Точное по отношению масс вычисление вклада поляризации вакуума порядка $\alpha(Z\alpha)^4mc^2$ в мюонном водороде

Е. Ю. Корзинин, В. Г. Иванов, С. Г. Каршенбойм

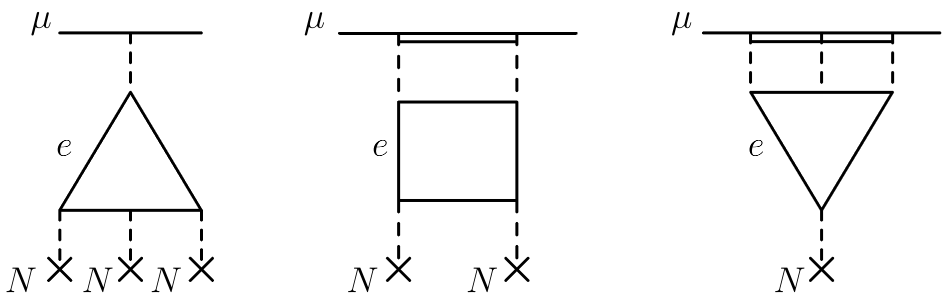
Дубна, 5–9 Декабря 2011

Цель работы

Объект исследования: **лэмбовский сдвиг в мюонном водороде.**

Мы осуществляем последовательную проверку вкладов различных квантовомеханических и КЭД эффектов, представляющих интерес в связи с достигнутой точностью эксперимента.

На прошлой конференции ФФК10 был представлен доклад о вычислении вклада блока рассеяния света на свете.

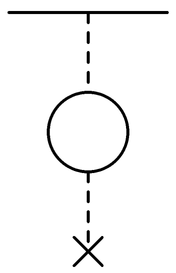


(1:3) (2:2) (3:1)

Данная работа посвящена проверке вычислений релятивистских эффектов отдачи с учетом электронной поляризации вакуума порядка $\alpha(Z\alpha)^4mc^2$.

Вклад электронной поляризации вакуума без учета эффектов отдачи $\alpha(Z\alpha)^2 m_r c^2$

Описывается потенциалом Юлинга



$$V_U(\mathbf{k}) = -4\pi\frac{\alpha}{\pi}(Z\alpha)\int_0^1 dv\,\frac{v^2(1-v^2/3)}{1-v^2}\,\frac{1}{\mathbf{k}^2+s^2}\,,$$

$$s = \frac{2m_e}{\sqrt{1-v^2}} = \frac{2(Z\alpha)m_r}{\kappa\sqrt{1-v^2}}\,,$$

$$\kappa = \frac{(Z\alpha)m_r}{m_e}$$

Здесь и везде далее для поляризационного оператора используется спектральное представление

$$\mathcal{P}(k^2) = \frac{\alpha}{\pi}\int_0^1 dv\rho_e(v)\frac{k^4}{k^2-s^2}\,, \qquad (1)$$

Поляризация вакуума учитывается введением в фотонный пропагатор в ковариантной калибровке параметра s, аналогичного эффективной массе фотона, по которому затем осуществляется интегрирование с весовой функцией $\rho_e(v)$.

Вклад эффектов отдачи без учета электронной поляризации вакуума $(Z\alpha)^4 mc^2 (m/M)^h$

- Может быть найден с помощью уравнения Брейта

$$
\begin{aligned}
H &= \frac{\mathbf{p}^2}{2m_r} - \frac{Z\alpha}{r} + \delta V \ , \\
\delta V &= -\frac{\mathbf{p}^4}{8}\left(\frac{1}{m^3}+\frac{1}{M^3}\right) + \frac{Z\alpha\pi}{2}\left(\frac{1}{m^2}+\frac{1}{M^2}\right)\delta^3(r) \\
&- \frac{Z\alpha}{2mM\,r}\left(p^2 + \frac{(\mathbf{r}\cdot(\mathbf{r}\cdot\mathbf{p})\mathbf{p})}{r^2}\right) + \frac{Z\alpha}{r^3}\left(\frac{1}{4m^2}+\frac{1}{2mM}\right)(\boldsymbol{\sigma}\cdot[\mathbf{r}\times\mathbf{p}]) \ .
\end{aligned}
$$

