Потенциал, отвечающий за многофотонные обмены при рассеянии легкой заряженной частицы на тяжелой мишени

Э. А. Кураев[1], М. В. Шатнев[2]

[1]Объединенный институт ядерных исследований, г. Дубна, Московская область, Россия
[2]Харьковский физико-технический институт, г. Харьков, Украина

Всероссийское совещание по прецизионной физике и фундаментальным физическим константам
7 декабря 2011 г.

Введение

Решение обратной классической задачи нахождения потенциала по дифференциальному сечению рассеяния, было получено в 1953 году О. Б. Фирсовым. Пользуясь им исследовано отклонение потенциала от кулоновского за счет обмена двумя и более фотонами при рассеянии электрона на внешнем поле, создаваемом тяжелым ядром с зарядом Ze.
Построен также эффективный потенциал действующий на заряженную частицу в задаче плоскостного каналирования.
Сечение рассеяния электрона на ядре заряда Ze пренебрегая эффектами отдачи описывается формулой Резерфорда

$$\frac{d\sigma^{(1)}}{d\theta} = \pi \frac{r_0^2}{4} \frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin^3\frac{\theta}{2}}, \qquad r_0 = Z\alpha/E, \qquad \alpha = \frac{1}{137}, \tag{1}$$

где $E = mv^2/2$, θ — энергия и угол рассеяния электрона на покоящемся ядре, v — скорость электрона. Кулоновский потенциал взаимодействия имеет вид

$$U(r) = \frac{Z\alpha}{r} = \frac{1}{z}, \qquad z = \frac{r}{r_0}, \tag{2}$$

где r — расстояние между электроном и ядром.

Введение

Кулоновский потенциал взаимодействия имеет вид

$$U(r) = \frac{Z\alpha}{r} = \frac{1}{z}, \qquad z = \frac{r}{r_0}. \tag{3}$$

С точки зрения квантовой теории поля этот потенциал отвечает однофотонному обмену между ядром и электроном. Поправка низшего порядка теории возмущений отвечает обмену двумя фотонами. (Эта поправка отвечает на языке диаграмм Фейнмана однопетлевой диаграмме. Поскольку разложение по числу петель в амплитуде соответствует разложению по постоянной Планка h она называется квантовой и не может быть получена в рамках классической механики.)

Другими типами квантовых поправок будут поправки связанные с учетом поляризации вакуума второго, четвертого порядка и высших порядков для функции Грина виртуального фотона. Мы не будем рассматривать их ниже.

Введение

Поправка за счет излучения двух фотонов была вычислена в работе 1948 года (McKinley W.A., Feshbach, H. Phys. Rev., 74 (1948) p. 1759)

$$\frac{d\sigma^{(1)} + d\sigma^{(2)}}{d\Omega} = \frac{r_0^2}{16} \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} \left[1 + 4\pi (Z\alpha) \eta \left(\frac{\theta}{2} \right) \right], \tag{4}$$

$$\eta \left(\frac{\theta}{2} \right) = \sin \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \right), \qquad d\omega = 2\pi \sin \theta d\theta.$$

Введение

Учет поправок высших порядков включая поправку второго порядка сводится, как показано в работах (Бажанов В.В., и др., ТМФ, 33 (1978) р. 982; Байер В., Катков В., Доклады АН СССР, т. 227 (1976) р. 325; Шульга; Арбузов А.Б. и др., ЭЧАЯ т. 42, вып. I, (2011) стр. 101, п. 2.5.) к замене

$$4\pi Z\alpha \to \Lambda, \quad \Lambda = 4\pi x \cos\phi(x), \quad x = \frac{Z\alpha c}{v} \approx Z\alpha, \tag{5}$$

где

$$\cos(\phi(x)) = \mathrm{Re}\left[\frac{\Gamma(1/2+ix)\Gamma(1-ix)}{\Gamma(1/2-ix)\Gamma(1+ix)}\right], \tag{6}$$

$$\phi(x) = -4(\ln 2)x + 4\zeta_3 x^3 + \cdots. \tag{7}$$

Здесь и ниже мы полагаем $\beta = v/c = 1$. Функция $\phi(x)$ определена в (7). Одним из следствий является отличие сечений рассеяния электронов и позитронов на одном и том же ядре Y. Этот факт может быть проверен в опытах по измерению асимметрии

$$A(\theta) = \frac{d\sigma^{e^+Y\to e^+Y} - d\sigma^{e^-Y\to e^-Y}}{d\sigma^{e^+Y\to e^+Y} + d\sigma^{e^-Y\to e^-Y}} = \Lambda(x)\sin\frac{\theta}{2}\left(1 - \sin\frac{\theta}{2}\right). \tag{8}$$

