СИСТЕМЫ КОРНЕЙ ПРОСТЫХ КОНЕЧНОМЕРНЫХ АЛГЕБР ЛИ И АЛГЕБРЫ С ДЕЛЕНИЕМ.

Лекции А.П. Исаева (Лаб. теор. физики, ОИЯИ, Дубна)
Предварительная версия не для распространения.

1 Системы корней простых конечномерных алгебр Ли

1.1 Критерий Картана? и критерий полупростоты

Алгебра Ли (АЛ) g – это векторное пространство с базисом $\{X_a\}$ $(a, b, d \ldots = 1, \ldots, dim\, g)$, на котором определена операция коммутирования: $[X_a, X_b] = C^d_{ab}\, X_d$, где $C^d_{ab} = -C^d_{ba}$ – структурные константы АЛ, удовлетворяющие тождеству Якоби

$$C^f_{ab}\, C^g_{fd} + C^f_{bd}\, C^g_{fa} + C^f_{da}\, C^g_{fb} = 0 \; .$$

1.) АЛ называется абелевой, если

$$C^d_{ab} = 0 \;\; \forall \;\; a, b, d \; . \qquad (1.1.1)$$

2.) Подалгебра определяется набором генераторов $X_1, \ldots X_p$ $(p < dim\, g)$, если

$$C^d_{ab} = 0 \;\; , \quad (a, b \leq p, \;\; d > p) \; . \qquad (1.1.2)$$

3.) Инвариантная подалгебра N с набором генераторов $X_{\bar{1}}, \ldots X_{\bar{p}}$ определяется, если $[N, X_a] \in N$, или

$$C^d_{\bar{a}b} = 0 \; , \;\; (a \leq p, \;\; d > p) \; , \qquad (1.1.3)$$

т.е. ненулевыми могут быть только константы $C^{\bar{d}}_{\bar{a}b}$.
4.) АЛ проста, если она не имеет инвариантных подалгебр.
5.) АЛ полупроста, если она не имеет абелевых инвариантных подалгебр.
Определим метрику Киллинга

$$g_{ab} \equiv C^d_{ac}\, C^c_{bd} = Tr\, (ad(X_a)\, ad(X_b)) \;\; . \qquad (1.1.4)$$

Заметим, что объект $C_{abc} = C^d_{ab}\, g_{dc}$ полностью антисимметричен по индексам a, b, c. Действительно:

$$C_{abc} = C^d_{ab}\, Tr\, (ad(X_d)\, ad(X_c)) = Tr\, ([ad(X_a), \; ad(X_b)]\, ad(X_c)) =$$

$$= Tr\,(ad(X_a)\,[ad(X_b),\,ad(X_c)]) = -C_{acb}\ .$$

Критерий полупростоты гласит, что АЛ является полупростой если матрица g_{ab} невырождена. Действительно, пусть АЛ содержит абелевы инвариантные подалгебры, генераторы которых нумеруются индексами $\bar{a}, \bar{b}, \ldots$. Тогда $g_{\bar{a}\bar{b}} = 0$ и

$$g_{a\bar{b}} = C^d_{ac}\,C^c_{\bar{b}d} = C^d_{a\bar{c}}\,C^{\bar{c}}_{\bar{b}d} = C^{\bar{d}}_{a\bar{c}}\,C^{\bar{c}}_{\bar{b}\bar{d}} = 0$$

где второе и третье равенства следуют из (1.1.3), а последнее – из (1.1.1). Т.о. при наличии инвариантных абелевых подалгебр $det g_{ab} = 0$ и необходимость критерия Картана доказана.

1.2 Алгебра Ли $sl(2)$ и ее представления

Начнем с рассмотрения простейшей алгебры Ли $sl(2)$ и ее представлений. Стандартный базис этой алгебры выбирается следующим образом

$$e_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\ ,\quad e_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\ ,\quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\ . \qquad (1.2.5)$$

Тогда определяющие соотношения имеют вид

$$[H,\,e_\pm] = \pm 2\,e_\pm\ ,\quad [e_+,\,e_-] = H\ . \qquad (1.2.6)$$

Пусть V является произвольным $sl(2)$-модулем. Пространство V можно разложить в прямую сумму подпространств, нумеруемых собственными значениями λ генератора H: $V = \oplus_\lambda V_\lambda$, где $V_\lambda = \{v \in V |\, H \cdot v = \lambda\, v\}$. Ясно, что если $v \in V_\lambda$ то $e_+ v \in V_{\lambda+2}$ и $e_- v \in V_{\lambda-2}$.

Определение 1. Пусть существует такое $V_\lambda \neq 0$, что $V_{\lambda+2} = 0$, т.е. $e_+ v = 0$ для всех ненулевых векторов $v \in V_\lambda$. Такие вектора называются **максимальным вектором** или **вакуумом** веса λ.

Пусть V неприводимый $sl(2)$-модуль. Выберем максимальный вектор $v_0 \in V$ и положим $v_{-1} = 0$, $v_k = (1/k!)\, e_-^k\, v_0$. Тогда легко проверить следующие формулы

$$\begin{array}{ll} (a) & H\, v_k = (\lambda - 2k)\, v_k\ , \\ (b) & e_-\, v_k = (k+1)\, v_{k+1}\ , \\ (c) & e_+\, v_k = (\lambda - k + 1)\, v_{k-1}\ \ (k \geq 0). \end{array} \qquad (1.2.7)$$

Из (1.2.7)(a) следует, что все $v_k \neq 0$ являются линейно независимыми. Пусть V конечномерный модуль $dim\, V < \infty$ и m наименьшее целое число, для которого $v_m \neq 0$, $v_{m+1} = 0$ и, соответственно, $v_{m+k} = 0\ \forall k \geq 2$. Т.о. в качестве базиса в V можно выбрать вектора $(v_0, v_1, \ldots, v_m)$ и $V = V_m \oplus V_{m-2} \oplus \ldots \oplus V_{-m}$. Матричное представление алгебры $sl(2)$ на V задается формулами (1.2.7).

Рассмотрим формулу (1.2.7) для $k = m+1$: $e_+\, v_{m+1} = (\lambda - m)\, v_m$. Т.к. $v_{m+1} = 0$, $v_m \neq 0$, то мы заключаем, что $\lambda = m \equiv dim\, V - 1$. С другой стороны, если $\lambda = m$, то $e_+\, v_{m+1} = 0$ (вектор v_{m+1} выступает как новый вакуум) и мы безболезненно можем положить $v_{m+1} = 0$.

Определение 2. Вес вакуума (максимального вектора) для конечномерного неприводимого представления является неотрицательным целым числом и называется **старшим весом** V.

1.3 Базис Картана-Вейля для простых алгебр Ли

Рассмотрим алгебру Ли g с генераторами

$$\{H_i,\, T_a\}\ ,\quad (i=1,\dots,r)\ ,\quad (a=1,\dots dim\, g-r)\ \ ,$$

где $\{H_i\}$ ($[H_i,\, H_j]=0$) – генераторы подалгебры Картана $\mathcal{H}$ в g (максимальная коммутирующая подалгебра, для которой $H_i^\dagger \in \mathcal{H}$???), а T_a образуют ортогональное дополнение к $\mathcal{H}$: $Tr(ad(H_i)\, ad(T_a))=0$. Т.к.

$$Tr\,(ad(H_i)\,[ad(H_j),\, ad(T_a)]) = Tr\,([ad(H_i),\, ad(H_j)]\, ad(T_a)) = 0\ ,$$

то $[H_j,\, T_a]\in \mathcal{H}^\perp$ и, следовательно,

$$[H_j,\, T_a] = h_{j,ab}\, T_b\ . \tag{1.3.8}$$

Очевидно, что матрицы h_j реализуют матричное представление подалгебры Картана. Выберем образующие T_a и H_i эрмитовыми операторами, при этом $Tr(ad(T_a)\, ad(T_b)) = X_{ab}$ является вещественной симметричной невырожденной матрицей и

$$h^*_{j,ab} = -h_{j,ab}\ . \tag{1.3.9}$$

Кроме того

$$h_{j,ac}\, X_{cb} = Tr\,([ad(H_j),\, ad(T_a)]\, ad(T_b)) = Tr\,(ad(H_j)\,[ad(T_a),\, ad(T_b)]) = -h_{j,bc}\, X_{ca}\ ,$$

т.е. матрицы $h_{j,ab}$ $j=1,\dots,r$ антисимметричны с точностью до преобразования эквивалентности

$$(h_j\, X)^T = -h_j\, X \Rightarrow h_j^T = -X^{-1}\, h_j\, X\ , \tag{1.3.10}$$

и невырождены (иначе $\mathcal{H}$ можно было бы дополнить). Т.к. $[H_i,\, H_j]=0$, то все матрицы $h_{i,..}$ диагонализуются одновременно для всех i:

$$v_b^{(\alpha)}\, h_{i,ba} = \alpha_i\, v_a^{(\alpha)} \Leftrightarrow v^{(\alpha)}\, h_i = \alpha_i\, v^{(\alpha)}\ . \tag{1.3.11}$$

Для матрицы h со свойствами симметрии (1.3.10) справедливо утверждение, что если α является ее собственным значением, то $-\alpha$ тоже является ее собственным значением. Действительно, рассмотрим характеристическое тождество $\prod_\mu (h-\alpha_\mu)=0$ и транспонируем его. Тогда согласно (1.3.10) мы получим $\prod_\mu (h+\alpha_\mu)=0$, что и требовалось доказать.

Далее, для таких матриц со свойствами (1.3.10), (1.3.9) все собственные значения являются вещественными. Действительно, пусть $v\, h = \alpha\, v$ и рассмотрим равенства

$$(v\, h\, X\, v^*) = \alpha\, (v\, X\, v^*)\ ,$$

$$(v\,h\,X\,v^*)^* = \alpha^*\,(v\,X\,v^*)^* = \alpha^*\,(v\,X\,v^*)\ ,$$
$$(v\,h\,X\,v^*)^* = -(v^*\,h\,X\,v) = -(v\,(h\,X)^T\,v^*) = (v\,h\,X\,v^*)\ ,$$

(в последней строчке мы использовали (1.3.9) и (1.3.10)) откуда и следует вещественность $\alpha^* = \alpha$.

Свернем (1.3.8) с собственными векторами $v_a^{(\alpha)}$, в результате получаем

$$[H_j,\,E_\alpha] = \alpha_j\,E_\alpha\ ,\quad E_\alpha \equiv v_a^{(\alpha)}\,T_a\ . \tag{1.3.12}$$

Из (1.3.9) следует

$$h_i\,v^* = -\alpha\,v^*\ ,$$

т.е. $v^{(-\alpha)} = v^{(\alpha)*}$ и соответственно $E_{-\alpha} = E_\alpha^\dagger$. Заметим, что $[H_i,\,E_\alpha\,E_\beta] = (\alpha+\beta)_i\,E_\alpha\,E_\beta$ и если вычислить след от этого равенства, мы получаем $Tr(E_\alpha E_\beta) \neq 0$ только если $\alpha+\beta = 0$. Т.к. $[H_i,\,[E_\alpha,\,E_\beta]] = (\alpha+\beta)_i\,[E_\alpha,\,E_\beta]$, то

$$[E_\alpha,\,E_\beta] = N_{(\alpha,\beta)}\,E_{\alpha+\beta}\ , \tag{1.3.13}$$

если $\alpha+\beta$ корень, и равно нулю если не корень. Если же $\alpha+\beta = 0$, то

$$[E_\alpha,\,E_{-\alpha}] = x^i\,H_i\ . \tag{1.3.14}$$

Вычислим x^i для базиса Картана-Вейля, когда метрика Киллинга имеет вид (т.е. мы специальным образом отнормируем генераторы E_α):

$$Tr\,(ad(H_i)ad(H_j)) = g_{ij}\ ,\ Tr\,(ad(H_i)ad(E_\alpha)) = 0\ ,\ Tr\,(ad(E_\alpha)\,ad(E_\beta)) = \delta_{\alpha,-\beta}\ .$$
$$x^j\,g_{ji} = Tr\,(ad(H_i)\,[ad(E_\alpha),\,ad(E_{-\alpha})]) = Tr\,([ad(H_i),\,ad(E_\alpha)]\,ad(E_{-\alpha})) = \alpha_i\ .$$

Заметим, что

$$g_{ij} = Tr(ad(H_i)ad(H_j)) = \sum_\alpha C_{i\alpha}^\alpha C_{j\alpha}^\alpha = \sum_\alpha \alpha_i\alpha_j \tag{1.3.15}$$

Т.о. для любого вектора x из r-мерного корневого пространства мы имеем $x^i g_{ij} x^j = \sum_\alpha (x\alpha)^2 \geq 0$ и, следовательно, корневое пространство имеет евклидову метрику.

1.4 Свойства корней

Докажем теперь следующую теорему

Теорема 1 *Если α и β корни, то $2(\alpha\beta)/\alpha^2$ – целые числа и $\beta - 2\frac{(\alpha\beta)}{\alpha^2}\,\alpha$ тоже корень.*

Доказательство. Из (1.3.12) и (1.3.14) следует, что генераторы

$$\{H_\alpha = 2(\alpha^i\,H_i)/\alpha^2,\ e_{\pm\alpha} = \sqrt{2/\alpha^2}\,E_{\pm\alpha}\}$$

образуют алгебру Ли $sl(2)$ (1.2.6). Как было показано в пункте 2, собственные значения оператора H_α должны быть целыми числами и т.к.

$$[H_\alpha,\,E_\beta] = \frac{2(\alpha\beta)}{\alpha^2}\,E_\beta\ ,$$

то $2(\alpha\beta)/\alpha^2$ – целые числа для всех корней. Пусть корень γ таков, что

$$[E_\alpha,\,E_\gamma] = 0\ . \tag{1.4.16}$$

Тогда рассмотрим набор операторов (ср. с построением конечномерных представлений в алгебре $sl(2)$ в пункте 2)

$$\begin{array}{l} [E_{-\alpha},\, E_{\gamma}] = E'_{\gamma-\alpha}\ , \\ [E_{-\alpha},\, E'_{\gamma-\alpha}] = E'_{\gamma-2\,\alpha}\ , \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots , \\ [E_{-\alpha},\, E'_{\gamma-m\,\alpha}] = E'_{\gamma-(m+1)\,\alpha} = 0\ , \end{array} \tag{1.4.17}$$

где

$$E'_{\gamma-k\,\alpha} = N_{-\alpha,\,\gamma} \cdot N_{-\alpha,\,\gamma-\alpha} \cdots N_{-\alpha,\,\gamma-(k-1)\alpha} \cdot E_{\gamma-k\,\alpha}\ , \tag{1.4.18}$$

есть перенормированный генератор $E_{\gamma-k\,\alpha}$ и мы оборвали процедуру на шаге m в силу конечномерности нашей АЛ. Очевидно, что для всех j, $0 \leq j \leq m$

$$[E_{\alpha},\, E'_{\gamma-(j+1)\,\alpha}] = \mu_{j+1}\, E'_{\gamma-j\,\alpha}\ , \tag{1.4.19}$$

где

$$\mu_0 = 0 = \mu_{m+1}\ . \tag{1.4.20}$$

Найдем рекурентное соотношение для коэффициентов μ_j с помощью следующей цепочки равенств

$$\begin{aligned} \mu_{j+1}\, E'_{\gamma-j\,\alpha} = [E_{\alpha},\, E'_{\gamma-(j+1)\,\alpha}] = [E_{\alpha},\, [E_{-\alpha},\, E'_{\gamma-j\,\alpha}]] = \\ = -[E'_{\gamma-j\,\alpha},\, [E_{\alpha},\, E_{-\alpha}]] - [E_{-\alpha},\, [E'_{\gamma-j\,\alpha},\, E_{\alpha}]] = \\ = -[E'_{\gamma-j\,\alpha}, (\alpha\, H)] + \mu_j\, [E_{-\alpha},\, E'_{\gamma-(j-1)\,\alpha}] = \\ = [(\alpha\gamma) - j\,(\alpha\alpha) + \mu_j]\, E'_{\gamma-j\,\alpha}\ , \end{aligned}$$

следовательно мы имеем

$$\mu_{j+1} = \mu_j + (\alpha\gamma) - j\,(\alpha\alpha)\ . \tag{1.4.21}$$

Используя данные (1.4.20), мы получаем из рекурентного соотношения (1.4.21)

$$\begin{array}{c} \mu_j = j\,(\alpha\gamma) - \frac{j(j-1)}{2}\,(\alpha\alpha)\ , \\ 0 = (\alpha\gamma) - \frac{m}{2}\,(\alpha\alpha)\ . \end{array} \tag{1.4.22}$$

Итак мы доказали, что если α и γ корни, и $\alpha+\gamma$ не корень, то существует струна корней

$$\gamma,\ \gamma-\alpha, \dots,\ \gamma - 2\frac{(\alpha\gamma)}{(\alpha\alpha)}\,\alpha \equiv \gamma - m\,\alpha\ , \tag{1.4.23}$$

которая инвариантна относительно отражений по отношению к гиперплоскости P_α, перпендикулярной к вектору α и проходящей через начало координат корневого пространства. Действительно, все корни этой струны лежат вдоль направления вектора α, а корень

$$\sigma_\alpha(\gamma) = \gamma - 2\frac{(\alpha\gamma)}{(\alpha\alpha)}\,\alpha\ , \tag{1.4.24}$$

является отражением корня γ относительно гиперплоскости P_α (любой корень можно представить в виде суммы вектора $\in P_\alpha$ и вектора $\perp P_\alpha$; при преобразовании σ_α вектора, лежащие в плоскости P_α, не двигаются, а вектора, направленные вдоль α, меняют знак). Преобразования (1.4.24) называются вейлевскими отражениями.

Возвращаясь к формулировке теоремы, заметим, что если корень β содержится в струне (1.4.23), то в ней содержится и корень $\beta - 2\frac{(\alpha\beta)}{(\alpha\alpha)}\,\alpha$. Т.о. теорема доказана.