- **Для построения уравнения Брейта достаточно рассмотреть статический однофотонный обмен в кулоновской калибровке**
- **При использовании других калибровок (не кулоновской) однофотонного взаимодействия может быть недостаточно**
  В фейнмановской калибровке фотонного пропагатора вклады $(Z\alpha)^4 mc^2 (m/M)^h$ набираются из полного однофотонного и двухфотонного обменов (см., например, R. Sapirstein and D. Yennie в "QED" ed. by Kinoshita)

Добавление поляризационной петли

- Добавить поляризационную петлю к фотонному пропагатору в кулоновской калибровке сложная задача.
- Проще добавить петлю в ковариантной калибровке пропагатора и выполнить калибровочные преобразования
- В калибровке Ланадау вставка поляризации вакуума сводится к умножению на поляризационный оператор

$$\mathcal{P}_{\mu\nu}(k) = \left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) \mathcal{P}(k^2) \ ,$$

$$D_{\mu\nu}(k) = \frac{4\pi}{k^2} \left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) \left[1 + \mathcal{P}(k^2) \right] \ ,$$

- Калибровочными преобразованиями можно получить разные калибровки в статическом пределе похожие на кулоновскую калибровку.
- Авторы предыдущих вычислений использовали два варианта калибровок.

Предыдущие вычисления:

A. Veitia and K. Pachucki, Phys. Rev. A (2004)

- Вычисления аналогично выводу уравнения Брейта. Рассматривается гамильтониан Дирака-Брейта с переходом к нерелятивистскому разложению в духе преобразования Фолди-Ваутхайзена
- Используется калибровка, похожая на кулоновскую,

$$D_{00} = -\frac{\alpha}{\pi}\int_0^1 dv\rho_e(v)\frac{4\pi}{(\mathbf{k}^2+s_e^2)}\,, \qquad D_{i0}=0\,, \tag{2}$$

$$D_{ij} = \frac{\alpha}{\pi}\int_0^1 dv\rho_e(v)\frac{4\pi}{-(k^2-s_e^2)}\left(\delta_{ij}-\frac{k_ik_j}{(\mathbf{k}^2+s_e^2)}\right)\,. \tag{3}$$

- Вычисление точно по отношению масс мюона и ядра
- Учитывается только однофотонный обмен в статическом пределе
- Численный результат в статье $\delta E_{VP}(2p_{1/2}-2s_{1/2})=0.0169$ meV
U. D. Jentschura, Phys. Rev. A(2011) указал на численную ошибку.
Исправленный численный результат $\delta E_{VP}(2p_{1/2}-2s_{1/2})=0.0187$ meV

Предыдущие вычисления:

Вычисление E. Borie, arxiv 1103.1772 и ранее

- Вычисление выполнено в духе уравнения Гротча-Йени,

$$\left(\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{p}+\beta m+\frac{\mathbf{p}^2}{2M}+V+\frac{1}{2M}\{\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{p},V\}+\frac{1}{4M}\left[\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{p},[\mathbf{p}^2,W]\right]\right)\psi_0=E\psi_0\,,$$

учитывается только только первый порядок по m_μ/M.

- Используется другая калибровка, похожая на кулоновскую,

$$D_{00} = -\frac{\alpha}{\pi}\int_0^1 dv\rho_e(v)\frac{4\pi}{(k^2-s_e^2)}\frac{k^2}{\mathbf{k^2}}\,, \tag{4}$$

$$D_{i0} = 0\,, \tag{5}$$

$$D_{ij} = \frac{\alpha}{\pi}\int_0^1 dv\rho_e(v)\frac{4\pi}{-(k^2-s_e^2)}\left(\delta_{ij}-\frac{k_ik_j}{\mathbf{k^2}}\right)\,. \tag{6}$$

- Учитывается только однофотонный обмен в статическом пределе
- Численный результат в статье $\delta E_{VP}(2p_{1/2}-2s_{1/2})=0.0169$ meV

В ходе проверки обнаружилось

- С учетом вычисления U. D. Jentschura
  исправленный результат в статье A. Veitia and K. Pachucki
  $\delta E_{VP}(2p_{1/2} - 2s_{1/2}) = 0.0187$ meV значительно отличен от
  $\delta E_{VP}(2p_{1/2} - 2s_{1/2}) = 0.0169$ meV у E. Borie

