

Ядерные реакции в звездной плазме

Лекция 2

Плазменное экранирование: пять режимов ядерных реакций в звёздной плазме

А.И. Чугунов (ФТИ им. А.Ф. Иоффе)

Ядерные реакции в звездной плазме

Лекция 1 . Термоядерные реакции в звёздной плазме

1. Нерезонансные реакции: гамовский пик, астрофизический фактор
2. Вклад резонансов в термоядерное горение
3. Экспериментальные данные об астрофизических факторах
4. Астрофизические факторы в модели проникновения под барьер и база данных астрофизических факторов

Лекция 2. Пять режимов ядерных реакций в звёздной плазме

1. Пять режимов ядерных реакций: термоядерное горение, термоядерное горение с сильным экранированием, термопикноядерное горение, пикноядерное горение с тепловым усилением, пикноядерное горение при нулевой температуре
2. Усиление ядерных реакций в модели среднего поля
3. Пикноядерное горение при нулевой температуре

Напоминание: модель проникновения под барьер

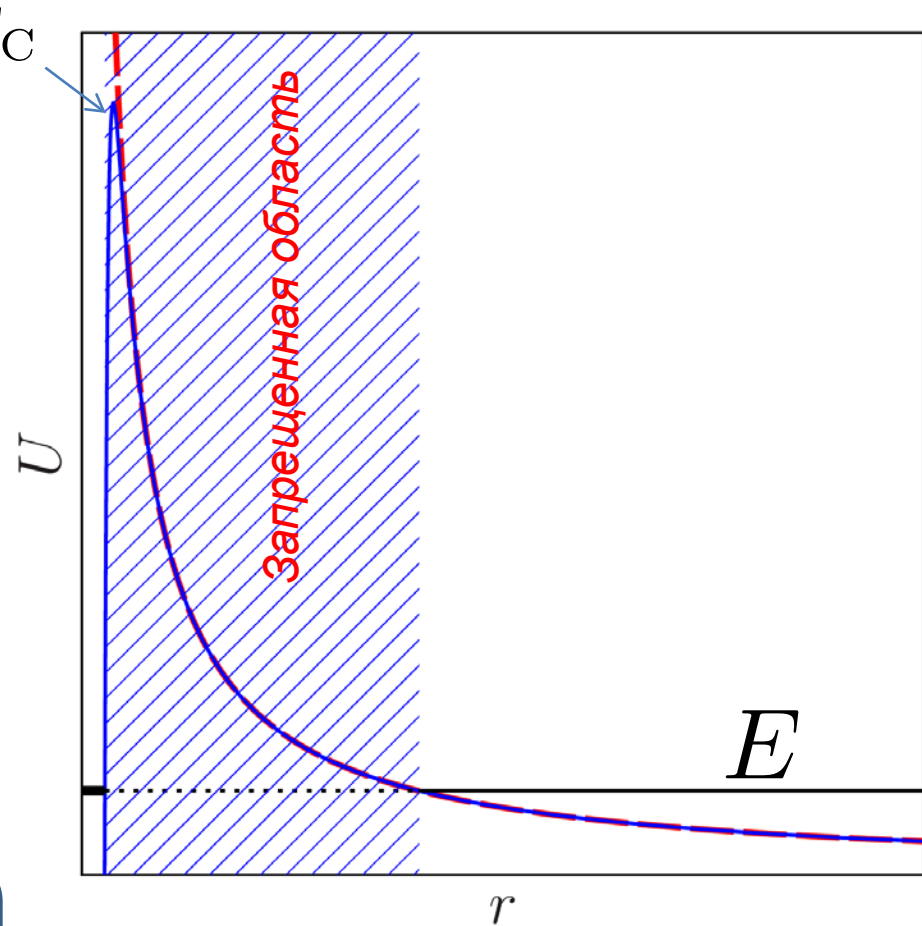
Проникновение под барьер E_C

Эффективный потенциал:

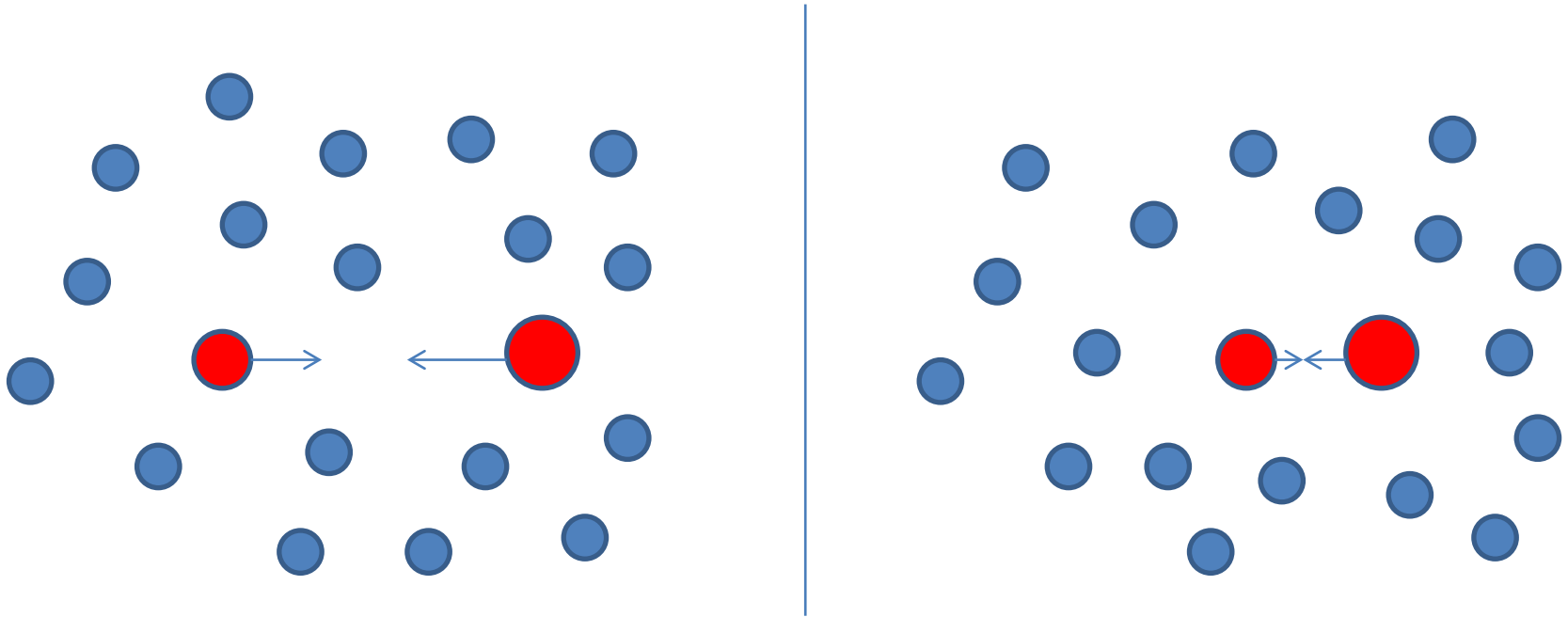
$$U_{\text{eff}} = U_C(r) + U_{\text{nuc}} + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu r^2}$$

$$\sigma(E) = \frac{\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{l_{\text{max}}} (2l+1) T_l$$

Скорость реакции определяется вероятностью попасть в область ядерного взаимодействия. Как влияет на неё плазма?

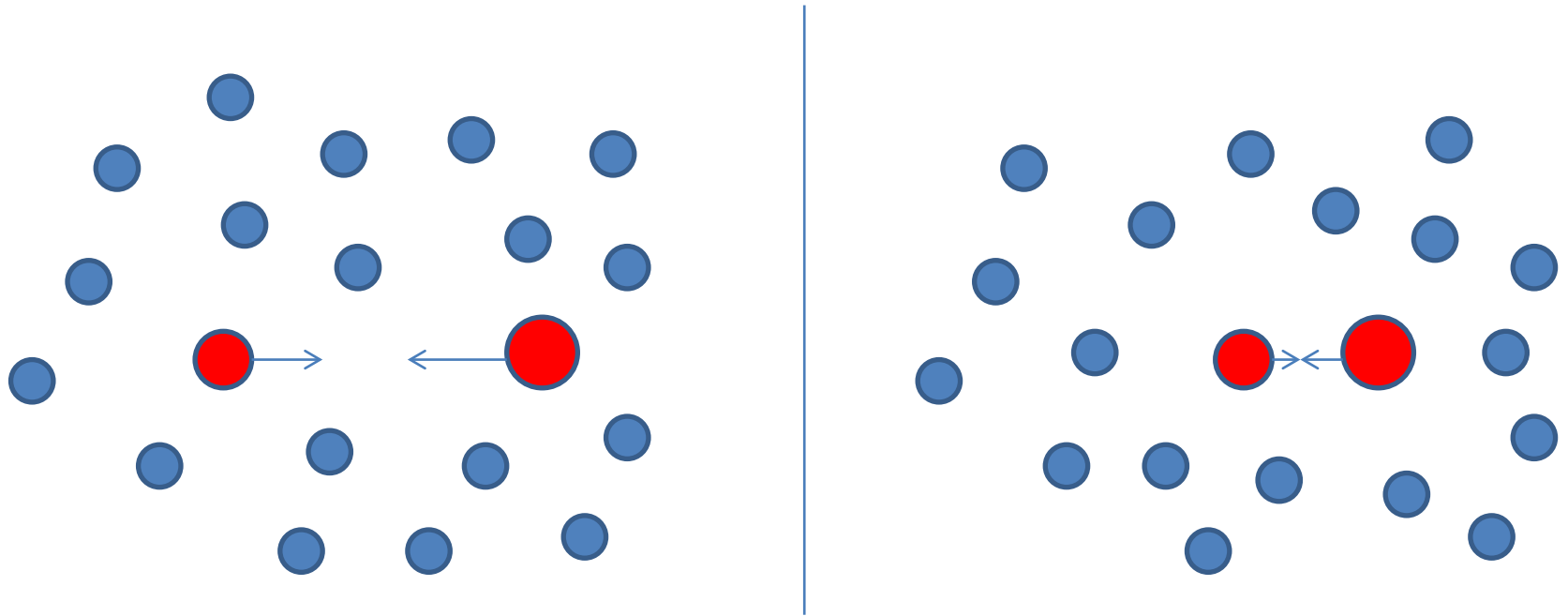


Реакции в плазме



Взаимодействие реагирующих частиц с окружающей плазмой делает задачу многочастичной. Конфигурация окружающих частиц (ионов и электронов) зависит от положения реагирующих частиц, что приводит к экранированию их кулоновского отталкивания. Это может приводить к ускорению скорости реакций на десятки порядков!

Реакции в плазме



Когда важны соседи?

Взаимодействие с соседями создает потенциал $U(r) \sim \frac{Z_i Z_j}{a}$

Этот потенциал существенно влияет на реагирующие ионы когда $U \gtrsim T$

Реакции в плазме

Проникновение под барьер

Эффективный потенциал:

$$U_{\text{eff}} = U_C(r) + U_{\text{nuc}} + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu r^2} + U_{\text{int}}(\mathbf{r}, \mathbf{R}, \mathbf{r}_3, \dots, \mathbf{r}_N)$$

↑
Описывает взаимодействие реагирующих частиц с плазмой. Зависит от состояния плазмы, делает задачу многочастичной меняя эффективный потенциал на расстояниях порядка расстояния между частицами.

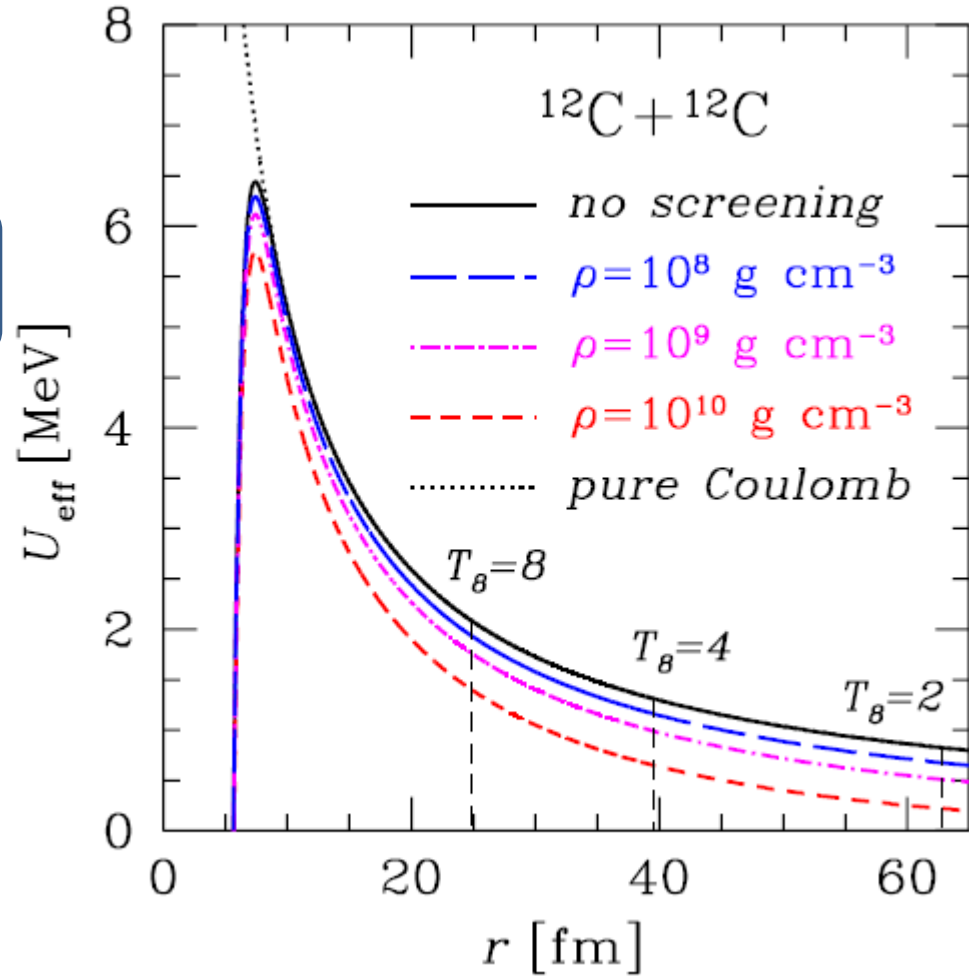
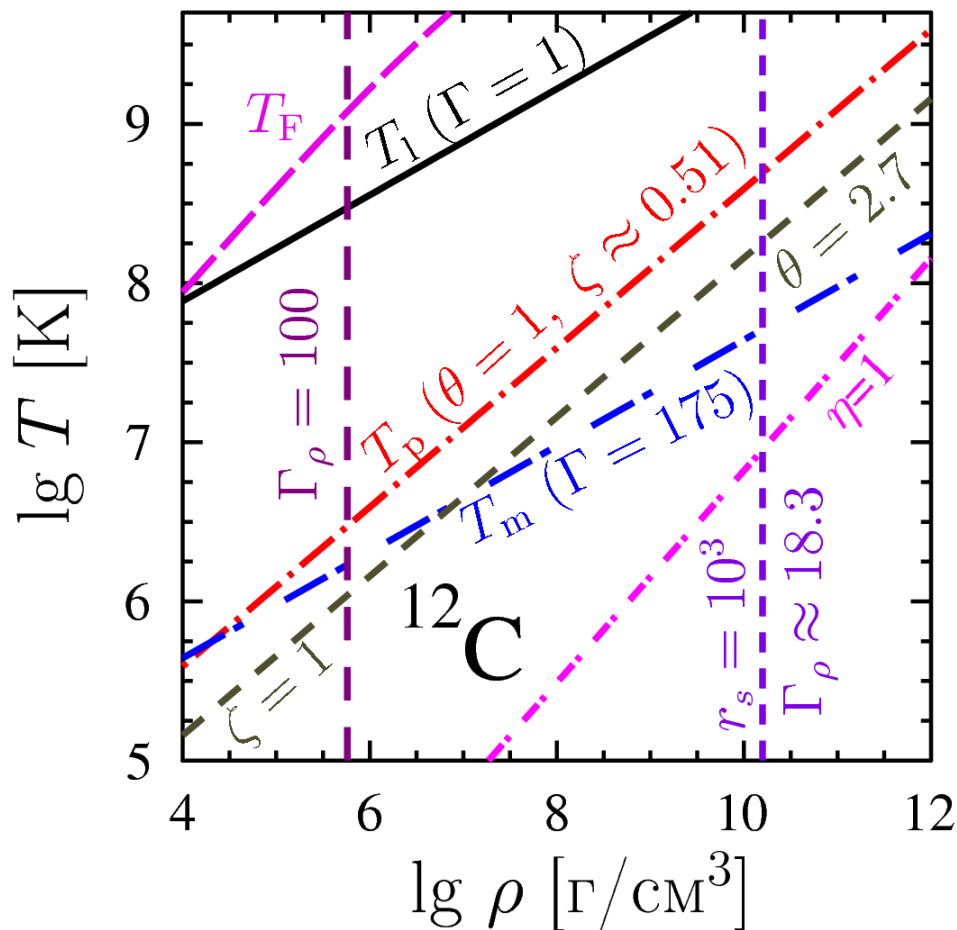