Следствие 1

Как следствие мы показали (см. формулу (1.4.23), где $m > 0$), что *если α и γ корни и $\gamma + \alpha$ не корень, то $(\alpha\gamma) > 0$, а если $\gamma - \alpha$ не корень, то $(\alpha\gamma) < 0$.*

Следствие 2

Из формул (1.4.18), (1.4.19) и (1.4.22) следует, что

$$N_{-\alpha,\,\beta+\alpha}\, N_{\alpha,\,\beta} = \mu_{j+1} = (j+1)\frac{(m-j)}{2}(\alpha\alpha)\;, \qquad (1.4.25)$$

где $\beta \equiv \gamma - (j+1)\,\alpha$.

Следствие 2 можно дополнить следующими свойствами коэффициентов $N_{\alpha,\beta}$.

1.) Из антисимметричности коммутатора мы получаем $N_{\alpha,\beta} = -N_{\beta,\alpha}$.

2.) Пусть три корня образуют треугольник $\alpha + \beta + \gamma = 0$. Тогда имеют место соотношения

$$N_{\gamma,\alpha} + N_{\gamma,\beta} = 0\;,\;\; N_{\beta,\alpha} + N_{\beta,\gamma} = 0\;,\;\; N_{\alpha,\beta} + N_{\alpha,\gamma} = 0\;. \qquad (1.4.26)$$

Действительно, это следует из тождеств Якоби

$$\begin{gathered}[E_\alpha,\, [E_\beta,\, E_\gamma]] + [E_\beta,\, [E_\gamma,\, E_\alpha]] + [E_\gamma,\, [E_\alpha,\, E_\beta]] = \\ = \{N_{\beta,\gamma}\,\alpha^i + N_{\gamma,\alpha}\,\beta^i + N_{\alpha,\beta}\,\gamma^i\}\,H_i = 0\;.\end{gathered}$$

Выразив один из корней через два других по формуле $\alpha + \beta + \gamma = 0$ мы приходим к (1.4.26). В частности мы видим, что $N_{-\alpha,\alpha+\beta} = -N_{-\alpha,-\beta} \equiv N^*_{\alpha,\beta}$ и (1.4.25) можно переписать как $\mu_{j+1} = |N_{\alpha,\beta}|^2$.

3.) Образующие E_α всегда можно отнормировать так, что $-N_{-\alpha,-\beta} = N_{\alpha,\beta}$, т.е. все коэффициенты N будут вещественными (см. Г.Вейль, Избранные труды. Математика, теоретическая физика. "Теория представлений непрерывных полупростых групп при помощи линейных преобразований", стр. 100-197).

Воспользуемся теоремой 1 и рассмотрим

$$0 \leq \frac{2(\alpha\beta)}{\alpha^2}\,\frac{2(\alpha\beta)}{\beta^2} = m\,n = 4cos^2\theta \leq 4\;.$$

Т.о. мы имеем следующие возможности

$$a.)\alpha \not\parallel \beta \Rightarrow 0 \leq m\cdot n \leq 3 \qquad \left|\begin{array}{c|c|c|c|c} 2\frac{\alpha\beta}{\alpha^2} = & 0 & \pm1 & \pm1 & \pm1 \\ 2\frac{\alpha\beta}{\beta^2} = & 0 & \pm1 & \pm2 & \pm3 \end{array}\right| \qquad (1.4.27)$$

плюс перестановка верхней и нижней строчек (заметим, что случай $(\alpha\beta) = 0$ соответствует полупростой алгебре Ли),

$$b.)\alpha \parallel \beta \Rightarrow m\cdot n = 4 \qquad \left|\begin{array}{c|c|c|c} 2\frac{\alpha\beta}{\alpha^2} = & \pm2 & \pm1 & \pm4 \\ 2\frac{\alpha\beta}{\beta^2} = & \pm2 & \pm4 & \pm1 \\ \hline & \alpha = \pm\beta & \alpha = \pm2\beta & \beta = \pm2\alpha \end{array}\right| \qquad (1.4.28)$$

Случай $\alpha = \pm\beta$ тривиален, а случаи $\alpha = \pm2\beta$, $\beta = \pm2\alpha$ запрещены, т.к. $[E_\alpha,\, E_\alpha] = 0$.

Лемма 1. *Пусть α и β два различных корня. Тогда, если $(\alpha\beta) > 0$, то $\alpha - \beta$ также корень, а если $(\alpha\beta) < 0$, то $\alpha + \beta$ также корень.*

Доказательство. Рассмотрим случай $(\alpha\beta) < 0$ (случай $(\alpha\beta) > 0$ будет следовать автоматически при замене $\alpha \to -\alpha$). Заметим, что из (1.4.27) следует: либо $2\frac{(\alpha\beta)}{\alpha^2}$ либо $2\frac{(\alpha\beta)}{\beta^2}$ равно -1. Без потери общности положим $2\frac{(\alpha\beta)}{\alpha^2} = -1$. Тогда с помощью Вейлевского отражения получаем, что

$$\sigma_\alpha(\beta) = \beta - 2\frac{(\alpha\beta)}{\alpha^2}\alpha = \beta + \alpha \ ,$$

является корнем.

1.5 Группа Вейля и простые корни.

Рассмотрим множество всех корней простой АЛ g и обозначим его как $\Phi(g)$. Рассмотрим все отражения типа (1.4.24) множества $\Phi(g)$. Очевидно корневая система остается инвариантной относительно всех таких отражений и, соответственно, операторы этих отражений образуют группу W, которая называется **группой Вейля**. Т.к. корневая система конечна, то W тоже конечна.

Рассмотрим гиперплоскости P_α для всех корней α. Эти гиперплоскости делят r-мерное корневое пространство на неперекрывающиеся конусы, каждый из которых называется **камерой Вейля**. Группа W переводит одну камеру Вейля в другую и, следовательно, W действует на Вейлевских камерах. Выберем некоторую камеру Вейля и возьмем вектор x, лежащий внутри этой камеры. Т.е. $(x\alpha) \neq 0$ $(\forall \alpha \in \Phi(g))$ (иначе вектор x лежал бы в одной из гиперплоскостей). Очевидно, что $(x\alpha)$ не меняет знак $(\forall \alpha \in \Phi(g))$ при движении x внутри одной и той же камеры (в противном случае мы прошли бы точку $(x\alpha) = 0$ и попали бы в другую камеру). Определим теперь (по отношению к выбранной камере Вейля)

1.) α – **положительный корень** если $(x\alpha) > 0 \to \alpha \in \Phi^+(x)$

2.) α – **отрицательный корень** если $(x\alpha) < 0 \to \alpha \in \Phi^-(x)$

Лемма 2. *Если векторы $\alpha^{(i)}$ $i = 1, \dots, k \leq r$ положительны и $(\alpha^{(i)}\alpha^{(j)}) \leq 0$, то $\alpha^{(i)}$ – линейно независимы.*

Доказательство. Будем доказывать от противного. Пусть мы имеем

$$\sum_{i=1}^{k} r_i\, \alpha^{(i)} = 0$$

где (т.к. $(x\alpha^{(i)}) > 0$) часть r_i больше нуля, а часть меньше нуля. Перенесем часть слагаемых с $r_i < 0$ в правую часть равенства

$$\epsilon \equiv \sum_{i=1}^{l} s_i\, \alpha^{(i)} = \sum_{i=l+1}^{k} t_i\, \alpha^{(i)} \ ,$$

где $s_i > 0, t_i > 0$. Рассмотрим

$$\epsilon^2 = \sum_{i,j} s_i\, t_j\, (\alpha^{(i)}\alpha^{(j)}) \leq 0 \ ,$$

отсюда следует, что $\epsilon = 0$ и $0 = (\epsilon x) = \sum_i s_i\,(\alpha^{(i)}x) = \sum_j t_j\,(\alpha^{(j)}x)$, т.е. $s_i = 0, t_i = 0$. Что и требовалось доказать.

Определение. Положительный корень называется **простым** если его нельзя записать в виде суммы двух положительных корней.

Теорема 2. *Существует $r = rang\, g$ простых корней $\alpha_{(1)}, \alpha_{(2)}, \ldots, \alpha_{(r)}$ таких, что любой положительный корень α можно записать как:*

$$\alpha = \sum_{i=1}^{r} n_i\, \alpha_{(i)}\ , \tag{1.5.29}$$

где $n_i \geq 0$ целые числа, а любой отрицательный корень β представим в виде

$$\beta = \sum_{i=1}^{r} m_i\, \alpha_{(i)}\ , \tag{1.5.30}$$

где целые числа $m_i \leq 0$. Более того $(\alpha_{(i)} \cdot \alpha_{(j)}) < 0$, т.е. угол между двумя простыми корнями всегда больше 90°. Вышеуказанное подмножество Δ простых корней $\alpha_{(1)}, \alpha_{(2)}, \ldots, \alpha_{(r)}$ называется базой.

Доказательство.
(1.) Очевидно, что разность двух простых корней $\alpha^{(1)}$ и $\alpha^{(2)}$ не может быть корнем. Действительно, $\beta = \alpha^{(1)} - \alpha^{(2)}$ не может быть положительным корнем (иначе $\alpha^{(1)}$ разлагается в сумму двух положительных корней) и аналогично β не может быть отрицательным корнем (иначе $\alpha^{(2)} = \alpha^{(1)} + (-\beta)$ разлагается в сумму двух положительных корней), т.о. β не корень.

(2.) Теперь, согласно следствию 1 из предыдущего пункта, мы имеем для двух произвольных простых корней $(\alpha^{(1)}\alpha^{(2)}) \leq 0$ и следовательно все простые корни (согласно Лемме 2) являются линейно независимыми.

(3.) Согласно формуле (1.3.15) любой вектор y можно разложить по положительным корням

$$y_i = g_{ij}y^j = 2 \sum_{\alpha \in \Phi^+(x)} \alpha_i(\alpha\, y)\ .$$

Т.к., по определению, все положительные корни или просты или разлагаются в сумму положительных корней, то продолжая эту процедуру мы рано или поздно разложим все положительные корни в сумму простых корней (1.5.29), а следовательно разложим по простым корням и произвольный вектор y, т.е. простые корни формируют базис r- мерного пространства. Т.к. базис в r- мерном пространстве состоит из r векторов, то простых корней ровно r штук: $\alpha^{(i)}$, $(i = 1, \ldots, r)$.

(4.) Далее, система векторов $\{\alpha^{(1)}, \ldots, \alpha^{(r)}, \beta\}$, (где β положительный не простой корень) является линейно зависимой и, согласно Лемме 2, одно из $(\alpha^{(j)}\beta) > 0$. Тогда по Лемме 1 $\gamma_1 = \beta - \alpha^{(j)}$ тоже корень, причем положительный (иначе $\alpha^{(j)}$ будет не простым). Теперь, либо γ_1 - простой корень и соответственно β разлагается в виде суммы двух простых корней, либо γ_1 опять положительный не простой корень, который можно снова разложить в виде $\gamma_2 = \gamma_1 - \alpha^{(k)}$, где γ_2- положительный корень и т.д. Продолжая эту процедуру, до тех пор пока на каком-нибудь шаге мы не получим, что γ_k - простой корень, мы можем разложить любой положительный корень в виде линейной комбинации простых, с положительными целыми коэффициентами. Соответственно любой отрицательный корень мы можем разложить в виде линейной комбинации простых, с отрицательными целыми коэффициентами. Т.о. теорема 2 доказана.

Следствие. Разность двух корней $\gamma = \beta - \alpha^{(i_k)}$, где корень β есть сумма простых корней $\beta = \alpha^{(i_1)} + \alpha^{(i_2)} + \ldots + \alpha^{(i_j)}$ и $i_k \neq i_1, \ldots, i_j$, не является корнем.
Действительно, γ не может быть отрицательным корнем (иначе $\alpha^{(i_k)}$ не прост). С другой стороны γ не может быть положительным корнем, т.к. это противоречило бы (1.5.29).

Как следствие пункта (1.) из доказательства теоремы 2 и формул (1.3.13), (1.3.14) мы имеем

$$[E_{\alpha^{(i)}}, E_{-\alpha^{(j)}}] = \delta_{i,j} \, (\alpha^{(i)} H) \; . \tag{1.5.31}$$

Теорема 3. *Любая простая алдгебра Ли g определяется системой $\Delta(x)$ своих простых корней.*

Доказательство.
Для доказательства достаточно построить по простым корням g все ее корни. Т.к. если α - корень, то и $-\alpha$ - корень, достаточно ограничиться построением только положительных корней. Положительный корень, являющийся суммой k простых корней, назовем **корнем порядка** k. Все корни порядка один нам даны, ибо это – простые корни. Теперь пусть мы построили все корни порядка $k-1$. Корни порядка k имеют вид $\gamma + \alpha$, где γ - корень порядка $k-1$, а α - простой корень (пункт (4.) из доказательства теоремы 2). Т.к. все корни γ, $\gamma - \alpha$, $\gamma - 2\alpha$, $\ldots$, $\gamma - m\alpha$ положительны (иначе α будет не простым) и порядка меньшего k (т.о. m известно по предположению индукции), то вопрос о том, является ли сумма $\gamma + \alpha$ корнем определяется формулой (1.4.23). Т.е. $\gamma + \alpha$ не является корнем, если $2(\alpha\gamma)/\alpha^2 \geq m$. Т.о. мы можем построить все корни порядка k. Что и требовалось доказать.

Рассмотрим теперь струну

$$\alpha^{(i)}, \, \alpha^{(i)} + \alpha^{(j)}, \, \alpha^{(i)} + 2\,\alpha^{(j)}, \ldots, \, \alpha^{(i)} + m\,\alpha^{(j)} \; .$$

Согласно (1.4.23) число m положительно и равно $-2(\alpha^{(i)}\alpha^{(j)})/(\alpha^{(j)})^2$. Как мы видели m может принимать только значения $0, 1, 2, 3$, и следовательно число корневых векторов в струне не превышает 4.

Итак, простая алгебра Ли g определяется генераторами $E_{\alpha^{(i)}}$ и соотношениями (см. (1.5.31))

$$[E_{\alpha^{(i)}}, E_{-\alpha^{(j)}}] = \delta_{i,j} \, (\alpha^{(i)} H) \; ,$$

$$[(\alpha^{(i)} H), E_{\alpha^{(j)}}] = (\alpha^{(i)} \alpha^{(j)}) \, E_{\alpha^{(j)}} \;\Rightarrow\; [H_{\alpha^{(i)}}, E_{\alpha^{(j)}}] = K_{ji} \, E_{\alpha^{(j)}} \; , \tag{1.5.32}$$

$$[E_{\alpha^{(i)}}, E_{\alpha^{(j)}}] = N_{\alpha^{(i)},\alpha^{(j)}} \, E_{\alpha^{(i)}+\alpha^{(j)}} \; ,$$

$$\underbrace{[E_{\alpha^{(j)}}, \ldots [E_{\alpha^{(j)}},}_{m+1} E_{\alpha^{(i)}}] = ad^{m+1}_{E_{\alpha^{(j)}}} * E_{\alpha^{(i)}} = 0 \; , \quad \left(m = -2 \frac{(\alpha^{(i)}\alpha^{(j)})}{(\alpha^{(j)})^2} \right) \; . \tag{1.5.33}$$

Соотношение (1.5.33) называется соотношением Серра, а матрица

$$K_{ij} = 2\frac{(\alpha^{(i)}\alpha^{(j)})}{(\alpha^{(j)})^2}$$

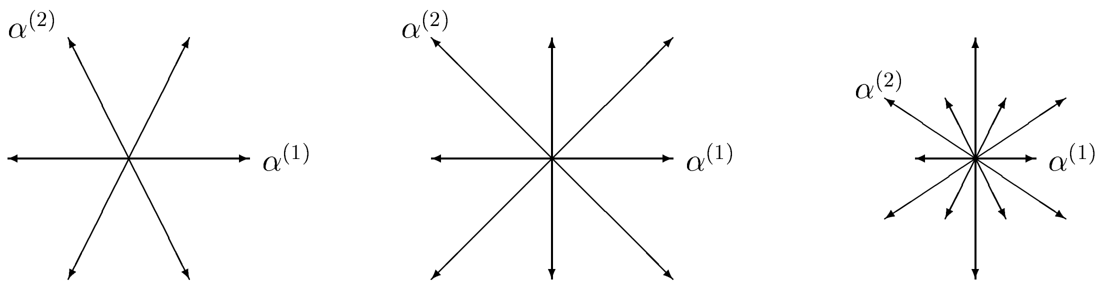
называется матрицей Картана. Очевидно, что $K_{ii} = 2$, и согласно (1.4.27) мы имеем следующие возможности ($i \neq j$):

$K_{ij} =$	0	-1	-1	-1
$K_{ji} =$	0	-1	-2	-3
$(\alpha^{(j)})^2/(\alpha^{(i)})^2 =$	$?$	1	2	3
$cos(\theta_{ij}) =$	0	$-1/2$	$-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{3}/2$
$\theta_{ij} =$	90^o	120^o	135^o	150^o

(1.5.34)

где θ_{ij} угол между двумя простыми корнями $\alpha^{(j)}$ и $\alpha^{(i)}$.

Графическое представление корневых векторов называется векторной диаграммой. Согласно (1.5.34) легко нарисовать все возможные двумерные диаграммы:



A_2 B_2 G_2

рис. 1

1.6 Диаграммы Дынкина и корневые системы классических алгебр Ли.

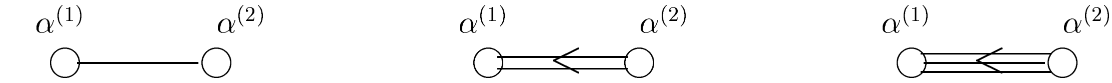
Из предыдущего обсуждения ясно, что только недиагональные элементы матрицы Картана являются важными и несут в себе полную информацию об АЛ, диагональные элементы всегда равны 2. Оказывается, что матрицу Картана можно закодировать в виде диаграммы. Такие диаграммы называются диаграммами Дынкина. Кодирование осуществляется с помощью правил

1.) Необходимо нарисовать $r = rang\,(g)$ - точек, соответствующих простым корням $\alpha^{(i)}$.

2.) Соединить i-ую и j-ую точки с помощью ($K_{ij}\, K_{ji}$) линий (число таких линий может быть только $0, 1, 2, 3$).

3.) Если между точками i и j проходят больше чем одна линия, необходимо нарисовать стрелку ($>$ или $<$) указывающую на корень с меньшей длинной.

