \quad \overline{D}^{(-)}_2 = Tr_1(\Phi_{12}) \; . \tag{7.0.57}$$

We get the identities

$$Tr_2(D^{(-)}_2 \hat{R}^{-1}_{12}) = I_1 \quad , \quad Tr_1(\overline{D}^{(-)}_1 \hat{R}^{-1}_{12}) = I_2 \; , \tag{7.0.58}$$

Theorem 1

There are the following identities

$$\hat{R}^{-1}_1 \, D_2 = D_1 \, \Psi_{21} \quad , \quad D_2 \, \hat{R}^{-1}_1 = \Psi_{21} \, D_1 \; , \tag{7.0.59}$$

$$Tr_{\hat{R}3} \hat{R}^{\mp 1}_2 \, X_2 \, \hat{R}^{\pm 1}_2 = I_2 Tr_{\hat{R}} X \; , \tag{7.0.60}$$

where X is a quantum matrix. We have also

$$\Phi_{12} = D^2_1 \, \Psi^{-1}_{12} \, D^{-2}_2 \; . \tag{7.0.61}$$

Proof. Let us consider the Yang-Baxter equation

$$\hat{R}_1^{\pm 1}\hat{R}_2\hat{R}_1^{\mp 1} = \hat{R}_2^{\mp 1}\hat{R}_1\hat{R}_2^{\pm 1} \; , \tag{7.0.62}$$

act on it by the matrix $\Psi_{01}\, D_3$ from the left and take the trace Tr_{13}. As a result we obtain

$$D_0\, I_2 = Tr_3 D_3 \hat{R}_2^{\mp 1}\, P_{02}\, \hat{R}_2^{\pm 1} \tag{7.0.63}$$

which can be easilly rewritten as (7.0.59) and

$$\hat{R}_1\, D_2 = D_1\, \Phi_{21} \;\; , \quad D_2\, \hat{R}_1 = \Phi_{21}\, D_1 \; . \tag{7.0.64}$$

Indeed, we have from (7.0.63)

$$D_0\, P_{02} = Tr_3 D_3 \hat{R}_{23}^{\mp 1}\, \hat{R}_{03}^{\pm 1} \;\; , \quad P_{02}\, D_0 = Tr_3 D_3 \hat{R}_{03}^{\mp 1}\, \hat{R}_{23}^{\pm 1} \; .$$

Acting on these relations by $Tr_0(\Psi_{10}...)$ and $Tr_0(\Phi_{10}...)$ we obtain (7.0.59) and (7.0.64). Comparing (7.0.59) and (7.0.64) we get (7.0.61). Multipling (7.0.63) by the quantum matrix X_0 and taking the trace Tr_0 yield (7.0.60).

Corollary 1.1
There are relations between two sets of metrics D and $D^{(-)}$:

$$D^{(-)} = \overline{D}^{-1} \;\; , \quad \overline{D}^{(-)} = D^{-1} \; . \tag{7.0.65}$$

Proof. We prove the first relation, the second one can be proven analogously. Let us multiply (7.0.59) by $\overline{D}_1^{(-)}$ from left and take Tr_1

$$Tr_1(\overline{D}_1^{(-)}\, D_1\, \Psi_{21}) = Tr_1(\overline{D}_1^{(-)} \hat{R}_1^{-1} D_2) = D_2 = Tr_1 \Psi_{21}$$

Acting on the left and right sides of this identity by $Tr_2(\hat{R}_{32}...)$ we get

$$Tr_1(\overline{D}_1^{(-)}\, D_1\, P_{31}) = Tr_1 P_{31} \;\; \Longrightarrow \;\; \overline{D}^{(-)}\, D = I \; .$$

Corollary 1.2

$$Tr_{\hat{R}2} \hat{R}_1^{-1} = D_1 \overline{D}_1 = \overline{D}_1 D_1 \; , \tag{7.0.66}$$

(compare with (7.0.55)).
Proof. Act on the relations (7.0.59) by Tr_2.