Рисунок из статьи

Kravchuk, Yakovlev, PRC **89** (2014), 015802

Параметры вещества

Вещество: ионы + электроны



$$\Gamma = \frac{Z^2 e^2}{a k_B T} \approx \frac{22.75 Z^2}{T_6} \left(\frac{\rho_6}{A} \right)^{1/3}$$

$$a = \left(\frac{3}{4\pi n_i} \right)^{1/3}$$

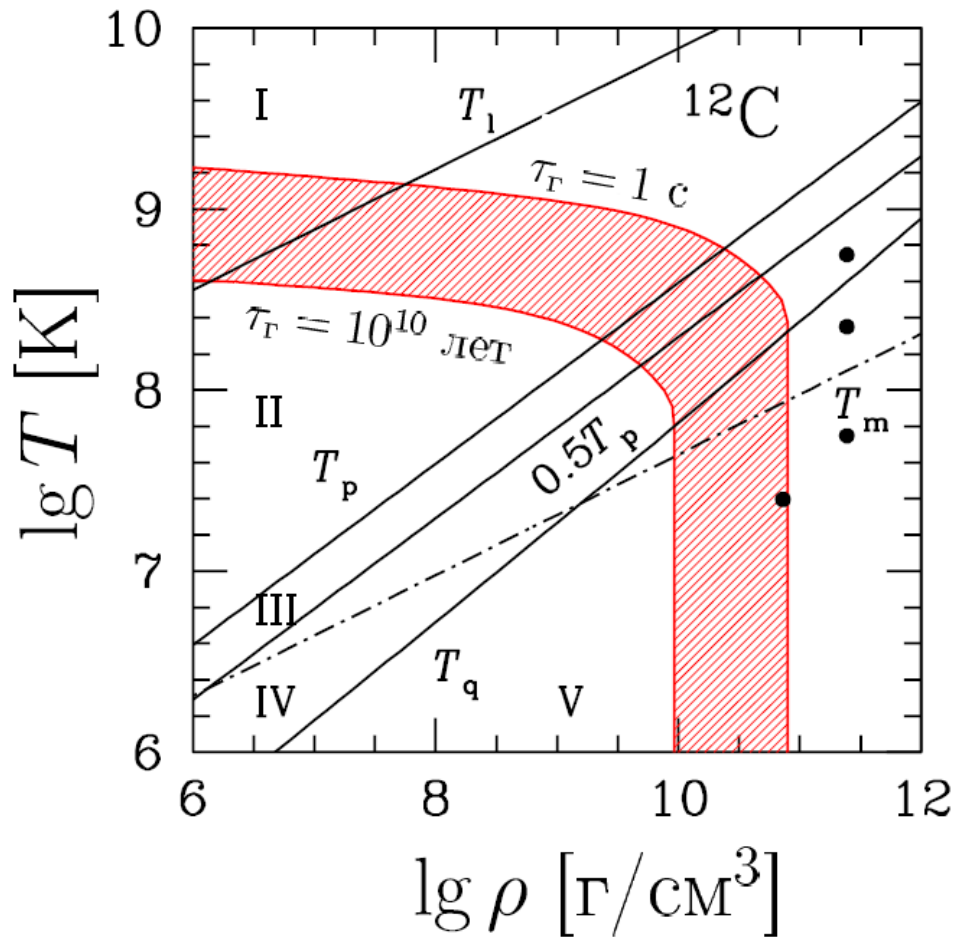
$$T_p = \frac{\hbar \omega_p}{k_B} \approx 7.832 \cdot 10^6 \left(\frac{Z}{A} \right) \rho_6^{1/2} \text{ K}$$

$$\omega_p = \sqrt{\frac{4\pi Z^2 e^2 n_i}{m_i}}$$

$$r_s = \frac{a}{a_B} \quad \eta = \frac{\Gamma}{r_s} \quad a_B = \frac{\hbar^2}{Z^2 e^2 m_i}$$

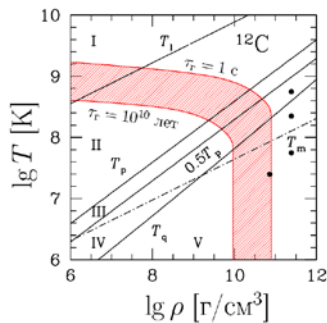
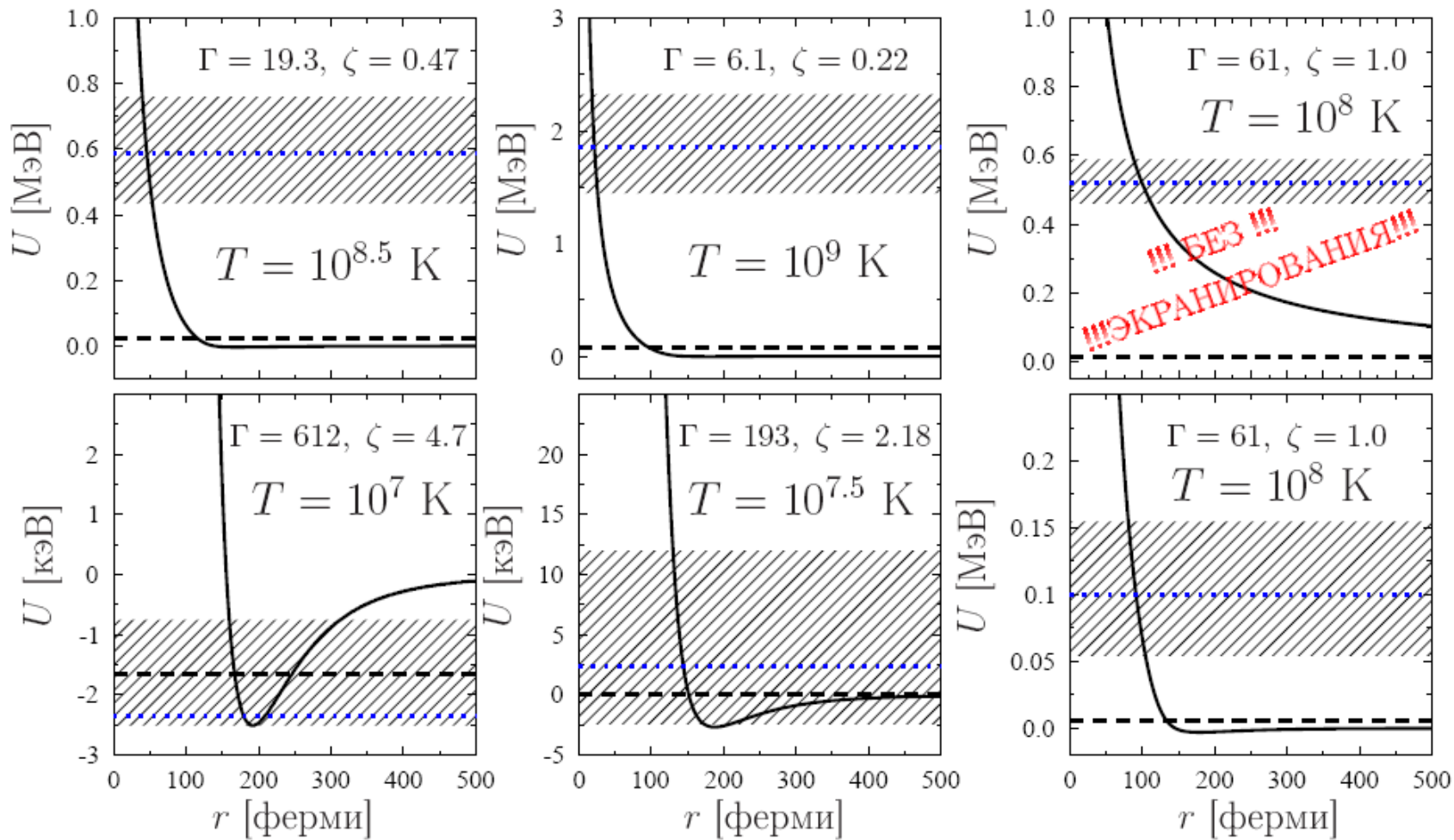
$$\zeta = a_{pk} / a$$

Режимы ядерного горения



№	Режимы	Область
I	Термоядерный со слабым экранированием	$T \gg T_l$
II	Термоядерный с сильным экранированием	$T_p \lesssim T \lesssim T_l$
III	Термопикноядерный	$0.5T_p \lesssim T \lesssim T_p$
IV	Пикноядерный с тепловым усилением	$T_q \lesssim T \lesssim 0.5T_p$
V	Пикноядерный	$T \lesssim T_q$

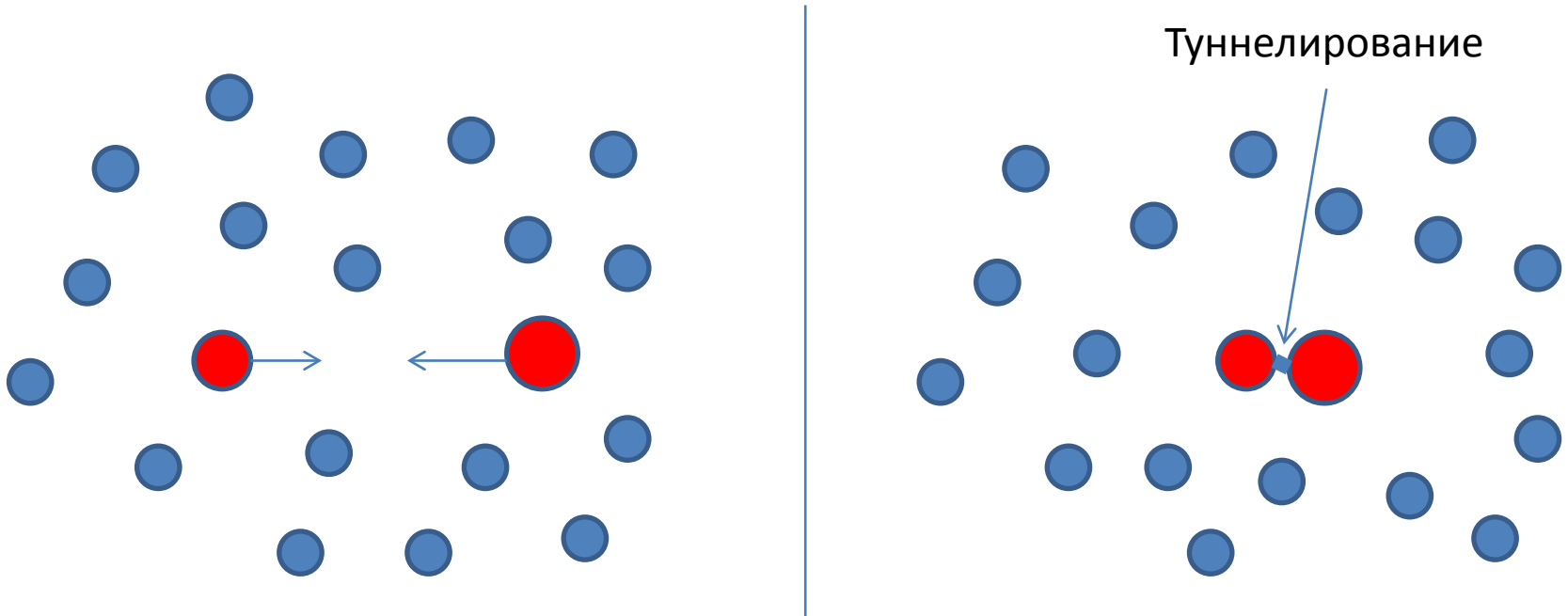
Режимы ядерного горения: состояние ионов гаммовского пика



$$\text{C}^{12}, \quad \rho = 5 \times 10^9 \text{ g cm}^{-3}$$

Термоядерное горение с экранированием

$$\frac{r_t}{a} = \zeta \ll 1$$



Туннелирование начинается, когда реагирующие ядра расположены очень близко друг к другу. Для окружающей плазмы они уже слились => на вероятность туннелирования она не влияет. Роль плазмы сводится к изменению числа близких столкновений

Термоядерное горение с экранированием

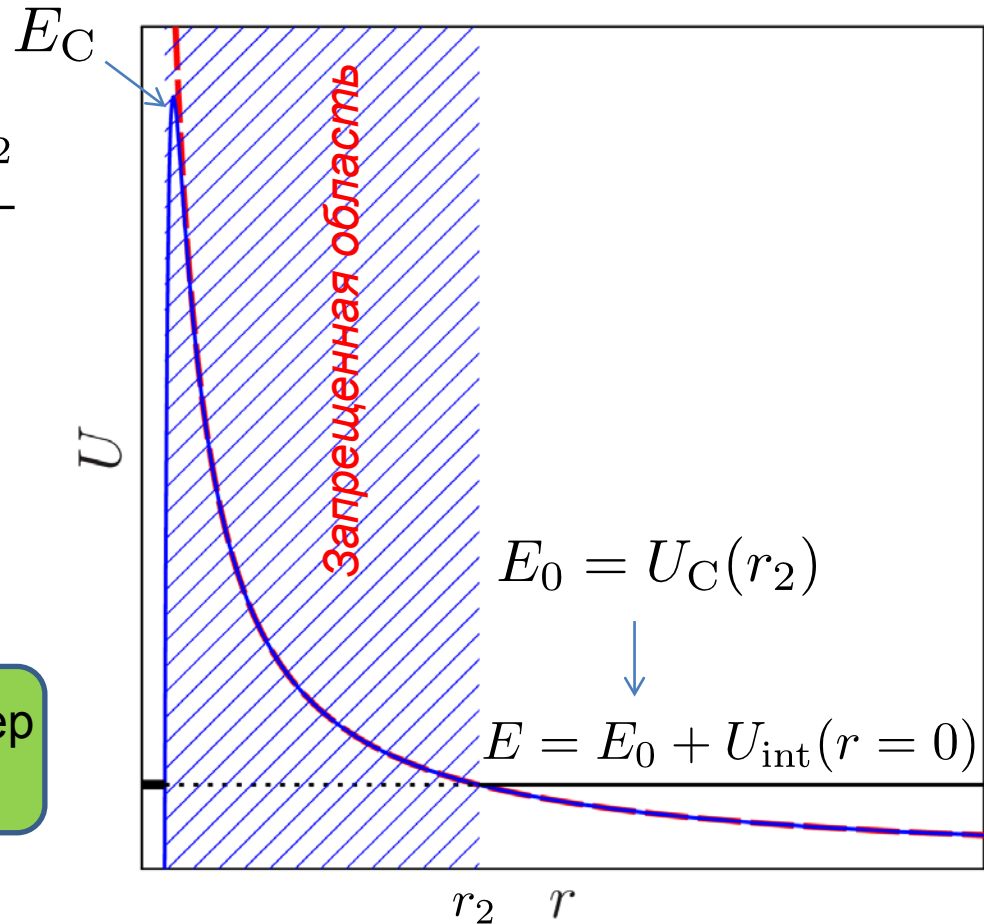
Проникновение под барьер

Эффективный потенциал:

$$U_{\text{eff}} = U_C(r) + U_{\text{nuc}} + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu r^2} + U_{\text{int}}(\mathbf{r} = 0, \mathbf{R}, \mathbf{r}_3, \dots, \mathbf{r}_N)$$