В качестве примера нарисуем диаграммы Дынкина, которые соответствуют векторным диаграммам, представленным на рис. 1:



$|\alpha^{(2)}|^2 = |\alpha^{(1)}|^2$ $\quad$ $|\alpha^{(2)}|^2 = 2|\alpha^{(1)}|^2$ $\quad$ $|\alpha^{(2)}|^2 = 3|\alpha^{(1)}|^2$

A_2 $\quad$ B_2 $\quad$ G_2

рис. 2

Покажем теперь как построить диаграммы Дынкина для простых алгебр классических серий (т.е. для алгебр, которые соответствуют группам $SL(n)$, $SO(n)$ и $Sp(2n)$).

Алгебра sl(n). **A-серия.** Эта алгебра бесшпуровых матриц $n \times n$ имеет размерность $(n^2 - 1)$. Прежде всего опишем систему корней алгебры $sl(n)$. Подалгебра Картана задается вещественными диагональными бесшпуровыми матрицами $(A)_{ij} = a_i\,\delta_{ij}$, $(\sum_i a_i = 0)$. Отсюда следует, что ранг $su(n)$ равен $n-1$ и соответственно алгебра $sl(n)$ имеет $(n^2-1)-(n-1) = n(n-1)$ корней. Рассмотрим $n \times n$ матрицы E_{ij} $(i \neq j)$, которые имеют только один ненулевой элемент $(E_{ij})_{kl} = \delta_{ik}\delta_{jl}$. Легко проверить, что

$$[E_{ij},\, E_{mn}]_{kl} = \delta_{ik}\,\delta_{jm}\,\delta_{nl} - \delta_{mk}\,\delta_{ni}\,\delta_{jl} = \delta_{jm}\,(E_{in})_{kl} - \delta_{ni}\,(E_{mj})_{kl}\ . \qquad (1.6.35)$$

$$[A,\, E_{ij}]_{km} = a_k\,\delta_{ik}\,\delta_{jm} - a_m\,\delta_{jm}\,\delta_{ik} = (a_i - a_j)\,(E_{ij})_{km}\ . \qquad (1.6.36)$$

Т.о. элементы E_{ij} соответствуют корням алгебры $sl(n)$. Число корневых элементов E_{ij} равно $n(n-1)$, что совпадает с числом всех корней алгебры $sl(n)$ и следовательно мы нашли все корневые элементы $sl(n)$. Элементы E_{ij} и E_{ji} соответствуют двум противоположным корням (α и $-\alpha$). Действительно

$$[E_{ij},\, E_{ji}]_{km} = \delta_{ik}\,\delta_{im} - \delta_{jk}\,\delta_{jm} = (E_{ii})_{km} - (E_{jj})_{km} = (h_i - h_j)_{km}\ , \qquad (1.6.37)$$

где мы использовали обозначение $h_i \equiv E_{ii}$. Очевидно, что матрица $(h_i - h_j)$ является элементом подалгебры Картана $sl(n)$, т.к. является диагональной и бесшпуровой матрицей. Сравним (1.6.36) с соотношением $[H_i,\, E_\alpha] = \alpha_i\, E_\alpha$, где положим

$$H_i \equiv h_i - 1/n \cdot \mathbf{1}\ , \quad Tr(H_i) = 0\ , \quad \sum_i H_i = 0\ .$$

Из (1.6.36) мы имеем

$$[H_i,\, E_{kl}]_{mn} = (\delta_{ik} - \delta_{il})\,(E_{kl})_{mn} = (e_i^{(k)} - e_i^{(l)})\,(E_{kl})_{mn}\ , \qquad (1.6.38)$$

т.е. E_{kl} соответствует E_α с корневым вектором $\alpha_i = e_i^{(k)} - e_i^{(l)} \equiv \alpha_i^{(kl)}$. где $e^{(k)}$ является единичным вектором $e_i^{(k)} = \delta_i^k$ в n-мерном векторном пространстве. Теперь легко вычислить метрику в корневом пространстве воспользовавшись формулой (1.3.15)

$$\begin{gathered} g_{ij} = \textstyle\sum_{k,l}\,(e^{(k)} - e^{(l)})_i\,(e^{(k)} - e^{(l)})_j = \\ = 2\,n\,(\delta_{ij} - 1/n) \sim Tr(H_iH_j) = \delta_{ij} - 1/n\ . \end{gathered} \qquad (1.6.39)$$

Заметим, что:
1.) все корневые вектора $\alpha^{(ij)}$ лежат в $n-1$-мерном пространстве $\Phi_{su(n)}$, ортогональном вектору $u = \sum_k e^{(k)} = (1,1,\dots,1)$, т.к. $(e_{(i)} - e_{(j)}) \cdot \sum_{k=1}^n e_{(k)} = 0$. С помощью вектора u метрика (1.6.39) записывается в виде $g_{ij} = 2\,n\,(\delta_{ij} - \frac{1}{n}\,u_i u_j)$, а обратная метрика на $\Phi_{su(n)}$ равна $g^{ij} = \frac{1}{2\,n}\,(\delta^{ij} - \frac{1}{n}\,u^i u^j)$.
2.) Длинна всех корневых векторов одинакова и равна $\sqrt{1/n}$, т.к. $(\alpha_{(ij)})^2 = 1/n$ $(\forall i,j)$.
3.) В качестве простых корней можно выбрать $(n-1)$ независимых векторов $\alpha^{(i)} = \alpha^{(i\,i+1)}$. Действительно, выберем вектор $x = (x^1, x^2, \dots, x^n)$, фиксирующий положительные и отрицательные корни, такой, что $\sum x^i = 0$ и $x^i > x^j$ (если $i < j$). Тогда все корни $e^{(i)} - e^{(j)}$ представимы в виде

$$e^{(i)} - e^{(j)} = \alpha^{(i)} + \alpha^{(i+1)} + \ldots + \alpha^{(j-1)} \quad (i < j) \quad \text{положительные корни},$$

$$e^{(i)} - e^{(j)} = -\alpha^{(j)} - \alpha^{(j+1)} - \ldots - \alpha^{(i-1)} \quad (i > j) \quad \text{отрицателные корни}.$$

Эти соотношения и показывают, что $\alpha^{(i)}$ формируют базис простых корней, т.к. их коэффициенты в разложении положительных и отрицательных корней, являются соответственно положительными и отрицательными целыми числами.
4.) Для выбранных нами простых корней мы имеем

$$(\alpha^{(i)}\alpha^{(j)}) = (e_k^{(i)} - e_k^{(i+1)})\,g^{kl}\,(e_l^{(j)} - e_l^{(j+1)}) = \frac{1}{2n}\,(2\delta_{ij} - \delta_{i+1,j} - \delta_{i,j+1})\ ,$$

и так как $(\alpha^{(i)})^2 = 1/n$, то матрица Картана имеет вид $(1 \geq i,j \geq n-1)$:

$$K_{ij} = 2\frac{(\alpha^{(i)}\alpha^{(j)})}{(\alpha^{(j)})^2} = \begin{cases} K_{ii} = 2\ ; \\ K_{ij} = -1 \text{ если } |i-j| = 1\ ; \\ K_{ij} = 0 \text{ если } |i-j| \neq 0,1\ . \end{cases}$$

И соответствующая диаграмма Дынкина есть:

рис. 3

Алгебра so(n). *B* **и** *D* **серии.** Эта алгебра вещественных антисимметричных матриц $n \times n$ и ее размерность равна $n(n-1)/2$. Базис в этой алгебре можно задать с помощью матриц

$$(L_{(ij)})_{km} = (-E_{ij} + E_{ji})_{km} = -\delta_{ik}\,\delta_{jm} + \delta_{jk}\,\delta_{im}\ . \tag{1.6.40}$$

Прямое вычисление дает (см. (1.6.35))

$$[L_{(ij)},\, L_{(mn)}] = [-E_{ij} + E_{ji},\, -E_{mn} + E_{nm}] = \delta_{im}L_{(jn)} - \delta_{jm}L_{(in)} + \delta_{jn}L_{(im)} - \delta_{in}L_{(jm)}\ . \tag{1.6.41}$$

Выберем в качестве подалгебры Картана, алгебру, генерируемую эрмитовыми коммутирующими матрицами

$$i\,L_{(12)} \equiv H_1\ ,\ \ i\,L_{(34)} \equiv H_2\ ,\ \ i\,L_{(56)} \equiv H_3\ ,\ \dots\ , i\,L_{(2r-1\,2r)} \equiv H_r\ , \tag{1.6.42}$$

где $2r = n$ для n - четного и $2r = n-1$ для n - нечетного. *Таким образом,* $so(2r)$ *и* $so(2r+1)$ *имеют один и тот же ранг* r. Отметим, что метрика в корневом пространстве имеет вид

$$g_{ij} \sim Tr(H_i\,H_j) = -Tr[(E_{i\,i+1} - E_{i+1\,i})(E_{j\,j+1} - E_{j+1\,j})] = 2\,\delta_{ij}\ . \tag{1.6.43}$$

Для алгебр $so(2r)$ и $so(2r+1)$ число корней равно соответственно

$$\frac{2r\,(2r-1)}{2} - r = 2\,r\,(r-1)\ ,\ \ \frac{(2r+1)\,2r}{2} - r = 2\,r^2\ . \tag{1.6.44}$$

Исследуем теперь корневые системы $so(2r)$ и $so(2r+1)$. Для того, чтобы сделать это построим *step*-операторы. Из (1.6.41) следует, что

$$[L_{(12)},\, L_{(13)}] = L_{(23)}\ ,\ \ [L_{(12)},\, L_{(23)}] = -L_{(13)}\ . \tag{1.6.45}$$

Теперь по аналогии с угловым моментом мы имеем ($\epsilon = \pm 1$)

$$[i\,L_{(12)},\, L_{(13)} + i\epsilon L_{(23)}] = \epsilon\,(L_{(13)} + i\epsilon L_{(23)})\ , \tag{1.6.46}$$

Аналогичная формула будет при замене $3 \to 4$. Однако, комбинации $(L_{(1k)} + i\epsilon L_{(2k)}) \equiv L^{(\epsilon)}_{(12,k)}$ $(k = 3, 4)$ не могут быть *step*-операторами, т.к.

$$\begin{gathered}
[L_{(34)},\, L_{(14)} + i\epsilon L_{(24)}] = -(L_{(13)} + i\epsilon L_{(23)}) \Rightarrow \\
[L_{(34)},\, L^{(\epsilon)}_{(12,4)}] = -L^{(\epsilon)}_{(12,3)}\ ,\ \ [L_{(34)},\, L^{(\epsilon)}_{(12,3)}] = L^{(\epsilon)}_{(12,4)}\ .
\end{gathered} \tag{1.6.47}$$

Данная трудность обходится, если заметить, что (1.6.47) напоминают (1.6.45) и рассмотреть комбинацию

$$\begin{gathered}
\overline{L} = (L_{(13)} + i\epsilon L_{(23)}) + i\,\eta(L_{(14)} + i\epsilon L_{(24)}) = \\
= (L^{(\epsilon)}_{(12,3)} + i\eta L^{(\epsilon)}_{(12,4)}) = -(L^{(\eta)}_{(34,1)} + i\epsilon L^{(\eta)}_{(34,2)}) \equiv L^{(\epsilon,\eta)}_{(12,34)} = -L^{(\eta,\epsilon)}_{(34,12)}\ ,
\end{gathered} \tag{1.6.48}$$

где ϵ и η могут независимо принимать значения ± 1. Действительно, из (1.6.42), (1.6.46) и (1.6.47) мы имеем

$$[H_1,\, \overline{L}] = \epsilon \overline{L}\ ,\ \ [H_2,\, \overline{L}] = \eta\,\overline{L}\ ,\ \ [H_3,\, \overline{L}] = 0\ , \dots\ , [H_r,\, \overline{L}] = 0\ . \tag{1.6.49}$$

Т.о., оператор $\overline{L}$ соответствует четырем корням $(\pm 1,\, \pm 1,\, 0, \dots, 0) = \pm e^{(1)} \pm e^{(2)}$ в зависимости от значений $\epsilon = \pm 1$, $\eta = \pm 1$. Здесь $e^{(i)}$ - единичные вектора в r - мерном пространстве. Данная конструкция обобщается на случай, когда диагонализуются произвольные два генератора $\{H_i,\, H_j\}$ подалгебры Картана. Необходимо рассмотреть инвариантное (относительно присоединенного действия операторов $\{H_i,\, H_j\}$) подпространство натянутое на генераторы $\{L_{(i,j)},\, L_{(i,j+1)},\, L_{(i+1,j)},\, L_{(i+1,j+1)}\}$, $(i, j =$

$1,3,5,\ldots$), линейная комбинация которых $L^{(\epsilon,\eta)}_{(i\,i+1,j\,j+1)}$, типа (1.6.48), будет определять корни. На этом пути мы находим, что $so(n)$ (в обоих случаях, когда n четное и нечетное) имеет набор корней $(\pm e^{(i)} \pm e^{(j)})$ $(i<j,\ i,j=1,\ldots,r)$. Согласно определению метрики (1.6.43) все эти корни имеют одинаковую длинну и их число равно $\frac{r(r-1)}{2}\cdot 4 = 2r(r-1)$. Для $so(2r)$ это число совпадает с числом всех корней и следовательно в этом случае мы нашли все корни. Для $so(2r+1)$ мы должны найти дополнительные корни.

Прежде чем перейти к обсуждению систем простых корней для алгебр $so(n)$ приведем коммутационные соотношения для корневых операторов (1.6.48), которые понадобятся нам в дальнейшем при обсуждении алгебры G_2

$$[L^{(\epsilon,\eta)}_{(12,34)},\, L^{(\rho,\kappa)}_{(34,56)}] = (\eta\rho - 1)\, L^{(\epsilon,\kappa)}_{(12,56)} \ . \qquad (1.6.50)$$

A. so(2r) – D **серия.**

Выберем в пространстве корней вектор $x=(x_1,\ldots,x_r)$, определяющий положительные корни такой, что при $i<j$ мы имеем $x_i > \pm x_j$. Тогда корни $e^{(i)} \pm e^{(j)}$ $(i<j)$ являются положительными, а $-(e^{(i)} \pm e^{(j)})$ $(i<j)$ – отрицательными. Тогда в качестве первых $r-1$ простых корней можно выбрать

$$\alpha^{(1)} = e^{(1)} - e^{(2)}\ ,\ \ \alpha^{(2)} = e^{(2)} - e^{(3)}\ ,\ \ldots\ ,\ \alpha^{(r-1)} = e^{(r-1)} - e^{(r)}\ , \qquad (1.6.51)$$

а r-ый корень определим как

$$\alpha^{(r)} = e^{(r-1)} + e^{(r)}\ . \qquad (1.6.52)$$

Эти корни являются простыми, т.к. они образуют базис и для положительных корней мы имеем

$$\begin{aligned}
e^{(i)} - e^{(j)} &= \alpha^{(i)} + \ldots + \alpha^{(j-1)}\ ,\ \ (i<j)\ ,\\
e^{(i)} + e^{(j)} &= (e^{(i)} - e^{(j)}) + 2(e^{(j)} - e^{(r-1)}) + (e^{(r-1)} - e^{(r)}) + (e^{(r-1)} + e^{(r)}) = \\
&\quad (\alpha^{(i)} + \ldots + \alpha^{(j-1)}) + 2(\alpha^{(j)} + \ldots + \alpha^{(r-2)}) + \alpha^{(r-1)} + \alpha^{(r)}(i<j<r)\ ,\\
e^{(i)} + e^{(r)} &= (e^{(i)} - e^{(r-1)}) + +(e^{(r-1)} + e^{(r)}) = (\alpha^{(i)} + \ldots + \alpha^{(r-2)}) + \alpha^{(r)}(i<j=r)\ ,
\end{aligned}$$

т.е. все коэффициенты разложения являются целыми положительными числами. Действуя тем же способом, легко можно выразить все отрицательные корни в виде линейной комбинации простых корней (1.6.51), (1.6.52), но уже с отрицательными коэффициентами. Диаграмма Дынкина для $so(2r)$ теперь легко строится по матрице Картана, которую можно вычислить, зная все простые корни (1.6.51), (1.6.52) и метрику (1.6.43). Мы уже отмечали, что длинна всех простых корней одинакова. Далее

$$K_{i,j} = 2\frac{(\alpha^{(i)}\alpha^{(j)})}{(\alpha^{(j)})^2} = (2\,\delta_{ij} - \delta_{i,j-1} - \delta_{i-1,j})\ \ (i,j<r-1)\ ,$$

$$K_{r,i} = K_{i,r} = 2\frac{(\alpha^{(i)}\alpha^{(r)})}{(\alpha^{(r)})^2} = (2\delta_{i,r} - \delta_{i,r-2})\ \ . \qquad (1.6.53)$$

$$K = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & \dots & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Т.о. диаграмма Дынкина алгебры $so(2r)$ имеет вид

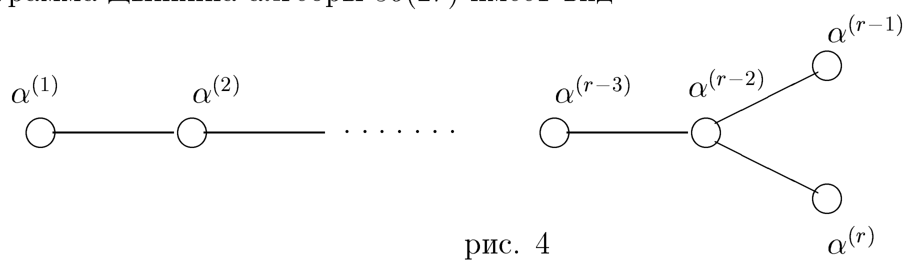


рис. 4

Заметим, что если мы удалим из диаграммы Дынкина для $so(2r)$ на рис. 4 кружок, соответствующий корню $\alpha^{(r)}$ (или $\alpha^{(r-1)}$), то в результате мы получим диаграмму Дынкина на рис. 3 для алгебры $su(r)$ ($rang(su(r)) = r-1$). Т.е. $su(r)$ является подалгеброй $so(2r)$ и может быть сгенерирована Картановскими элементами $H_1, \dots, H_{r-1}$ и операторами с корнями $\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(r-1)}$.

