

Новые методы вычисления Фейнмановских диаграмм

О. В. Тарасов

ОИЯИ, Дубна , 4 декабря, 2009

Содержание:

- Введение
- Обобщённые рекуррентные соотношения и метод интегрирования по частям
- Рекуррентные соотношения по размерности пространств и их применение для одно- и двух- петлевых интегралов
- Функциональные уравнения: общий метод и конкретные примеры
- Заключение

Для сравнения теоретических предсказаний с экспериментальными данными, которые планируется получить на **LHC** и других ускорителях, требуется знание прецизионных радиационных поправок.

Характерные особенности вычисления таких поправок:

- должны быть учтены **массы многих частиц**.
- должны быть посчитаны **диаграммы** с большим числом внешних линий
- т.е. **с большим числом кинематических переменных**

Таким образом нужно уметь вычислять аналитически или численно с высокой точностью функции многих переменных, нужно знать их аналитическое продолжение в различные кинематические области.

Экспериментаторы с LHC подготовили "wishlist" – список процессов для которых нужны NLO радиационные поправки. Практически все эти поправки требуют вычисления диаграмм с 5-ю, 6-ю и т.д. внешними линиями.

2009 status of NLO wishlist for LHC

$pp \rightarrow W W \text{ jet}$	Denner/Dittmaier/Kallweit/Uwer, Ellis/Campbell/Zanderighi
$pp \rightarrow Z Z \text{ jet}$	Binoth/Guillet/Karg/Kauer/Sanguinetti
$pp \rightarrow t\bar{t} b\bar{b}$	Bredenstein/Denner/Dittmaier/Pozzorini
$pp \rightarrow t\bar{t} + 2 \text{ jets}$	
$pp \rightarrow Z Z Z$	Lazopoulos/Melnikov/Petriello, Hankele/Zeppenfeld
$pp \rightarrow V V V$	Binoth/Ossola/Papadopoulos/Pittau, Zeppenfeld et al.
$pp \rightarrow V V b\bar{b}$	
$pp \rightarrow V V + 2 \text{ jets}$	VBF: Bozzi/Jäger/Oleari/Zeppenfeld, VBFNLO coll.
$pp \rightarrow W + 3 \text{ jets}$	BlackHat coll.; Ellis/Giele/Kunszt/Melnikov/Zanderighi*
$pp \rightarrow b\bar{b}b\bar{b}$	Binoth/Guffanti/Guillet/Reiter/Reuter
$pp \rightarrow t\bar{t} \text{ jet}$	Dittmaier/Uwer/Weinzierl
$pp \rightarrow t\bar{t} Z$	Lazopoulos/McElmurry/Melnikov/Petriello
$pp \rightarrow b\bar{b} Z, b\bar{b} W$	Febres Cordero/Reina/Wackeroth

● done ● partial results * leading colour only

Для того чтобы представить надежные теоретические предсказания для сравнения с результатами весьма дорогостоящих экспериментов, необходимо развивать различные эффективные новые методы вычисления Фейнмановских диаграмм.

Основные этапы вычисления Фейнмановских диаграмм

1. Генерация диаграмм для заданного процесса (для ЛНС обычно - $10^2 - 10^6$ диаграмм). Проблема решена практически для всех нужных сейчас процессов – Qgraf, FeyArt.
2. Построение подынтегральных выражений, редукция тензорных интегралов, сведение большого числа скалярных интегралов к небольшому числу базисных интегралов .
3. Вычисление скалярных интегралов, вычисление радиационной поправки, интегрирование по фазовому объёму.

Рекурсивные методы вычисления фейнмановских диаграмм

Впервые рекурсивный алгоритм был предложен Ткачевым и Четыркиным (Nucl.Phys. B192 (1981) 159) . Известен как **ИВР - метод**. Рекуррентные соотношения следуют из уравнения

$$\int d^d k_1 \dots \int d^d k_L \frac{\partial}{\partial k_{j\mu}} \frac{k_{j\mu}}{(\bar{k}_1^2 - m_1^2)^{\nu_1} \dots (\bar{k}_N^2 - m_N^2)^{\nu_N}} = 0,$$

где $\bar{k}_j$ линейные комбинации импульсов интегрирования и внешних импульсов. После дифференцирования по k_j , скалярные произведения представляют в виде комбинации факторов, стоящих в знаменателе и квадратов внешних импульсов:

$$k_1 q_1 = \frac{1}{2} \{ [(k_1 + q_1)^2 - m_1^2] - [k_1^2 - m_1^2] - q_1^2 \}.$$

....

В результате возникают линейные рекуррентные соотношения для скалярных интегралов вида

$$G_{\nu, \dots, \nu_N}(d, \{m_j\}, \{p_i p_k\}) = \int d^d k_1 \dots \int \frac{d^d k_L}{(\bar{k}_1^2 - m_1^2)^{\nu_1} \dots (\bar{k}_N^2 - m_N^2)^{\nu_N}},$$

С помощью рекуррентных соотношений интегралы с целыми степенями ν_j сводятся к небольшому набору базисных интегралов:

$$G_{\nu, \dots, \nu_N}(d, \{m_j\}, \{p_i p_k\}) = \sum_k^{n_b} R_k(\nu_j, d, \{m_j\}, \{p_i p_k\}) B_k(d, \{m_j\}, \{p_i p_k\})$$

Трудности вычисления диграмм методом Четыркина - Ткачева:

- отсутствие регулярного алгоритма для вычисления тензорных интегралов.
- для редукции скалярных интегралов с так называемыми неприводимыми числителями необходимо вводить дополнительные фиктивные пропагаторы, что усложняет вычисления.

Метод обобщённых рекуррентных соотношений.

О.Т., Phys.Rev. D.54(1996) 6479 Аналогично IBP методу, используем соотношение:

$$\int d^d k_1 \dots \int d^d k_L \frac{\partial}{\partial k_{j\mu}} \frac{k_{k\mu}}{(\bar{k}_1^2 - m_1^2)^{\nu_1} \dots (\bar{k}_N^2 - m_N^2)^{\nu_N}} = 0$$

после дифференцирования по k , используем соотношение

$$\int d^d k_1 \dots \int d^d k_L \frac{k_{1\mu} \dots k_{N\nu}}{(\bar{k}_1^2 - m_1^2)^{\nu_1} \dots (\bar{k}_N^2 - m_N^2)^{\nu_N}} =$$

$$T(q, \partial, \mathbf{d}^+) \int d^d k_1 \dots \int d^d k_L \frac{1}{(\bar{k}_1^2 - m_1^2)^{\nu_1} \dots (\bar{k}_N^2 - m_N^2)^{\nu_N}}$$

где $\mathbf{d}^+ G^{(d)} = G^{(d+2)}$ и $\partial_j = \frac{\partial}{\partial m_j^2}$ Общая формула для линейного оператора $T(q, \partial, \mathbf{d}^+)$ была дана в работе О.Т., Phys.Rev. D.54(1996) 6479.