↑
Эффективно сдвигает шкалу энергий, меняя число близких столкновений

Вероятность прохождения через барьер не изменяется



Чем больше частиц дойдёт до точки остановки, тем больше частиц пройдёт барьер, тем выше будет скорость реакции

Термоядерное горение с экранированием

Классическая полная корреляционная функция

$$g(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \dots, \mathbf{r}_N) \propto \exp(-U/T)$$

$$U = U_{\text{pl}}(\mathbf{r}_3, \dots, \mathbf{r}_N) + U_{\text{scr}}(\mathbf{r}, \mathbf{R}, \mathbf{r}_3, \dots, \mathbf{r}_N) + U_{\text{int}}(\mathbf{r})$$

$$\mathbf{R} = (m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2) / (m_1 + m_2), \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 \ll a$$

Для реагирующих частиц

$$U \approx U_{\text{pl}}(\mathbf{r}_3, \dots, \mathbf{r}_N) + U_{\text{scr}}(0, \mathbf{R}, \mathbf{r}_3, \dots, \mathbf{r}_N) + U_{\text{int}}(\mathbf{r})$$

$$S_l = 2 \int_{r_1}^{r_2} \frac{\sqrt{2\mu[U - U(r_2)]}}{\hbar} dr = 2 \int_{r_1}^{r_2} \frac{\sqrt{2\mu[U_{\text{int}} - U_{\text{int}}(r_2)]}}{\hbar} dr$$

Взаимодействие с плазмой не влияет на вероятность туннелирования при заданной точке остановки

$$r_2 \ll a$$

Термоядерное горение с экранированием

Классическая полная корреляционная функция

$$g(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \dots, \mathbf{r}_N) \propto \exp(-U/T)$$

Классическая парная корреляционная функция

$$g(\mathbf{r}) = \int g(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \dots, \mathbf{r}_N) \frac{d\mathbf{R}}{V} \frac{dr_3}{V} \dots \frac{dr_N}{V}$$

Коэффициент усиления скорости реакции

(= коэффициент увеличения числа близких столкновений)

$$F_{\text{scr}} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{g(r)}{g_{\text{free}}(r)} = \frac{1}{\mathfrak{Z}_C} \int \exp(-(U_{\text{pl}} + U_{\text{scr}})/T) \frac{d\mathbf{R}}{V} \frac{dr_3}{V} \dots \frac{dr_N}{V}$$

$$\mathfrak{Z}_C = \int \exp(-U/T) \frac{dr}{V} \frac{d\mathbf{R}}{V} \frac{dr_3}{V} \dots \frac{dr_N}{V}$$

Немного термодинамики

Свободная энергия:

$$\mathfrak{F} = -T \ln \mathfrak{Z} \quad \mathfrak{Z} = \int \exp(-E/T) \prod_i \frac{d\mathbf{r}_i d\mathbf{p}_i}{(2\pi)^3}$$

Можно разделить идеальную и неидеальную (кулоновскую) свободную энергию

Рассмотрим две системы:

До реакции $\mathfrak{F}_C = \mathfrak{F}_C(N_1, N_2, \dots, N_c, \dots) = -T \ln \mathfrak{Z}_C$

$$\mathfrak{Z}_C = \int \exp(-U/T) \frac{d\mathbf{r}}{V} \frac{d\mathbf{R}}{V} \frac{d\mathbf{r}_3}{V} \dots \frac{d\mathbf{r}_N}{V}$$

После реакции

$$\mathfrak{F}'_C = \mathfrak{F}_C(N_1 - 1, N_2 - 1, \dots, N_c + 1, \dots) = -T \ln \mathfrak{Z}'_C$$

$$\mathfrak{Z}'_C = \int \exp(-[U_{\text{pl}} + U_{\text{scr}}(r = 0)]/T) \frac{d\mathbf{R}}{V} \frac{d\mathbf{r}_3}{V} \dots \frac{d\mathbf{r}_N}{V}$$

Термоядерное горение с экранированием

$$F_{\text{scr}} = \frac{1}{\mathfrak{Z}_C} \int \exp(-(U_{\text{pl}} + U_{\text{scr}}(r=0))/T) \frac{d\mathbf{R}}{V} \frac{d\mathbf{r}_3}{V} \cdots \frac{d\mathbf{r}_N}{V}$$

$$\mathfrak{Z}_C = \int \exp(-U/T) \frac{d\mathbf{r}}{V} \frac{d\mathbf{R}}{V} \frac{d\mathbf{r}_3}{V} \cdots \frac{d\mathbf{r}_N}{V}$$

$$\mathfrak{Z}'_C = \int \exp(-(U_{\text{pl}} + U_{\text{scr}}(r=0))/T) \frac{d\mathbf{R}}{V} \frac{d\mathbf{r}_3}{V} \cdots \frac{d\mathbf{r}_N}{V}$$

$$F_{\text{scr}} = \exp((\mathfrak{Z}_C - \mathfrak{Z}'_C)/T) = \exp((\mu_C^C - \mu_1^C - \mu_2^C)/T)$$

Чтобы вычислить коэффициенты усиления скоростей ядерных реакций
нужно знать термодинамику вещества

Элементы термодинамики почти идеальной (дебаевской) плазмы

$$\Gamma \ll 1$$

Состав: ионы + электроны (невырожденные)

$$\sum Z_i n_i = n_e$$

$$n_\alpha = n_{\alpha 0} \exp(-Z_\alpha e\phi/T) \approx n_{\alpha 0} (1 - Z_\alpha e\phi/T)$$

$$\nabla\phi = -4\pi e \sum Z_\alpha n_\alpha \approx \frac{4\pi e^2}{T} \sum Z_\alpha n_{\alpha 0} \phi$$

$$r_D = \sqrt{\frac{1}{4\pi} \frac{T}{\sum Z_\alpha^2 e^2 n_{\alpha 0}}}, \quad \phi = \frac{Ze}{r} \exp(r/r_D) \approx \frac{Ze}{r} - \frac{Ze}{r_D}$$

Условие применимости: $r_D \gg a$

Элементы термодинамики почти идеальной (дебаевской) плазмы

$$\Gamma \ll 1$$

Состав: ионы + электроны (невырожденные)

$$\sum Z_i n_i = n_e$$

Потенциал,
созданный плазмой

$$r_D = \sqrt{\frac{1}{4\pi} \frac{T}{\sum Z_\alpha^2 e^2 n_{\alpha 0}}}, \quad \phi = \frac{Ze}{r} \exp(r/r_D) \approx \frac{Ze}{r} - \frac{Ze}{r_D}$$

$$E_C = -\frac{1}{2} \sum_\alpha \frac{Z_\alpha^2 e^2 n_{\alpha 0}}{r_D} = \sqrt{\frac{\pi}{T}} \left(\sum Z_\alpha^2 e^2 n_{\alpha 0} \right)^{3/2}$$

$$\mathfrak{F}_C = -T \int \frac{E_C}{T^2} dT = -\frac{2}{3} \sqrt{\frac{\pi}{T}} \left(\sum Z_\alpha^2 e^2 n_{\alpha 0} \right)^{3/2}$$

$$\mu_\alpha = -\frac{1}{2} \frac{Z_\alpha^2 e^2}{r_D}$$

Элементы термодинамики почти идеальной (дебаевской) плазмы

$$\Gamma \ll 1$$

Состав: ионы + электроны (вырожденные)

$$\sum Z_i n_i = n_e$$

$$n_e \approx n_{\alpha 0} (1 + (\partial n_e / \partial \mu_e) e \phi)$$

$$k_{\text{TF}} = \left(4\pi e^2 \frac{\partial n_e}{\partial \mu_e} \right)^{1/2}, \quad r_{\text{D}}^{-2} = r_{\text{Di}}^{-2} + k_{\text{TF}}^2 \approx r_{\text{Di}}^{-2}$$

$$\text{ОСР : } r_{\text{D}} = \sqrt{\frac{1}{4\pi} \frac{T}{Z^2 e^2 n_i}} = a / \sqrt{3\Gamma}$$

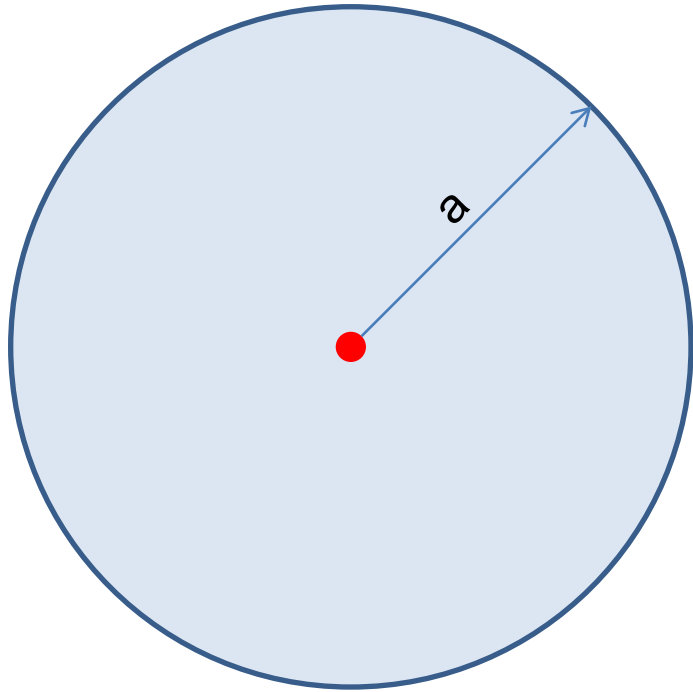
$$u(\Gamma) = \frac{E_{\text{C}}}{NT} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Gamma^{3/2}$$

$$f(\Gamma) = \frac{\mathfrak{F}_{\text{C}}}{NT} = \int \frac{u(\Gamma)}{\Gamma} d\Gamma = -\frac{1}{\sqrt{3}} \Gamma^{3/2}$$

Элементы термодинамики сильно неидеальной плазмы

$$\Gamma \gg 1$$

Модель ионных шаров



$$\begin{aligned} u &= \frac{U}{NT} = U_{ie} + U_{ee} \\ &= -\left(\frac{3}{2} - \frac{3}{5}\right) \frac{Z^2 e^2}{aT} = -\frac{9}{10} \Gamma \end{aligned}$$

$$P_{ii} = -\frac{n_i}{3} u = -\frac{3}{10} \frac{Z^2 e^2}{a} n_i$$

$$f = \frac{\mathfrak{F}}{NT} = \int_0^\Gamma \frac{u(\Gamma)}{\Gamma} d\Gamma = -\frac{9}{10} \Gamma$$

Правило линейного смешивания:

$$\mathfrak{F} = T \sum N_i f_i(\Gamma_i)$$

$$\Gamma_i = \Gamma_{ii} = \frac{Z_i^2 e^2}{a_i T} = Z_i^{5/3} \Gamma_e$$

$$\Gamma_e = \frac{e^2}{a_e T} \quad a_e = \left(\frac{3}{4\pi n_e}\right)^{1/3}$$

Элементы термодинамики слабо неидеальной плазмы

$$\Gamma \sim 1$$

$$\Gamma \ll 1$$

$$f(\Gamma) = -\frac{1}{\sqrt{3}}\Gamma^{3/2}$$

$$\mathfrak{F} \neq T \sum N_i f_i(\Gamma_i)$$

$$\Gamma \gg 1$$

$$f = -\frac{9}{10}\Gamma$$

Правило линейного смешивания:

$$\mathfrak{F} = T \sum N_i f_i(\Gamma_i)$$

Необходим точный расчет, например методом Монте-Карло

ОСР: Potekin, Chabrier, PRE **62** (2000), 8554

$$u_{ii} = \Gamma^{3/2} \left[\frac{A_1}{\sqrt{\Gamma + A_2}} + \frac{A_3}{\Gamma + 1} \right] + \frac{B_1 \Gamma^2}{\Gamma + B_2} + \frac{B_3 \Gamma^2}{\Gamma^2 + B_4}$$

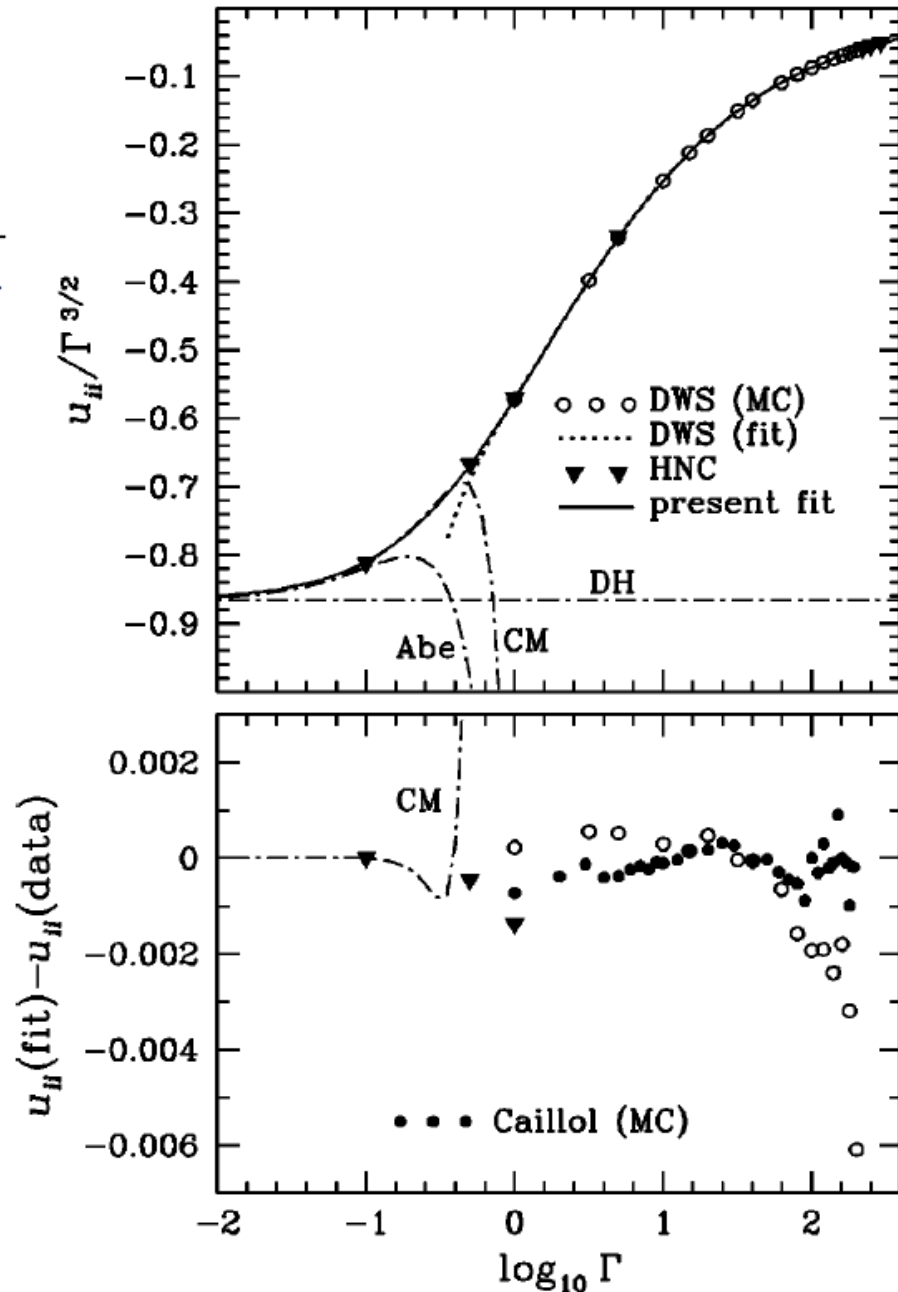
Смеси: Potekhin et al., PRE **80** (2009), 047401