A. so(2r+1) – B серия.

Для алгебры $so(2r)$ мы получили $2r(r-1)$ корней $\pm e^{(i)} \pm e^{(j)}$ $(i \neq j)$. Однако для алгебры $so(2r+1)$ число корней должно быть $2r^2$ (1.6.44). Нам необходимо найти еще $2r$ дополнительных *step*-операторов. У нас есть дополнительный индекс $2r+1$. Возьмем оператор $L_{1,2r+1}$. На него нетривиально действует только один картановский элемент $H_1 = i\, L_{12}$: $[H_1,\, L_{1,2r+1}] = i\, L_{2,2r+1}$. На элемент $L_{2,2r+1}$ нетривиально действует также только один картановский элемент H_1: $[H_1,\, L_{2,2r+1}] = -i\, L_{1,2r+1}$. Т.о. относительно картановской подалгебры линейное пространство с базисом $L_{i,2r+1}$ $(i = 1,2)$ является инвариантным и естественно искать *step*-оператор как линейную комбинацию $L_\alpha = L_{1,2r+1} + \alpha\, L_{2,2r+1}$. Имеем

$$[H_1,\, L_\alpha] = i\, L_{2,2r+1} - i\,\alpha\, L_{1,2r+1} = -i\,\alpha\,(L_{1,2r+1} - \frac{1}{\alpha}\, L_{2,2r+1}) \,,$$

$$[H_j,\, L_\alpha] = 0 \;\; (j = 2,3,\dots) \,,$$

и, следовательно, L_α - *step*- оператор если $\alpha^2 = -1 \;\Rightarrow \alpha = \pm i$ с корнем $(-i\alpha, 0, \dots, 0) = (\pm 1, 0, \dots, 0)$. Действуя в этом направлении мы находим $2r$ дополнительных *step* - операторов с корнями $(\pm 1, 0, \dots, 0)$, $(0, \pm 1, 0, \dots, 0)$, $\dots$, $(0, 0, \dots, \pm 1)$. Т.о. корнями для $so(2r+1)$ являются вектора

$$\pm e^{(i)} \pm e^{(j)} \;\text{ с длинной }\; \sqrt{2} \;, \quad \pm e^{(i)} \;\text{ с длинной }\; 1 \,,$$

(здесь мы выбрали нормировку метрики так, что $g^{ij} = \delta_{ij}$), которые соответствуют корневым операторам

$$L^{(\epsilon,\eta)}_{(i\,i+1,j\,j+1)} = L_{(i\,j)} + i\epsilon L_{(i+1,j)} + i\eta L_{(i,j+1)} - \epsilon\eta\, L_{(i+1,j+1)} \;,$$
$$L^{(\rho)}_{(i)} = L_{(i,2r+1)} + i\rho L_{(i+1,2r+1)} \;\; (i,j = 1,3,5,\dots) \;, \qquad (1.6.54)$$

с коммутационными соотношениями (1.6.50) и

$$[L^{(\epsilon)}_{(i)},\, L^{(\eta)}_{(i)}] = (\eta-\epsilon) H_{(i+1)/2} \;,$$

$$[L^{(\epsilon,\eta)}_{(i\,i+1,j\,j+1)},\, L^{(\rho,\kappa)}_{(i\,i+1,j\,j+1)}] = (1-\eta\kappa)(\rho-\epsilon)\, H_{(i+1)/2} + (1-\epsilon\rho)(\kappa-\eta)\, H_{(j+1)/2} \;,$$

$$[L^{(\epsilon)}_{(i)},\, L^{(\eta)}_{(j)}] = L^{(\epsilon,\eta)}_{(i\,i+1,j\,j+1)} \;, \quad [L^{(\rho)}_{(i)},\, L^{(\epsilon,\eta)}_{(i\,i+1,j\,j+1)}] = (\rho\epsilon - 1)\, L^{(\eta)}_{j} \;. \qquad (1.6.55)$$

Простые вектора для $so(2r+1)$ выбираются в виде

$$\alpha^{(1)} = e^{(1)} - e^{(2)} \;, \dots ,\; \alpha^{(r-1)} = e^{(r-1)} - e^{(r)} \;,\;\; \alpha^{(r)} = e^{(r)} \;, \qquad (1.6.56)$$

и для положительных корней $(i<j)$ мы получаем

$$\begin{gathered} e^{(i)} - e^{(j)} = \alpha^{(i)} + \alpha^{(i+1)} + \ldots + \alpha^{(j-1)} \;, \\ e^{(i)} + e^{(j)} = \alpha^{(i)} + \alpha^{(i+1)} + \ldots + \alpha^{(j-1)} + 2(\alpha^{(j)} + \alpha^{(j+1)} + \ldots + \alpha^{(r)}) \;, \\ e^{(i)} = \alpha^{(i)} + \alpha^{(i+1)} + \ldots + \alpha^{(r)} \;. \end{gathered}$$

Отрицательные корни выражаются через простые аналогично, но с отрицательными коэффициентами. Матрица Картана вычисляется по (1.6.56) и имеет вид

$$K_{i,j} = 2\frac{(\alpha^{(i)}\alpha^{(j)})}{(\alpha^{(j)})^2} = (2\,\delta_{ij} - \delta_{i,j-1} - \delta_{i-1,j}) \;\; (i,j < r-1) \;,$$

$$K_{i,r} = 2\frac{(\alpha^{(i)}\alpha^{(r)})}{(\alpha^{(r)})^2} = (-2\,\delta_{i,r-1} + 2\delta_{i,r}) \;, \;\; K_{r,i} = 2\frac{(\alpha^{(r)}\alpha^{(i)})}{(\alpha^{(i)})^2} = (-1\,\delta_{i,r-1} + 2\delta_{i,r}) \;,$$

$$K = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & \dots & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Т.о. диаграмма Дынкина алгебры $so(2r+1)$ рисуется как

рис. 5

Алгебра sp(2r). C_r **- серия.** Группа, соответствующая этой алгебре, по определению сохраняет кососимметричную билинейную форму $u_i X_{ij} v_j$, где u, v вектора в $2r$- мерном пространстве, а матрица X является кососимметричной невырожденной матрицей. Т.о. элементами алгебры $sp(2r)$ являются $2r \times 2r$ матрицы L, удовлетворяющие условию симплектичности $L^t X + X L = 0$. Отсюда следует симметричность матрицы $M \equiv (X L) = (X L)^t$ и следовательно размерность алгебры $so(2r)$ равна $2r(2r+1)/2 = r(2r+1)$ (т.к. любой элемент алгебры $sp(2r)$ можно представить в виде $X^{-1} M$). Выберем матрицы X и L в блочном виде

$$X = \begin{pmatrix} 0 & I_r \\ -I_r & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad L = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \; .$$

Тогда условие симплектичности матрицы L дает $A = -D^t$, $B^t = B$ и $C^t = C$ и мы можем выбрать следующий базис в алгебре $sp(2r)$:

$$E_{i,i} - E_{r+i,r+i} \equiv H_i \;\; (i = 1, \dots, r), \quad E_{i,j} - E_{r+j,r+i} \equiv A_{ij} \;\; (i \neq j = 1, \dots, r) \; ,$$

$$E_{i,r+j} + E_{j,r+i} \equiv B_{ij} \; , \quad E_{r+i,j} + E_{r+j,i} \equiv C_{ij} \;\; (i, j = 1, \dots, r) \; . \tag{1.6.57}$$

Легко проверить, что мы перечислили весь базис $sp(2r)$. Диагональные элементы H_i $(i = 1, \dots, r)$ естественно считать картановскими элементами. Теперь легко проверить, что $(E_{ij} E_{kl} = \delta_{jk} \, E_{il})$

$$[H_i, \, A_{kl}] = (e^{(k)} - e^{(l)})_i \, A_{kl} \; , \;\; [H_i, \, B_{kl}] = (e^{(k)} + e^{(l)})_i \, B_{kl} \; , \;\; [H_i, \, C_{kl}] = -(e^{(k)} + e^{(l)})_i \, C_{kl} \; . \tag{1.6.58}$$

Т.о. корнями алгебры $so(2r)$ являются вектора: $\pm 2 \, e^{(k)}$, $\pm(e^{(k)} + e^{(l)})$ и $(e^{(k)} - e^{(l)})$ $(k \neq l)$. Базис простых корней можно выбрать в виде $(e^{(1)} - e^{(2)}, \dots, e^{(r-1)} - e^{(r)}, \, 2 \, e^{(r)})$. Заметим, что корневая система C-серии $(sp(2r))$ является дуальной к B-серии $(so(2r+1))$: $\alpha \to \alpha/(\alpha)^2$. Поэтому для $sp(2r)$ матрица Картана и соответствующая диаграмма Дынкина имеют вид

$$K_{i,j} = 2 \frac{(\alpha^{(i)} \alpha^{(j)})}{(\alpha^{(j)})^2} = (2 \, \delta_{ij} - \delta_{i,j-1} - \delta_{i-1,j}) \;\; (i, j < r-1) \; ,$$

$$K_{i,r} = 2 \frac{(\alpha^{(i)} \alpha^{(r)})}{(\alpha^{(r)})^2} = (-1 \, \delta_{i,r-1} + 2 \delta_{i,r}) \; , \;\; K_{r,i} = 2 \frac{(\alpha^{(r)} \alpha^{(i)})}{(\alpha^{(i)})^2} = (-2 \, \delta_{i,r-1} + 2 \delta_{i,r}) \; ,$$

$$K = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & \dots & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

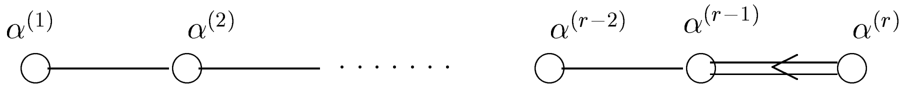


рис. 6

1.7 Классификация диаграмм Дынкина для конечномерных простых алгебр Ли.

В этом разделе мы выясним какие еще существуют конечномерные простые АЛ кроме тех, которые соответствовали диаграммам Дынкина, представленным на рис. 2-6. Таким образом наша задача - перечислить все простые АЛ, перечислив все допустимые диаграммы Дынкина $D(g)$.

Для прототы в начале будем игнорировать стрелки в $D(g)$. Такие диаграммы называются графами Кокстера. Определим единичные вектора в направлении простых корней

$$\epsilon^{(i)} = \frac{\alpha^{(i)}}{\sqrt{(\alpha^{(i)})^2}} \; . \tag{1.7.59}$$

Тогда, т.к. $(\epsilon^{(i)}\,\epsilon^{(i)})$ всегда отрицателны, то

$$2\,\epsilon^{(i)}\,\epsilon^{(i)} = \frac{2\,\alpha^{(i)}\,\alpha^{(j)}}{\sqrt{(\alpha^{(i)})^2\,(\alpha^{(j)})^2}} = -\sqrt{K_{ij}\,K_{ji}} =$$

$$= -(\text{число линий между } i \text{ и } j)^{1/2} = 0, -1, -\sqrt{2}, -\sqrt{3}\; . \tag{1.7.60}$$

Как мы увидим это условие налагает сильные ограничения на структуру диаграмм Дынкина. Если число линий между вершинами i и j в графе
1. > 0, то - i и j называются связанными;
2. $= 1, 2, 3$, то - связь соответственно называется одинарной, двойной и тройной.

Лемма 1. Число связей (одинарных, двойных и тройных) в $D(g) \leq r - 1$.

Доказательство. Т.к. вектора $\epsilon^{(i)}$ линейно независимы то

$$\begin{array}{c} 0 < (\sum_i \epsilon^{(i)})^2 = \sum_i (\epsilon^{(i)})^2 + \sum_{i \neq j} \epsilon^{(i)}\,\epsilon^{(j)} = \\ r + 2\,\sum_{i<j} \epsilon^{(i)}\,\epsilon^{(j)} = r - \sum_{i<j} (\text{число линий между } i \text{ и } j)^{1/2}\;, \end{array} \tag{1.7.61}$$

Т.к.

$$\sum_{i<j} (\text{число линий между } i \text{ и } j)^{1/2} \geq \sum_{i<j} (\text{число связей между } i \text{ и } j)^{1/2}\;,$$

то из (1.7.61) следует $0 < r -$ (число связей), что эквивалентно утверждению Леммы.

Следствие. В $D(g)$ не допустимы замкнутые циклы мначе число связей в графе будет совпадать с r. Следовательно все графы древесные.

Замечание. Равенство $0 = r -$ (число связей) реализуется только в случае $\sum_i \epsilon^{(i)} = 0$ и соответствует б.м. алгебрам Каца-Муди.

Лемма 2. Число линий, исходящих из одной и той же вершины ≤ 3.

Доказательство. Пусть ϵ - единичный вектор, соответствующий вершине, с которой связаны другие k вершин $\epsilon^{(1)}, \dots, \epsilon^{(k)}$. Т.к. циклы не допустимы, то $(\epsilon^{(i)}\, \epsilon^{(j)}) = 0,\ i,j = 1, \dots, k$. Отсюда вытекает разложение

$$\epsilon = \sum_{i=1}^{k} (\epsilon\epsilon^{(i)})\epsilon^{(i)} + (\epsilon\epsilon^{(0)})\epsilon^{(0)} \ , \tag{1.7.62}$$

где $\epsilon^{(0)}$ единичный вектор из ортогонального дополнения к $\epsilon^{(1)}, \dots, \epsilon^{(k)}$. Возводя в квадрат (1.7.62), мы получаем $1 = \sum_{i=1}^{k} (\epsilon\epsilon^{(i)})^2 + (\epsilon\epsilon^{(0)})^2$, что соответствует условию (см. (1.7.60)) $4 \geq 4 \sum_{i=1}^{k} (\epsilon\epsilon^{(i)})^2 = \sum$ (число линий, исходящих из ϵ). Равенство реализуется только в случае $(\epsilon\epsilon^{(0)}) = 0$, что соответствует линейной зависимости $\epsilon^{(i)}$ и ϵ и противоречит требованию, что вершины в графе соответствуют линейно независимым простым корням. Т.о. $3 \geq \sum$ (число линий, исходящих из ϵ), ч.т.д.

Следствие. Единственный допустимый граф с тройными связями - есть диаграмма G_2-типа на рис. 2.

Замечание. Опять же условие $(\epsilon\epsilon^{(0)}) = 0$ может реализоваться для алгебр Каца-Муди.
Лемма 3. Если допустимая $D(g)$ имеет порцию вершин

то новый граф $D'(g)$, который получается сжатием этой порции в одну вершину, также является допустимым. Причем новой вершине соответствует новый простой корень $\alpha = \sum_{l=i}^{k+i} \alpha^{(l)}$ и новый единичный вектор

$$\epsilon = \sum_{l=i}^{k+i} \epsilon^{(l)} \ . \tag{1.7.63}$$

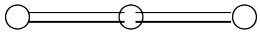
Доказательство. Действительно, возведем в квадрат вектор (1.7.63)

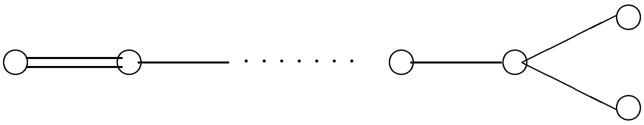
$$\epsilon^2 = (k+1) + 2 \sum_{l<m} (\epsilon^{(l)}\, \epsilon^{(m)}) = (k+1) + 2 \sum_{l=i}^{i+k-1} (\epsilon^{(l)}\, \epsilon^{(l+1)}) = (k+1) + 2 \cdot k \cdot (-1/2) = 1 \ .$$

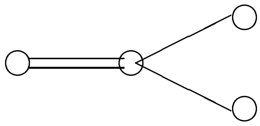
Теперь, мы можем подставить вектор (1.7.63) в условия и доказательства Лемм 1 и 2, при этом выводы этих лемм не изменятся.

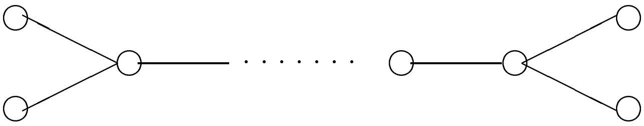
Следствие. Следующие графы (или подграфы) не являются допустимыми:

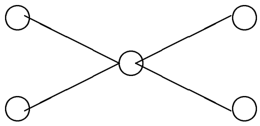
I. 

(т.к. могут быть стянуты в граф  , запрещенный Леммой 2.)

II. 

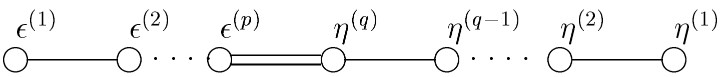
(т.к. могут быть стянуты в граф  , запрещенный Леммой 2.)

III. 

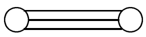
(т.к. могут быть стянуты в граф  , запрещеный Леммой 2.)

Т.о. класс графов, среди которых необходимо искать допустимые диаграммы Дынкина, сводитсы к следующим возможностям

I.  A_{r+1}

II. 

(только одна двойная связь)

III.  G_2

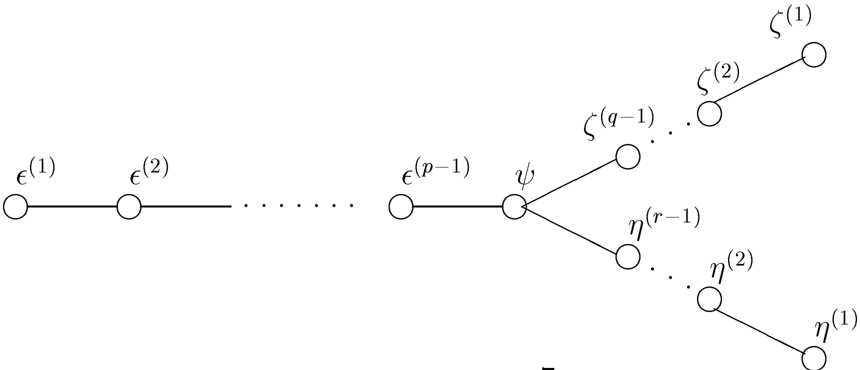
IV. 