Обобщённые рекуррентные соотношения связывают не только интегралы с различными степенями пропагаторов, но и интегралы с различными сдвигами размерности пространства-времени d . Тензорные интегралы всегда могут быть выражены через скалярные интегралы с различными сдвигами параметра d .

Важные отличия обобщённых рекуррентных соотношений от метода IBP:

- 1 коэффициенты (отношения полиномов) во многих обобщённых рекуррентных соотношениях короче чем в IBP рекурсиях, следовательно можно построить более оптимальный алгоритм редукции скалярных интегралов к базисным.
- 2 обобщённые рекуррентные соотношения содержат дополнительные уравнения, а именно уравнения на базисные интегралы (размерные рекурсии):

$$\sum_r M_k(d + 2r, \{m_j\}, \{p_i p_k\}) C_{rk}(d, \{m_j\}, \{p_i p_k\}) = 0$$

где $C_r(d, \{m_j\}, \{p_i p_k\})$ являются полиномами по $d, m_j, p_i p_k$.

Пример: однопетлевые пропагаторные интегралы

IBP рекуррентное соотношение имеет вид:

$$\Delta \nu_1 \mathbf{1}^+ G_{\nu_1 \nu_2}^{(d)} = \{ (q^2 - m_1^2 - m_2^2) [\nu_1 \mathbf{1}^+ \mathbf{2}^- - d + \nu_1 + 2\nu_2] + 2m_2^2 [\nu_2 \mathbf{2}^+ \mathbf{1}^- - d + 2\nu_1 + \nu_2] \} G_{\nu_1 \nu_2}^{(d)},$$

где $\mathbf{1}^\pm G_{\nu_1, \nu_2}^{(d)} = G_{\nu_1 \pm 1, \nu_2}^{(d)}$,

$$\Delta = q^4 + m_1^4 + m_2^4 - 2q^2 m_1^2 - 2q^2 m_2^2 - 2m_1^2 m_2^2.$$

имеется аналогичное соотношение для $\mathbf{2}^+ G_{\nu_1 \nu_2}^{(d)}$.

Обобщённые рекуррентные соотношения:

$$2q^2 \nu_1 \mathbf{1}^+ G_{\nu_1 \nu_2}^{(d)} = \{ m_1^2 + m_2^2 - q^2 + \mathbf{1}^- - \mathbf{2}^- \} G_{\nu_1 \nu_2}^{(d-2)},$$

$$2q^2 (d - \nu_1 - \nu_2 - 1) G_{\nu_1 \nu_2}^{(d)} = \{ \Delta + (m_1^2 + m_2^2 - q^2) \mathbf{1}^- + u_{216} \mathbf{2}^- \} G_{\nu_1 \nu_2}^{(d-2)}.$$

Как с помощью IBP соотношений так и с помощью обобщённых рекуррентных соотношений можно редуцировать $G_{\nu_1 \nu_2}^{(d)}$ с целыми ν_1, ν_2 к 3 интегралам:

$$G_{1,1}^{(d)}, G_{0,1}^{(d)}, G_{1,0}^{(d)}$$

Однако, алгоритм построенный на обобщённых рекуррентных соотношениях намного эффективнее, чем IBP алгоритм, так как на промежуточных этапах вычислений в первом случае формулы намного короче!!!

В IBP методе уже с самого начала в знаменателе появляется Грамовский детерминант Δ , что приводит к громоздким выражениям.

Аналогичная ситуация имеет место и для многпетлевых интегралов.

Решение **размерных рекурсий** может быть записано в виде:

$$M_k(d, \{m_j\}, \{p_i p_k\}) = \sum_s \Phi_s(d, \{m_j\}, \{p_i p_k\}) w_s(d, \{m_j\}, \{p_i p_k\})$$

где Φ_s функции образующие фундаментальный набор решений размерных рекурсий, а w_s так называемые периодики - функции не изменяющие своих значений при изменении дискретных параметров рекурсии:

$$w_s(d + 2, \{m_j\}, \{p_i p_k\}) = w_s(d, \{m_j\}, \{p_i p_k\})$$

Они могут быть найдены, например, из сравнения решения с асимптотическим значением интеграла при $d \rightarrow \infty$.

Для однопетлевых интегралов пропагаторного типа с пропагаторами имеющими одинаковые массы размерные рекурсии и их явное решение было приведено в работе **О.Т.**, **Phys.Rev. D.54(1996) 6479**).

Фейнмановские интегралы подчиняются двум типам уравнений:

дифференциальным уравнениям по непрерывным параметрам (массам, скалярным произведениям) и **разностным уравнениям** по размерности пространства - времени и степеням пропагаторов. Это свойство имеет аналогию со многими специальными функциями в математике. Так например, для полиномов Гегенбауэра имеет место рекуррентное соотношение по дискретному параметру n :

$$nC_n^{(\lambda)}(x) = 2(n + \lambda - 1)x C_{n-1}^{(\lambda)}(x) - (n + 2\lambda - 2)C_{n-2}^{(\lambda)}(x)$$

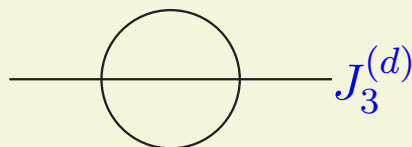
а также дифференциальное уравнение по другой переменной x

$$(x^2 - 1)\frac{d^2}{dx^2}C_n^{(\lambda)}(x) + (1 + 2\lambda)x\frac{d}{dx}C_n^{(\lambda)}(x) - n(n + 2\lambda)C_n^{(\lambda)}(x) = 0$$

Сложность решения данных уравнений одинакова. Математики не выделяют преимущества ни одного из этих уравнений.

Для Фейнмановских интегралов ситуация существенно другая !!!