Элементы термодинамики слабо неидеальной плазмы

ОСР: Potekin, Chabrier, PRE **62** (2000), 8554

$$u_{ii} = \Gamma^{3/2} \left[\frac{A_1}{\sqrt{\Gamma + A_2}} + \frac{A_3}{\Gamma + 1} \right] + \frac{B_1 \Gamma^2}{\Gamma + B_2} + \frac{B_3 \Gamma^2}{\Gamma^2 + B_4}$$

Смеси: Potekhin et al., PRE **80** (2009), 047401



Термоядерное горение со слабым экранированием

$$\frac{r_t}{a} = \zeta \ll 1$$

$$H(0) = \mathfrak{F}(N, N_c) - \mathfrak{F}(N - 2, N_c + 1) \frac{aH(r)}{Z^2 e^2}$$

$$F_{\text{scr}} = \frac{R}{R_G} = \exp\left(\frac{H(0)}{T}\right)$$

$$\Gamma \ll 1$$

Дебай-Хюккель

$$H(0) = \sqrt{3}\Gamma^{3/2}$$

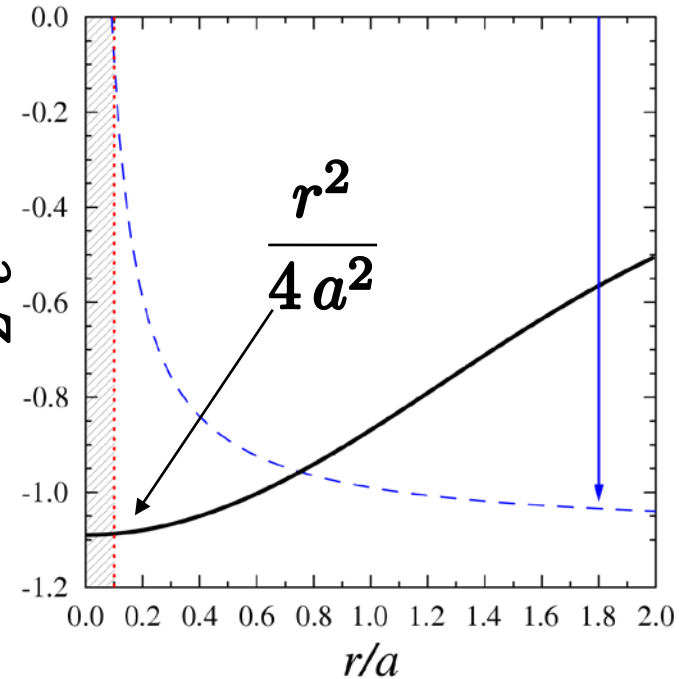
$$\Gamma \gg 1$$

Линейное смешивание

$$H(0) = 2f(\Gamma) - f(\Gamma_c) \quad \Gamma_c = 2^{5/3} \Gamma$$

$$F_{\text{scr}} = \exp\left(\frac{H(0)}{T} - \frac{5}{32}\Gamma\zeta^2\right)$$

Jancovici, J. Stat. Phys, **17** (1977),357



Термоядерное горение с экранированием

$$\frac{r_t}{a} = \zeta \ll 1, \quad \Gamma \sim 1$$

$$h_{jk}^0 = h_{jk}^{\text{lin}} \left[1 + C_{jk} (1 - C_{jk}) \left(\frac{h_{jk}^{\text{lin}}}{h_{jk}^{\text{DH}}} \right)^2 \right]^{-1}$$

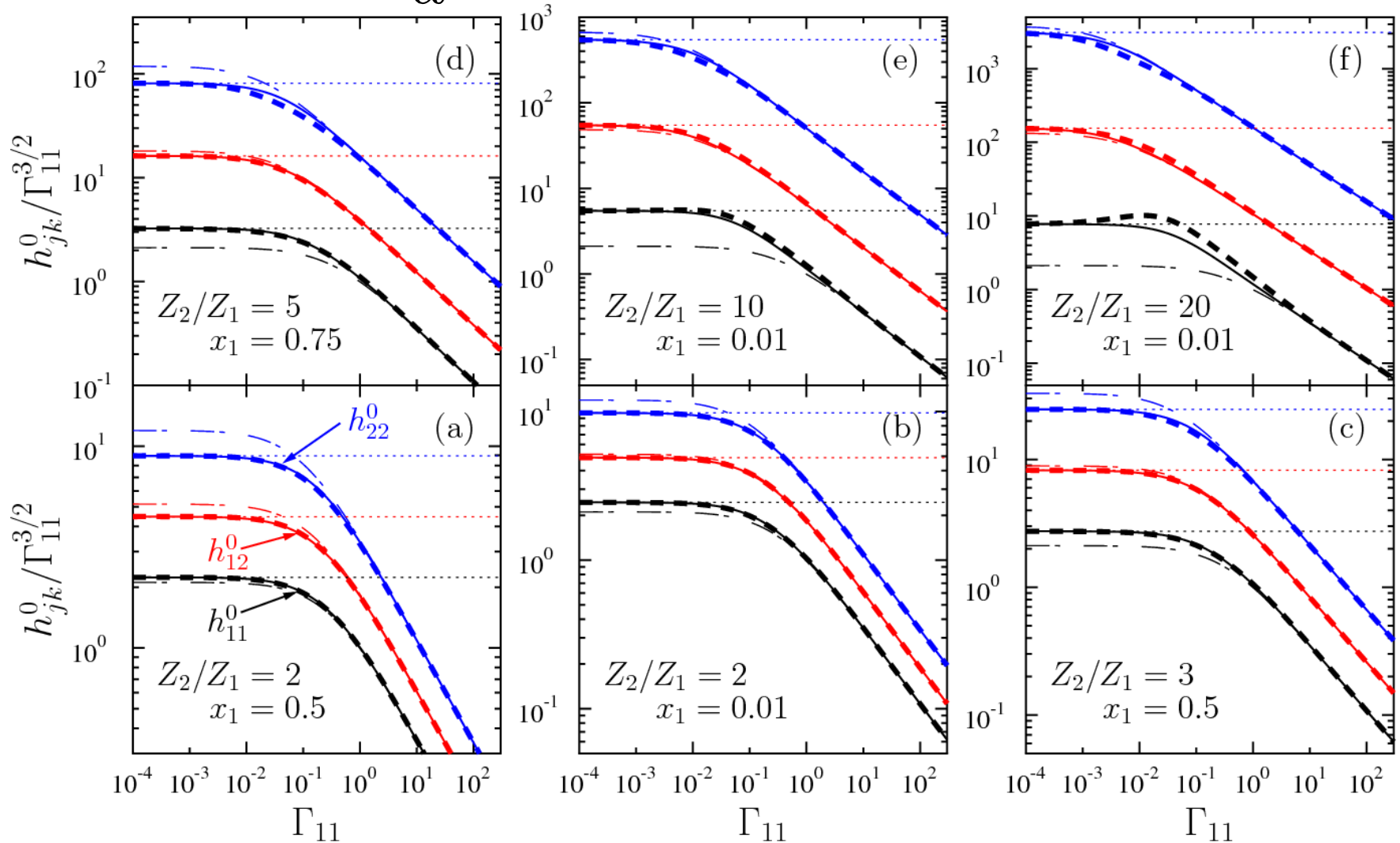
$$h_{jk}^{\text{lin}} = f_0(\Gamma_{jj}) + f_0(\Gamma_{kk}) - f_0(\Gamma_{jk}^{\text{comp}})$$

$$h_{jk}^{\text{DH}} = 3^{1/2} Z_j Z_k \frac{\langle Z^2 \rangle^{1/2}}{\langle Z \rangle^{1/2}} \Gamma_e^{3/2}$$

$$C_{jk} = 3 \frac{Z_j Z_k}{(Z_j + Z_k)^{5/2} - Z_j^{5/2} - Z_k^{5/2}} \frac{\langle Z^2 \rangle^{1/2}}{\langle Z \rangle^{1/2}}$$

Термоядерное горение с экранированием

$$\frac{r_t}{a} = \zeta \ll 1, \quad \Gamma \sim 1$$



Термопикное ядерное горение

$$\frac{r_t}{a} = \zeta \lesssim 1$$

Проникновение под барьер

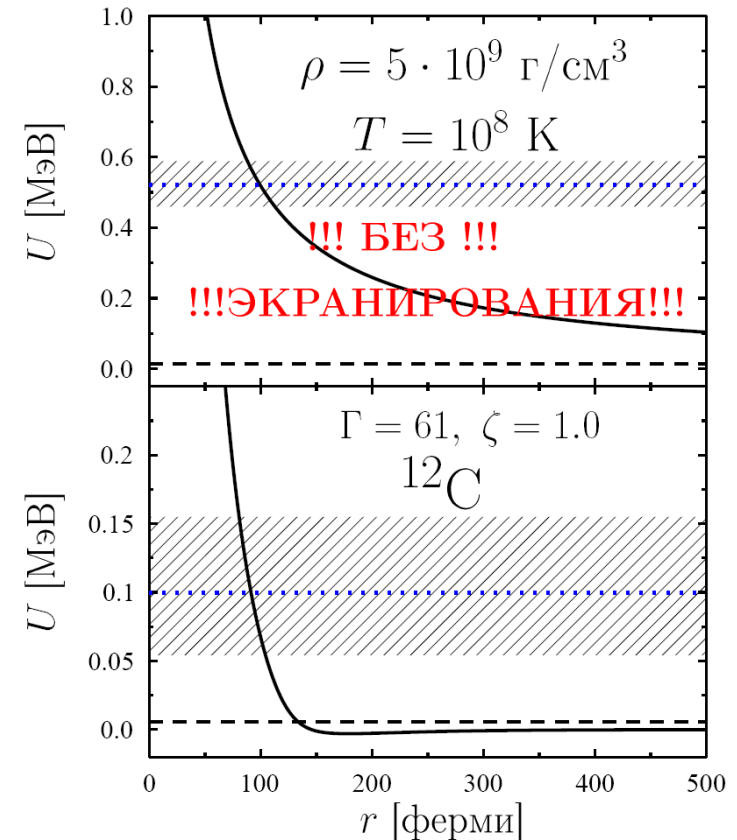
Эффективный потенциал:

$$U_{\text{eff}} = U_C(r) + U_{\text{nuc}} + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu r^2} + U_{\text{int}}(\mathbf{r}, \mathbf{R}, \mathbf{r}_3, \dots, \mathbf{r}_N)$$



Меняет форму потенциала в области туннелирования

Вероятность прохождения через барьер изменяется



Термопикное ядерное горение: модель электронной капли

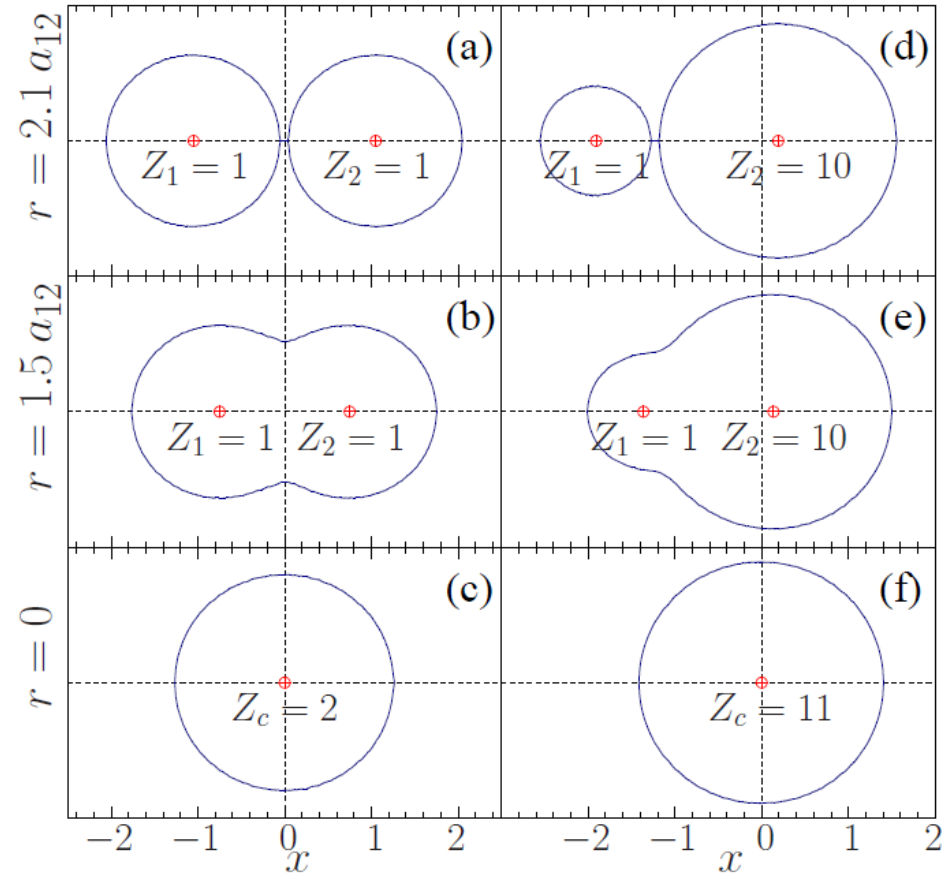
$$\frac{r_t}{a} = \zeta \lesssim 1$$

Обобщение модели ионных шаров

$$U_{\text{eff}} = U_C(r) + U_{\text{nuc}} + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu r^2} + U_{\text{int}}(\mathbf{r}, \mathbf{R}, \mathbf{r}_3, \dots, \mathbf{r}_N)$$



Вычисляется как кулоновская энергия равномерно заряженной «капли» электронов, полностью экранирующей заряд реагирующих ионов



Термопикное ядерное горение: приближение среднего поля

Потенциал среднего поля $H(r) = \frac{Z^2 e^2}{r} - U(r)$: $g_{\text{class}} = \exp \left\{ -\frac{1}{T} \left[\frac{Z^2 e^2}{r} - H(r) \right] \right\}$

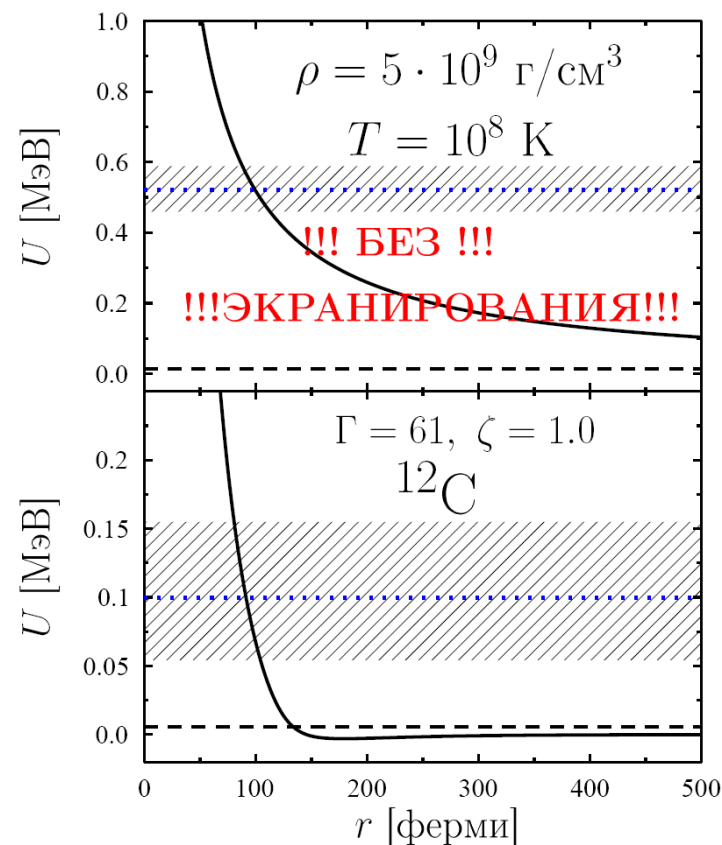
Расчет классическим методом Монте-Карло ➔ определяем