Corollary 1.3

$$\hat{R}_1^{\pm 1}\, D_1\, \overline{D}_1 = D_2\, \overline{D}_2\, \hat{R}_1^{\pm 1} \; . \tag{7.0.67}$$

Proof. Using (7.0.60), (7.0.62) one can rewrite (7.0.66) in the form

$$D_1\, \overline{D}_1 = Tr_{\hat{R}3} \hat{R}_2^{\pm 1}\, \hat{R}_1^{-1}\, \hat{R}_2^{\mp 1} = Tr_{\hat{R}3} \hat{R}_1^{\mp 1}\, \hat{R}_2^{-1}\, \hat{R}_1^{\pm 1} = \hat{R}_1^{\mp 1}\, D_2\, \overline{D}_2\, \hat{R}_1^{\pm 1} \; . \tag{7.0.68}$$

Corollary 1.4

$$Tr_1 D_1^{-1} \hat{R}_1^{-1} = I_2 \ . \tag{7.0.69}$$

$$Tr_2(\overline{D}_2^{-1} \hat{R}_1^{-1}) = I_1 \ . \tag{7.0.70}$$

$$Tr_1(\overline{D}_1 \hat{R}_1^{-1}) = D_2 \, \overline{D}_2 \ . \tag{7.0.71}$$

Proof. Multiply the first eq. (7.0.59) by D_1^{-1} from the left and D_2^{-1} from the right and take the trace Tr_1. Using (7.0.66) and (7.0.67) gives (7.0.70). Using (7.0.69) and (7.0.67) gives (7.0.71).

Corollary 1.5

$$D_1 D_2 \hat{R}_1 D_1^{-1} D_2^{-1} = \hat{R}_1 \ , \quad D_1 D_2 \Psi_{12} D_1^{-1} D_2^{-1} = \Psi_{12} \ , \tag{7.0.72}$$

$$\overline{D}_1 \overline{D}_2 \hat{R}_1 \overline{D}_1^{-1} \overline{D}_2^{-1} = \hat{R}_1 \ , \quad \overline{D}_1 \overline{D}_2 \Psi_{12} \overline{D}_1^{-1} \overline{D}_2^{-1} = \Psi_{12} \ . \tag{7.0.73}$$

Eq. (7.0.72) follows from (7.0.59), while Eq. (7.0.73) follows from (7.0.59) and (7.0.67).

Corollary 1.6
The matrix Ψ_{12} satisfy the following "twisted" Yang-Baxter equation

$$\Psi_{21} \Psi_{32} D_1 \Psi_{21} D_2^{-1} = D_2 \Psi_{32} D_3^{-1} \Psi_{21} \Psi_{32} \ , \tag{7.0.74}$$

Proof. Substitute relations (followed from (7.0.59))

$$R_1^{-1} = D_1 \, \Psi_{21} \, D_2^{-1} = D_2^{-1} \, \Psi_{21} \, D_1 \ ,$$

to (7.0.62).

Let us now consider the twisting of $\mathcal{R}$-matrix. For this we have to consider two matrices $\hat{R}_{12}$ and $\hat{\mathcal{R}}_{12}$ which satisfy the relations (7.0.62) and

$$\hat{\mathcal{R}}_1 \, \hat{R}_2 \, R_1 = \hat{R}_2 \, \hat{R}_1 \, \hat{\mathcal{R}}_2 \ , \quad \hat{R}_1 \, \hat{R}_2 \, \hat{\mathcal{R}}_1 = \hat{\mathcal{R}}_2 \, \hat{R}_1 \, \hat{R}_2 \ , \tag{7.0.75}$$

$$\hat{\mathcal{R}}_1 \, \hat{\mathcal{R}}_2 \, \hat{\mathcal{R}}_1 = \hat{\mathcal{R}}_2 \, \hat{\mathcal{R}}_1 \, \hat{\mathcal{R}}_2 \ . \tag{7.0.76}$$

From these relations and (7.0.62) it is easy to show that $\hat{R}^n \hat{\mathcal{R}} \hat{R}^{-n}$ also satisfy (7.0.76) for all $n \in Z$.