рис. 7

Имеются дальнейшие ограничения на допустимость диаграмм, представленных на рис.7. Рассмотрим диаграмму рис.7(II). Пусть $\epsilon = \sum_1^p j\epsilon^{(j)}$ и $\eta = \sum_1^q j\eta^{(j)}$. Тогда $\epsilon^2 = \sum_1^p j^2 - \sum_1^{p-1} j(j+1) = p(p+1)/2$ и аналогично $\eta^2 = q(q+1)/2$. Далее, т.к. $-2\epsilon^p\eta^q = \sqrt{2}$ (двойная связь, см. (1.7.60)) мы имеем $\epsilon\eta = pq\epsilon^{(p)}\eta^{(q)} = -pq/sqrt2$ и используя тождество Шварца

$$\frac{p^2q^2}{2} = (\epsilon\eta)^2 = (\epsilon)^2\,(\eta)^2\,cos^2(\theta) < (\epsilon)^2\,(\eta)^2 = \frac{p(p+1)\,q(q+1)}{4}\ ,$$

($cos^2(\theta) = 1$ приводило бы к паралельности векторов ϵ и η, чего не может быть в силу их линейной независимости; этот случай соответствует б.м. алгебрам Каца-Муди) окончательно получаем $(p-1)(q-1) < 2$. Т.к. p, q положительные целые числа, то возможны следующие варианты

i.) $p = 2$, $q = 2$,
ii.) $p = 1$, q любое положительное целое
iii.) $q = 1$, p любое положительное целое.

Случай i.) дает диаграмму, соответствующую алгебре F_4

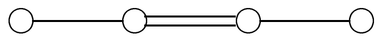


рис. 8

Случаи ii.) и iii.) приводят к диаграммам Дынкина рис.5,6, которые соответствуют алгебрам $so(2r+1)$ и $sp(2r)$.

Рассмотрим теперь ограничения на вид диаграммы рис.7(IV). Определим вектора

$$\epsilon = \sum_1^{p-1} j\,\epsilon^{(j)}\ ,\quad \eta = \sum_1^{q-1} j\,\eta^{(j)}\ ,\quad \zeta = \sum_1^{r-1} j\,\zeta^{(j)}\ ,$$

Как и в предыдущем случае мы имеем $\epsilon^2 = p(p-1)/2$, $\eta^2 = q(q-1)/2$ и $\zeta^2 = r(r-1)/2$. Следовательно

$$\cos^2(\epsilon,\psi) = \frac{(\epsilon,\psi)^2}{(\epsilon)^2(\psi)^2} = \frac{((p-1)\epsilon^{(p-1)},\psi)^2}{p(p-1)/2} = \frac{((p-1)/2)^2}{p(p-1)/2} = \frac{1}{2}(1-\frac{1}{p})\ ,$$

и аналогично $\cos^2(\eta,\psi) = \frac{1}{2}(1-\frac{1}{q})$, $\cos^2(\zeta,\psi) = \frac{1}{2}(1-\frac{1}{r})$. Далее, имеет место неравенство

$$\cos^2(\epsilon,\psi) + \cos^2(\eta,\psi) + \cos^2(\zeta,\psi) < 1 \tag{1.7.64}$$

Действительно, т.к. вектора ϵ, η и $zeta$ взаимно ортогональны, то мы можем представить

$$\psi = \cos(\epsilon,\psi)\,\epsilon + \cos(\eta,\psi)\,\eta + \cos(\zeta,\psi)\,\zeta + \cos(\xi,\psi)\,\xi\ , \tag{1.7.65}$$

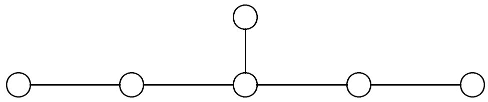
где вектор ξ ортогонален ϵ, η, $zeta$ и $\cos(\xi,\psi) \neq 0$ (в силу линейной независимости ψ). Квадрируя соотношение (1.7.64) мы получаем (1.7.65), из которого следует

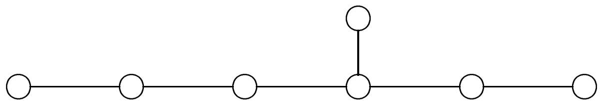
$$\frac{1}{2}(1-\frac{1}{p}) + \frac{1}{2}(1-\frac{1}{q}) + \frac{1}{2}(1-\frac{1}{r}) < 1 \implies \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} > 1\ . \tag{1.7.66}$$

Это соотношение налагает ограничения на p, q, r, т.к. они являются положительными целыми числами большими нуля. Без ограничения общности будем считать, что $p \geq q \geq r$ и все они ≥ 2 (только в этом случае диаграмма на рис.7(IV) имеет разветвление). Отсюда мы получаем следующие возможности для допустимых диаграм такого типа.

i.) $(p,q,r) = (p,2,2)$, $p \geq 2$, что соответствует диаграммам на рис.4 , которые соответствуют $so(2r)$.

ii.) $(p,q,r) = (p,3,2)$, $p = 3,4,5$, что соответствует диаграммам

p=3,  новая алгебра E_6

p=4,  новая алгебра E_7

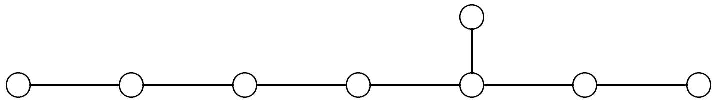
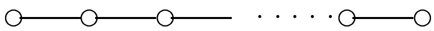
p=5,  нов. алг. E_8

рис.9

iii.) $(p,q,r) = (p,4,2)$; В этом случае $p < 4$, что нарушает $p \geq q$.

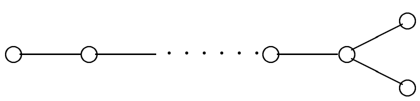
Т.о. мы исчерпали все возможные диаграммы, которые соответствуют (1.7.66) и представили полный набор ограничений на возможные диаграммы, описывающие простые компактные группы. Резюмируя все вышесказанное, мы получили, что существуют только те простые компактные группы, которые соответствуют классическим 4 бесконечным сериям групп с диаграммами на рис. 3-6, а также 5 исключительных групп с диаграммами на рис.2 (G_2), рис.8 (F_4), рис.9.

Классические алгебры

A_r 

B_r 

C_r 

D_r 

Исключительные алгебры

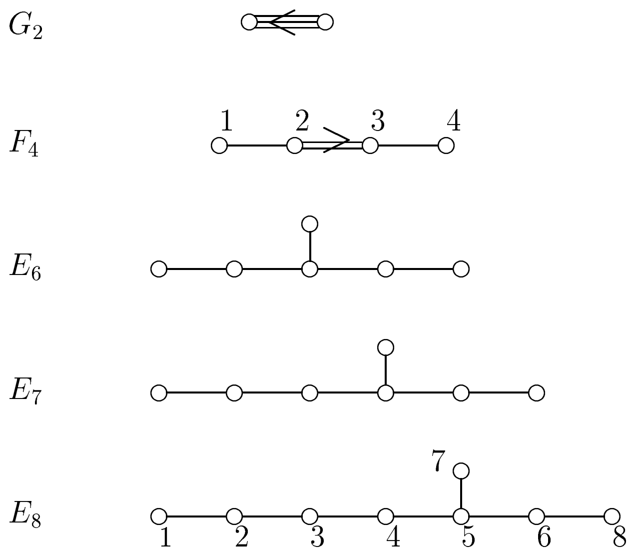


рис.10

1.8 Системы корней исключительных алгебр Ли

Мы уже отмечали, что диаграмма Дынкина однозначно определяет матрицу Картана (и наоборот). В этом разделе мы обсудим вопрос о том, как построить корневую систему по известной диаграмме Дынкина (или что тоже самое по соответствующей матрице Картана). Ясно, что задача будет решена, если мы построим все простые корни. В качестве первого шага построим корневую систему, которая соответствует алгебрам D_r с диаграммой Дынкина на рис.4. Наше построение будет индуктивным. Пусть мы знаем как устроены корневые системы для A_r (диаграмма Дынкина на рис.3). Диаграмма на рис.4 получается из диаграммы на рис.3, если к ней добавить дополнительную вершину α_r и соединить ее одной линией с вершиной α_{r-2} (обратная процедура стирания вершин дает способ выделения подалгебр из данной алгебры). Простые корни для диаграммы на рис.3 известны и даны в (1.6.51). Будем искать последний корень α_r в виде $\alpha_r = \sum_{i=1}^{r} a_i \, e^{(i)}$. Зная матрицу Картана и явный вид корней (1.6.51), мы можем написать следующие уравнения на α_r:

$$(\alpha_r \, \alpha_i) = 0 \;\; (i = 1, \ldots, r-3, \; r-1), \;\; (\alpha_r \, \alpha_{r-2}) = -1 \; , \;\; \alpha_r^2 = 2 \; ,$$

которые эквивалентны соотношениям на коэффициенты a_i

$$a_1 = \ldots = a_{r-2} \equiv a \; , \;\; a_{r-1} = a_r \equiv b \; , \;\; a_{r-2} - a_{r-1} = a - b = -1 \; , \;\; (r-2) \, a^2 + 2 \, b^2 = 2 \; .$$

Подстановка 3-его соотношения в 4-ое дает уравнение $r \, a^2 + 4 \, a = 0$, у которого есть только один действительный корень $a = 0$. Следовательно $b = 1$, и α_r однозначно определяется как (1.6.52).

Определим теперь простые корни для алгебры E_8 по ее диаграмме Дынкина, представленной на рис.9,10. Заметим, что стирание вершины 8 в диаграмме E_8 на рис.10 дает нам диаграмму $so(14)$ на рис.4. Т.о. естественно выбрать в качестве простых корней $\alpha_1, \ldots, \alpha_7$ простые корни (1.6.51), (1.6.52):

$$\alpha_i = e^{(i)} - e^{(i+1)} \;\; (i = 1, \ldots, 6) \; , \;\; \alpha_7 = e^{(6)} + e^{(7)} \; .$$

Данный выбор соответствует случаю, когда стирание еще и вершины 7 приводит к корневой системе для $sl(7)$. Будем искать оставшийся корень α_8 в виде $\alpha_8 = \sum_{i=1}^{8} a_i\, e^{(i)}$. Матрица Картана (диаграмма Дынкина) для E_8 диктует нам следующие условия на корень α_8:

$$(\alpha_i\, \alpha_8) = 0 \;\; (i = 1, \ldots, 5,\, 7) \; , \quad (\alpha_6\, \alpha_8) = -1 \; , \quad \alpha_8^2 = 2 \; ,$$

которые эквивалентны соотношениям на коэффициенты a_i

$$a_1 = \ldots = a_6 \equiv a \; , \;\; a_6 = -a_7 \; , \;\; a_6 - a_7 = 2\, a = -1 \; , \;\; 7\, a^2 + b^2 = 2 \; .$$

Отсюда мы получаем $a_i = -1/2$ $i = 1, \ldots, 6$, $a_7 = 1/2$ и $a_8 = \pm 1/2$. Обычно выбирают $a_8 = +1/2$ [1, 2] (в книге Л.С.Понтрягина [3] выбрано $a_7 = -1/2$, что соответствует замене $\alpha^{(6)} \leftrightarrow \alpha^{(7)}$). Итак мы получили следующие простые корни для алгебры E_8:

$$\begin{aligned} &\alpha_i = e^{(i)} - e^{(i+1)} \;\; (i = 1, \ldots, 6) \; , \;\; \alpha_7 = e^{(6)} + e^{(7)} \; , \\ &\alpha_8 = \tfrac{1}{2} \left(-(e^{(1)} + \ldots + e^{(6)}) + (e^{(7)} + e^{(8)}) \right) \; . \end{aligned} \tag{1.8.67}$$

Исходя из знания простых корней, уже можно восстановить всю корневую систему $(e = \sum_1^8 e^{(i)})$

$$\Phi(E_8) = \left\{ \pm e^{(i)} \pm e^{(j)}; \;\; \pm(\frac{1}{2}e - (e^{(i)} + e^{(j)}); \;\; \pm(\frac{1}{2}e - (e^{(i)} + e^{(j)} + e^{(k)} + e^{(l)}) \right\} \; ,$$
$$i \neq j \neq k \neq l = 1, \ldots, 8 \; ,$$

или

$$\Phi(E_8) = \left\{ \pm e^{(i)} \pm e^{(j)}, \; (i \neq j); \;\; \frac{1}{2} \sum_1^8 (-1)^{\kappa(i)}\, e^{(i)}, \; \kappa(i) = 0, 1 \right\} \; ,$$

$(\sum \kappa(i)$ - четное число).

Корневые системы для алгебр E_6 и E_7 получаются из корневой системы E_8 выкидыванием простых корней, которые соответствуют вершинам 1 и 2 на диаграмме Дынкина E_8, рис.10.

Корневая система для F_4 (см. диаграмму Дынкина на рис.10) может быть получена аналогичным методом из корневой системы $so(7)$ (1.6.56) (диаграмма Дынкина на рис.5). Т.о. ищем простые корни алгебры F_4 в виде

$$\alpha^{(1)} = e^{(1)} - e^{(2)} \; , \;\; \alpha^{(2)} = e^{(2)} - e^{(3)} \; , \;\; \alpha^{(3)} = e^{(3)} \; , \;\; \alpha^{(4)} = \sum_{i=1}^{4} a_i\, e^{(i)} \; ,$$

которые должны удовлетворять соотношениям (согласно виду диаграммы Дынкина F_4):

$$(\alpha_i\, \alpha_4) = 0 \;\; (i = 1, \ldots, 2) \; , \quad K_{34} = -1 \, \rightarrow \, (\alpha_3\, \alpha_4) = -1/2 \; , \quad \alpha_4^2 = 1 \; .$$

Отсюда мы выводим $a_1 = a_2 = a_3 = -1/2$, $a_4 = \pm 1/2$ и, постулируя в последнем равенстве знак $+$, окончательно получаем

$$\alpha^{(1)} = e^{(1)} - e^{(2)} \; , \;\; \alpha^{(2)} = e^{(2)} - e^{(3)} \; , \;\; \alpha^{(3)} = e^{(3)} \; , \;\; \alpha^{(4)} = \frac{1}{2} \left(-e^{(1)} - e^{(2)} - e^{(3)} + e^{(4)} \right) \; , \tag{1.8.68}$$

$$\Phi(F_4) = \left\{ \pm e^{(i)};\ \ \pm e^{(i)} \pm e^{(j)}\ (i \neq j);\ \ \pm\frac{1}{2}(\pm e^{(1)} \pm e^{(2)} \pm e^{(3)} \pm e^{(4)}) \right\}\ ,$$

где знаки могут выбираться независимо.

Наконец мы опишем корневую систему G_2, которая представлена на рис.1 (соответствующая диаграмма Дынкина дана на рис.2). Корневое пространство мы опишем как гиперплоскость в трехмерном евклидовом пространстве, которая перпендикулярна вектору $e^{(1)} + e^{(2)} + e^{(3)} = (1,1,1)$. Т.о. все корни представим в виде

$$\begin{array}{llllll} \Phi(G_2) = \pm\{ & e^{(1)} - e^{(2)}, & e^{(2)} - e^{(3)}, & e^{(3)} - e^{(1)}, & 3e^{(i)} - e^{(1)} - e^{(2)} - e^{(3)}, & \} \\ E_\alpha = \{ & g^3_\pm, & g^1_\pm, & g^2_\pm, & G^i_\pm, & \} \end{array} \tag{1.8.69}$$

где во второй строчке введены обозначения для соответствующих корневых операторов G_2. В качестве базиса простых корней можно выбрать $e^{(1)} - e^{(2)},\ -2e^{(1)} + e^{(2)} + e^{(3)}$. Теперь, складывая корневые вектора, легко вывести структуру определяющих соотношений для корневых операторов алгебры G_2

$$\begin{array}{lll} [g^1_\pm,\, g^2_\pm] \sim g^3_\mp\ , & [g^3_\pm,\, g^1_\pm] \sim g^2_\mp\ , & [g^2_\pm,\, g^3_\pm] \sim g^1_\mp\ , \\ [g^1_\pm,\, g^2_\mp] \sim G^3_\mp\ , & [g^2_\pm,\, g^3_\mp] \sim G^1_\mp\ , & [g^3_\pm,\, g^1_\mp] \sim G^2_\mp\ , \\ [G^1_\pm,\, g^2_\pm] \sim g^3_\pm\ , & [G^2_\pm,\, g^3_\pm] \sim g^1_\pm\ , & [G^3_\pm,\, g^1_\pm] \sim g^2_\pm\ , \\ [G^1_\pm,\, g^3_\mp] \sim g^2_\mp\ , & [G^2_\pm,\, g^1_\mp] \sim g^3_\mp\ , & [G^3_\pm,\, g^2_\mp] \sim g^1_\mp\ , \\ [G^1_\pm,\, G^2_\pm] \sim G^3_\mp\ , & [G^2_\pm,\, G^3_\pm] \sim G^1_\mp\ , & [G^3_\pm,\, G^1_\pm] \sim G^2_\mp\ , \end{array} \tag{1.8.70}$$

а остальные коммутаторы равны нулю.