Отклонение потенциала от Кулоновской формы

Исследуем вопрос об отклонении потенциала взаимодействия электрона с ядром от его значения в борновском приближении

$$u(r) = \frac{Z\alpha}{r} + \delta u(r). \qquad (9)$$

Задача нахождения вида потенциала по виду дифференциального сечения рассеяния была решена О. Б. Фирсовым в 1953 году (Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика, Москва, 2004, Гл.I, 18, 20). Решение имеет вид (потенциал предполагается отталкивающим $u(r) > 0$)

$$W^2 = 1 - \frac{u(r)}{E} = \exp\left[-\frac{2}{\pi}\int\limits_{rW}^{\infty} \frac{\theta(\rho)d\rho}{\sqrt{\rho^2 - (rW)^2}}\right], \qquad (10)$$

где $\rho(\theta)$-прицельное расстояние. Этим уравнением задается потенциал в неявной форме.

Отклонение потенциала от Кулоновской формы

Преобразуем выражение интеграла в показателе экспоненты к виду

$$\int\limits_{rW}^{\infty} \frac{\theta(\rho)d\rho}{\sqrt{\rho^2 - (rW)^2}} = \int\limits_{0}^{\kappa_0} \frac{\kappa d\kappa \left|\frac{d\rho}{d\kappa}\right|}{\sqrt{\rho^2(\kappa) - (rW)^2}}, \qquad \rho(\kappa_0) = rW. \tag{11}$$

Рассмотрим вначале кулоновский потенциал $W^2 = 1 - \frac{1}{z}$. Используя известное выражение

$$\pi\rho^2(\kappa) = \int\limits_{\kappa}^{\pi} \frac{d\sigma}{d\theta} d\theta, \qquad \rho(\kappa) = (r_0/2)\cot(\kappa/2), \tag{12}$$

получим замечательное тождество

$$\ln\left(1 - \frac{1}{z}\right) = -\frac{4}{\pi} \int\limits_{0}^{\arcsin\frac{1}{2z-1}} \frac{x dx}{\sin^2 x \sqrt{\operatorname{ctg}^2 x - 4z(z-1)}}, \quad z \geq 1, \tag{13}$$

в справедливости которого можно убедиться численным интегрированием.

Отклонение потенциала от Кулоновской формы

В общем случае $\delta u(r) \neq 0$, вводя обозначение

$$y(z) = \frac{\delta u(zr_0)}{E}, \tag{14}$$

уравнение приобретает вид:

$$\ln\left(1 - \frac{1}{z} - y(z)\right) = -\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\kappa_1} \frac{\kappa d\kappa \frac{d\sigma}{d\kappa}}{\sqrt{\rho^2(\kappa) - z^2 r_0^2\left(1 - \frac{1}{z} - y(z)\right)}}, \tag{15}$$

где κ_1 находится из соотношения

$$\rho^2(\kappa_1) = z^2 r_0^2\left(1 - \frac{1}{z} - y(z)\right). \tag{16}$$

Для сечения рассеяния с учетом обменов одним и многими фотонами используем

$$\frac{d\sigma}{d\kappa} = \frac{d\sigma^{(1)}}{d\kappa}\left[1 + \Lambda\,\eta\left(\frac{\kappa}{2}\right)\right], \qquad \eta(x) = \sin x\,(1 - \sin x)\,;$$

$$\rho^2(\kappa) = \frac{r_0^2}{4}\left[\mathrm{ctg}^2\frac{\kappa}{2} + 2\lambda\,\psi\left(\frac{\kappa}{2}\right)\right], \qquad \psi(x) = \frac{1}{\sin x} - 1 + \ln(\sin(x)). \tag{17}$$

Отклонение потенциала от Кулоновской формы

Тогда уравнение (15) приобретает вид

$$\ln\left(1-\frac{1}{z}-y(z)\right)=$$
$$=-\frac{4}{\pi}\int\limits_0^{x_1}\frac{xdx\ \ (1+\Lambda\eta(x))}{\sin^2 x\sqrt{1+2\Lambda\psi(x)\,\mathrm{tg}^2\,x}\sqrt{\mathrm{ctg}^2\,x+2\Lambda\psi(x)-4z(1-z-y\,(z)\,z)}},$$

где верхний предел x_1 есть корень уравнения

$$\mathrm{ctg}^2\,(x_1)+2\Lambda\eta\,(x_1)=4z^2\left(1-\frac{1}{z}-y(z)\right). \tag{18}$$

Для конечных значений $\Lambda\sim 1$ аналитическое решение получить не удается.