Theorem 2

There are the following identities

$$\hat{R}_1^2 \, \hat{\mathcal{R}}_1 \, \hat{R}_1^{-2} = D_1 D_2 \, \hat{\mathcal{R}}_1 \, D_1^{-1} D_2^{-1} \ , \tag{7.0.77}$$

$$\hat{R}_1^2 \, \hat{\mathcal{R}}_1 \, \hat{R}_1^{-2} = \overline{D}_1 \overline{D}_2 \, \hat{\mathcal{R}}_1 \, \overline{D}_1^{-1} \overline{D}_2^{-1} \ . \tag{7.0.78}$$

Proof. We consider the following chain of identities (X_{12} is an arbitrary matrix)

$$Tr_{\hat{R}12}(\hat{\mathcal{R}}_1 \hat{R}_1^2 X_{12}) = Tr_{\hat{R}1234}(\hat{\mathcal{R}}_1 \hat{R}_2 \hat{R}_1 \hat{R}_3 \hat{R}_2 X_{12}) = Tr_{\hat{R}1234}(\hat{R}_2 \hat{R}_1 \hat{R}_3 \hat{R}_2 X_{12} \hat{\mathcal{R}}_3) =$$

$$= Tr_{\hat{R}1234}(X_{12} \hat{\mathcal{R}}_3 \hat{R}_2 \hat{R}_1 \hat{R}_3 \hat{R}_2) = Tr_{\hat{R}12}(X_{12} \hat{R}_1^2 \hat{\mathcal{R}}_1) \ .$$

which equivalent to (7.0.77). Here we have used the identities (7.0.55), (7.0.72) and (7.0.75).

Analogously, using also (7.0.70), we have

$$Tr_{12}((\overline{D}_1\overline{D}_2)^{-1}\hat{\mathcal{R}}_1\hat{R}_1^{-2}X_{12}) = Tr_{1234}((\overline{D}_1\cdots\overline{D}_4)^{-1}\hat{\mathcal{R}}_1\hat{R}_2^{-1}\hat{R}_1^{-1}\hat{R}_3^{-1}\hat{R}_2^{-1}X_{12}) =$$

$$= Tr_{12}((\overline{D}_1\overline{D}_2)^{-1}X_{12}\hat{R}_1^{-2}\hat{\mathcal{R}}_1) \; ,$$

which prove (7.0.78).

Corollary 2.1

$$D_1 D_2\, \hat{\mathcal{R}}_1\, D_1^{-1} D_2^{-1} = \overline{D}_1\overline{D}_2\, \hat{\mathcal{R}}_1\, \overline{D}_1^{-1}\overline{D}_2^{-1} \; , \tag{7.0.79}$$

$$\hat{R}_1^4\, \hat{\mathcal{R}}_1\, \hat{R}_1^{-4} = ?????\hat{\mathcal{R}}_1 \; , \tag{7.0.80}$$

Proof. Eq. (7.0.79) and

$$\hat{R}_1^4\, \hat{\mathcal{R}}_1\, \hat{R}_1^{-4} = (D\,\overline{D})_1 (D\,\overline{D})_2\, \hat{\mathcal{R}}_1\, (D\,\overline{D})_1^{-1} (D\,\overline{D})_2^{-1} \; , \tag{7.0.81}$$

are consequences of (7.0.77) and (7.0.78). Taking into account (7.0.67) we rewrite (7.0.81) as (7.0.80).

Now let us consider BMW algebra

$$\hat{R}_i^2 - \lambda \hat{R}_i - 1 + \lambda\mu K_i = (\hat{R}_i - q)\,(\hat{R}_i + q^{-1}) + \lambda\mu K_i = 0 \; ,$$

$$\lambda\, K_i = \hat{R}_i^{-1} + \lambda - \hat{R}_i \; , \quad \hat{R}_i K_i = K_i \hat{R}_i = \mu K_i \; , \tag{7.0.82}$$

$$K_i^2 = (q-\mu)\,(q^{-1}+\mu)(\lambda\mu)^{-1} K_i \equiv \nu\, K_i \; .$$

The only condition which we need to impose on the braid group (to restrict it to finite dimensional algebra BMW) is

$$0 = K_i\,(\hat{R}_{i+1}\,\hat{R}_i^2\,\hat{R}_{i+1} - 1) = (\hat{R}_{i+1}\,\hat{R}_i^2\,\hat{R}_{i+1} - 1)\,K_i \; .$$

By acting on this relation the combination $R_i R_{i+1} R_i$ which convert $i \leftrightarrow i+1$ we deduce

$$0 = K_{i+1}\,(\hat{R}_i\,\hat{R}_{i+1}^2\,\hat{R}_i - 1) = (\hat{R}_i\,\hat{R}_{i+1}^2\,\hat{R}_i - 1)\,K_{i+1} \; .$$