Известно [2], что 14-мерная алгебра G_2 является подалгеброй 21-мерной алгебры $so(7)$. Прежде всего на подалгебру Картана $so(7)$ налагается условие $\sum_{i=1}^3 H_i = 0$ (имеются ввиду собственные значения H_i), для выделения подалгебры ранга 2. Это значит, что мы можем выбрать для G_2 следующие элементы подалгебры Картана

$$\widetilde{H}_1 = H_2 - H_3\ ,\quad \widetilde{H}_2 = H_3 - H_1\ ,\quad \widetilde{H}_3 = H_1 - H_2\ . \tag{1.8.71}$$

Далее заметим, что для генераторов $so(7)$ справедливы равенства

$$\begin{array}{c} [H_1,\, L^\pm_{(1)}] = \pm L^\pm_{(1)}\ ,\ \ [H_2,\, L^\pm_{(1)}] = 0\ ,\ \ [H_3,\, L^\pm_{(1)}] = 0\ , \\ [H_1,\, L^{(\pm\pm)}_{(34,56)}] = 0\ ,\ \ [H_2,\, L^{(\pm\pm)}_{(34,56)}] = \pm L^{(\pm\pm)}_{(34,56)}\ ,\ \ [H_3,\, L^{(\pm\pm)}_{(34,56)}] = \pm L^{(\pm\pm)}_{(34,56)}\ , \end{array} \tag{1.8.72}$$

поэтому мы имеем для линейной комбинации $g^1_\mp = \kappa L^{(\pm)}_{(1)} + L^{(\mp\mp)}_{(34,56)}$, где κ- произвольная константа (и соответственно для операторов $g^2_\mp = \kappa L^{(\pm)}_{(3)} + L^{(\mp\mp)}_{(56,12)}$, $g^3_\mp = \kappa L^{(\pm)}_{(5)} + L^{(\mp\mp)}_{(12,34)}$) следующие соотношения

$$[H_1 - H_2,\, g^1_\pm] = \mp g^1_\pm\ ,\ \ [H_3 - H_1,\, g^1_\pm] = \pm g^1_\pm\ ,\ \ [H_2 - H_3,\, g^1_\pm] = 0\ ,\ \ (cycle\ 1,2,3)\ , \tag{1.8.73}$$

$$[g^1_+,\, g^1_-] = 2\,\kappa^2\, H_1 - 4\,(H_2 + H_3)\ ,\ \ (cycle\ 1,2,3)\ . \tag{1.8.74}$$

$$[g^1_\mp,\, g^2_\mp] = \kappa^2\, L^{(\pm\pm)}_{(12,34)} + 4\,\kappa\, L^{(\mp)}_{(5)} = \kappa^2\,(L^{(\pm\pm)}_{(12,34)} + \frac{4}{\kappa}\, L^{(\mp)}_{(5)}) \tag{1.8.75}$$

Из (1.8.74) и (1.8.75) следует, что для замкнутости подалгебры G_2 мы должны фиксировать $\kappa^2 = 4$, тогда

$$\begin{gathered}
[g^1_+,\, g^1_-] = 4\,(2\,H_1 - H_2 - H_3) = 4\,(\widetilde{H}_3 - \widetilde{H}_2)\ , \quad (cycle\ 1,2,3)\ , \\
[g^1_\pm,\, g^2_\pm] = 4\, g^3_\mp\ , \quad (cycle\ 1,2,3)\ .
\end{gathered} \tag{1.8.76}$$

Положим

$$G^1_\pm \equiv L^{(\pm\mp)}_{(34,56)}\ , \quad G^2_\pm \equiv L^{(\pm\mp)}_{(56,12)}\ , \quad G^3_\pm \equiv L^{(\pm\mp)}_{(12,34)}\ , \tag{1.8.77}$$

Пользуясь (1.6.50) и (1.6.55), получаем

$$\begin{gathered}
[\widetilde{H}_3,\, G^1_\pm] = \mp G^1_\pm\ , \quad [\widetilde{H}_2,\, G^1_\pm] = \mp G^1_\pm\ , \quad [\widetilde{H}_1,\, G^1_\pm] = \pm 2 G^1_\pm\ , \quad (cycle\ 1,2,3) \\
[G^1_+,\, G^1_-] = 4\,(-H_2 + H_3) = -4/3\,(2\,\widetilde{H}_1 - \widetilde{H}_2 - \widetilde{H}_3)\ , \quad (cycle\ 1,2,3)\ ,
\end{gathered} \tag{1.8.78}$$

$$[G^3_\pm,\, G^1_\pm] = 2\, G^2_\mp\ , \quad [G^1_\pm,\, G^2_\pm] = 2\, G^3_\mp\ , \quad [G^2_\pm,\, G^3_\pm] = 2\, G^1_\mp\ ,$$

$$[g^1_\pm,\, g^2_\mp] = (\kappa^2 + 2)\, G^3_\mp\ , \quad [G^1_\pm,\, g^3_\mp] = -2\, g^2_\mp\ , \quad [G^1_\pm,\, g^2_\pm] = 2\, g^3_\mp\ , \quad (cycle\ 1,2,3)\ , \tag{1.8.79}$$

Сравнивая формулы (1.8.76) – (1.8.79) и (1.8.70), мы приходим к следующей идентификации

$$\begin{gathered}
G^1_\pm \equiv L^{(\pm\mp)}_{(34,56)}\ , \quad G^2_\pm \equiv L^{(\pm\mp)}_{(56,12)}\ , \quad G^3_\pm \equiv L^{(\pm\mp)}_{(12,34)}\ , \\
g^1_\mp = \kappa L^{(\pm)}_{(1)} + L^{(\mp\mp)}_{(34,56)}\ , \quad g^2_\mp = \kappa L^{(\pm)}_{(3)} + L^{(\mp\mp)}_{(56,12)}\ , \quad g^3_\mp = \kappa L^{(\pm)}_{(5)} + L^{(\mp\mp)}_{(12,34)}\ ,
\end{gathered} \tag{1.8.80}$$

где $\kappa^2 = 4$.

2 Алгебры с делением.

2.1 Кватернионы, октонионы и их приложения.

Удвоение алгебр.

Пусть $\mathcal{A}$ произвольная конечномерная алгебра с единицей 1 над полем вещественных чисел $\mathbf{R}$, в которой задано сопряжение (инволютивный автоморфизм): $a \to \overline{a}$, $\overline{a\,b} = \overline{b}\,\overline{a}$, $\overline{\overline{a}} = a$.

Определение. Алгебру $\mathcal{A}$ будем называть метрической, если $a + \overline{a} \in \mathbf{R}$, $a\,\overline{a} \in \mathbf{R}$ (точнее $\in \mathbf{R}\cdot 1$) и $a\,\overline{a} > 0\ \forall a \neq 0$. Заметим, что $a\,\overline{a} = \overline{a}\,a$ т.к.

$$a\,\overline{a} = a\,(\overline{a} + a) - a^2 = (\overline{a} + a)\,a - a^2 = \overline{a}\,a\ .$$

Определим скалярное произведение в $\mathcal{A}$ по формуле

$$< a,\, b >= \frac{1}{2}\,(a\,\overline{b} + b\,\overline{a}) =< b,\, a > \quad . \tag{2.1.81}$$

Это скалярное произведение невырождено, т.е. из условия $< a,\, b >= 0\ \forall b$ следует $a = 0$ (достаточно взять $b = a$ и вспомнить определение метрической алгебры).

Любой элемент $a \in \mathcal{A}$ можно представить в виде суммы $a = \lambda + b$, где $\lambda \in \mathbf{R}$, а $b \in \mathcal{A}'$ и $\mathcal{A}'$ обозначает линейное подпространство ортогональное к $\mathbf{R} \cdot 1$, т.е. $< b,\, 1 >= 0$. Из определения (2.1.81) мы получаем, что $\overline{b} = -b$. Легко понять, что

$$\lambda = \frac{1}{2}\,(a + \overline{a}) =< a,\, 1 > \,, \quad b = \frac{1}{2}\,(a - \overline{a})\,.$$

Предложение. Предположим, что мы имеем метрическую алгебру $\mathcal{A}$, для которой справедливы соотношения

$$\begin{aligned} &i.) \quad y\,(\overline{y}\,x) = (y\,\overline{y})\,x\,, \\ &ii.) \quad (x\,y)\,\overline{y} = x\,(y\,\overline{y})\,. \end{aligned} \tag{2.1.82}$$

Тогда выполняется равенство

$$< x\,y,\, z >=< x,\, z\,\overline{y} > \,, \tag{2.1.83}$$

и алгебра $\mathcal{A}$ является нормируемой, т.е. мы имеем

$$< x\,y,\, x\,y >=< x,\, x >< y,\, y > \quad . \tag{2.1.84}$$

Обратное утверждение также верно. Отметим, что условия $i.$), $ii.$) для ассоциативных алгебр выполняются автоматически.

Доказательство. Прежде всего заметим, что из свойств $i.$), $ii.$) сразу же следует соотношение

$$< x\,y,\, y >=< x,\, y\,\overline{y} > \,, \tag{2.1.85}$$

Теперь подставим в (2.1.85) $y \to y + z$. В результате получаем

$$< x\,y,\, z > + < x\,z,\, y >=< x,\, y\,\overline{z} > + < x,\, z\,\overline{y} > \,,$$

откуда, полагая $z = \overline{x}$ и учитывая (2.1.85), немедленно следует $< x\,y,\, \overline{x} >=< x,\, \overline{x}\,\overline{y} >$. Т.к. $< x\,y,\, 1 >=< x,\, \overline{y} >$, то $< x\,y,\, (x + \overline{x}) >=< x,\, (x + \overline{x})\,\overline{y} >$ и, следовательно, мы имеем

$$< x\,y,\, x >=< x,\, x\,\overline{y} > \quad . \tag{2.1.86}$$

Подставим сюда $x \to x + z$. В результате получаем

$$< x\,(y - \overline{y}),\, z >=< x,\, z\,(\overline{y} - y) > \,,$$

которое эквивалентно (2.1.83) в силу $(y + \overline{y}) = \mathbf{R} \cdot 1$.

Полагая $z = x\,y$, мы получаем с помощью (2.1.83)

$$< x\,y,\, x\,y >=< x\,y,\, z >=< x,\, z\,\overline{y} > \ .$$

Далее в соответствии с *ii.*) мы имеем

$$z\,\overline{y} = (x\,y)\,\overline{y} = x \ < y,\, y >=< y,\, y > \ x \ ,$$

и, следовательно, получаем

$$< x\,y,\, x\,y >=< x,\, z\,\overline{y} >=< x,\, x >< y,\, y > \ .$$

Что и требовалось доказать.

Обратно, подставляя в (2.1.84) $x \to x + u$ или $y \to y + u$ мы получаем

$$< x\,y,\, u\,y >=< x,\, u >< y,\, y > \ , \quad < x\,y,\, x\,u >=< x,\, x >< y,\, u > \ , \tag{2.1.87}$$

где первое соотношение при $z = uy$ дает (2.1.83), а второе эквивалентно

$$< x\,y,\, z >=< y,\, \overline{x}\,z > \ , \tag{2.1.88}$$

Учитывая (2.1.87) и (2.1.88), получаем

$$< x\,(\overline{x}\,y),\, z >=< \overline{x}\,y,\, \overline{x}\,z >=< x,\, x >< y,\, z >=< (x\,\overline{x})\,y,\, z > \ ,$$

откуда в силу невырожденности скалярного произведения следует *i.*) (2.1.82). Условие *ii.*) (2.1.82) получается аналогично.

Замечание. Соотношения *i.*) и *ii.*) (2.1.82) эквивалентны условиям альтернативности

$$(y\,y)\,x = y\,(y\,x) \ , \quad x\,(y\,y) = (x\,y)\,y \ , \tag{2.1.89}$$

и из них следует условие эластичности

$$(x\,y)\,x = x\,(y\,x) \equiv (xyx) \ . \tag{2.1.90}$$

Действительно, условия альтернативности (2.1.89) эквивалентны (2.1.82) в силу равенства $(y + \overline{y}) = \mathbf{R} \cdot 1$. Условия эластичности можно получить из (2.1.89), если сделать замену $y \to y + z$. Тогда первое соотношение переписывается в виде

$$(y\,z)\,x + (z\,y)\,x = y\,(z\,x) + z\,(y\,x) \ ,$$

и, положив $z = x$, мы получаем (2.1.90).

Определение. Алгебру $\mathcal{A}$ будем называть альтернативной, если $\forall x, y \in \mathcal{A}$ выполняются условия (2.1.89).

Из соотношений (2.1.89), (2.1.90) следует, что любая альтернативная алгебра с двумя образующими является ассоциативной (теорема Артина).

Введем ассоциатор

$$(x,\, y,\, z) \equiv (x\,y)\,z - x\,(y\,z) \ .$$

Условия альтернативности и эластичности имеют вид

$$(x,\, x,\, y) = 0 = (y,\, x,\, x)\ , \quad (x,\, y,\, x) = 0\ ,$$

и после подстановки $x \to x + z$ мы получаем

$$(x,\, z,\, y) = -(z,\, x,\, y) = (z,\, y,\, x) = -(y,\, z,\, x)\ . \tag{2.1.91}$$

Т.о. ассоциатор для альтернативной алгебры альтернирован (антисимметричен по перестановке любых двух аргументов) – это и объясняет название алгебры.

Для любой альтернативной алгебры выполняются тождества Муфанг

$$(x\,a\,x)\,y = x\,[a\,(x\,y)]\ , \tag{2.1.92}$$

$$y\,(x\,a\,x) = [(y\,x)\,a]\,x\ , \tag{2.1.93}$$

$$(x\,y)\,(a\,x) = x\,(y\,a)\,x\ , \tag{2.1.94}$$

Первое тождество (2.1.92) доказывается следующим образом [11]

$$\begin{aligned}
(x\,a\,x)\,y - x\,[a\,(x\,y)] \ &= (xa, x, y) + (x, a, xy) \\
&= -(x, xa, y) - (x, xy, a) \\
&= -[x\,(xa)]\,y + x\,[(xa)\,y] - [x\,(xy)]\,a + x\,[(xy)\,a] \\
&= -(x^2 a)\,y - (x^2 y)\,a + x\,[(xa)\,y + (xy)\,a] \\
&= -(x^2, a, y) - (x^2, y, a) - x^2\,(a\,y) - x^2\,(y\,a) + x\,[(xa)\,y + (xy)\,a] \\
&= x\,[-x\,(a\,y) - x\,(y\,a) + (xa)\,y + (xy)\,a] \\
&= x\,[(x,\, a,\, y) + (x,\, y,\, a)] = 0\ ,
\end{aligned}$$

Второе соотношение (2.1.93) можно получить из первого с помощью инволюции. Наконец третье соотношение (2.1.94) доказывается следующим образом

$$\begin{aligned}
(x\,y)\,(a\,x) - x\,(y\,a)\,x \ &= (x, y, ax) + x\,[y\,(ax) - (ya)\,x] \\
&= -(x, ax, y) - x\,(y, a, x) \\
&= -(xax)\,y + x\,[(a\,x)\,y - (y,\, a,\, x)] \\
&= -x\,[a\,(x\,y) - (a\,x)\,y + (y,\, a,\, x)] \\
&= -x\,[-(a,\, x,\, y) + (y,\, a,\, x)] = 0\ ,
\end{aligned}$$

Пусть задана метрическая алгебра $\mathcal{A}$. Расширим эту алгебру добавив к ней еще один элемент e, причем так, что новая расширенная алгебра $\mathcal{A}^{(2)}$ опять будет метрической и e будет лежать в ортогональном дополнении к $\mathcal{A}$. Это значит, что задана инволюция $e \to \overline{e}$, и

$$< 1,\, e >= \frac{1}{2}\,(\overline{e} + e) = 0 \ \Rightarrow\ \overline{e} = -e\ , \tag{2.1.95}$$

а также $\forall a \in \mathcal{A}$ мы имеем

$$< a,\, e >= \frac{1}{2}\,(a\,\overline{e} + e\,\overline{a}) = 0 \ \Rightarrow\ a\,e = e\,\overline{a}\ . \tag{2.1.96}$$

Отнормируем элемент e так, что

$$< e,\, e >= 1 \ \Rightarrow\ e^2 = -1\ . \tag{2.1.97}$$

Потребуем теперь, чтобы расширенная метрическая алгебра $\mathcal{A}^{(2)}$ была еще нормируемой (т.е. альтернативной). Очевидно, что сама алгебра $\mathcal{A}$ будучи подалгеброй $\mathcal{A}^{(2)}$ также должна быть нормированной. Из условий альтернативности и тождеств Муфанг мы имеем

$$\begin{aligned} (ae)\,(be) = (e\overline{a})\,(b\,e) = e\,(\overline{a}\,b)\,e = [(\overline{b}\,a)\,e]\,e = (\overline{b}\,a)\,(e\,e) = -(\overline{b}\,a)\ , \\ (ae)\,b = -[e\,(ea)\,e]\,b = -e\,[(ea)\,(eb)] = e\,[b\,\overline{a}] = (a\,\overline{b})\,e\ , \\ a\,(be) = -a\,[e\,(eb)\,e] = -[(ae)\,(eb)]\,e = (b\,a)\,e\ , \end{aligned} \tag{2.1.98}$$

Из этих соотношений сразу же следует, что произвольный элемент $\mathcal{A}^{(2)}$ можно представить в виде $(a + b\,e)$, где $a, b \in \mathcal{A}$ и правило умножения в $\mathcal{A}^{(2)}$ определяется следующим образом (см. например [10])

$$(a + b\,e)\,(c + d\,e) = (a\,c - \overline{d}\,b) + (b\,\overline{c} + d\,a)\,e\ . \tag{2.1.99}$$

Правило сопряжения для расширенной алгебры определяется следующим образом

$$\overline{(a + b\,e)} = \overline{a} - b\,e \implies (a + b\,e)\,\overline{(a + b\,e)} = a\,\overline{a} + b\,\overline{b}\ . \tag{2.1.100}$$

Алгебра $\mathcal{A}^{(2)}$ с правилом умножения (2.1.99) и сопряжения (2.1.100) называется удвоением алгебры $\mathcal{A}$ (сама процедура удвоения иногда называется процедурой Келли - Диксона), т.к. любой элемент $(a + b\,e)$ алгебры $\mathcal{A}^{(2)}$ можно рассматривать как пару элементов $a, b \in \mathcal{A}$. Из первых двух соотношений (2.1.98) видно, что если $\overline{b} \neq b$ для некоторого $b \in \mathcal{A}$, то $\mathcal{A}^{(2)}$ некоммутативна, а если $\mathcal{A}$ некоммутативна, то из третьего соотношения (2.1.98), вообще говоря, следует неассоциативность $\mathcal{A}^{(2)}$.

В качестве иллюстрации покажем, как путем удвоения можно последовательно получить комплексные числа, кватернионы и октонионы.

Возьмем в качестве $\mathcal{A}$ алгебру действительных чисел $\mathbf{R}$. Добавим к нему базисный элемент $e = i$, $< i, i >= 1$. Тогда из (2.1.97) следует $i^2 = -1$ и любой элемент $z \in \mathbf{R}^{(2)}$ представим в виде $z = \lambda + i\,\mu$, где $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$. Тем самым мы приходим к определению комплексных чисел $\mathbf{C}$ (которые можно рассматривать как удвоение реальных чисел) и отождествлению $\mathbf{R}^{(2)} = \mathbf{C}$.

Кватернионы.