- Значительность расхождения результатов более очевидна, если выделить тривиальную часть вклада, отвечающую уравнению Дирака

$$\delta E_{VP}(2p_{1/2} - 2s_{1/2}) = \frac{\alpha}{\pi}(Z\alpha)^4 m_R \left[C_0(\kappa) + C_1(\kappa)\,\frac{m}{M} + C_2(\kappa)\,\left(\frac{m}{M}\right)^2 + ... \right]$$

$C_0 = 0.03332...$ – Вклад уравнения Дирака

A. Veitia and K. Pachucki	**E. Borie**
$C_1 = -0.0371873$	$C_1 = -0.0607355$

- Разница не может быть объяснена вкладами $(m_\mu/M)^2$

В ходе проверки обнаружилось

- В работах рассматривается статический предел разных $D_{\mu\nu}$

A. Veitia and K. Pachucki	E. Borie
$D_{00} = -\frac{\alpha}{\pi}\int\limits_0^1 dv\rho_e(v)\frac{4\pi}{(\mathbf{k}^2+s_e^2)}$ $D_{i0} = 0$ $D_{ij} = \frac{\alpha}{\pi}\int\limits_0^1 dv\frac{4\pi\rho_e(v)}{-(k^2-s_e^2)}\left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{(\mathbf{k}^2+s_e^2)}\right)$	$D_{00} = -\frac{\alpha}{\pi}\int\limits_0^1 dv\rho_e(v)\frac{4\pi}{(k^2-s_e^2)}\,\frac{k^2}{\mathbf{k^2}}$ $D_{i0} = 0$ $D_{ij} = \frac{\alpha}{\pi}\int\limits_0^1 dv\frac{4\pi\rho_e(v)}{-(k^2-s_e^2)}\left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{\mathbf{k^2}}\right)$

- **В обеих работах вклад двухфотонного обмена не обсуждался**
- Применимость статического приближения также явно не обсуждалась.
- Зависимость D_{00} от k_0 в калибровке, выбранной E. Borie приводит к необходимости учета запаздывания и двухфотонного обмена по аналогии с фейнмановской калибровкой в задаче без VP.

Итог проверки

- **В калибровке, используемой в статье A. Veitia and K. Pachucki, достаточно рассмотреть статический предел однофотонного обмена, чтобы полностью учесть эффекты отдачи порядка** $\alpha(Z\alpha)^4mc^2$
- **В калибровке используемой E. Borie статический однофотонный обмен необходимо дополнить вкладами запаздывания и двухфотонного обмена**
- Сумма однофотонного и двухфотонного обмена в калибровке, используемой E. Borie, аналитически воспроизводит вклад статического однофотонного обмена в калибровке используемой A. Veitia and K. Pachucki
- Расхождение численных результатов обусловлено потерей вкладов в работах E. Borie (мюонный водород, дейтерий, ионы гелия...)

Дальнейший план доклада

- **Поправки на отдачу без VP для фотонного пропагатора в фейнмановской калибровке**
  - Вклад однофотонного обмена
  - Вклад двухфотонного обмена
  - Воспроизведение уравнения Брейта
- **Вычисление поправок на отдачу с учетом VP в калибровке E. Borie**
- **Проверка совпадения результатов в калибровке E. Borie и A. Veitia and K. Pachucki**
- **Проверка того, что в калибровке, выбранной A. Veitia and K. Pachucki, достаточно рассмотреть статический предел однофотонного обмена**

1-фотонный обмен в кулоновской калибровке

$$\Psi \approx \sqrt{2m}\begin{pmatrix} 1-\frac{\mathbf{p}^2}{8m^2} \\ \frac{(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p})}{2m}\end{pmatrix}\Phi_{\mathrm{NR}}\,, \tag{7}$$

$$\overline{\Psi}'\gamma_0\Psi \approx 2m\Phi'^{*}_{\mathrm{NR}}\left(1-\frac{\mathbf{k}^2}{8m^2}+\frac{i\boldsymbol{\sigma}[\mathbf{k}\times\mathbf{p}_i]}{4m^2}\right)\Phi_{\mathrm{NR}}\,, \tag{8}$$

$$\overline{\Psi}'\boldsymbol{\gamma}\Psi \approx \Phi'^{*}_{\mathrm{NR}}\left(i[\boldsymbol{\sigma}\times\mathbf{p}_i]+2\mathbf{p}_f+\mathbf{k}\right)\Phi_{\mathrm{NR}}\,, \tag{9}$$