Then we have

$$K_1\,\hat{R}_2^{\pm1}\,K_1 = \mu^{\mp1}\,K_1\,\hat{R}_2^{\pm1}\,\hat{R}_1^{\pm1}\,K_1 = \mu^{\mp1}\,K_1\,K_2\,K_1 = \mu^{\mp1} K_1 \tag{7.0.83}$$

$$K_2\,\hat{R}_1^{\pm1}\,K_2 = \mu^{\mp1}\,K_2\,K_1\,K_2 = \mu^{\mp1} K_2 \tag{7.0.84}$$

Let us act on (7.0.83) by Ψ_{34} and Φ_{34} from the right, take the trace Tr_3 and use (7.0.53), (7.0.54), (7.0.56) and (7.0.57). As a result we have two identities

$$K_{12}\,P_{23}\,K_{12} = \mu^{-1}\,K_{12}\,\overline{D}_3 \; , \quad K_{12}\,P_{23}\,K_{12} = \mu\,K_{12}\,\overline{D}_3^{(-)} = \mu\,K_{12}\,D_3^{-1} \; , \tag{7.0.85}$$

comparing of which lead to the relation (see (7.0.66)

$$D\,\overline{D} = \mu^2\, I = Tr_2 D_2 \hat{R}_{12}^{-1} \; . \tag{7.0.86}$$

Let us act on (7.0.84) by Ψ_{01} and Φ_{01} from the left, take the trace Tr_1 and use (7.0.53), (7.0.54), (7.0.56) and (7.0.57). As a result we have two other identities

$$K_{23}\, P_{12}\, K_{23} = \mu^{-1}\, D_1\, K_{23}\;, \quad K_{23}\, P_{12}\, K_{23} = \mu\; D_1^{(-)}\, K_{23} = \mu\, \overline{D}_1^{-1}\, K_{23}\;. \tag{7.0.87}$$

Now let us calculate Tr_{12} from (7.0.85) and Tr_{23} from (7.0.87) taking into account that $Tr_{12}K_{12} = \nu\, rang(K)$:

$$\begin{gathered} Tr_1 K_{12} = \mu^{-1}\, rang(K)\, \overline{D}_2 = \mu\, rang(K)\, D_2^{-1}\;, \\ Tr_3 K_{23} = \mu^{-1}\, rang(K)\, D_2 = \mu\, rang(K)\, \overline{D}_2^{-1}\;. \end{gathered} \tag{7.0.88}$$

Further we act by Tr_{23} on $K_{23}\hat{R}_{12}^{\pm 1}K_{23} = \mu^{\mp 1}\, K_{23}$ (7.0.84) and by Tr_{12} on the same relation in (7.0.83). As a result we have (taking into account (7.0.88))

$$\begin{gathered} Tr_{23}(K_{23}\hat{R}_{12}^{\pm 1}) = \mu^{-1}\, rang(K)\, Tr_2(D_2\hat{R}_{12}^{\pm 1}) = \mu^{\mp 1}\, rang(K) I_1 \\ Tr_{12}(K_{12}\hat{R}_{23}^{\pm 1}) = \mu^{-1}\, rang(K)\, Tr_2(\overline{D}_2\hat{R}_{23}^{\pm 1}) = \mu^{\mp 1}\, rang(K) I_3 \end{gathered} \tag{7.0.89}$$

These relations give $Tr_2 D_2 \hat{R}_{12}^{-1} = \mu^2 I_1 = D\overline{D}$ and thus matrices D and $\overline{D}$ are invertible.

The identities (7.0.89) or identities (7.0.82), (7.0.86) lead to eq. $Tr_2 D_2 K_{12} \sim I_1$ since

$$Tr_2 D_2 K_{12} = \lambda^{-1} Tr_2 D_2(\hat{R}_{12}^{-1} + \lambda - \hat{R}_{12}) = \lambda^{-1}(\mu^2 - 1) + Tr(D) I_1\;. \tag{7.0.90}$$