Разностное и дифференциальное уравнения для "санрайз" интеграла



Такой интеграл появляется в вычислениях радиационных поправок в ядерной физике, КЭД, стандартной модели, ... В литературе его иногда называют "санрайз" интеграл. Степени пропагаторов могут принимать разные целые значения. Для данного типа d мерных интегралов введём следующее обозначение:

$$J_3^{(d)}(\nu_1, \nu_2, \nu_3) \equiv \iint \frac{d^d k_1 d^d k_2}{(i\pi^{d/2})^2} \frac{1}{(k_1^2 - m^2)^{\nu_1} ((k_1 - k_2)^2 - m^2)^{\nu_2} ((k_2 - q)^2 - m^2)^{\nu_3}}.$$

Для целых значений ν_j интегралы (14) могут быть выражены в терминах трёх базисных интегралов $J_3^{(d)}(1, 1, 1)$, $J_3^{(d)}(2, 1, 1)$ и $J_3^{(d)}(0, 1, 1) = (T_1^{(d)}(m^2))^2$ где

$$T_1^{(d)}(m^2) = \int \frac{d^d k}{[i\pi^{\frac{d}{2}}]} \frac{1}{k^2 - m^2} = -\Gamma\left(1 - \frac{d}{2}\right) m^{d-2}.$$

Соотношение связывающее $d - 2$ и d мерные интегралы $J_3^{(d)}$ имеет вид:

$$J_3^{(d-2)}(\nu_1, \nu_2, \nu_3) = \nu_1 \nu_2 J_3^{(d)}(\nu_1 + 1, \nu_2 + 1, \nu_3) + \nu_1 \nu_3 J_3^{(d)}(\nu_1 + 1, \nu_2, \nu_3 + 1) + \nu_2 \nu_3 J_3^{(d)}(\nu_1, \nu_2 + 1, \nu_3 + 1).$$

Полагая $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = 1$ и $\nu_1 = 2, \nu_2 = \nu_3 = 1$, получаем два уравнения. Используя рекуррентные соотношения упрощаем правые части уравнений. Сдвигая в данных уравнениях $d \rightarrow d + 2$ получаем ещё 2 уравнения. С их помощью исключаем $J_3^{(d)}(2, 1, 1)$ и получаем уравнение для интеграла $J_3^{(d)}(1, 1, 1) \equiv J_3^{(d)}$

$$\begin{aligned} & 12z^3(d+1)(d-1)(3d+4)(3d+2) J_3^{(d+4)} \\ & - 4m^4(1-3z)(1-42z+9z^2)z(d-1)d J_3^{(d+2)} \\ & - 4m^8(1-z)^2(1-9z)^2 J_3^{(d)} \\ & = 3z[(z+1)(27z^2+18z-1)d^2 - 4z(1+9z)d - 48z^2]m^{2d+2} \Gamma\left(-\frac{d}{2}\right)^2, \end{aligned}$$

$$\text{где} \quad z = \frac{m^2}{q^2}.$$

Интеграл $J_3^{(d)}$ подчиняется также дифференциальному уравнению второго порядка. Дифференцируя два раза $J_3^{(d)}$ по массе получаем:

$$\frac{d^2}{dm^2 dm^2} J_3^{(d)}(1, 1, 1) = 6J_3^{(d)}(2, 2, 1) + 6J_3^{(d)}(3, 1, 1).$$

С помощью рекуррентных соотношений правую часть в этом уравнении можно свести к комбинации трёх базисных функций. Используя соотношение

$$J_3^{(d)}(2, 1, 1) = \frac{1}{3} \frac{d}{dm^2} J_3^{(d)}(1, 1, 1)$$

мы получаем:

$$\begin{aligned} 2(1-z)(1-9z)z^2 \frac{d^2 J_3^{(d)}}{dz^2} - z[9z^2(d-4) + 10z(d-2) + 8 - 3d] \frac{dJ_3^{(d)}}{dz} \\ + (d-3)[z(d+4) + d-4] J_3^{(d)} = 12zm^{(2d-6)} \Gamma^2 \left(2 - \frac{d}{2} \right). \end{aligned}$$

Это дифференциальное уравнение было использовано для нахождения импульсной зависимости произвольных периодических констант, возникающих в решении разностного уравнения.

Решение размерной рекурсии

Полученное разностное уравнение является неоднородным разностным уравнением 2-го порядка с коэффициентами являющимися полиномами по d .

Полное решение данного уравнения представляется в виде:

$$J_3^{(d)} = J_{3p}^{(d)} + \tilde{w}_a(d) J_{3a}^{(d)} + \tilde{w}_b(d) J_{3b}^{(d)},$$

где $J_{3p}^{(d)}$ является частным решением уравнения, $J_{3a}^{(d)}, J_{3b}^{(d)}$ образуют фундаментальную систему решений соответствующего однородного уравнения, а $\tilde{w}_a(d), \tilde{w}_b(d)$ - периодические функции d подчиняющиеся уравнению:

$$\tilde{w}_a(d+2) = \tilde{w}_a(d), \quad \tilde{w}_b(d+2) = \tilde{w}_b(d).$$

Переопределив функцию $J_3^{(d)}$ следующим образом

$$J_3^{(d)} = \frac{\Gamma\left(\frac{d-2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3d}{2} - 3\right) \Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right)} \bar{J}_3^{(d)}.$$

в качестве соответствующего однородного уравнения мы получим уравнение с коэффициентами более низкого порядка по d в сравнении с однородным уравнением для изначальной функции.

Явное аналитическое выражение для $J_3^{(d)}$

Решение ассоциированного однородного уравнения в предположении $q^2 \gg m^2$ имеет вид

$$J_{3,h}^{(d)} = w_1(z) \frac{\Gamma\left(\frac{d}{2} - \frac{1}{3}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2} - \frac{2}{3}\right) \Gamma\left(\frac{d-2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{3d}{2} - 3\right) \Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right)} \rho^{\frac{d}{2}} e^{i\pi\frac{d}{2}} {}_2F_1\left[\begin{matrix} \frac{d}{2} - \frac{1}{3}, \frac{d}{2} - \frac{2}{3}; \\ \frac{d}{2}; \end{matrix} 1-x\right] \\ + w_2(z) \frac{\Gamma^2\left(\frac{d-2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3d}{2} - 3\right) \Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right)} \frac{\rho^{\frac{d}{2}}}{(1-x)^{\frac{d}{2}}} {}_2F_1\left[\begin{matrix} \frac{1}{3}, \frac{2}{3}; \\ 2 - \frac{d}{2}; \end{matrix} 1-x\right].$$

$$\text{где} \quad x = \frac{(1-9z)^2}{(1+3z)^3} = \frac{q^2(q^2-9m^2)^2}{(q^2+3m^2)^3},$$

Произвольные периодические функции $w_1(z)$ и $w_2(z)$ могут быть определены из сравнения асимптотического значения полученного решения при $d \rightarrow \infty$ с асимптотикой интеграла полученной, например, из интегрального представления. В данном случае мы воспользуемся другим методом, воспользовавшись дифференциальным уравнением.