$$\begin{aligned}\widetilde{V}_{\mathrm{Coul}}(\mathbf{p}_i,\mathbf{p}_f) \quad &= \quad -\frac{4\pi(Z\alpha)}{\mathbf{k}^2}\left(1-\frac{\mathbf{k}^2}{8M^2}-\frac{\mathbf{k}^2}{8m^2}+\frac{i(\boldsymbol{\sigma}\cdot[\mathbf{k}\times\mathbf{p}_i])}{4m^2}\right)\\ &+ \quad \frac{1}{4Mm}\left[\frac{4\pi(Z\alpha)}{k_0^2-\mathbf{k}^2}\left((\mathbf{p}_i+\mathbf{p}_f)\cdot(i[\boldsymbol{\sigma}\times\mathbf{k}]+\mathbf{p}_i+\mathbf{p}_f)-\frac{\left(\mathbf{p}_i^2-\mathbf{p}_f^2\right)^2}{(\mathbf{k})^2}\right)\right]\end{aligned}$$

$$\mathbf{k}=\mathbf{p}_f-\mathbf{p}_i$$

1-фотонный обмен в фейнмановской калибровке

$$\begin{aligned}\widetilde{V}_{\mathrm{Fm}}(\mathbf{p}_i,\mathbf{p}_f) &\approx -\frac{4\pi(Z\alpha)}{\mathbf{k}^2}\left(1+\frac{\left(\mathbf{p}_i^2-\mathbf{p}_f^2\right)^2}{4M^2\mathbf{k}^2}-\frac{\mathbf{k}^2}{8M^2}-\frac{\mathbf{k}^2}{8m^2}+\frac{i(\boldsymbol{\sigma}\cdot[\mathbf{p}_i\times\mathbf{p}_f])}{4m^2}\right) \\ &+ \frac{1}{4Mm}\left[\frac{4\pi(Z\alpha)}{k_0^2-\mathbf{k}^2}(\mathbf{p}_i+\mathbf{p}_f)\cdot(i[\boldsymbol{\sigma}\times\mathbf{k}]+\mathbf{p}_i+\mathbf{p}_f)\right]\end{aligned} \tag{10}$$

использовано $k_0^2=\frac{\left(\mathbf{p}_i^2-\mathbf{p}_f^2\right)^2}{4M^2}\ll\mathbf{k}^2$

Разность однофотонных обменов

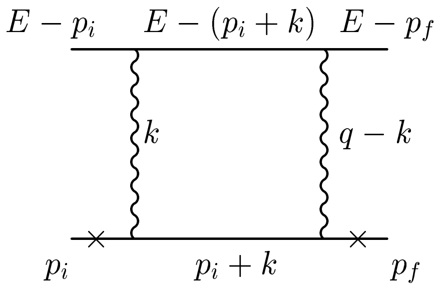
$$\widetilde{V}_{\mathrm{Coul}}(\mathbf{p}_i,\mathbf{p}_f)-\widetilde{V}_{\mathrm{Fm}}(\mathbf{p}_i,\mathbf{p}_f) = 4\pi(Z\alpha)\left(\frac{1}{4Mm}+\frac{1}{4M^2}\right)\frac{\left(\mathbf{p}_i^2-\mathbf{p}_f^2\right)^2}{\mathbf{k}^4}$$

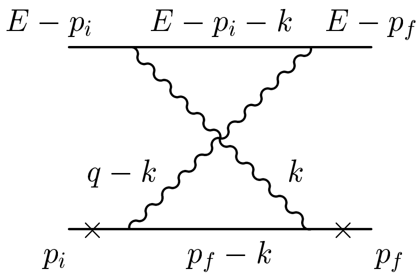
$$= 4\pi(Z\alpha)\frac{1}{4Mm_r}\frac{\left(\mathbf{p}_i^2-\mathbf{p}_f^2\right)^2}{\mathbf{k}^4}\,. \qquad (11)$$

$$\simeq \frac{1}{2M}V_C^2\,. \qquad (12)$$

Рассматривая двухфотонный обмен в фейнмановской калибровке, нам предстоит найти это слагаемое с обратным знаком.