Thus, from eq. $K_{12}K_{23}K_{12} = K_{12}$ we have

$$\nu\, Tr_2(D_2\, K_{12}) = Tr(D)\, I_1 \tag{7.0.91}$$

System of equations (7.0.90) and (7.0.91) leads

$$Tr_2 D_2 K_{12} = \frac{(\mu^2 - 1)}{\lambda(1 - \nu)}\, I_1 = \mu\, I_1\;, \quad Tr(D) = \mu\, \nu = \frac{1 + \lambda\mu - \mu^2}{\lambda}\;. \tag{7.0.92}$$

Now let us consider the identity

$$Tr_1(Tr_2 D_2 K_{12}) = Tr_2 D_2 (Tr_1 K_{12})$$

Using (7.0.88) and (7.0.92) we get

$$rang(K) = 1\;. \tag{7.0.93}$$

Let $K_{12} = g_{12>}\, g_{<12}$. Eqs. (7.0.85), (7.0.87) give

$$D_1^{-1} = \mu^{-1}\, g_{<23}\, P_{13}\, g_{23>}\;, \quad D_1 = \mu\, g_{<23}\, P_{12}\, g_{23>}\;, \tag{7.0.94}$$

and as a result we have

$$g_{<23}\, P_{13}\, g_{23>}\, g_{<23}\, P_{12}\, g_{23>} = I_1\;.$$

Now we define

$$X_3 = g_{<21}\, P_{23}\, g_{12>}\;, \quad Y_3 = g_{<12}\, P_{23}\, g_{21>}\;.$$

Eqs. $K_{12}K_{23}K_{12} = K_{12}$, $K_{23}K_{12}K_{23} = K_{23}$ lead to identity

$$g_{<12}\, P_{13}\, g_{21>}\, g_{<21}\, P_{13}\, g_{12>} = I_3 \Rightarrow Y\, X = X\, Y = I\ . \tag{7.0.95}$$

Consider the chain of identities (here we use (7.0.94))

$$D_1\, g_{12>} = \mu\, g_{<43}\, P_{14}\, g_{43>}\, g_{12>} = \mu\, g_{<43}\, g_{13>}\, g_{42>} =$$

$$= \mu\, g_{<43}\, P_{23}\, g_{12>}\, g_{43>} = \mu^2\, D_2^{-1}\, g_{12>}\ .$$

Thus we have

$$D_1\, D_2\, g_{12>} = \mu^2\, g_{12>}\ . \tag{7.0.96}$$

On other hand we have

$$X_1\, g_{12>} = g_{<43}\, P_{14}\, g_{34>}\, g_{12>} = g_{<43}\, g_{31>}\, g_{42>} = g_{<43}\, P_{23}\, g_{21>}\, g_{43>} = \mu\, D_2^{-1}\, g_{21>}\ ,$$

and

$$X_2\, g_{12>} = g_{<43}\, P_{42}\, g_{34>}\, g_{12>} = g_{<43}\, g_{32>}\, g_{14>} = g_{<43}\, P_{13}\, g_{12>}\, g_{34>} = X_1^{-1}\, g_{12>}\ .$$

Note that from last eq. in (7.0.92) (taking into account (7.0.94)) we obtain

$$g_{<12}\, g_{12>} = \nu\ .$$

Relations (7.0.83) and (7.0.84) can be rewritten as

$$g_{<23}\, \hat{R}^{\pm 1}_{12}\, g_{23>} = \mu^{\mp 1}\, I_1\ , \quad g_{<12}\, \hat{R}^{\pm 1}_{23}\, g_{12>} = \mu^{\mp 1}\, I_3\ ,$$

which equivalent to $Tr_2 D_2 \hat{R}^{\pm 1}_{12} \sim I_1$ while relations

$$K_{12} \hat{R}^{\pm 1}_{23} \hat{R}^{\pm 1}_{12} = K_{12}\, K_{23}\ ,$$

give

$$g_{<12}\, \hat{R}^{\pm 1}_{23}\, \hat{R}^{\pm 1}_{12} = g_{<12}\, g_{23>}\, g_{<23}\ , \quad \hat{R}^{\pm 1}_{23}\, \hat{R}^{\pm 1}_{12}\, g_{23>} = g_{12>}\, g_{<12}\, g_{23>}\ .$$

Несколько дополнений по поводу дифференциального исчисления.