Подставляя полученное решение разностного уравнения в дифференциальное уравнение, приравнивая нулю коэффициенты при двух независимых гипергеометрических функциях нулю получим 2 простых уравнения:

$$z(1-z)(1+3z)(1-9z)\frac{dw_1(z)}{dz} - 2(1+6z-39z^2)w_1(z) = 0,$$

$$z(1+3z)(1-9z)\frac{dw_2(z)}{dz} + 3(1-z)w_2(z) = 0.$$

Решения этих уравнений имеют простой вид:

$$w_1(z) = \frac{\kappa_1 z^2 (1+3z)^2}{(1-9z)^2 (1-z)^2}, \quad w_2(z) = \frac{\kappa_2 z^3}{(1+3z)(1-9z)^2}.$$

Константы интегрирования κ_1 , κ_2 мы фиксируем из сравнения асимптотического значения решения разностного уравнения с полученными выше $w_1(z)$, $w_2(z)$ с асимптотическим значением интеграла $J_3^{(d)}$ приведенным в работе (Broadhurst, Fleischer, Tarasov)

$$J_3^{(d)} = m^{2-4\epsilon} \Gamma^2(1+\epsilon) \left[\frac{\Gamma(-1+2\epsilon)\Gamma^3(1-\epsilon)}{z\Gamma^2(1+\epsilon)\Gamma(3-3\epsilon)} (-z)^{2\epsilon} + \frac{6\Gamma^2(-\epsilon)}{\Gamma(3-2\epsilon)} (-z)^\epsilon \right] + O(z).$$

Для нахождения частного решения неоднородного уравнения применим метод Лагранжа. Используя решение однородного уравнения метод Лагранжа даёт следующее частное решение

$$J_{3p}^{(d)} = \frac{3zm^{2d-6}}{(1+\sqrt{z})^2} \Gamma^2 \left(1 - \frac{d}{2} \right) F_2 \left(1, \frac{1}{2}, \frac{d-1}{2}, \frac{d}{2}, d-1; \sqrt{z}R, R \right),$$

где

$$R = \frac{4\sqrt{z}}{(1+\sqrt{z})^2},$$

and F_2 is the Appell function:

$$F_2(\alpha, \beta, \beta', \gamma, \gamma'; x, y) = \sum_{k,l=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_{k+l}(\beta)_k(\beta')_l}{(\gamma)_k(\gamma')_l} \frac{x^k y^l}{k! l!}, \quad |x| + |y| < 1.$$

Суммируя все вклады, полагая $d = 4 - 2\varepsilon$, применяя преобразование Эйлера к первой ${}_2F_1$ функции мы получаем

$$\begin{aligned}
 J_3^{(d)} = & \frac{6\Gamma^2(-\varepsilon)\Gamma^2(1+\varepsilon)(-z)^\varepsilon(1-z)^{2-2\varepsilon}}{m^{4\varepsilon-2}\Gamma(3-2\varepsilon)(1+3z)} {}_2F_1\left[\begin{matrix} \frac{1}{3}, \frac{2}{3}; \\ 2-\varepsilon; \end{matrix} \frac{27(1-z)^2z}{(1+3z)^3}\right] \\
 & + \frac{\Gamma(-1+2\varepsilon)\Gamma^3(1-\varepsilon)(-z)^{2\varepsilon}(1-9z)^{2-2\varepsilon}}{m^{4\varepsilon-2}\Gamma(3-3\varepsilon)z(1+3z)} {}_2F_1\left[\begin{matrix} \frac{1}{3}, \frac{2}{3}; \\ \varepsilon; \end{matrix} \frac{27(1-z)^2z}{(1+3z)^3}\right] \\
 & + \frac{3zm^{2-4\varepsilon}}{(1+\sqrt{z})^2}\Gamma^2(-1+\varepsilon)F_2\left(1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}-\varepsilon, 2-\varepsilon, 3-2\varepsilon; \sqrt{z}R, R\right).
 \end{aligned}$$

Размерные рекурсии сыграли решающую роль в получении данного результата!

Интегральное представление удобное для ε разложения ${}_2F_1$:

$${}_2F_1 \left[\begin{matrix} \frac{1}{3}, \frac{2}{3}; \\ 2 - \varepsilon; \end{matrix} \frac{27(1-z)^2 z}{(1+3z)^3} \right] = \frac{(1+3z)}{(1-z)} \frac{\Gamma(2-\varepsilon)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{3}{2}-\varepsilon\right)} \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{u}} [(1-u)(1-wu)(1-zu)]^{\frac{1}{2}-\varepsilon}$$

Интегральное представление для функции Аппеля F_2

$$F_2 \left(1, \frac{3}{2} - \varepsilon, \frac{1}{2}, 3 - 2\varepsilon, 2 - \varepsilon, R, \sqrt{z}R \right) = \frac{2\Gamma(3-2\varepsilon)}{\Gamma^2\left(\frac{3}{2}-\varepsilon\right)} (1+\sqrt{z})^2 \int_0^1 \frac{dt [t(1-t)]^{\frac{1}{2}-\varepsilon}}{(4zt+1-z+L)} {}_2F_1 \left[\begin{matrix} 1, \varepsilon; \\ 2 - \varepsilon; \end{matrix} \frac{4tz+1-z-L}{4tz+1-z+L} \right]$$

где

$$L = \sqrt{(4zt-1-z)^2 - 4z}.$$

Данное интегральное представление может быть использовано для ε разложения функции F_2 .