Приближение среднего поля

$$F = I\{H\} / I\{0\}$$

$$I\{H\} = \int_{E_{\min}}^{\infty} \exp \left(-\frac{E}{T} - P(E) \right) dE$$

$$P(E) = \frac{2\sqrt{2\mu}}{\hbar} \int_{r_n}^{r_t} \sqrt{\frac{Z^2 e^2}{r} - H(r) - E} dr$$

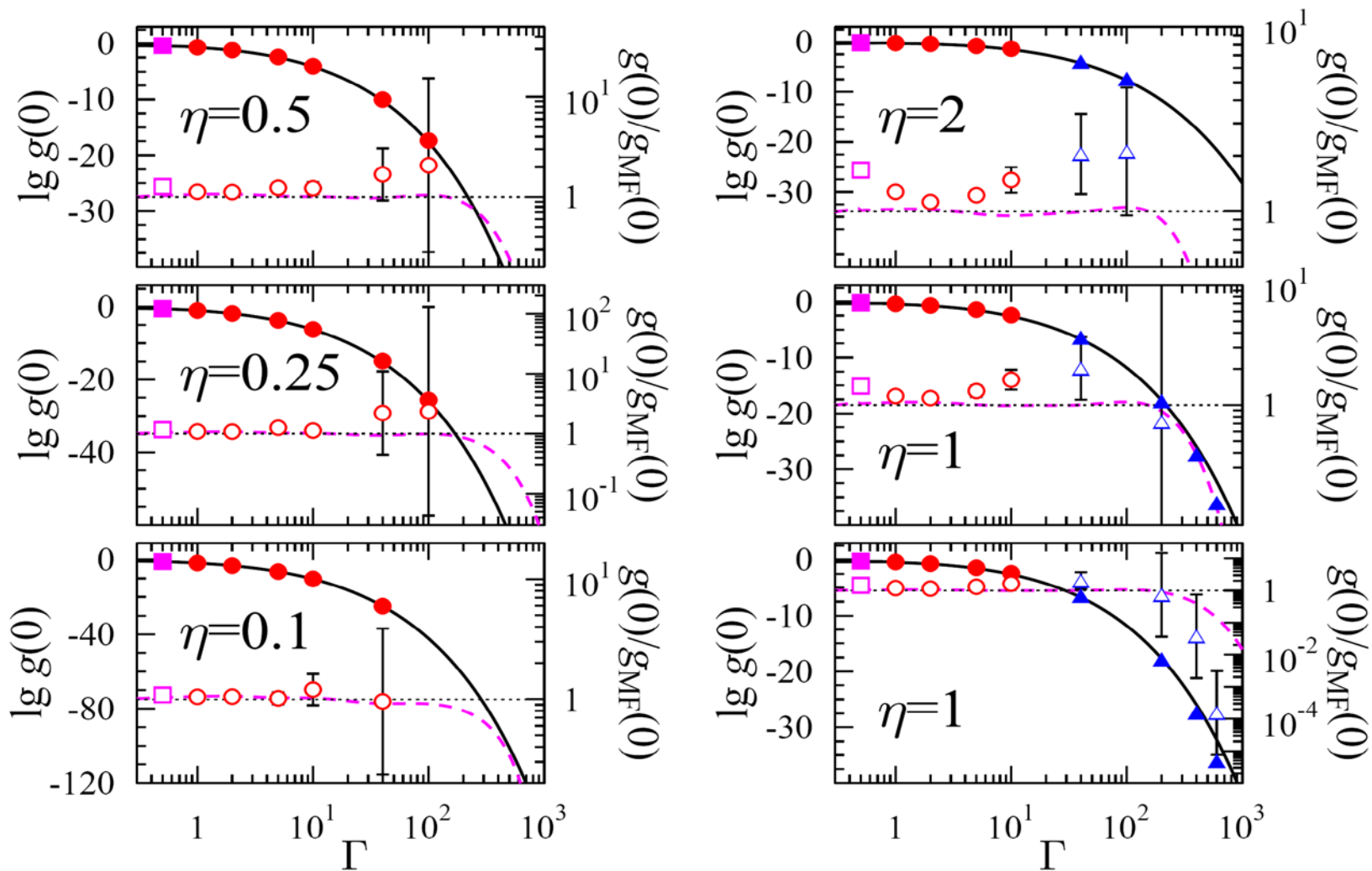


Формальное обоснование: Alastuey, Jancovici, ApJ **226** (1978), 103;

П. Кравчук, Ускорение термоядерных реакций сильным плазменным экранированием

Термопикноядерное горение: модель среднего поля vs МКИТ

B. Militzer, E.L. Pollock, Phys. Rev. **B71**, 134303 (2005)



$$R = \frac{n_i^2}{\pi} \frac{a_B}{\hbar} S(E_{pk}) g(0)$$

Термопикное ядерное горение в смесях: параметры вещества

$$a_e = \left(\frac{3}{4\pi n_e} \right)^{1/3}$$

$$\Gamma_e = \frac{e^2}{a_e T}$$

$$a_i = a_{ii} = Z_i^{1/3} a_e$$

$$\Gamma_i = \Gamma_{ii} = \frac{Z_i^2 e^2}{a_i T} = Z_i^{5/3} \Gamma_e$$

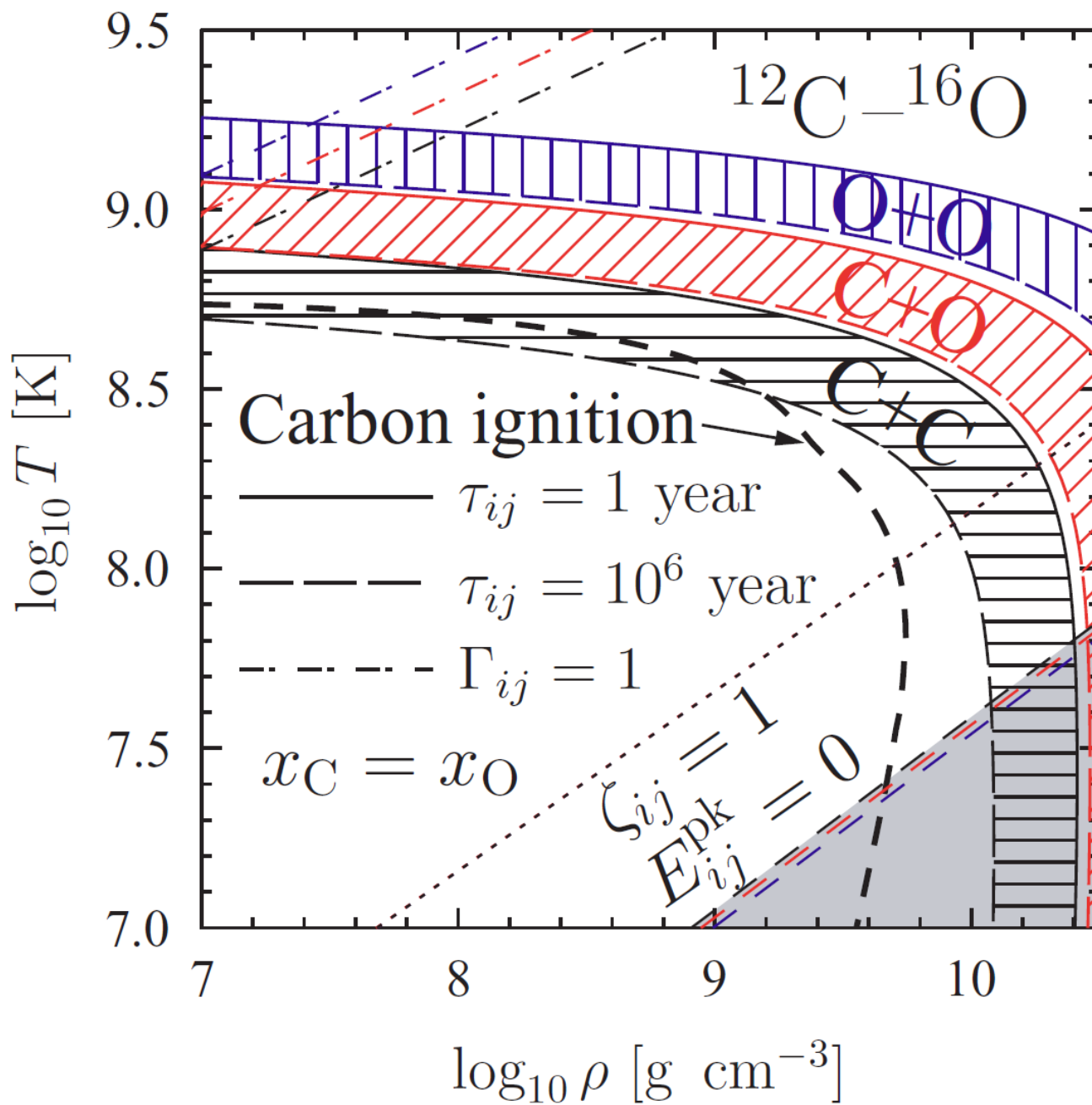
$$a_{ij} = \frac{1}{2} (a_i + a_j)$$

$$a_{\text{eff}} = \frac{a_c}{2^{1/3}} = a_e \left(\frac{Z_i + Z_j}{2} \right)^{1/3}$$

$$\Gamma_{ij} = \frac{Z_i Z_j e^2}{a_{ij} T}$$

$$\zeta_{ij} = \frac{r_{ij}^t}{a_{ij}} = a_{ij}^{-1} \left(\frac{2Z_i Z_j e^2 \hbar^2}{\pi^2 T^2 \mu_{ij}} \right)^{1/3}$$

Термопикное ядерное горение в смесях: параметры вещества



Термопикное ядерное горение в смесях: модель среднего поля

129 МК расчетов ($Z_1, Z_2, N_1, N_2, \Gamma_e$)

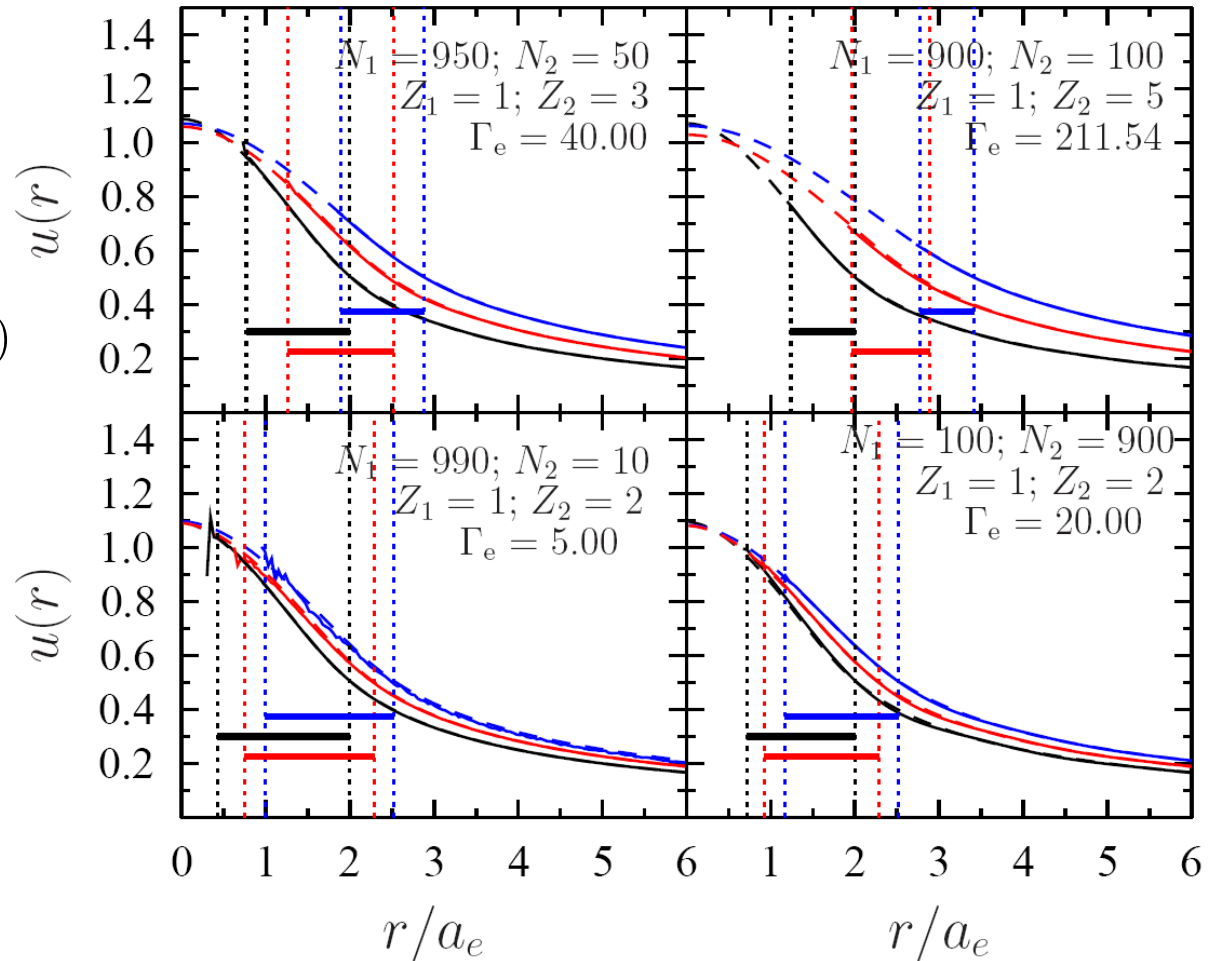
$$u_{ij}(r) = \frac{H_{ij}(r)a_{ij}}{Z_i Z_j e^2}$$

$$u_{ij}(0) = f(\Gamma_i) + f(\Gamma_j) - f(\Gamma_c)$$

$$u_{11} = u(\Gamma_1, r/a_1)$$

$$u_{22} = u(\Gamma_2, r/a_2)$$

$$u_{12} \neq u(\Gamma_{12}, r/a_{12})$$



Термопикноядерное горение в смесях: потенциал среднего поля

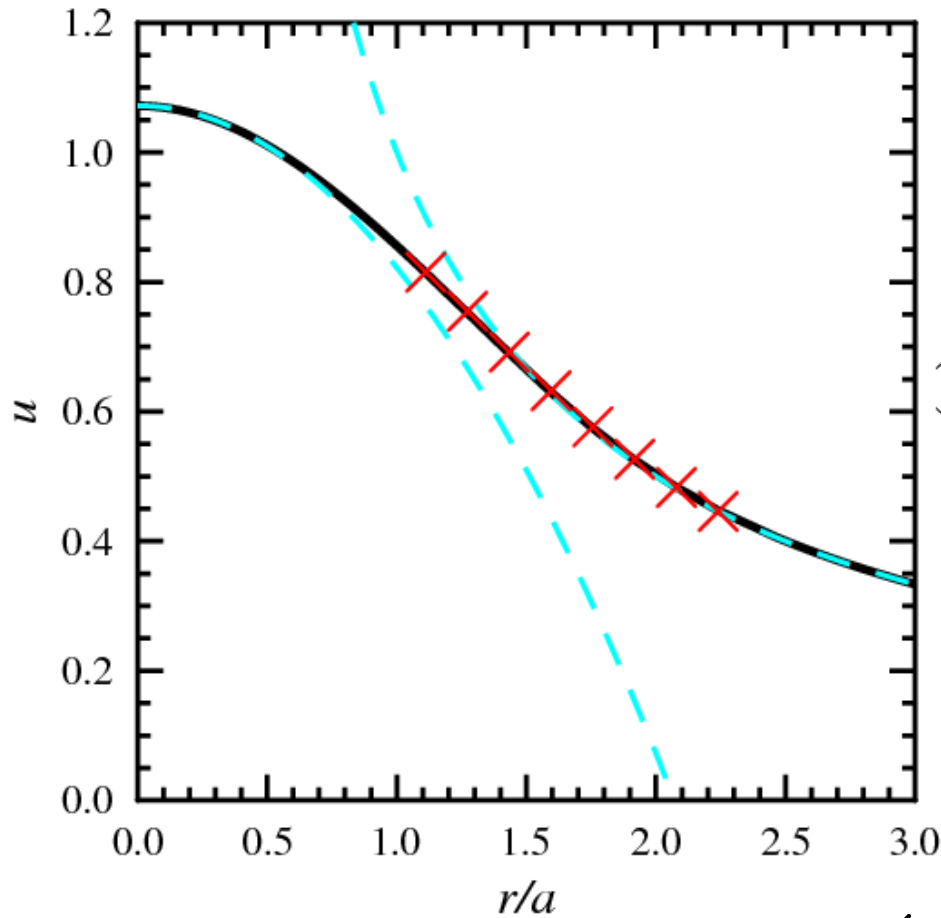
$$u_{ij}(x) = \left(\frac{A_0^2 + A_1 x^4 + A_2 x^8}{1 + A_3 x + A_4 x^2 + A_5 x^4 + A_6 x^6 + A_2 x^{10}} \right)^{1/2}$$