8.8 Классическое дифференциальное исчисление на группе Ли

Прежде всего рассмотрим классическую теорию дифференциального исчисления на группе. Пусть нам задана некоторая группа Ли G. Рассмотрим N-мерное представление этой группы, которое задается набором N^2 функционалов T^α_β ($\alpha,\ \beta = 1, \dots N$):

$$\forall g_1,\ g_2 \in G \rightarrow T^\alpha_\beta(g_1 g_2) = T^\alpha_\gamma(g_1)\, T^\gamma_\beta(g_2)\ .$$

В качестве координат элемента g группы G мы можем выбрать значения $T^\alpha_\beta(g)$. В общем случае эти координаты являются зависимыми (например, $T^\dagger T = I$ для группы $SU(n)$ и $T^t C T = C$, где C симметричная или кососимметричная матрицы для групп SO и Sp соответственно).

Введем левоинвариантные формы

$$\omega = T^{-1}\, dT = \omega^i\, t_i \ , \qquad (8.8.1)$$

где $(t_i)^\alpha_\beta$ реализуют матричное представление алгебры Ли группы G:

$$[t_i,\, t_j] = C^k_{ij}\, t_k \ .$$

Из определения левоинвариантной 1-формы (8.8.1) вытекает уравнение Маурера-Картана

$$d\omega = -\omega \wedge \omega \equiv -\omega^2 \ ,$$

которое можно переписать в виде

$$d\omega^k = -\frac{1}{2} C^k_{ij} \omega^i\, \omega^j \ . \qquad (8.8.2)$$

Любая k-дифференциальная форма может быть записана в виде:

$$\Omega = \omega^{i_1}\, \omega^{i_2} \dots \omega^{i_k}\, f_{i_1 \dots i_k}(T) \ , \qquad (8.8.3)$$

где $f_{i_1 \dots i_k}(T)$ некоторая функция на группе. Подействуем теперь дифференциалом d на Ω

$$\begin{gathered} d\,\Omega = d\,(\omega^{i_1}\, \omega^{i_2} \dots \omega^{i_k}\, f_{i_1 \dots i_k}(T)) = \\ = \sum_{n=1}^k (-1)^{n-1}\, \omega^{i_1} \dots \omega^{i_{n-1}}\, (-\tfrac{1}{2} C^{i_n}_{ij}\, \omega^i\, \omega^j)\, \omega^{i_{n+1}} \dots \omega^{i_k}\, f_{i_1 \dots i_k}(T) + \\ +(-1)^k\, \omega^{i_1}\, \omega^{i_2} \dots \omega^{i_k}\, (d\, f_{i_1 \dots i_k}(T)) \ . \end{gathered} \qquad (8.8.4)$$

Заметим теперь, что мы можем переписать $d\ f_{i_1 \dots i_k}$ в виде

$$dT^\alpha_\beta\, (\frac{\partial}{\partial T^\alpha_\beta}\, f_{i_1 \dots i_k}(T)) = (T^{-1}\, dT)^\gamma_\beta\, (\frac{\partial}{\partial T^\alpha_\beta}\, f_{i_1 \dots i_k}(T)) T^\alpha_\gamma = \omega^j\, (\chi_j \triangleright f_{i_1 \dots i_k}(T)) \ . \qquad (8.8.5)$$

Здесь мы ввели оператор левоинвариантного векторного поля

$$\chi_j = Tr(T t_j \frac{\partial}{\partial T}) = \left(T^\alpha_\gamma\, (t_j)^\gamma_\beta\, \frac{\partial}{\partial T^\alpha_\beta} \right) \ ,$$

который действует на координаты группы следующим образом

$$\chi_j \triangleright T^\alpha_\beta = T^\alpha_\gamma < \chi_j\, ,\, T^\gamma_\beta >= T^\alpha_\gamma\, (t_j)^\gamma_\beta \ ,$$

$$[\chi_i,\, \chi_j] = C^k_{ij}\, \chi_k \ ,$$

т.е. левоинвариантное векторное поле действует на группу справа и образует алгебру Ли. С учетом (8.8.5) формулу (8.8.4) можно представить в виде

$$\begin{gathered} d\Omega = [(-\tfrac{1}{2} C^k_{ij} \omega^i\, \omega^j\, \iota_k),\, \Omega] + [\omega^j\, \mathcal{M}_j,\, \Omega] = \\ = [(\omega^j\, \mathcal{M}_j - \tfrac{1}{2} C^k_{ij} \omega^i\, \omega^j\, \iota_k),\, \Omega] \ , \end{gathered} \qquad (8.8.6)$$