Пусть теперь $\mathcal{A} = \mathbf{C}$ и представим любой элемент $a \in \mathcal{A}^{(2)}$ в виде $(e = j)$ $a = (\lambda + i\,\mu) + j\,z$, где $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$, $z \in \mathbf{C}$. Опять же из (2.1.95) - (2.1.97) мы получаем

$$\overline{j\,b} = -j\,b\ , \quad \overline{j} = -j\ , \quad i\,j = -j\,i\ , \quad j^2 = -1\ . \tag{2.1.101}$$

Положим $ij = -ji \equiv k$, и заметим, что алгебра $\mathbf{C}^{(2)} \equiv \mathbf{H}$ некоммутативна. Элемент k не может быть действительным числом, иначе в силу $i^2 = -1$ мы получили бы $j = \pm i \cdot k$, что противоречит требованию $j \neq 0$. Т.к. алгебра $\mathbf{H}$ генерируется только двумя элементами i, j, то по теореме Артина ясно, что $\mathbf{H}$ ассоциативна и соотношения $i^2 = -1 = j^2$, $i\,j = -j\,i = k$ полностью определяют замкнутую алгебру $\mathbf{H}$ с элементами $a = \lambda + i\,\mu + j\,\nu + k\,\rho$ и структурными соотношениями (элементы i, j, k антикоммутируют друг с другом)

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1\ , \quad ij = k\ , \quad k\,i = j\ , \quad j\,k = i\ . \tag{2.1.102}$$

Эта некоммутативная алгебра **H** называется алгеброй кватернионов. Положим $i = e_1$, $j = e_2$, $k = e_3$, тогда таблица умножения для кватернионов имеет вид

$$e_i\, e_j = -\delta_{ij} + \epsilon_{ijk}\, e_k \; . \tag{2.1.103}$$

Отсюда сразу же видно, что группой автоморфизмов для кватернионов является $SO(3)$.

Введем обозначение $1 = e_0$, тогда таблицу умножения (2.1.103) можно переписать с помощью тензоров т'Офта $(\eta, \overline{\eta})$

$$\begin{gathered}
\overline{e}_\nu\, e_\mu - \overline{e}_\mu\, e_\nu = 4\eta^i_{\mu\nu}\, e_i \; , \quad \overline{e}_\nu\, e_\mu + \overline{e}_\mu\, e_\nu = 2e_0 \delta_{\nu\mu} \\
e_\nu\, \overline{e}_\mu - e_\mu\, \overline{e}_\nu = 4\overline{\eta}^i_{\mu\nu}\, e_i \; , \quad e_\nu\, \overline{e}_\mu + e_\mu\, \overline{e}_\nu = 2e_0 \delta_{\nu\mu} \; , \\
\overline{e}_\nu\, e_\mu = 2\eta^\lambda_{\mu\nu}\, e_\lambda \; , \quad e_\nu\, \overline{e}_\mu = 2\overline{\eta}^\lambda_{\mu\nu}\, e_\lambda \; ,
\end{gathered} \tag{2.1.104}$$

где $\eta^0_{\mu\nu} = \overline{\eta}^0_{\mu\nu} = (1/2)\, \delta_{\mu\nu}$, $\overline{e}_\mu = g_{\mu\nu}\, e_\nu$ и $g_{\mu\nu} = (1, -1, -1, -1)$.

Тензора η и $\overline{\eta}$ замечательны тем, что они самодуальны и антисамодуальны

$$\eta^i_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\, \epsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\, \eta^i_{\lambda\rho} = \, *\eta^i_{\mu\nu} \; , \quad \overline{\eta}^i_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\, \epsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\, \overline{\eta}^i_{\lambda\rho} = - \, * \, \overline{\eta}^i_{\mu\nu} \; .$$

С помощью этих тензоров легко можно выписать явные q-инстантонные решения для самодуального поля Янга-Миллса (пространство евклидово)

$$A^i_\mu(x) = \overline{\eta}^i_{\mu\nu}\, \partial_\nu\, \ln(\Phi(x)) \; ,$$

где поле Φ должно удовлетворять уравнению $\partial^2_\mu \Phi(x) = 0$ и т.о. может быть выбрано в виде

$$\Phi(x) = 1 + \sum_{j=1}^{q} \frac{\lambda_j^2}{(x - x_j)^2} \; .$$

В качестве еще одного приложения кватернионов изложим кратко q- инстантонную конструкцию Атьи - Дринфельда - Хитчина - Манина (см. например [12]). Рассмотрим $(q + n) \times (q + n)$ матрицу U^K_L с кватернионными элементами ($K, L = 1, \ldots, q + n$), которая имеет вид

$$U = \left(\; M^K_\alpha \; \middle| \; N^K_i \; \right) \; , \quad M^K_\alpha = B^K_\alpha - C^K_\alpha\, (x^\mu\, \overline{e}_\mu) \; , \tag{2.1.105}$$

где $\alpha = 1, \ldots, q$, $i = q + 1, \ldots q + n$ и B, C - прямоугольные кватернионные матрицы $(q + n) \times q$, независящие от x, а $N_i(x)$ – $(q + n)$-мерные кватернионные столбцы, которых n штук. Пусть U удовлетворяет соотношениям

$$U^\dagger\, U = \left(\begin{array}{c|c} R^\alpha_\beta & 0 \\ \hline 0 & e_0\, \delta^i_j \end{array} \right) \Longrightarrow U^\dagger = \left(\begin{array}{c|c} R & 0 \\ \hline 0 & e_0\, I \end{array} \right) U^{-1} \; , \tag{2.1.106}$$

где R- $(q \times q)$ вещественная матрица, а I - $(n \times n)$ единичная матрица. Соотношения (2.1.106) можно представить в виде

$$M^\dagger\, M = R \; , \quad M^\dagger\, N = 0 \; , \quad N^\dagger\, M = 0 \; , \quad N^\dagger\, N = e_0\, I \; . \tag{2.1.107}$$

Калибровочный потенциал в конструкции АДХМ определяется как кватернионная матрица $(n \times n)$

$$A^i_j = (N^\dagger(x))^i_K \, d\, N^K_j(x) \; , \qquad (2.1.108)$$

Из последнего условия в (2.1.107) следует, что кватернионная матрица A является антиэрмитовой $A^\dagger = -A$. Покажем, что такое условие на кватернионную матрицу определяет алгебру Ли $sp(n)$ и, т.о., (2.1.108) определяет калибровочный потенциал для $Sp(n)$ калибровочной теории. В частности для $n = 1$ анзац (2.1.108) будет определять инстантонные решения для $Sp(1) = SU(2)$ теории. Заметим, что условие антиэрмитовости для A эквивалентно условию унитарности $U^\dagger U = I$ для кватернионной матрицы $U = \exp(A)$. Кватернионную матрицу U можно представить в комплексном виде

$$U = (A + i\,B) + j\,(C + i\,D) = U_1 + j\,U_2 \; . \qquad (2.1.109)$$

Кватернионная матрица U действует на кватернионный вектор $V = V_1 + j\,V_2$ следующим образом

$$U\,V = (U_1\,V_1 - \overline{U}_2\,V_2) + j\,(U_2\,V_1 + \overline{U}_1\,V_2) \; ,$$

что можно переписать в блочном виде

$$U \left(\begin{array}{c} V_1 \\ V_2 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc} U_1 & -\overline{U}_2 \\ U_2 & \overline{U}_1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} V_1 \\ V_2 \end{array} \right) \; . \qquad (2.1.110)$$

Здесь комплексная $2n \times 2n$ матрица U представлена в виде 2×2 блочной матрицы с блоками размера $n \times n$. Рассмотрим матрицы $(U_1^t - U_2^t\,j)$ и $j\,I$ (где t - матричное транспонирование), которые в 2×2 блочном виде представимы как

$$(U_1^t - U_2^t\,j)\,V \sim \left(\begin{array}{cc} U_1^t & U_2^t \\ -U_2^\dagger & U_1^\dagger \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} V_1 \\ V_2 \end{array} \right) = U^t\,V \;\Rightarrow\; j\,V \sim \left(\begin{array}{cc} 0 & I \\ -I & 0 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} V_1 \\ V_2 \end{array} \right) \; . \qquad (2.1.111)$$

С учетом этих формул условие унитарности для кватернионной матрицы U переписывается в виде условия симплектичности

$$U^\dagger\,U = (U_1^\dagger - U_2^\dagger\,j)\,(U_1 + j\,U_2) = I \;\Rightarrow\; (U_1^t - U_2^t\,j)\,j\,(U_1 + j\,U_2) = j \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; U^t \left(\begin{array}{cc} 0 & I \\ -I & 0 \end{array} \right) U = \left(\begin{array}{cc} 0 & I \\ -I & 0 \end{array} \right) \; . \qquad (2.1.112)$$

Т.о. унитарная кватернионная матрица U реализует преобразование группы $Sp(n)$ и, соответственно, антиэрмитова кватернионная матрица A является элементом алгебры $sp(n)$ (более точно мы получили комплексифицированные версии $Sp(n)$ и $sp(n)$).

Для того, чтобы найти поле напряженности $F = dA + A^2$ с потенциалом вида (2.1.108) рассмотрим дифференциальную форму

$$U^\dagger\,dU = \left(\begin{array}{c|c} (M^\dagger dM)^\alpha_\beta & (M^\dagger dN)^\alpha_j \\ \hline (N^\dagger dM)^i_\beta & (N^\dagger dN)^i_j \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} R^\alpha_\beta & 0 \\ \hline 0 & e_0\,I^i_j \end{array} \right) U^{-1}\,dU \; , \qquad (2.1.113)$$

и вычислим от нее дифференциал

$$d\,(U^\dagger\,dU) = \left(\begin{array}{c|c} (dR)R^{-1} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) U^\dagger\,dU - U^\dagger\,dU \left(\begin{array}{c|c} R^{-1} & 0 \\ \hline 0 & e_0\,I \end{array} \right) U^\dagger\,dU \; . \qquad (2.1.114)$$

Подставляя сюда выражение (2.1.113) для формы $U^\dagger dU$, мы получаем выражение для напряженности поля

$$
\begin{gathered}
F = d\,(N^\dagger\, d\,N) + (N^\dagger\, d\,N)\,(N^\dagger\, d\,N) = \\
= -(N^\dagger\, d\,M)\,R^{-1}\,(M^\dagger\, d\,N) = N^\dagger\,(d\,M)\,R^{-1}\,(dM^\dagger)\,N = \\
= (N^\dagger\, C)_\alpha\,(\overline{e}_\mu\,(R^{-1})^\alpha_\beta\, e_\nu)\,(C^\dagger\, N)^\beta\, dx^\mu \wedge dx^\nu = \\
= (N^\dagger\, C)\,(\eta^i_{\mu\nu}\, e_i)\,R^{-1}\,(C^\dagger\, N)\, dx^\mu \wedge dx^\nu\ .
\end{gathered}
\tag{2.1.115}
$$

Здесь мы воспользовались равенствами (2.1.104), (2.1.107) и $[R, e_\mu] = 0$. Т.о., в силу самодуальности тензора η, поле F также самодуально и, следовательно, удовлетворяет уравнениям Янга-Миллса для $Sp(n)$ калибровочной теории.

Октонионы.

Займемся теперь удвоением кватернионов. Произвольный элемент алгебры $\mathbf{H}^{(2)} \equiv \mathbf{O}$ имеет вид $a + b\,e$, где $a, b \in \mathbf{H}$. Для этой алгебры мы снова получаем

$$
e^2 = -1\ ,\quad \overline{e} = -e\ ,\quad i\,e = -e\,i \equiv f\ ,\quad j\,e = -e\,j \equiv g\ ,\quad k\,e = -e\,k \equiv h\ . \tag{2.1.116}
$$

Т.о. базис алгебры $\mathbf{O}$ состоит из восьми элементов

$$
\{1,\ \ i,\ \ j,\ \ k,\ \ e,\ \ f,\ \ g,\ \ h\} \equiv \{1,\ \ e_1,\ \ e_2,\ \ e_3,\ \ e_4,\ \ e_5,\ \ e_6,\ \ e_7\}\ .
$$

Из правил умножения кватернионов и (2.1.98), (2.1.99) вытекает $f^2 = g^2 = h^2 = -1$ и антикоммутируемость элементов e, f, g, h. Действительно, $f^2 = (i\,e)\,(i\,e) = -\overline{i}\,i = -1$, $e\,f = i = -f\,e$ и т.д. Т.о. таблица умножения для октонионов может быть записана в виде

$$
\begin{gathered}
e_4^2 = -1\ ,\quad e_i\, e_4 = -e_4\, e_i = e_{4+i}\ , \\
e_j\, e_{4+i} = -e_{4+i}\, e_j = -\delta_{ij}\, e_4 + \epsilon_{ijk}\, e_{4+k}\ ,\quad e_{4+j}\, e_{4+i} = -\delta_{ij} + \epsilon_{ijk}\, e_k\ ,
\end{gathered}
\tag{2.1.117}
$$

плюс формулы (2.1.103). Ясно, что с помощью (2.1.104) формулы (2.1.117) также можно переписать с помощью тензоров т'Офта

$$
e_{4+\nu}\, e_\mu = \overline{e}_\mu\, e_{4+\nu} = 2\,\overline{\eta}^\lambda_{\mu\nu}\, e_{4+\lambda}\ ,\quad e_{4+\mu}\, e_{4+\nu} = -\overline{e}_\nu\, e_\mu = -2\,\eta^\lambda_{\mu\nu}\, e_\lambda\ .
$$

Заметим, что алгебра $\mathbf{O}$ является неассоциативной

$$
\begin{gathered}
(i\,e)\,j = -(i\,j)\,e = -k\,e\ , \\
i\,(e\,j) = -i\,(j\,e) = -(j\,i)\,e = k\,e\ .
\end{gathered}
$$

Т.е $(i\,e)\,j \neq i\,(e\,j)$. Т.о. алгебра, получающаяся удвоением кватернионов, является неассоциативной. Эта алгебра $\mathbf{O}$ называется алгеброй октонионов. Произвольный элемент $a \in \mathbf{O}$ имеет вид

$$
a = \lambda + i\,\mu + j\,\nu + k\,\rho + f\,\alpha + g\,\beta + h\,\gamma\ .
$$

Рассмотрим группу автоморфизмов алгебры $\mathcal{A}$, т.е. группу отображений Φ: $\mathcal{A} \to \mathcal{A}$, таких, что

$$\Phi(a\,b) = \Phi(a)\,\Phi(b) \;\; a, b \in \mathcal{A} \; . \tag{2.1.118}$$

Пусть инфинитезимальная форма отображения Φ имеет вид $a \to a + \delta(a)$. Отображения δ являются дифференцированиями алгебры $\mathcal{A}$, т.к. из (2.1.118) мы получаем

$$\delta(a\,b) = \delta(a)\,b + a\,\delta(b) \; , \tag{2.1.119}$$

т.е. $\delta \in Der(\mathcal{A})$. Алгебра $Der(\mathcal{A})$ является алгеброй Ли, т.к. коммутатор двух дифференцирований $[\delta_1, \delta_2]$ есть снова дифференцирование. Заметим, что $\delta(1) = \delta(1 \cdot 1) = 2\delta(1)$ и следовательно $\delta(1) = 0$. Т.о. для метрических алгебр размерности 2^n, полученных удвоением, мы имеем $\delta(a\overline{a}) = 0$, что означает принадлежность δ к ортогональным преобразованиям, а из условия $\delta(1) = 0$ вытекает утверждение $\delta \in so(2^n - 1)$ или $Aut(\mathcal{A}) \in O(2^n - 1)$. Заметим, что $Der(\mathcal{A})$ можно однозначно определить из (2.1.119), если задать действие δ на образующие $\mathcal{A}$.

Рассмотрим алгебру Ли дифференцирований удвоенной алгебры $Der(\mathcal{A}^{(2)})$. Будем искать оператор дифференцирования в самом общем виде [10]:

$$\delta(a) = \delta_0(a) + \phi(a)\,e \; , \quad \delta(e) = x_0 + y_0\,e \; , \tag{2.1.120}$$

где $a, x_0, y_0 \in \mathcal{A}$ и δ_0, ϕ два линейных оператора $\mathcal{A} \to \mathcal{A}$. Дифференцирование $\mathcal{A}^{(2)}$ однозначно восстанавливается по операторам δ_0, ϕ и элементам x_0, y_0, поэтому чтобы описать алгебру $Der(\mathcal{A}^{(2)})$, достаточно описать четверки $(\delta_0,\; \phi,\; x_0,\; y_0)$.

1.) Из (2.1.119) при $a = b = e$ мы получаем

$$\begin{gathered} 0 = \delta(e^2) = (x_0 + y_0\,e)\,e + e\,(x_0 + y_0\,e) = -(y_0 + \overline{y}_0) + (x_0 + \overline{x}_0)\,e \;\Rightarrow \\ (y_0 + \overline{y}_0) = 0 = (x_0 + \overline{x}_0) \; . \end{gathered} \tag{2.1.121}$$

2.) Из формул (2.1.119), (2.1.120) и (2.1.98) при $a, b \in \mathcal{A}$ следуют равенства

$$\begin{gathered} \delta_0(a\,b) = \delta_0(a)\,b + a\,\delta_0(b) \; , \\ \phi(a\,b) = \phi(a)\,\overline{b} + \phi(b)\,a \; , \end{gathered} \tag{2.1.122}$$

т.е. δ_0 является дифференцированием алгебры $\mathcal{A}$, а отображение ϕ снова можно определить, если задать его действие на образующие $\mathcal{A}$. Если сама алгебра $\mathcal{A}$ получена удвоением (с $e = j$), то $\forall a = x + y\,j \in \mathcal{A}$ можно положить $\phi(x) = P(x) + Q(x)\,j$, $\phi(j) = z_0 + w_0\,j$, где $x, y, z_0, w_0 \in \mathcal{A}^{(1/2)}$, и из (2.1.122) следуют равенства

$$P(x\,y) = P(x)\,\overline{y} + P(y)\,x \; , \quad Q(x\,y) = Q(y)\,\overline{x} + Q(x)\,y \; . \tag{2.1.123}$$

Эту процедуру с удвоением можно продолжить до тех пор пока операторы P, Q не будут известны, после чего ϕ восстанавливается однозначно.