$$x = r/a_{ij},$$

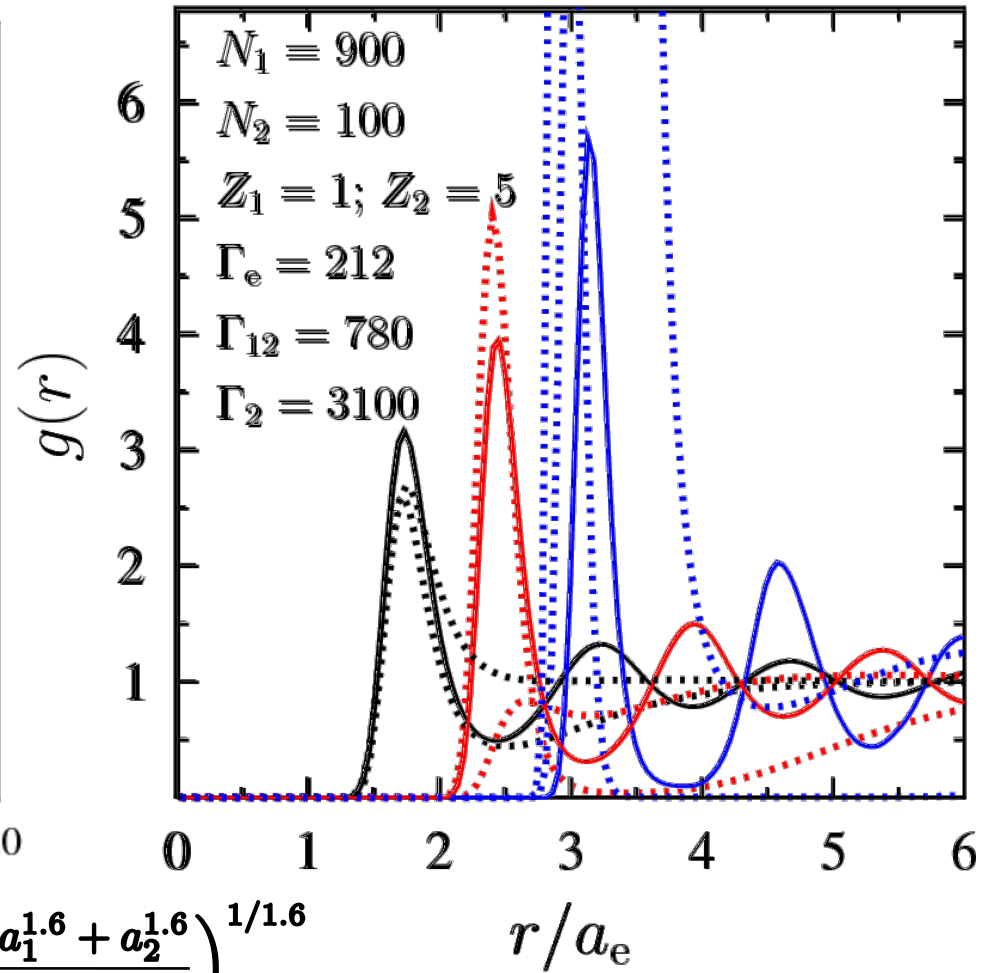
$$A_0 = u_{ij}(0), A_1 = 0.045, A_2 = 0.009, A_3 = 0.22\Gamma_{ij}^{-0.7},$$

$$A_4 = 2^{-1/3} (a_{ij}/a_{ij}^c)^2, A_5 = 0.124, A_6 = 0.038$$

Термопикноядерное горение в смесях: потенциал среднего поля

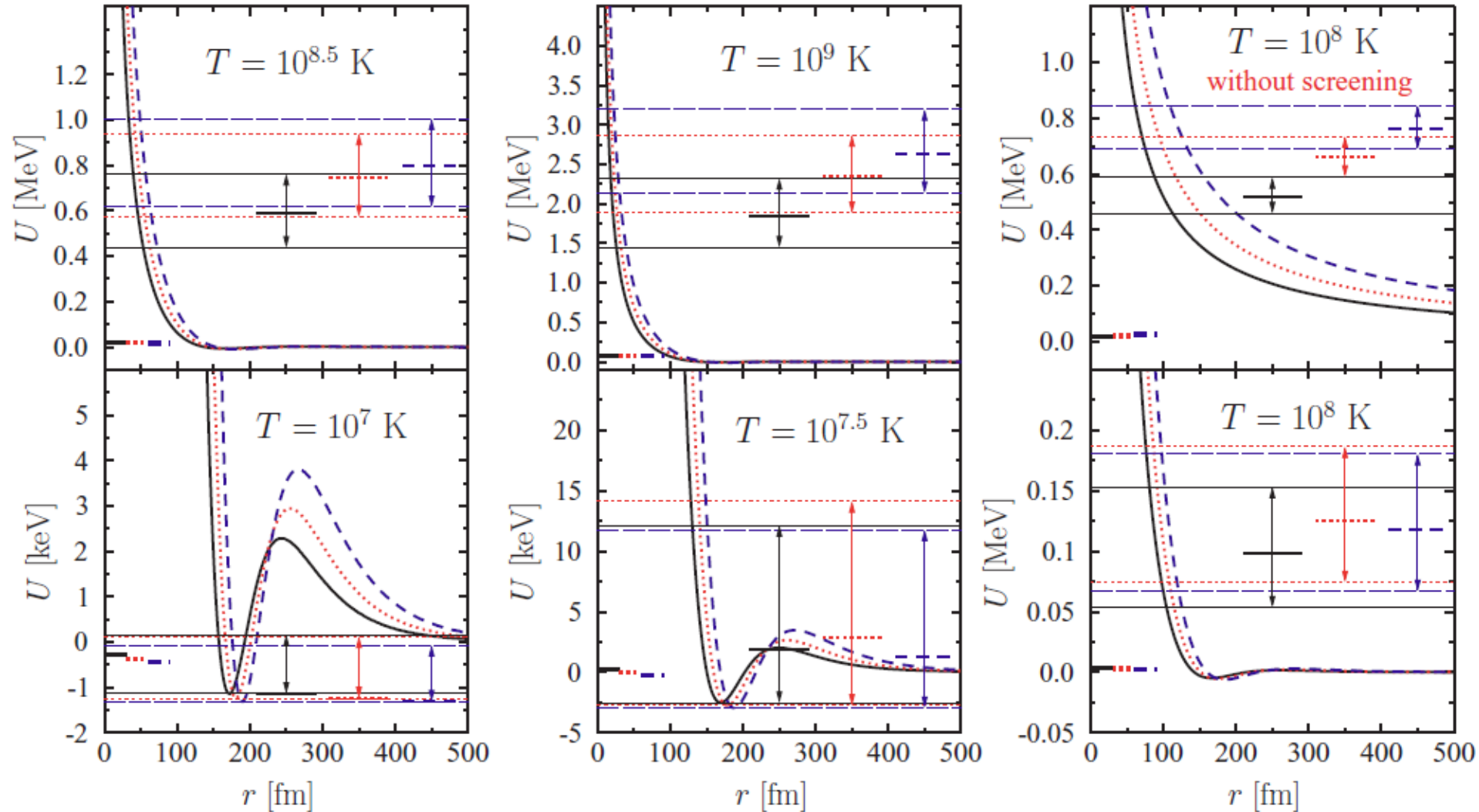


$$a_{12} \rightarrow \left(\frac{a_1^{1.6} + a_2^{1.6}}{2} \right)^{1/1.6}$$



Термопикное ядерное горение в смесях: гаммовский пик

$$\text{C}^{12} + \text{O}^{16}, \rho = 5 \cdot 10^9 \text{ g cm}^{-3}$$



$$F_{ij} = \exp(h_{ij})$$

$$h_{ij} = f_0(\tilde{\Gamma}_i) + f_0(\tilde{\Gamma}_j) - f_0(\tilde{\Gamma}_{ij}^c)$$

$$\tilde{\Gamma}_i = \Gamma_i/t, \quad \tilde{\Gamma}_j = \Gamma_j/t, \quad \tilde{\Gamma}_{ij}^c = \Gamma_{ij}^c/t$$

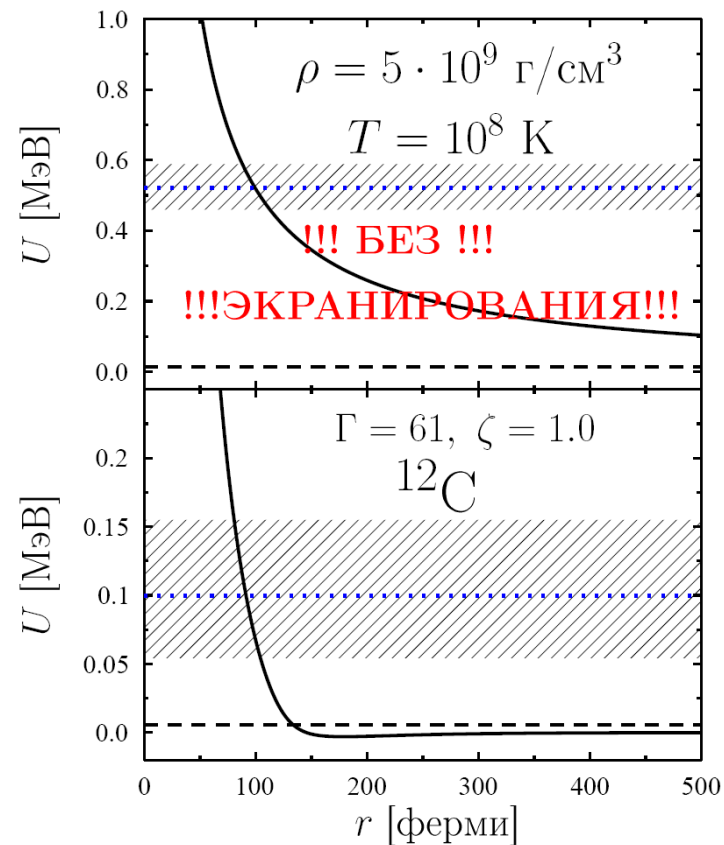
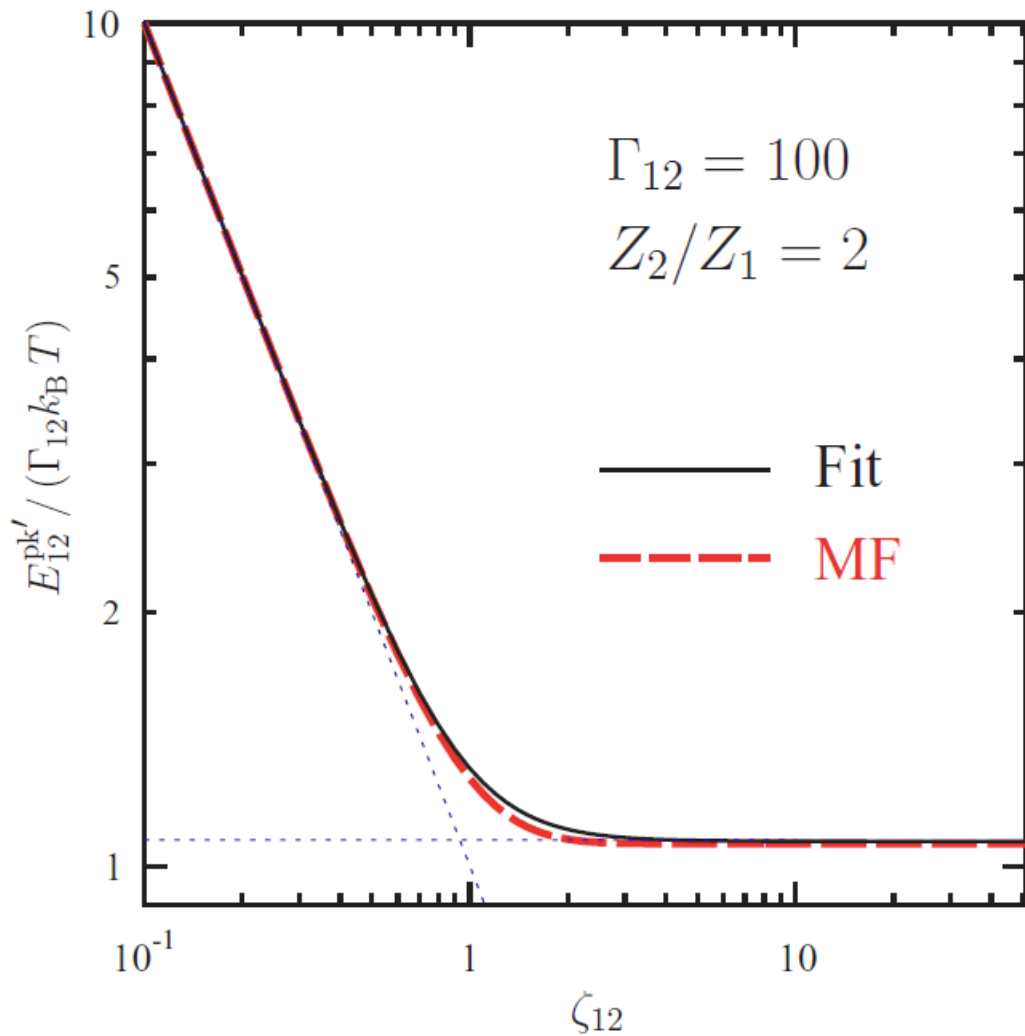
$$t = \left(1 + c_1 \zeta_{ij} + c_2 \zeta_{ij}^2 + c_3 \zeta_{ij}^3\right)^{1/3}$$

$$y = 4 \frac{Z_i Z_j}{(Z_i + Z_j)^2}, \quad c_1 = 0.014 y, \quad c_2 = 0.405 y^{0.11}, \quad c_3 = 0.0619 y^{0.11} + 1.9/\Gamma_{ij}$$