где мы ввели "внутреннюю производную" $\iota_k \equiv \frac{\partial}{\partial \omega^k}$ и левоинвариантный оператор $\mathcal{M}$ такой, что

$$[\mathcal{M}_j,\, f(T)] = \chi_j \triangleright f(T) \;\; , \quad [\mathcal{M}_j\, ,\, \omega^k] = 0 \;\; . \tag{8.8.7}$$

Основной вопрос который возникает здесь – это явное определение оператора $\mathcal{M}$, удовлетворяющего условиям (8.8.7).

Заметим, что

$$\chi_j \triangleright f(T) = [(d\,\iota_j + \iota_j\, d),\, f(T)] \;\; . \tag{8.8.8}$$

Поэтому естественно попытаться связать $\mathcal{M}$ с $(d\,\iota_j + \iota_j\, d)$. Проверка второй формулы из (8.8.7) дает соотношение

$$(d\,\iota_j + \iota_j\, d)\, \omega^k = \omega^k\, (d\,\iota_j + \iota_j\, d) - \frac{1}{2}\, (C^k_{ji} - C^k_{ij})\, \omega^i \;, \tag{8.8.9}$$

которое можно переписать в виде

$$[d\,\iota_j + \iota_j\, d + C^k_{ji}\omega^i \iota_k)\, ,\, \omega^k] = 0 \;. \tag{8.8.10}$$

Сравнивая (8.8.8), (8.8.10) с (8.8.7) и учитывая формулу $[\iota_j,\, f(T)] = 0$, мы получаем, что

$$\mathcal{M}_j = d\,\iota_j + \iota_j\, d + C^k_{ji}\omega^i \iota_k \;. \tag{8.8.11}$$

и BRST выражение для дифференциала (8.8.6) имеет вид

$$d = \omega^j\, \mathcal{M}_j - \frac{1}{2} C^k_{ij}\omega^i\, \omega^j\, \iota_k = \omega^j\, \mathcal{L}_j + \frac{1}{2} C^k_{ij}\omega^i\, \omega^j\, \iota_k \;, \tag{8.8.12}$$

где мы ввели обозначение для производной Ли

$$\mathcal{L}_j = d\,\iota_j + \iota_j\, d \;. \tag{8.8.13}$$

Из (8.8.8) и (8.8.9) следует, что $[\mathcal{L}_j\, ,\, T] = T\, t_j$, $[\mathcal{L}_j\, ,\, \omega^k] = -C^k_{ji}\, \omega^i$ и, таким образом, производные Ли образуют алгебру Ли

$$[\mathcal{L}_i\, ,\, \mathcal{L}_j] = C^k_{ij}\, \mathcal{L}_k \;,$$

Аналогично имеем

$$[\mathcal{M}_i\, ,\, \mathcal{M}_j] = C^k_{ij}\, \mathcal{M}_k \;\; , \quad [\mathcal{M}_i\, ,\, \iota_j] = 0 \;,$$

где последняя формула эквивалентна равенству $[\mathcal{L}_i,\, \iota_j] = C^k_{ij}\, \iota_k$ и согласуется со вторым равенством в (8.8.7) и соотношением $[\omega^i, \iota_j]_+ = \delta^i_j$. Т.о. формула (8.8.12) действительно определяет БРСТ заряд, возникающий в теориях вырожденных гамильтоновых систем.

8.9 Дифференциальное исчисление на квантовой группе

Литература

[1] P.Schupp, preprint LMU-TPW 94-8 (1994), hep-th/9408170

[2] А.П.Исаев, ЭЧАЯ том **28** (1997) 685.

[3] O.V.Radko, A.A.Vladimirov, "On the algebraic structure of differential calculus on quantum groups", J.Math.Phys. **38** (1997) 5434.

[4] P.Aschieri, L.Castellani, Int.J.Mod.Phys. A, **8** (1993) 1667).

[5] Woronowicz S.L., *Differential calculus on compact matrix pseudogroups (quantum groups),* Comm.Math.Phys.**122** (1989) 125-170.

[6] Brzezinski T., *Remarks on bicovariant differential calculi and exterior Hopf algebras,* Lett.Math.Phys. **27** (1993)287-300.