Отклонение потенциала от Кулоновской формы

Для малых значений Λ решение можно выразить в квадратурах. Разлагая левую и правую части уравнения в ряд при малых значениях y, Λ, получим

$$\begin{aligned}
y\frac{z}{z-1} &= \Lambda\phi_1(z) + I_1 - I_0, \\
\phi_1(z) &= \frac{4}{\pi}\int\limits_0^{x_0} \frac{xdx}{R\sin^2 x}(\eta(x) - \psi(x)\,\mathrm{tg}^2\, x), \\
I_1 &= \frac{4}{\pi}\int\limits_0^{x_0} \frac{x_1}{R_1 \sin^2 x}; \qquad I_0 = \frac{4}{\pi}\int\limits_0^{x_0} \frac{x}{R\sin^2 x}; \\
R_1 &= \sqrt{\mathrm{ctg}^2\, x + 2\Lambda\psi(x) - 4z(z-1-yz)} = \sqrt{a(x) - a_1}; \\
a_1 &= a(x_1) = \mathrm{ctg}^2\, x_1 + 2\Lambda\psi(x_1) = 4z(z-1-yz); \\
R &= \sqrt{\mathrm{ctg}^2\, x - 4z(z-1)}.
\end{aligned} \tag{19}$$

Отклонение потенциала от Кулоновской формы

Чтобы избежать фиктивных расходимостей, интеграл, входящий во второе слагаемое в правой части представим в виде

$$
\begin{aligned}
\int\limits_0^{x_1} \frac{x}{\sin^2 x}\frac{1}{R_1}dx &= -2\frac{\partial}{\partial a_1}\left[\int\limits_0^{x_1}\frac{x}{\sin^2 x}\sqrt{a(x)-a_1}dx\right] = \\
&= -2\int\limits_0^{x_1}\left(\frac{d}{dx}\left[\frac{x}{a(x)'\sin^2 x}\right]\right)\sqrt{a(x)-a_1}dx. \qquad (20)
\end{aligned}
$$

Заметим, что верхний предел интегрирования можно заменить его значением при $y=\Lambda=0$, т.е. $x_1=x_0=\arcsin(1/(2z-1))$. Разлагаем подынтегральное выражение при малых y, Λ

$$
\begin{aligned}
\sqrt{a(x)-a_1} &= R+\frac{2z^2y+\Lambda\psi(x)}{R}; \\
\frac{d}{dx}\left[\frac{x}{a'\sin^2 x}\right] &= -\frac{d}{dx}\left[\frac{x\sin x}{2\cos x}(1-\Lambda\eta(x))\right], \qquad (21)
\end{aligned}
$$

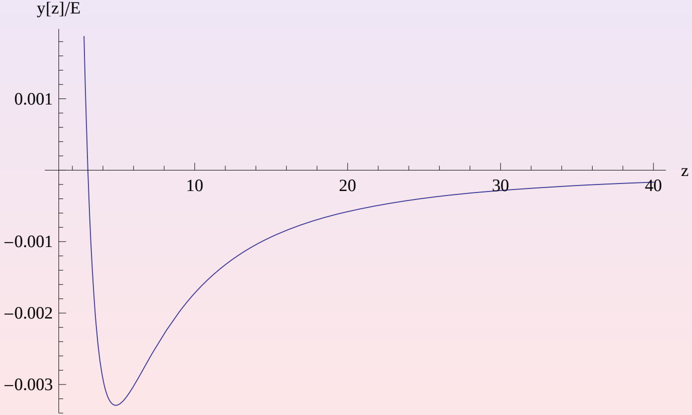
и проводим интегрирование по частям.

Отклонение потенциала от Кулоновской формы

Окончательное выражение для $y(z)$ в случае малых Λ имеет вид

$$y(z) = \Lambda \frac{z-1}{z} \frac{\phi_1 - \phi_2 - \phi_3}{1 + 2z(z-1)\phi_4}. \tag{22}$$

Функция $y(z)/\Lambda$ представлена на графике (Фиг. 1).



Отклонение потенциала от Кулоновской формы

Для случая плоскостного каналирования с потенциалом локального взаимодействия $y(z)$ возникает эффективный потенциал (Gemmel D.S. Rev. Mod. Phys. v 46,129 (1974))

$$V_{eff}(\rho) = E \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt \delta u(r), \qquad r = zr_0 = \sqrt{\rho^2 + t^2 d^2}, \tag{23}$$

где d -расстояние между плоскостями кристалла.