Однако, для частного случая $\mathcal{A}^{(2)} = \mathbf{O}$, $\mathcal{A} = \mathbf{H}$, мы воспользуемся тем, что формула (2.1.122) однозначно определяет отображение ϕ при задании действия ϕ на образующие алгебры $\mathcal{A}$. В случае $\mathcal{A} = \mathbf{H}$ мы имеем две образующие i, j, и выбрав

$$\phi(j) = z_0 + w_0\,j \; , \quad \phi(i) = a_0 + b_0\,j \; , \quad (z_0,\, w_0,\, a_0,\, b_0 \in \mathbf{C}) \; ,$$

мы легко получаем

$$\phi(x + y\,j) = (a_0\,Im(x) + b_0\,Im(y) + z_0\,\overline{y}) + (b_0\,Im(x) - a_0\,Im(y) + w_0\,y)\;j\;. \qquad (2.1.124)$$

Мы видим, что алгебра $Der(\mathbf{O})$ (которая лежит в 21 - параметрической алгебре $so(7)$) задается дифференцированиями δ_0 алгебры $\mathbf{H}$ (алгебра $Der(\mathbf{H})$ имеет 3 параметра, т.к. группа автоморфизмов $\mathbf{H}$ совпадает с $SO(3)$), двумя кватернионами x_0, y_0, ограниченными условиями (2.1.121) (6 параметров), а также четырьмя комплексными числами (z_0, w_0, a_0, $b_0 \in \mathbf{C}$), которые задают отображение ϕ (8 параметров). Покажем теперь, что кватернион x_0 определяется отображением ϕ и, следовательно, число независимых параметров алгебры $Der(\mathbf{O})$ равно 14, что совпадает с размерностью алгебры $\mathcal{G}_2$.

3.) Рассмотрим равенство $\delta(b\,(a\,e)) = \delta((a\,b)\,e)$, которое следует из (2.1.98). Раскроем правую и левую части этого равенства по правилу Лейбница

$$\begin{gathered}
\delta(b(ae)) = \delta(b)\,ae + b\,\delta(ae) = \\
= (\delta_0(b) + \phi(b)e)(ae) + b\,[(\delta_0(a) + \phi(a)\,e)\,e + a\,(x_0 + y_0 e)] = \\
= \delta_0(b)\,(ae) - \overline{a}\,\phi(b) + b\,[\delta_0(a)\,e - \phi(a) + a\,x_0 + a\,(y_0 e)] = \\
= \delta_0(a\,b)\,e - \overline{a}\,\phi(b) + -b\,\phi(a) + b\,(a\,x_0) + ((y_0\,a)b)\,e\;,
\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}
\delta((ab)e) = \delta(ab)\,e + ab\,\delta(e) = \\
= [(\delta_0(a\,b) + \phi(a\,b)\,e)]\,e + (ab)\,(x_0 + y_0 e) = \\
= \delta_0(a\,b)\,e - \phi(a\,b) + (a\,b)\,x_0 + (y_0(ab))\,e\;.
\end{gathered}$$

Сравнивая эти два результата, мы имеем

$$(b\,a - a\,b)\,x_0 = \overline{a}\,\phi(b) + b\,\phi(a) - \phi(a\,b) = -\overline{b}\,\phi(a) - a\,\phi(b) + \phi(b\,a)\;. \qquad (2.1.125)$$

Последнее равенство здесь легко получить из (2.1.122) и условий типа $[(a+\overline{a}),\ \phi(b)] = 0$. Соотношение (2.1.125) связывает x_0 с параметрами отображения ϕ. Действительно, положим в (2.1.125) $a = j$, $b = i$, тогда имеем ($k = i\,j$)

$$x_0 = -\tfrac{k}{2}\,\left(\overline{j}\,\phi(i) + i\,\phi(j) - \phi(j)\,\overline{i} - \phi(i)\,j\right) = -i\,Re(a_0) - j\,z_0 - k\,Re(b_0)\;. \qquad (2.1.126)$$

Пользуясь, формулами (2.1.120) - (2.1.126) можно построить матричные представления для $Der(\mathbf{O})$ и показать, что они совпадают с матричными представлениями алгебры $\mathcal{G}_2$.

Алгебры Йордана и Альберта.

В этом пункте мы в основном будем следовать работе [15].

Заметим, что из альтернативности (2.1.89) с учетом тождества Муфанг (2.1.94) следуют условия Йордана

$$(x\,y)\,x^2 = x\,(y\,x^2)\;, \quad x^2\,(a\,x) = (x^2\,a)\,x\;. \qquad (2.1.127)$$

Алгебры с коммутативным умножением, удовлетворяющие этим условиям, называются алгебрами Йордана. В этом случае условия (2.1.127) можно переписать в виде

$$a\,(a^2\,b) = a^2\,(a\,b)\;, \quad a\,b = b\,a\;. \qquad (2.1.128)$$

Легко проверить, что любая ассоциативная алгебра (например алгебра матриц над полем ассоциативных чисел) является алгеброй Йордана относительно коммутативного (но неассоциативного) умножения

$$x \circ y \equiv \frac{(x\,y + y\,x)}{2} \, . \qquad (2.1.129)$$

Если алгебра Йордана допускает представление (2.1.129), то такая алгебра называется специальной.

Лианеризуя соотношение (2.1.128), т.е. полагая $a \to a + c$, мы получаем

$$a\,((2\,a\,c + c^2)\,b) + c\,((2\,a\,c + a^2)\,b) = (2\,a\,c + c^2)\,(a\,b) + (2\,a\,c + a^2)\,(c\,b) \, .$$

Лианеризуем это соотношение еще раз $a \to a + d$

$$a\,((d\,c)\,b) + d\,((a\,c)\,b) + c\,((a\,d)\,b) = (c\,d)\,(a\,b) + (c\,a)\,(d\,b) + (d\,a)\,(c\,b) \, , \qquad (2.1.130)$$

и перепишем его в виде

$$L_a\,L_{dc} + L_d\,L_{ac} + L_c\,L_{ad} = L_{cd}\,L_a + L_{ca}\,L_d + L_{da}\,L_c \, ,$$

что эквивалентно

$$[L_{cd},\, L_a] + [L_{ca},\, L_d] + [L_{da},\, L_c] = 0 \, , \qquad (2.1.131)$$

где $L_a\,b \equiv a\,b$ (в коммутативном случае мы имеем $L_a = R_a$). С другой стороны заметим, что вторая строчка в (2.1.130) симметрична по перестановке $a \leftrightarrow b$ и, следовательно, (2.1.130) можно переписать в виде

$$a\,((d\,c)\,b) + d\,((a\,c)\,b) + c\,((a\,d)\,b) = b\,((d\,c)\,a) + d\,((b\,c)\,a) + c\,((b\,d)\,a) \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; [[L_a,\, L_b],\, L_c] = L_{a(bc)-b(ac)} = L_{[L_a,\,L_b]\,c} \, . \qquad (2.1.132)$$

Напомним теперь, что дифференцирование алгебры $D(ab) = (D\,a)\,b + a\,(D\,b)$ можно переписать в виде соотношения

$$[D,\, L_a] = L_{(D\,a)} \, , \qquad (2.1.133)$$

сравнивая которое с (2.1.132), мы видим, что

$$[L_a,\, L_b] \equiv D_{a,b} \, , \qquad (2.1.134)$$

является дифференцированием алгебры Йордана J. Можно показать, что все (внутренние) дифференцирования алгебры Йордана могут быть представлены в виде линейной комбинации операторов вида $[L_a,\, L_b]$. Из соотношений (2.1.133), (2.1.134) и того факта, что дифференцирования D образуют алгебру Ли, следует, что дифференцирования $D_{a,b}$ и левые умножения L_a алгебры Йордана J замкнуты относительно антикоммутатора и образуют алгебру Ли. Эта алгебра называется структурной алгеброй для J и обозначается $str(J)$. Алгебра $str(J)$ является алгеброй Ли для структурной группы $Str(J)$.

Рассмотрим теперь йордановское тройное произведение

$$\{a,\, b,\, c\} \equiv a\,(b\,c) - b\,(a\,c) + (a\,b)\,c \, , \quad \{a,\, b,\, c\} = \{c,\, b,\, a\} \, ,$$

которое в случае специальной алгебры J редуцируется к $\{a,\, b,\, c\} = \frac{1}{2}\,(abc + cba)$. С помощью этого тройного произведения можно определить билинейное преобразование S на J

$$S_{a,b}\, c \equiv \{a,\, b,\, c\}\ .$$

В терминах левых умножений L мы можем записать S в виде

$$S_{a,b} = [L_a,\, L_b] + L_{a\,b} = D_{a,b} + L_{a\,b}\ . \tag{2.1.135}$$

Т.о., $S_{a\,b}$ является элементом структурной алгебры $str(J)$. В действительности можно показать, что для простой алгебры Йордана, операторы S генерируют полную структурную алгебру $str(J)$. Коммутационные соотношения для S имеют вид:

$$[S_{cd},\, S_{ab}] = S_{\{cda\},b} - S_{a,\{dcb\}}\ .$$

Ясно, что если взять матричную алгебру над неассоциативным полем октонионов, то с помощью нового умножения (2.1.129) мы скорее всего не получим алгебру Йордана. Однако, в случае эрмитовых матриц $n \times n$ при $n \leq 3$, соответствующие матричные алгебры будут йордановыми. Для $n = 1$ это утверждение очевидно и следует из альтернативности алгебры октонионов (см. (2.1.127)). Как показал Альберт для $n = 3$ соответствующая алгебра Йордана не может быть получена из какой бы то ни было ассоциативной алгебры. Эта алгебра называется алгеброй Алберта $(Al) \equiv J_3(\mathbf{O})$ и ее произвольный элемент имеет вид

$$X = \left(\begin{array}{ccc} \mu & x & \overline{y} \\ \overline{x} & \nu & z \\ y & \overline{z} & \lambda \end{array} \right)\ , \tag{2.1.136}$$

где $\mu,\, \nu,\, \lambda \in \mathbf{R}$ и $x, y, z \in \mathbf{O}$. Замечательно, что алгебра дифференцирований для Al совпадает с исключительной алгеброй f_4, т.е. $Der(Al) = f_4$. Заметим, что матрица аналогичная (2.1.136) для $n = 2$

$$\begin{gathered} X = \left(\begin{array}{cc} \mu & x \\ \overline{x} & \nu \end{array} \right) = x_A\, \sigma^A\ , \quad \det(X) = \mu\,\nu - x\,\overline{x}\ , \\ \sigma^A = \left(\begin{array}{cc} 0 & e_A \\ \overline{e_A} & 0 \end{array} \right)\ \ (A = 0, \dots, 7)\ , \quad \sigma^8 = \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right)\ ,\ \sigma^9 = \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{array} \right)\ , \end{gathered} \tag{2.1.137}$$

играет важную роль при идентификации $so(9,1) \sim sl(2;\mathbf{O})$ [13] ($x_0, \dots, x_8$ - пространственные, а x_9 - временная координаты). А именно, структурные группы алгебр Йордана $J_2(\mathbf{R}, \mathbf{C}, \mathbf{H}, \mathbf{O}) = J_2^{(t)}$, ($t = 1, 2, 4, 8$) (т.е. алгебр эрмитовых матриц 2×2 над полем $\mathbf{R}, \mathbf{C}, \mathbf{H}, \mathbf{O}$, соответственно) совпадают (с точностью до некоторых центральных элементов) с алгебрами $so(t+1, 1) = Str(J_2^{(t)})$.

Расслоения Хопфа и алгебры с делением.

В этом разделе мы кратко обсудим расслоения Хопфа (см. [14])

$$S^1 \xrightarrow{S^0} S^1 = \mathbf{R}P^1\ ,\ \ S^3 \xrightarrow{S^1} S^2 = \mathbf{C}P^1\ ,\ \ S^7 \xrightarrow{S^3} S^4 = \mathbf{H}P^1\ ,\ \ S^{15} \xrightarrow{S^7} S^8 = \mathbf{O}P^1\ ,$$

Рассмотрим сначала простейшее нетривиальное отображение p: $S^3 \to S^2$ трехмерной сферы на двумерную. Пусть сфера S^3 задана с помощью двух комплексных чисел $\{z_1, z_2\}$, удовлетворяющих соотношению $z_1 \overline{z}_1 + z_2 \overline{z}_2 = 1$, а сфера S^2 представлена как комплексная проективная прямая $w = z_1/z_2$ (т.е. как множество пар $[z_1, z_2]$ комплексных чисел одновременно не равных нулю, в котором произведено отождествление $[z_1, z_2] \sim [\lambda z_1, \lambda z_2]$, где $\lambda \neq 0$). Тогда проекция p определяется формулой $p(\{z_1, z_2\}) = [z_1, z_2]$.

Любую пару $[z_1, z_2]$ можно нормировать, разделив ее на $\lambda = (|z_1|^2 + |z_2|^2)^{1/2}$. Следовательно образом всей сферы S^3 является вся сфера S^2. Если пара $\{z_1, z_2\}$ принадлежит S^3, то и пара $\{\lambda z_1, \lambda z_2\}$, при $|\lambda| = 1$, принадлежит S^3 и отображается в ту же точку сферы S^2, что и $\{z_1, z_2\}$. Обратно, если $p(z_1, z_2) = p(z_1', z_2')$, то $z_1/z_2 = z_1'/z_2'$ и следовательно $\{z_1', z_2'\} = \{\lambda z_1, \lambda z_2\}$ для некоторого λ, равного по абсолютной величине единице (последнее следует из условий $|z_1|^2 + |z_2|^2 = 1$, $|z_1'|^2 + |z_2'|^2 = 1$). Таким образом, полный прообраз точки сферы S^2 получается из любой его точки на S^3 умножениями на числа вида $\exp(i\theta)$ $(0 \leq \theta \leq 2\pi)$. Следовательно, полный прообраз является большой окружностью сферы S^3. Итак, S^3 разложена на семейство больших окружностей с пространством разбиения, являющимся S^2. Прообразами двух разных точек сферы S^2 являются две разные окружности в S^3. Коэффициент зацепления этих окружностей является инвариантом отображения p и называется инвариантом Хопфа.

Изложенная конструкция обобщается на случай отображения p_4 : $S^7 \xrightarrow{S^3} S^4$ следующим образом. Рассмотрим сферу S^7, заданную условиями $z_1 \overline{z}_1 + z_2 \overline{z}_2 = 1$, где $z_1, z_2 \in \mathbf{H}$ и сферу S^4, заданную как проективная кватернионная плоскость $w = z_2^{-1} z_1$ или $[z_1, z_2] \sim [\lambda z_1, \lambda z_2]$, где $\lambda \in \mathbf{H}$, $z^{-1} = |z|^{-2} \overline{z}$. Одна и та же точка S^4 $w = z_2^{-1} z_1$ при $z_1 \overline{z}_1 + z_2 \overline{z}_2 = 1$ соответствует кривой $\{z_1', z_2'\} = \{\lambda z_1, \lambda z_2\}$, вложенной в S^7, при $|\lambda|^2 = 1$, т.к.

$$1 = \overline{z}_1' \, z_1' + \overline{z}_2' \, z_2' = \overline{z}_1 \, (\overline{\lambda}\lambda) \, z_1 + \overline{z}_2 \, (\overline{\lambda}\lambda) \, z_2 = (\overline{\lambda}\lambda) \, (\overline{z}_1 \, z_1 + \overline{z}_2 \, z_2) \, .$$

Последняя цепочка равенств обобщается и на неассоциативный случай октонионов в силу тождеств альтернативности и тождества Муфанг (2.1.94).

Литература

[1] Н.Бурбаки, *Группы и алгебры Ли. Группы Кокстера и системы Титса; группы, порожденные отражениями; системы корней.* Главы IV, V, VI. Москва, Мир (1972).

[2] J.E.Hamphreys, *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory.* Graduate Texts in Mathematics **9**. Springer-Verlag (1994).

[3] Л.С.Понтрягин, *Непрерывные группы.* Москва, Наука (1973).

[4] М.А.Наймарк, *Теория представлений групп.* Москва, Наука (1973).

[5] G.Racah, *Group Theory and Spectroscopy.* Lectures delivered at the Institute for Advanced Study, Princeton, 1951. Preprint CERN 61-8 (1961).

[6] Е.Б.Дынкин, *Классификация простых групп Ли.* Математический сборник, **т.18(60)**, No.3 (1946) 45.

[7] Г.Вейль, *Теория представлений непрерывных полупростых групп при помощи линейных преобразований.* В книге "Избранные труды. Математика, теоретическая физика", стр.100. Москва, Наука (1984).

[8] D.Olive, *Gauge Theories and Lie Algebras with some applications to Spontaneous Symmetry breaking and Integrable Dynamical Systems.* Lectures given at the University of Virginia, 1982. Preprint (1983).

[9] Д.П.Желобенко, *Компактные группы Ли и их представления*, Москва, Наука (1970).

[10] М.М.Постников, *Группы и алгебры Ли. Лекции по геометрии, семестр V.*, Москва, Наука (1982).

[11] R.D.Schafer, *An Introduction to Nonassociative Algebras*, Academic Press Inc., New York (1966).

[12] M.K.Prasad, *Instantons and monopoles in the theories of gauge Yang-Mills fields*, Physica **D** 1 (1980) 167-191; (русский перевод в сборнике статей "Геометрические идеи в физике" под редакцией Ю.И.Манина, Москва, МИР, 1983).

[13] T.Kugo and P.Townsend, *Supersymmetry and the division algebras*, Nucl. Phys. **B221** (1983) 357;
A. Sudbery, *Division algebras, (pseudo)ortogonal groups and spinors*, J. Phys. A, **17** (1984) 939.

[14] N.Steenrod, *The topology of fibre bundles*, Princeton, New Jersey (1951); (русский перевод: Н.Стинрод, "Топология косых произведений", ИЛ, Москва, 1953);
М.И.Монастырский, *Топология калибровочных полей и конденсированных сред*, Москва, ПАИМС (1995).

[15] M.Gunaydin, *Quadratic Jordan Formulation of Quantum Mechanics and Construction of Lie(Super) Algebras from Jordan(Super) Algebras*, Talk presented at the VIII International Colloquium on Group Theoretical Methods in Physics at Kiriat Anavim, Israel, March 25-29, 1979; preprint BONN-HE-79-9 (1979).