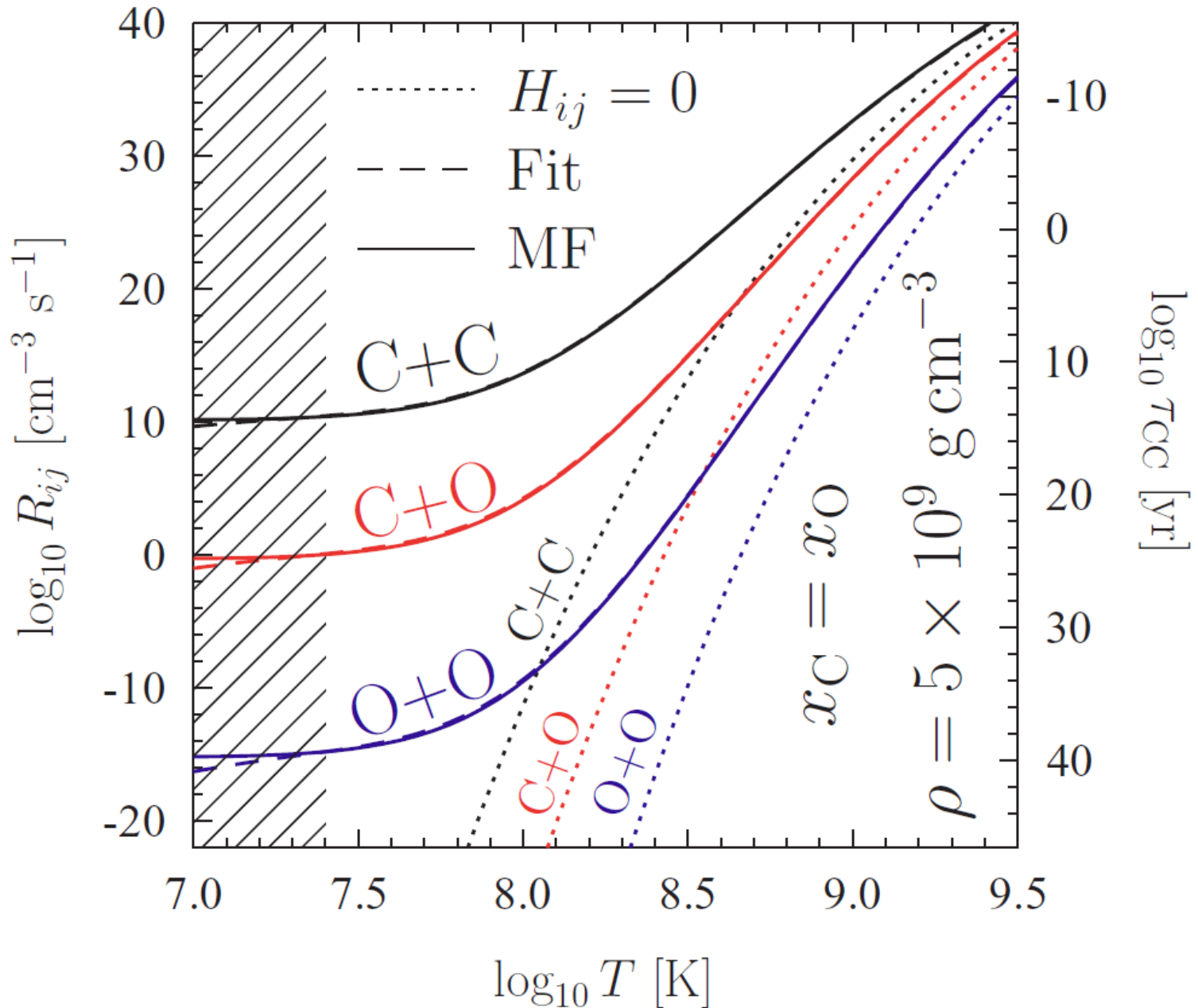
$f_0(\Gamma)$: A. Y. Potekhin & G. Chabrier, Phys. Rev. E **62**, 8554 (2000)

Термопикное ядерное горение: гаммовский пик

$$S(E^{\text{pk}}) \rightarrow S(E^{\text{pk}'}) , \quad E^{\text{pk}'} = [H_{ij}(0)^3 + (T\Gamma_{ij}/\zeta_{ij})^3]^{1/3}$$



Скорости реакции



Пикноядерное горение

$$T = 0$$

Ядерная реакция идёт между *ближайшими соседями* в кристаллической решетке за счет *нулевых колебаний*

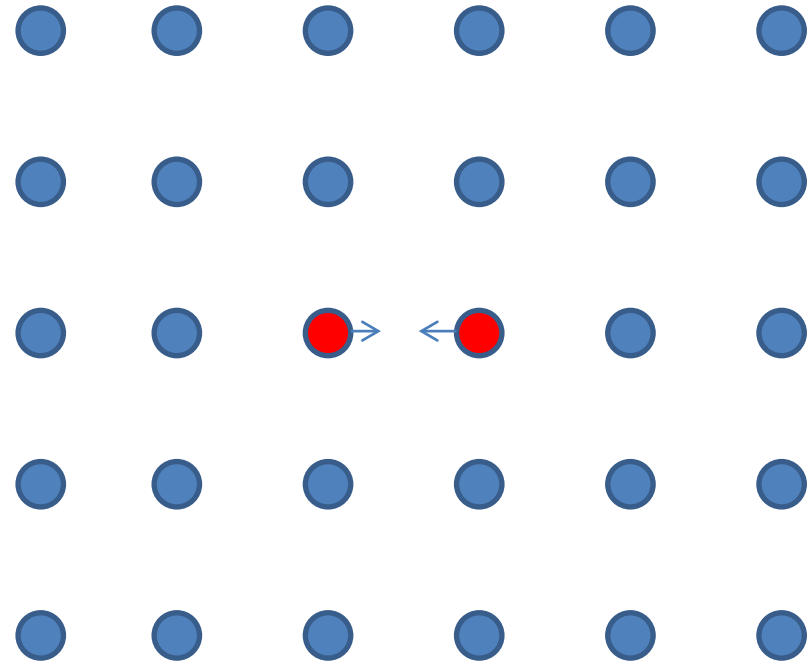
Проникновение под барьер

$$U_{\text{eff}} = U_{\text{C}}(r) + U_{\text{nuc}} + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu r^2} + U_{\text{int}}(\mathbf{r}, \mathbf{R}, \mathbf{r}_3, \dots, \mathbf{r}_N)$$



Кардинально меняет форму потенциала. Область туннелирования простирается на расстояние между атомными ядрами

Вся динамика определяется квантовой механикой. Многочастичная квантовая задача => очень сложно



Пикноядерное горение: нулевые колебания

$$T = 0$$

Ядерная реакция идёт в кристаллической фазе за счет нулевых колебаний

В кристалле существуют коллективные колебания – фононы. Кристалл – ансамбль осцилляторов.

В квантовой механике у любого осциллятора есть нулевые колебания

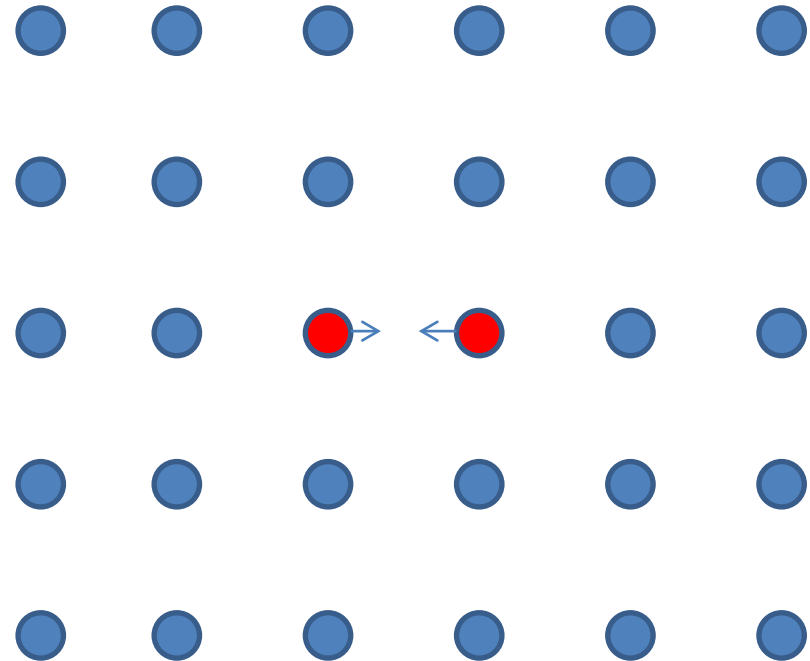
$$E_0 = \frac{1}{2} \hbar \omega, \quad \langle \Delta x^2 \rangle_0 = \frac{\hbar}{m\omega} = a_0^2$$

$$\langle \Delta r^2 \rangle = \langle \Delta r^2 \rangle_T + \langle \Delta r^2 \rangle_0$$

$$\langle \Delta r^2 \rangle_0 = \left\langle \frac{3\hbar}{m\omega} \right\rangle$$

$$\Psi = \frac{1}{(\pi a_0^2)^{1/4}} e^{-x^2/2a_0^2}$$

Спектр колебаний известен и среднеквадратичное смещение можно рассчитать



Пикноядерное горение: оценки

$$T = 0$$

Ядерная реакция идёт в кристаллической фазе за счет нулевых колебаний

$$\Psi = \frac{1}{(\pi a_0^2)^{1/4}} e^{-x^2/2a_0^2}$$

Вероятность сместиться на межатомное расстояние:

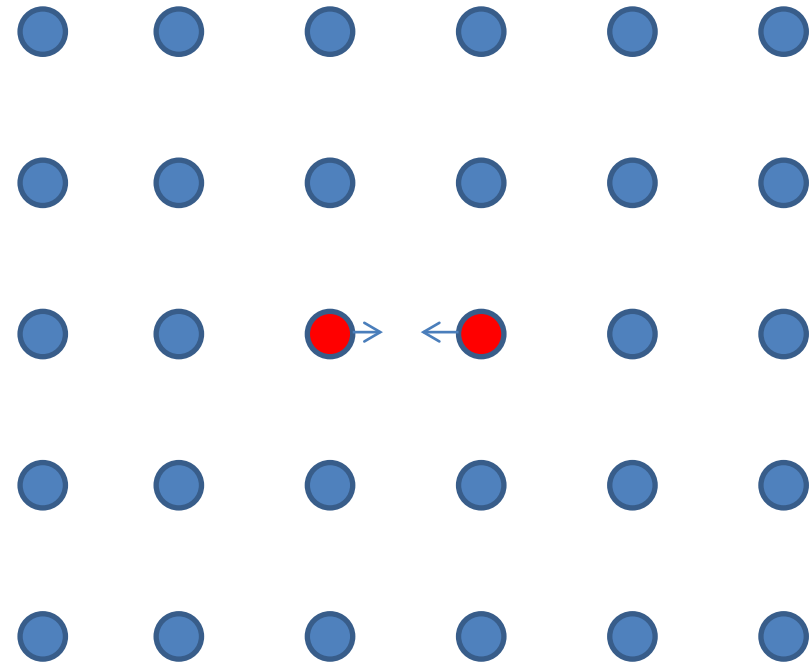
$$\propto \exp(-a^2/a_0^2)$$

$$a \propto n_i^{-1/3} \propto \rho^{-1/3}$$

$$\omega \propto \omega_{pi} = \sqrt{4\pi Z^2 e^2 n_i / m}$$

$$a_0 \propto 1/\sqrt{\omega} \propto \rho^{-1/4}$$

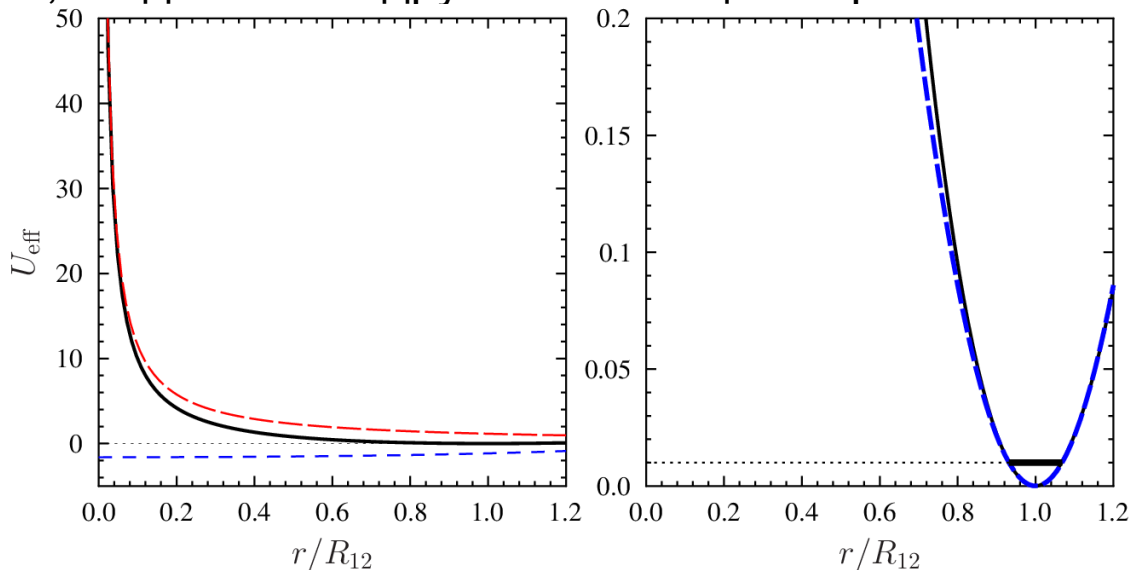
$$a^2/a_0^2 \propto \rho^{-1/6}$$



$$R \propto \exp\left(\frac{\beta}{\rho^{1/6}}\right), \quad \beta - ???$$

Пикноядерное горение: модель Солпитера-Ван Хорна

Выберем две реагирующие частицы и рассмотрим их движение в 3х мерном потенциале, создаваемом другими частицами кристаллической решетки



Вдали от равновесия:

Квазиклассическое туннелирование в 3х мерном осесимметричном потенциале (специально разработанная теория), создаваемом остальными ионами.

Рассмотрено две модели:

(а) статическая решетка;

(б) релаксированная решетка.

Вблизи положения равновесия:

Гармонический осциллятор (3х мерный). Параметры задаются статической решеткой

$$\Psi = \frac{1}{(\pi^3 a_z^2 a_x^4)^{1/4}} e^{-z^2/2a_z^2 - (x^2+y^2)/2a_x^2}$$

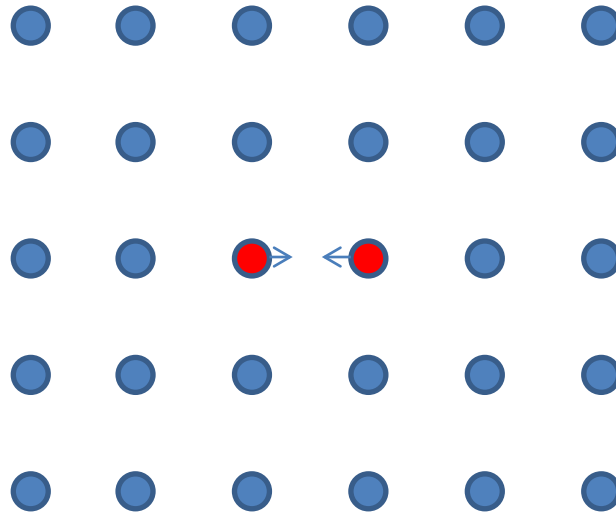
Предсказания модели (а) и (б) сильно отличаются...

Van Horn, Salpeter, Phys. Rev. 157 (1967), 751

Salpeter, Van Horn, ApJ 155 (1969), 183

Пикноядерное горение: эффективная масса

Выберем две реагирующие частицы и рассмотрим их движение в 3х мерном потенциале, создаваемом другими частицами кристаллической решетки



Вдали от равновесия:

Квазиклассическое туннелирование в 3х мерном осесимметричном потенциале создаваемом остальными ионами.