Двухфотонный обмен в феймановской калибровке

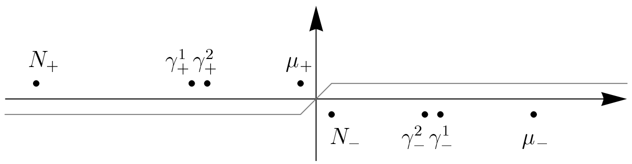


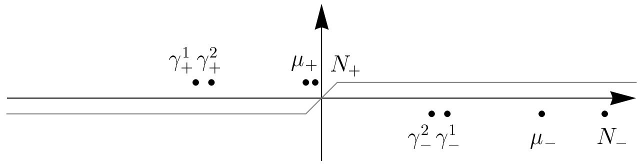


$$
\begin{aligned}
i\widetilde{K} &= i(Z\alpha)^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{4\pi}{k^2+i0} \frac{4\pi}{(q-k)^2+i0} \left[\gamma_2^\mu \frac{(\widehat{E}-\widehat{p}_i-\widehat{k})+m}{D_e} \gamma_2^\nu\right] \\
&\times \frac{\overline{u}(p)}{\sqrt{2p_{i0}}} \gamma_1^\mu \left[\frac{\widehat{p}_i+\widehat{k}+M}{D_p^{\text{box}}} + \frac{\widehat{p}_f-\widehat{k}+M}{D_p^{\text{cross}}}\right] \gamma_1^\nu \frac{u(p_f)}{\sqrt{2p_{f0}}}
\end{aligned} \tag{13}
$$

Номинальный порядок вкладов этих диаграмм $(Z\alpha)^5 mc^2$.

Ищем область импульсов в которых возникает малость в знаменателе.





$$
\begin{aligned}
N_-^{\rm box} &= -p_0 + \sqrt{(\mathbf{p}+\mathbf{k})^2 + M^2} - i0 \approx \frac{\mathbf{k}^2 + 2\mathbf{kp}}{2M} - \frac{(\mathbf{k}+\mathbf{p})^4 - \mathbf{p}^4}{8M^3} - i0\,, && (14)\\
N_-^{\rm cross} &= q_0 + \sqrt{(\mathbf{q}-\mathbf{k})^2 + M^2} - i0 \approx 2M - i0\,, && (15)\\
\mu_- &= E - p_0 + \sqrt{(\mathbf{p}+\mathbf{k})^2 + m^2} - i0 \approx 2m - i0\,, && (16)\\
\mu_+ &= E - p_0 - \sqrt{(\mathbf{p}+\mathbf{k})^2 + m^2} + i0 \approx -\frac{(\mathbf{p}+\mathbf{k})^2}{2m} + \frac{(\mathbf{p}+\mathbf{k})^4}{8m^3} + i0\,, && (17)\\
\gamma_-^1 &= |\mathbf{k}| - i0\,, &&\\
\gamma_-^2 &\approx q_0 - p_0 + |\mathbf{k}+\mathbf{p}-\mathbf{q}| - i0\,, && (18)\\
& && (19)
\end{aligned}
$$

Фотонные полюсы

- D_{ij} компоненты фотонного пропагатора из-за "смешивания" верхних и нижних компонент дают дополнительную малость $Z\alpha$ по сравнению с D_{00} компонентами.
- Полюсы нельзя рассматривать по отдельности в области $\mathbf{k}^2 \approx (\mathbf{k}-\mathbf{q})^2$. В этой области импульсов они совмещаются.
- Для нахождения искомого вклада достаточно рассмотреть D_{00} и в ядре взаимодействия разложить в ряд по $\mathbf{k}$ протонный фактор (а в мюонном пропагаторе удерживать лишь ведущий член)

В результате фотонные полюсы D_{00} компонент фотонного пропагатора дают вклад

$$\Delta V_{2\gamma}^{\mathrm{Fm}} = \frac{1}{2M} V_C^2 \,, \tag{20}$$

Сумма однофотонного и двухфотонного обменов в фейнмановской калибровке воспроизводит уравнение Брейта.

Вычисления поправок на отдачу с учетом поляризации вакуума в калибровке E. Borie

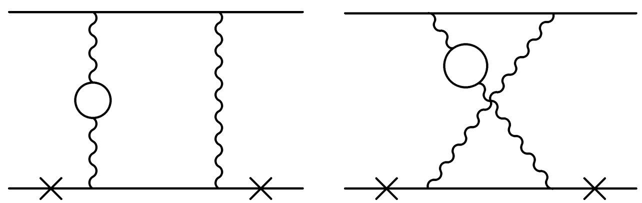
Зависимость D_{00} от k_0 приводит к возникновению вклада запаздывания в однофотонном обмене и вклада фотонных полюсов в двухфотонном обмене