На разрезе $J_3^{(d)}$ имеет мнимую часть, вклад в которую происходит от двух гипергеометрических функций ${}_2F_1$:

$$\text{Im} J_3^{(d)} = \frac{-4z \pi^2 \sqrt{3\pi} m^{2-4\varepsilon}}{\Gamma\left(\frac{3}{2} - \varepsilon\right) \Gamma(2 - \varepsilon) (1 + 3z)} \left[\frac{(1 - 9z)^2}{108z^2} \right]^{1-\varepsilon} {}_2F_1 \left[\begin{matrix} \frac{1}{3}, \frac{2}{3}; \\ 2 - \varepsilon; \end{matrix} \frac{(1 - 9z)^2}{(1 + 3z)^3} \right].$$

При $d = 4$ полученное выражение совпадает с известным в литературе результатом.

Замечание :

Коэффициенты разложения результата для произвольного порядка по ε имеют однократное интегральное представление. Функции ${}_2F_1$ и F_2 хорошо изучены математиками.

В то же время, если бы мы получали коэффициенты ε разложения для J_3 решая итеративно дифференциальное уравнение, то на первом шаге мы получили бы эллиптический интеграл, а следующие итерации давали бы многократные интегралы от эллиптического интеграла. В отличие от повторяющихся интегралов сводящихся к полилогарифмам, данные

интегралы не изучены и не классифицированы математиками. Сведение таких многократных интегралов к однократному интегралу далеко не простая задача.

Следовательно, построение ε разложения итеративным решением дифференциального уравнения приводит к более сложному результату, чем ε разложение выражения полученного изначально для произвольного $d!!!$

Аналогичная ситуация имела место для двухпетлевых безмассовых интегралов с 3-мя внешними линиями.

Несколько замечаний о решении размерных рекурсий :

- впервые было получено аналитическое выражение для "санрайз" интеграла
- Дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет данный интеграл является уравнением Хеуна, имеющим четыре регулярные сингулярности, расположенные в точках $q^2 = 0, m^2, 9m^2, \infty$. В общем случае редукция уравнения Хеуна к уравнению гипергеометрического типа является сложной математической проблемой.
- Ассоциированное однородное разностное уравнение для $J_3^{(d)}$ имеет простой вид, и легко сводится к уравнению гипергеометрического типа с линейными коэффициентами.

- В действительности же это довольно общая ситуация. Кинематические сингулярности Фейнмановских интегралов располагаются на сложных многообразиях. Эти сингулярности являются сингулярностями соответствующих дифференциальных уравнений. В тех случаях когда возникают уравнения первого порядка проблем с их решением не существует. Однако уже для уравнений 2-го порядка в общем случае, вследствие сложной структуры кинематических сингулярностей, на данном этапе нахождение решений является практически непреодолимой проблемой.
- Ситуация же с разностными уравнениями представляется существенно отличной. Сингулярности Фейнмановских интегралов по размерности пространства-времени d являются полюсами вида $1/(d - q)^r$, где q рациональные числа.

Данное свойство было использовано для очевидного переопределения интеграла, существенно упрощающего разностное уравнение.

Умножением на фактор являющийся отношением Γ функций, привело нас к разностному уравнению с линейными коэффициентами.

- Использование разностных уравнений по размерности пространства времени d дает нам новый эффективный метод для аналитического вычисления Фейнмановских интегралов.
- Размерные рекурсии могут быть использованы как для численного, так и аналитического вычисления мастерских интегралов.
- Стоит отметить, что в математике до настоящего времени не существует развитой техники аналитического решения линейных разностных уравнений гипергеометрического типа. По моему мнению математики пока не обращали внимания на важность данной проблемы, хотя разработать такую технику не сложно.
- Было бы весьма полезно классифицировать разностные уравнения такого типа по аналогии как это было сделано для дифференциальных уравнений в хорошо известной книге Камке.

Функциональные уравнения для Фейнмановских интегралов

Фейнмановские интегралы подчиняются рекуррентным соотношениям

$$\sum_j Q_j I_{j,n} = \sum_{k,r < n} R_{k,r} I_{k,r}$$

где Q_j, R_k полиномы по массам, скалярным произведениям импульсов d , степеней пропагаторов. $I_{k,r}$ - интегралы с r внешними линиями,

В рекуррентных соотношениях можно выделить интегралы более сложные (больше внешних линий) и менее сложные.

Общий метод получения функциональных уравнений:

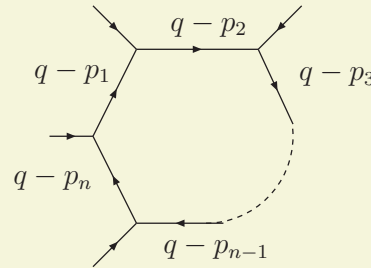
Выбором кинематических переменных, масс, индексов пропагаторов убрать наиболее сложные интегралы, т.е. выполнить условия:

$$Q_j = 0$$

так, чтобы остались ненулевыми коэффициенты при простых интегралах

$$R_k \neq 0$$

Пример: однопетлевые n -точечные интегралы



$$I_n^{(d)} = \int \frac{d^d q}{i\pi^{d/2}} \prod_{j=1}^n \frac{1}{c_j^{\nu_j}}, \quad c_j = (q - p_j)^2 - m_j^2 + i\epsilon.$$

p_j внешние линии протекающие через j -тый пропагатор с массой m_j .

Интегралы $I_n^{(d)}$ подчиняются обобщённым рекуррентным соотношениям

O.T. in Phys.Rev.D54 (1996) p.6479

$$G_{n-1} \nu_j \mathbf{j}^+ I_n^{(d+2)} - (\partial_j \Delta_n) I_n^{(d)} = \sum_{k=1}^n (\partial_j \partial_k \Delta_n) \mathbf{k}^- I_n^{(d)},$$