Для релаксации решетки требуется движение ионов решетки, что приводит к изменению эффективной массы реагирующих частиц

Вблизи положения равновесия:

Гармонический осциллятор (3х мерный). Параметры задаются статической решеткой

$$\Psi = \frac{1}{(\pi^3 a_z^2 a_x^4)^{1/4}} e^{-z^2/2a_z^2 - (x^2+y^2)/2a_x^2}$$

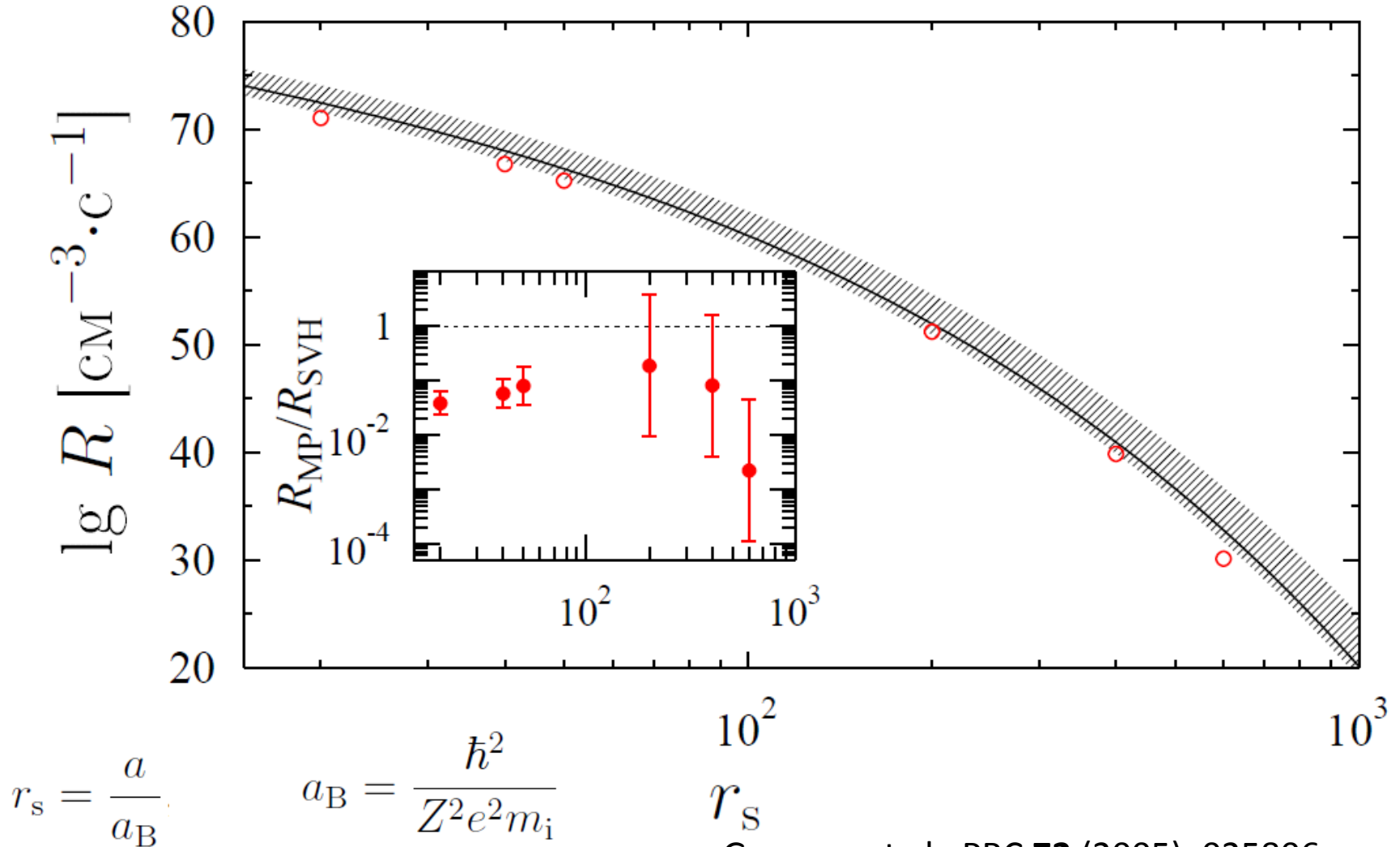


Предсказания для релаксированной решетки приблизились к модели статической решетки

Пикноядерное горение: проблемы

Скорость реакции модельно-зависима.

Предсказания различных моделей сильно отличаются...



Gasques et al., PRC **72** (2005), 025806

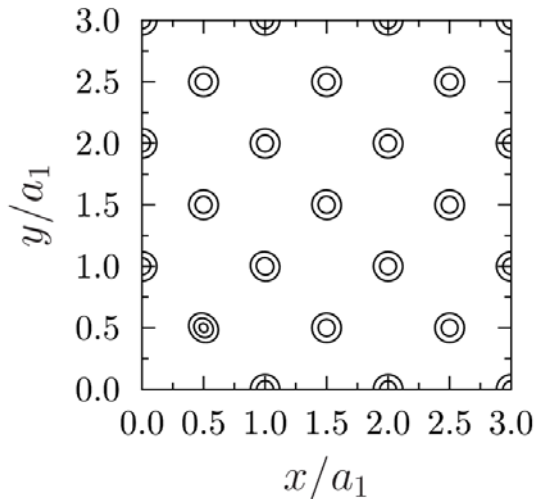
Chugunov et al., PRD **76** (2007), 025028

Пикноядерное горение: проблемы

Все модели описывают колебания ионов (атомных ядер) около положения равновесия с помощью 3-х мерного гармонического осциллятора, параметры задаются статической решеткой

$$\Psi = \frac{1}{(\pi^3 a_z^2 a_x^4)^{1/4}} e^{-z^2/2a_z^2 - (x^2+y^2)/2a_x^2}$$

Поведение (ионов) атомных ядер в кристалле вблизи положения равновесия можно описать с помощью гармонической модели (формализм фононов). Она предсказывает гауссовскую форму корреляционной функции, но с *другими* параметрами!



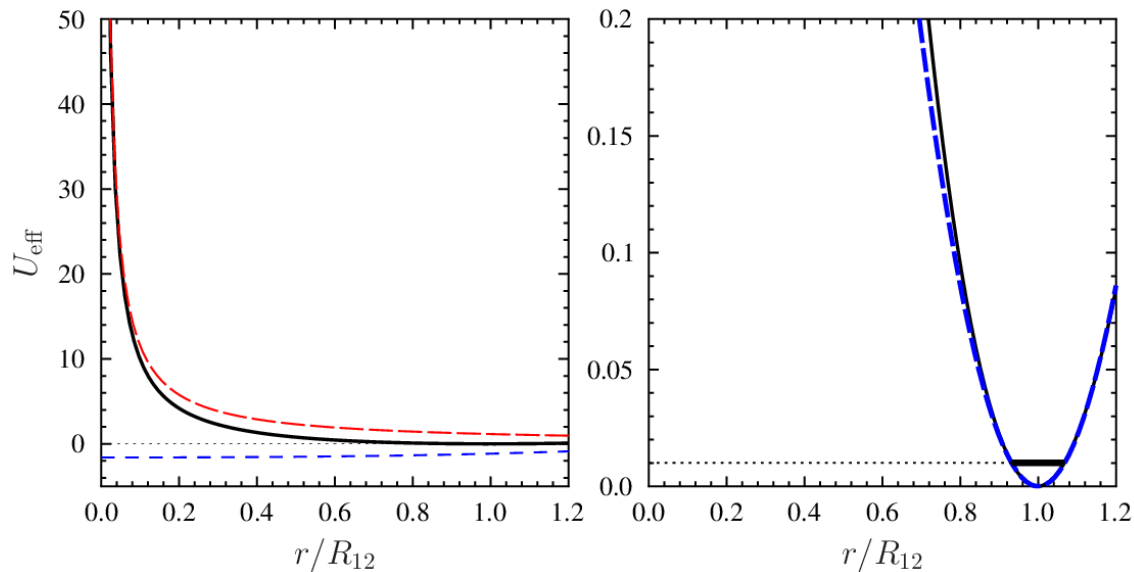
Пикноядерное горение: факты

- Пикноядерное горение существует, его скорость быстро растёт с ростом плотности
- Пикноядерное горение ограничивает максимальную плотность при которой может существовать данный элемент (бета-захваты могут ограничивать плотность сильнее)
 - Ядра белых карликов не могут состоять из водорода
 - В ядрах массивных белых карликов должен сгорать гелий

$$\rho \gtrsim 3 \times 10^8 \text{ g cm}^{-3}$$

Пикноядерное горение с тепловым усилением

Выберем две реагирующие частицы и рассмотрим их движение в 3х мерном потенциале, создаваемом другими частицами кристаллической решетки



Вдали от равновесия:

Квазиклассическое туннелирование в 3х мерном осесимметричном потенциале создаваемом остальными ионами.

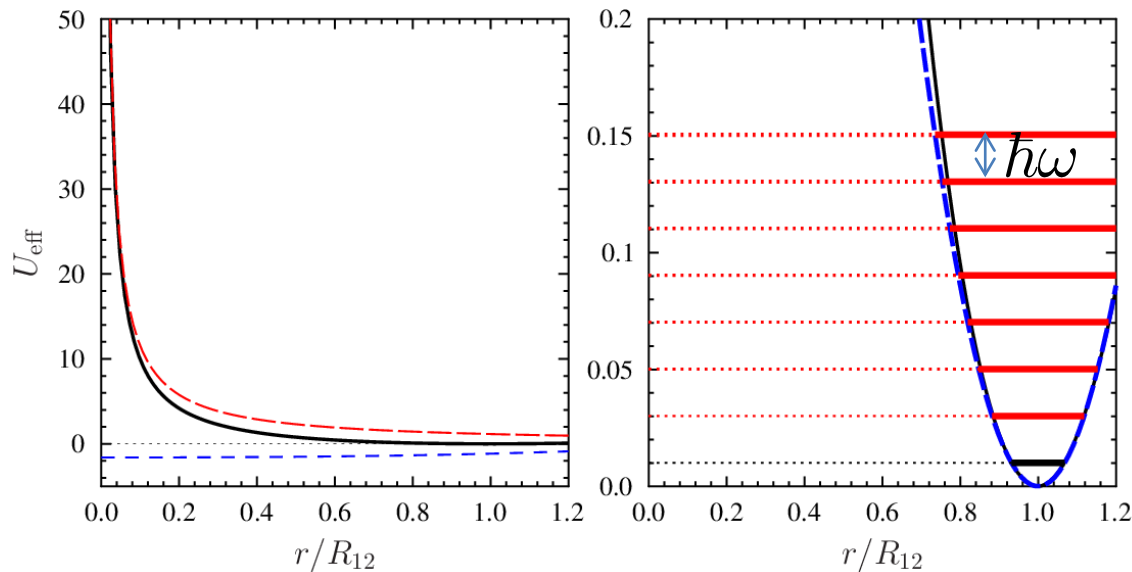
Вблизи положения равновесия:

Гармонический осциллятор (3х мерный). Параметры задаются статической решеткой.

Тепловое возбуждение приводит к заселению вышележащих уровней, туннелирование с которых существенно проще

Пикноядерное горение с тепловым усилением

Выберем две реагирующие частицы и рассмотрим их движение в 3х мерном потенциале, создаваемом другими частицами кристаллической решетки



Вдали от равновесия:

Квазиклассическое туннелирование в 3х мерном осесимметричном потенциале создаваемом остальными ионами.

Тепловая добавка к скорости реакции:

$$\Delta R \propto \exp(\hbar\omega/T)$$

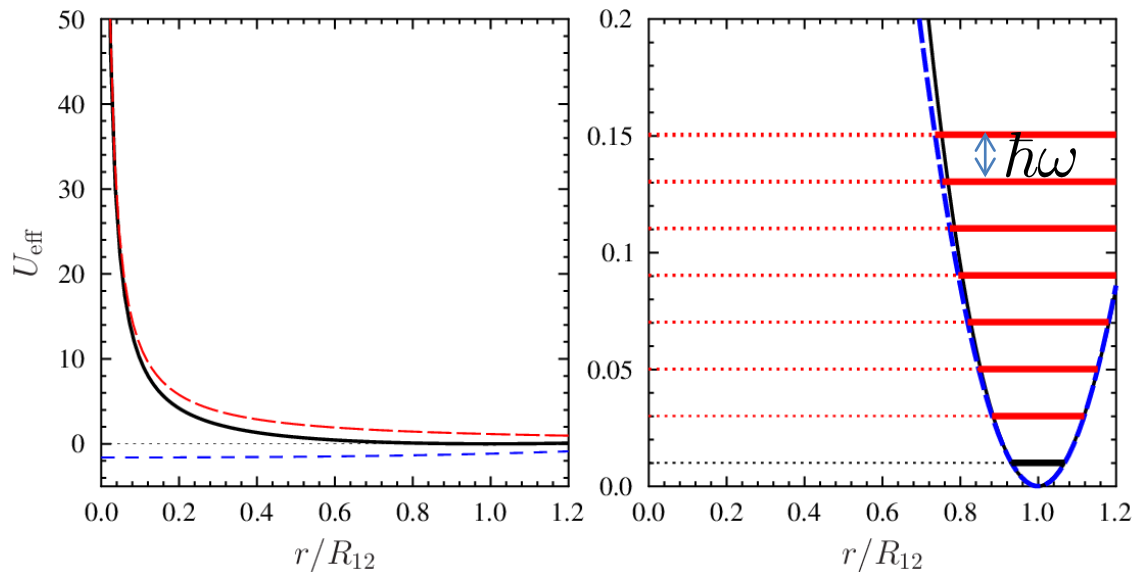
Вблизи положения равновесия:

Гармонический осциллятор (3х мерный). Параметры задаются статической решеткой.

Тепловое возбуждение приводит к заселению вышележащих уровней, туннелирование с которых существенно проще

Пикноядерное горение с тепловым усилением

Выберем две реагирующие частицы и рассмотрим их движение в 3х мерном потенциале, создаваемом другими частицами кристаллической решетки



Вдали от равновесия:

Квазиклассическое туннелирование в 3х мерном осесимметричном потенциале создаваемом остальными ионами.

Тепловая добавка к скорости реакции:

$$\Delta R \propto (T/\hbar\omega_p)^{p???}$$

Вблизи положения равновесия:

Повышение температуры приводит к возбуждению мягких фононных мод

$$r_T^2 = r_{T0}^2 + A(T/\hbar\omega_p)^2$$

Монте-Карловское интегрирование по траектория может дать ответ

Лекция 2. Пять режимов ядерных реакций в звёздной плазме

- **Термоядерное горение с сильным и слабым экранированием** хорошо изучено. Длина туннелирования мала. Роль плазменного экранирования сводится к увеличению числа ближних столкновений. Коэффициент усиления определяется термодинамикой.

$$F_{\text{scr}} = \exp((\mathfrak{F}_C - \mathfrak{F}'_C)/T) = \exp((\mu_c^C - \mu_1^C - \mu_2^C)/T)$$

- При **термопикноядерном горении** длина туннелирования сопоставима с межатомным расстоянием. Коэффициент усиления рассчитывается в модели среднего поля, продемонстрировавшей хорошее согласие с результатами Монте-Карловского интегрирования по траекториям.

$$F_{\text{scr}} = I\{H\}/I\{0\}$$
$$I\{H\} = \int_{E_{\text{min}}}^{\infty} \exp\left(-\frac{E}{T} - P(E)\right) dE$$
$$P(E) = \frac{2\sqrt{2\mu}}{\hbar} \int_{r_n}^{r_t} \sqrt{\frac{Z^2 e^2}{r} - H(r) - E} dr$$

Лекция 2. Пять режимов ядерных реакций в звёздной плазме

- **Пикнояденое горение** идёт при очень низких температурах. Длина туннелирования практически равна межатомному расстоянию. Скорость зависит от плотности, а не температуры. Скорость реакций модельно зависима, предсказания различных моделей существенно отличаются.

$$R \propto \exp\left(\frac{\beta}{\rho^{1/6}}\right), \quad \beta - ???$$

- При **пикноядерном горении с тепловым усилением** происходит усиление пикноядерного горения за счет тепловых флуктуаций. Длина туннелирования практически равна межатомному расстоянию. Традиционные модели предсказывают экспоненциальную зависимость скорости реакции от температуры.

$$\Delta R \propto \exp(\hbar\omega/T) \quad \Delta R \propto (T/\hbar\omega_p)^p ???$$