- Вклад запаздывания в однофотонном обмене

$$D_{00}(k_0,\mathbf{k}) = -\frac{4\pi}{k_0^2-\mathbf{k}^2-s_e^2}\,\frac{k_0^2-\mathbf{k}^2}{\mathbf{k}^2}\,. \qquad k_0 = \frac{\mathbf{p}_i^2-\mathbf{p}_f^2}{2M}\,. \tag{21}$$

$$V_{k_0}(\mathbf{k}) = \frac{4\pi(Z\alpha)\,s_e^2}{(\mathbf{k}^2+s_e^2)^2\mathbf{k}^2}\,\frac{(\mathbf{p}_i^2-\mathbf{p}_f^2)^2}{4M^2}\,. \tag{22}$$

- Вклад фотонных полюсов в двухфотонном обмене



$$V_{2\gamma}(\mathbf{k}) = \frac{4\pi(Z\alpha)\,s_e^2}{(\mathbf{k}^2+s_e^2)^2\mathbf{k}^2}\,\frac{(\mathbf{p}_i^2-\mathbf{p}_f^2)^2}{4Mm_r}\,. \tag{23}$$

Вычисления поправок на отдачу с учетом поляризации вакуума в калибровке E. Borie

Сумма вкладов

$$V_{k_0}(\mathbf{k}) + V_{2\gamma}(\mathbf{k}) = \frac{4\pi(Z\alpha)\, s_e^2}{4Mm}\, \frac{(\mathbf{p}_i^2 - \mathbf{p}_f^2)^2}{(\mathbf{k}^2 + s_e^2)^2\mathbf{k}^2}\,. \tag{24}$$

Разность вкладов однофотонного статического приближения в калибровке E. Borie и A. Veitia and K. Pachucki

$$V^{\mathrm{sII}} - V^{\mathrm{sI}} = \frac{1}{4Mm}\frac{4\pi(Z\alpha)}{\mathbf{k}^2 + s_e^2}\left(\mathbf{p}_i^2 - \mathbf{p}_f^2\right)^2 \left(\frac{1}{\mathbf{k}^2 + s_e^2} - \frac{1}{\mathbf{k}^2}\right) \tag{25}$$

$$= -\frac{4\pi(Z\alpha)}{4Mm} s_e^2 \frac{(\mathbf{p}_i^2 - \mathbf{p}_f^2)^2}{(\mathbf{k}^2 + s_e^2)^2\mathbf{k}^2}\,. \tag{26}$$

Калибровка, выбранная A. Veitia and K. Pachucki

$$D_{00} = -\frac{\alpha}{\pi}\int_0^1 dv\rho_e(v)\frac{4\pi}{(\mathbf{k}^2+s_e^2)}\,, \tag{27}$$

$$D_{i0} = 0\,, \tag{28}$$

$$D_{ij} = \frac{\alpha}{\pi}\int_0^1 dv\rho_e(v)\frac{4\pi}{-(k^2-s_e^2)}\left(\delta_{ij}-\frac{k_ik_j}{(\mathbf{k}^2+s_e^2)}\right)\,. \tag{29}$$

- Вклад запаздывания в однофотонном обмене пренебрежимо мал
- D_{00} независит от k_0 и фотонные полюсы в двухфотонном обмене только в D_{ij} и дают вклады следующего порядка по $(Z\alpha)$
- D_{i0} отсутствуют

В этой калибровке интересующий нас вклад набирается в однофотонном статическом приближении

Заключение

- **Вычисление поправок на отдачу с учетом поляризации вакуума, выполненые E. Borie**
  E. Borie, arXiv:1103.1772v3, (2011)
  E. Borie, Phys. Rev. A **71**, 032508 (2005)
  E. Borie, Rev. Mod. Phys **54**, 67 (1982)
  ...
  необходимо дополнить учетом эффектов запаздывания в однофотонном обмене и эффектов двухфотонного обмена.

- Численный результат для мюонного водорода в статье A. Veitia and K. Pachucki, Phys. Rev. A. **69**, 042501 (2004) содержит ошибку, но формула для потенциала в координатном представлении верна для безспинового ядра.

- **Исправленный результат для мюонного водорода**

$$\delta E_{VP}(2p_{1/2} - 2s_{1/2}) = 0.0187 \text{ meV}$$

Спасибо за внимание !