где $\mathbf{j}^\pm$ сдвигает индексы $\nu_j \rightarrow \nu_j \pm 1$,

$$\partial_j \equiv \frac{\partial}{\partial m_j^2},$$

$$G_{n-1} = -2^n \begin{vmatrix} p_1 p_1 & p_1 p_2 & \dots & p_1 p_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_1 p_{n-1} & p_2 p_{n-1} & \dots & p_{n-1} p_{n-1} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} Y_{11} & Y_{12} & \dots & Y_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_{1n} & Y_{2n} & \dots & Y_{nn} \end{vmatrix},$$

$$Y_{ij} = m_i^2 + m_j^2 - p_{ij}, \quad p_{ij} = (p_i - p_j)^2,$$

Для $n = 3$, $j = 1$ имеем уравнение:

$$\begin{aligned}
 & G_2 \mathbf{1}^+ I_3^{(d+2)}(m_1^2, m_2^2, m_3^2, p_{23}, p_{13}, p_{12}) \\
 & - (\partial_1 \Delta_3) I_3^{(d)}(m_1^2, m_2^2, m_3^2, p_{23}, p_{13}, p_{12}) \\
 & = 2(p_{12} + p_{23} - p_{13}) I_2^{(d)}(m_1^2, m_2^2, p_{12}) \\
 & + 2(p_{13} + p_{23} - p_{12}) I_2^{(d)}(m_1^2, m_3^2, p_{13}) - 4p_{23} I_2^{(d)}(m_2^2, m_3^2, p_{23}).
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 G_2 &= 2p_{12}^2 + 2p_{13}^2 + 2p_{23}^2 - 4p_{13}p_{23} - 4p_{12}p_{13} - 4p_{23}p_{12}, \\
 \Delta_3 &= 2(m_2^2 - m_3^2)[(m_1^2 - m_2^2)p_{13} - (m_1^2 - m_3^2)p_{12}] - 2m_1^2p_{23}^2 - 2m_3^2p_{12}^2 \\
 & - 2m_2^2p_{13}^2 - 2(m_1^2 - m_3^2)(m_1^2 - m_2^2)p_{23} + 2(m_2^2 + m_3^2)p_{12}p_{13} \\
 & + 2(m_3^2 + m_1^2)p_{23}p_{12} + 2(m_2^2 + m_1^2)p_{13}p_{23} - 2p_{12}p_{13}p_{23}
 \end{aligned}$$

Коэффициенты перед I_3 зависят от 6 переменных $p_{12}, p_{13}, p_{23}, m_1^2, m_2^2, m_3^2$. Чтобы исключить I_3 мы должны решить систему уравнений

$$\begin{aligned} G_2 &= 2p_{12}^2 + 2p_{13}^2 + 2p_{23}^2 - 4p_{13}p_{23} - 4p_{12}p_{13} - 4p_{23}p_{12} = 0, \\ \partial_1 \Delta_3 &= -2p_{23}^2 - 4m_1^2 p_{23} + 2m_2^2 p_{23} + 2m_3^2 p_{23} + 2p_{12}m_3^2 \\ &\quad + 2m_2^2 p_{13} - 2m_3^2 p_{13} + 2p_{13}p_{23} - 2m_2^2 p_{12} + 2p_{23}p_{12} = 0 \end{aligned}$$

Эту систему можно разрешить относительно p_{13}, p_{23} . Имеется нетривиальное решение

$$\begin{aligned} p_{13} &= s_{13}(m_1^2, m_2^2, m_3^2, p_{12}) = \frac{\Delta_{12} + 2p_{12}(m_1^2 + m_3^2) - (p_{12} + m_1^2 - m_2^2)\lambda}{2p_{12}}, \\ p_{23} &= s_{23}(m_1^2, m_2^2, m_3^2, p_{12}) = \frac{\Delta_{12} + 2p_{12}(m_2^2 + m_3^2) + (p_{12} - m_1^2 + m_2^2)\lambda}{2p_{12}}. \end{aligned}$$

где

$$\lambda = \pm \sqrt{\Delta_{12} + 4p_{12}m_3^2}.$$

$$\Delta_{ij} = p_{ij}^2 + m_i^4 + m_j^4 - 2p_{ij}m_i^2 - 2p_{ij}m_j^2 - 2m_i^2m_j^2.$$

Это решение приводит к функциональному уравнению

$$I_2^{(d)}(m_1^2, m_2^2, p_{12}) = \frac{p_{12} + m_1^2 - m_2^2 - \lambda}{2p_{12}} I_2^{(d)}(m_1^2, m_3^2, s_{13}(m_1^2, m_2^2, m_3^2, p_{12})) \\ + \frac{p_{12} - m_1^2 + m_2^2 + \lambda}{2p_{12}} I_2^{(d)}(m_2^2, m_3^2, s_{23}(m_1^2, m_2^2, m_3^2, p_{12})).$$

Подставляя $m_3^2 = 0$ в функциональное уравнение имеем:

$$I_2^{(d)}(m_1^2, m_2^2, p_{12}) = \frac{p_{12} + m_1^2 - m_2^2 - \alpha_{12}}{2p_{12}} I_2^{(d)}(m_1^2, 0, s_{13}) + \frac{p_{12} - m_1^2 + m_2^2 + \alpha_{12}}{2p_{12}} I_2^{(d)}(0, m_2^2, s_{23})$$

где

$$s_{13} = \frac{\Delta_{12} + 2p_{12}m_1^2 - (p_{12} + m_1^2 - m_2^2)\alpha_{12}}{2p_{12}},$$

$$s_{23} = \frac{\Delta_{12} + 2p_{12}m_2^2 + (p_{12} - m_1^2 + m_2^2)\alpha_{12}}{2p_{12}},$$

$$\alpha_{12} = \pm\sqrt{\Delta_{12}}.$$

Интеграл с произвольными массами и импульсом может быть выражен в терминах интегралов с безмассовыми пропагаторами !!!

Аналитический результат для $I_2^{(d)}(0, m^2, p^2)$ известен

Bollini and Giambiagi (1972b), Boos and Davydychev (1990rg):

$$I_2^{(d)}(0, m^2, p^2) = I_2^{(d)}(0, m^2, 0) {}_2F_1 \left[\begin{matrix} 1, 2 - \frac{d}{2}; \\ \frac{d}{2}; \end{matrix} \frac{q^2}{m^2} \right].$$

где

$$I_2^{(d)}(0, m^2, 0) = -\Gamma \left(1 - \frac{d}{2} \right) m^{d-4}.$$

Подставляя это выражение для $I_2^{(d)}(0, m^2, p^2)$ в функциональное уравнение получаем полное соответствие с известным результатом для $I_2^{(d)}(m_1^2, m_2^2, p_{12})$

Полагая $m_2 = 0$ в предыдущем функциональном уравнении имеем:

$$I_2^{(d)}(m_1^2, 0, p_{12}) = \frac{m_1^2}{p_{12}} I_2^{(d)}\left(m_1^2, 0, \frac{m_1^2}{p_{12}}\right) + \frac{(p_{12} - m_1^2)}{p_{12}} I_2^{(d)}\left(0, 0, \frac{(p_{12} - m_1^2)^2}{p_{12}}\right).$$

где

$$I_2^{(d)}(0, 0, p^2) = \frac{\Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \Gamma^2\left(\frac{d}{2} - 1\right)}{\Gamma(d - 2)} (-p^2)^{\frac{d}{2} - 2}.$$

Интеграл $I_2^{(d)}$ в правой части имеет **обратный аргумент**. В действительности данное уравнение соответствует хорошо известной формуле для аналитического продолжения:

$$\begin{aligned} {}_2F_1\left[\begin{matrix} 1, 2 - \frac{d}{2}; \\ \frac{d}{2}; \end{matrix} z\right] &= \frac{1}{z} {}_2F_1\left[\begin{matrix} 1, 2 - \frac{d}{2}; \\ \frac{d}{2}; \end{matrix} \frac{1}{z}\right] \\ &+ \frac{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2} - 1\right)}{\Gamma(d - 2)} (-z)^{\frac{d}{2} - 2} \left(1 - \frac{1}{z}\right)^{d-3}. \end{aligned}$$

Рассмотрим исходное рекуррентное соотношение для $n = 4$ и $j = 1$

$$\begin{aligned} & G_3 \mathbf{1}^+ I_4^{(d+2)}(m_1^2, m_2^2, m_3^2, m_4^2, \{p_{ij}\}) \\ & - (\partial_1 \Delta_4) I_4^{(d)}(m_1^2, m_2^2, m_3^2, m_4^2, \{p_{ij}\}) = \\ & \quad (\partial_1^2 \Delta_3) I_3^{(d)}(m_2^2, m_3^2, m_4^2, p_{34}, p_{24}, p_{23}) \\ & \quad + (\partial_1 \partial_2 \Delta_3) I_3^{(d)}(m_1^2, m_3^2, m_4^2, p_{34}, p_{14}, p_{13}) \\ & \quad + (\partial_1 \partial_3 \Delta_3) I_3^{(d)}(m_1^2, m_2^2, m_4^2, p_{24}, p_{14}, p_{12}) \\ & \quad + (\partial_1 \partial_4 \Delta_3) I_3^{(d)}(m_1^2, m_2^2, m_3^2, p_{23}, p_{13}, p_{12}), \end{aligned}$$

где

$$\{p_{ij}\} = \{p_{12}, p_{13}, p_{14}, p_{23}, p_{24}, p_{34}\}$$

Интегралы $I_4^{(d)}$ зависят от 10 переменных а интегралы $I_3^{(d)}$ только от 6 переменных.

Коэффициенты в уравнении являются полиномами по p_{ij} и массам:

$$\partial_1^2 \Delta_3 = 2[(p_{23} - p_{24})^2 - 2(p_{24} + p_{23})p_{34} + p_{34}^2],$$

$$\partial_1 \partial_2 \Delta_3 = 2[(p_{23} - p_{24})(p_{14} - p_{13}) + (p_{24} + p_{23} + p_{13} - 2p_{12})p_{34} - p_{34}^2 + p_{14}p_{34}],$$

$$\partial_1 \partial_3 \Delta_3 = 2[(p_{12} - p_{24} - 2p_{13})p_{24} + p_{23}(p_{24} - p_{12}) + (p_{23} + p_{24} - p_{34})p_{14} + (p_{24} + p_{12})p_{34}],$$

$$\partial_1 \partial_4 \Delta_3 = 2[p_{13}(p_{24} + p_{23}) + p_{23}(p_{12} + p_{24} - p_{23} - 2p_{14}) - p_{12}p_{24} + (p_{23} + p_{12} - p_{13})p_{34}].$$

Чтобы получить функциональное уравнение для $I_3(m_1^2, m_2^2, m_3^2 p_{23}, p_{13}, p_{12})$ мы должны решить систему уравнений

$$G_3 = 0, \quad \partial_1 \Delta_4 = 0.$$

Эта система может быть разрешена относительно p_{14}, p_{34} . Решения являются громоздкими выражениями поэтому рассмотрим частный случай $m_4^2 = 0$ и дополнительно наложим словие $\partial_1 \partial_2 \Delta_4$.

$$G_3 = 0, \quad \partial_1 \Delta_4 = 0, \quad \partial_1 \partial_2 \Delta_4 = 0,$$

Эту систему можно решить относительно p_{14}, p_{34}, p_{24}

$$\begin{aligned}
 p_{14} &= s_{14}^{(13)}, & p_{34} &= s_{34}^{(13)}, \\
 p_{24} &= s_{24}(m_1^2, m_3^2, p_{23}, p_{13}, p_{12}) \\
 &= \frac{1}{2}(p_{12} + p_{23} - m_1^2 - m_3^2) \\
 &\quad + \frac{(p_{12} - p_{23} - m_1^2 + m_3^2)(m_3^2 - m_1^2 + \alpha_{13})}{2p_{13}},
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 s_{14}^{(ij)} &= \frac{\Delta_{ij} + 2m_i^2 p_{ij} - (p_{ij} + m_i^2 - m_j^2)\alpha_{ij}}{2p_{ij}}, \\
 s_{34}^{(ij)} &= \frac{\Delta_{ij} + 2m_j^2 p_{ij} + (p_{ij} + m_j^2 - m_i^2)\alpha_{ij}}{2p_{ij}}, \\
 \alpha_{ij} &= \pm \sqrt{\Delta_{ij}},
 \end{aligned}$$

Подставляя это решение в изначальное уравнение получаем:

$$\begin{aligned}
 I_3^{(d)}(m_1^2, m_2^2, m_3^2, p_{23}, p_{13}, p_{12}) = & \\
 & \frac{p_{13} + m_3^2 - m_1^2 + \alpha_{13}}{2p_{13}} \\
 & \times I_3^{(d)}(m_2^2, m_3^2, 0, s_{34}^{(13)}, s_{24}(m_1^2, m_3^2, p_{23}, p_{13}, p_{12}), p_{23}) \\
 & + \frac{p_{13} - m_3^2 + m_1^2 - \alpha_{13}}{2p_{13}} \\
 & \times I_3^{(d)}(m_1^2, m_2^2, 0, s_{24}(m_1^2, m_3^2, p_{23}, p_{13}, p_{12}), s_{14}^{(13)}, p_{12})
 \end{aligned}$$

Как и в предыдущем случае для интеграла $I_2^{(d)}$ интеграл $I_3^{(d)}$ с произвольными аргументами может быть выражен через интегралы с одним безмассовым пропагатором !!!

Полагая в данном уравнении $m_2 = 0$ получаем:

$$\begin{aligned}
 I_3^{(d)}(m_1^2, 0, m_3^2, p_{23}, p_{13}, p_{12}) = & \\
 & \frac{p_{13} - m_1^2 + m_3^2 + \alpha_{13}}{2p_{13}} \\
 & \times I_3^{(d)}(0, m_3^2, 0, s_{34}^{(13)}, s_{24}(m_1^2, m_3^2, p_{23}, p_{13}, p_{12}), p_{23}) \\
 & + \frac{p_{13} + m_1^2 - m_3^2 - \alpha_{13}}{2p_{13}} \\
 & \times I_3^{(d)}(m_1^2, 0, 0, s_{24}(m_1^2, m_3^2, p_{23}, p_{13}, p_{12}), s_{14}^{(13)}, p_{12})
 \end{aligned}$$

Следовательно если $p_{ij} \neq 0$ то $I_3^{(d)}$ могут быть выражены через интегралы с **двумя** безмассовыми пропагаторами !!!

Более того, положив в изначальном уравнении $m_1 = m_3 = m_4 = 0$ и $p_{24} = 0$ получаем функциональное уравнение:

$$\begin{aligned}
 I_3^{(d)}(0, m_2^2, 0, p_{23}, p_{13}, p_{12}) = & \\
 + \frac{m_2^2 p_{13} - p_{12} m_2^2 + p_{12} p_{23} - (p_{12} + m_2^2) \beta}{\Lambda_2} I_3^{(d)}(0, m_2^2, 0, 0, \kappa_{14}, p_{12}) & \\
 + \frac{m_2^2 p_{23} - p_{23}^2 + (p_{23} + m_2^2) \beta}{\Lambda_2} I_3^{(d)}(0, m_2^2, 0, 0, \alpha, p_{23}) & \\
 + \frac{p_{13} p_{23} + (p_{12} - p_{23}) \beta}{\Lambda_2} I_3^{(d)}(0, 0, 0, \alpha, \kappa_{14}, p_{13}), &
 \end{aligned}$$

где $\Lambda_2, \kappa_{14}, \kappa_{34}, \beta$ полиномы по p_{pij} и радикалов от полиномов. Интегралы в правой части имеют не только нулевые массы в пропагаторах, но и нулевой квадрат внешнего импульса!!!

Как мы видим интегралы $I_3^{(d)}(m_1^2, m_2^2, m_3^2, p_{23}, p_{13}, p_{12})$ могут быть выражены в терминах интегралов с двумя нулевыми массами и одним квадратом импульса равным нулю.

Аналитическое выражение имеет вид:

$$\begin{aligned} I_3^{(d)}(0, m^2, 0, 0, p_{13}, p_{12}) = \\ = I_2^{(d)}(0, m^2, 0) {}_2F_1\left(1, 1, 2 - \frac{d}{2}, \frac{d}{2}; \frac{p_{12} - p_{13}}{m^2}, \frac{p_{12}}{m^2}\right) \\ + \frac{I_2^{(d)}(0, 0, p_{13})}{m^2} {}_2F_1\left(1, \frac{d-2}{2}, d-2\right) \end{aligned}$$

где F_1 функция Аппеля.

Для того чтобы получить аналитическое продолжение $I_3^{(d)}$ с произвольными аргументами мы должны знать аналитическое продолжение более простых интегралов. Для аналитического продолжения можно использовать функциональные уравнения. Если $p_{12} \geq m^2$, то можно использовать уравнение:

$$I_3^{(d)}(0, m^2, 0; 0, p_{13}, p_{12}) =$$

$$\frac{m^2}{p_{12}} I_3^{(d)} \left(0, m^2, 0; 0, \frac{m^2(p_{13} - p_{12} + m^2)}{p_{12}}, \frac{m^4}{p_{12}} \right)$$

$$+ \frac{(p_{12} - m^2)}{p_{12}} I_3^{(d)} \left(0, 0, 0; \frac{m^2(p_{13} - p_{12} + m^2)}{p_{12}}, \frac{(p_{12} - m^2)^2}{p_{12}}, p_{13} \right).$$

Если $p_{12} - p_{13} \geq m^2$ и $p_{12} \leq m^2$, можно использовать уравнение

$$\begin{aligned}
 I_3^{(d)}(0, m^2, 0; 0, \mathbf{p_{13}}, p_{12}) = & \\
 & \frac{p_{12}m^2}{m^2p_{13} + p_{12}p_{13} - p_{12}^2} I_3^{(d)} \left(0, m^2, 0; 0, \frac{p_{12}^2(\mathbf{p_{13}} - p_{12} + m^2)}{m^2\mathbf{p_{13}} + p_{12}\mathbf{p_{13}} - p_{12}^2}, p_{12} \right) \\
 & + \frac{p_{12}(p_{13} - p_{12})}{m^2p_{13} + p_{12}p_{13} - p_{12}^2} \\
 & \times I_3^{(d)} \left(0, 0, 0; \frac{m^2(p_{13} - p_{12})^2}{m^2p_{13} + p_{12}p_{13} - p_{12}^2}, \frac{p_{12}^2(p_{13} - p_{12} + m^2)}{m^2p_{13} + p_{12}p_{13} - p_{12}^2}, p_{13} \right) \\
 & + \frac{m^2(p_{13} - p_{12})}{m^2p_{13} + p_{12}p_{13} - p_{12}^2} I_3^{(d)} \left(0, m^2, 0; 0, \frac{m^2(p_{13} - p_{12})^2}{m^2p_{13} + p_{12}p_{13} - p_{12}^2}, 0 \right).
 \end{aligned}$$

Предпоследний аргумент в первом интеграле правой части конечен при $|p_{13}| \geq m^2$.

2-й и 3-й интегралы в правой части могут быть выражены в терминах ${}_2F_1$.

Заключение:

- Найден новый тип соотношений между Фейнмановскими интегралами
- Функциональные уравнения позволяют сводить сложные интегралы к более простым, с меньшим числом аргументов.
- Функциональные уравнения могут быть использованы для аналитического продолжения сложных интегралов.