Ядерные реакции в звездной плазме

Лекция 1
Термоядерные реакции в звёздной плазме

А.И. Чугунов (ФТИ им. А.Ф. Иоффе)

Ядерные реакции и звёзды

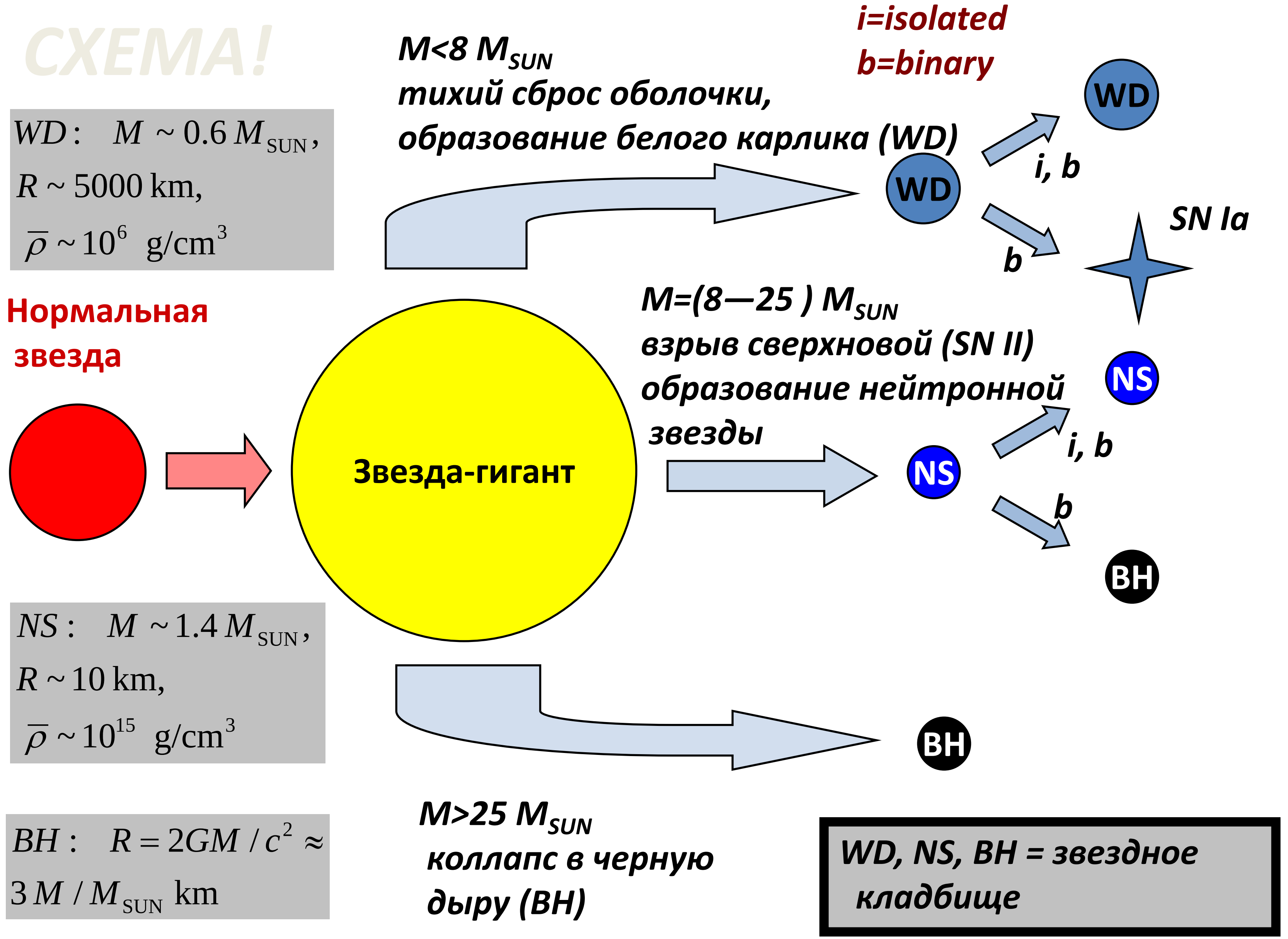
Википедия: *Звезда́* — излучающий свет массивный газовый шар, удерживаемый силами собственной гравитации, *в недрах которого происходят (или происходили ранее) реакции термоядерного синтеза*

Энергия подавляющего большинства звёзд выделяется в результате термоядерных реакций превращения водорода в гелий, происходящих при высоких температурах во внутренних областях.

Физическая энциклопедия: ЭВОЛЮЦИЯ ЗВЁЗД — изменение со временем физ. параметров и наблюдаемых характеристик звёзд *в результате протекания ядерных реакций*, излучения энергии и потери массы.

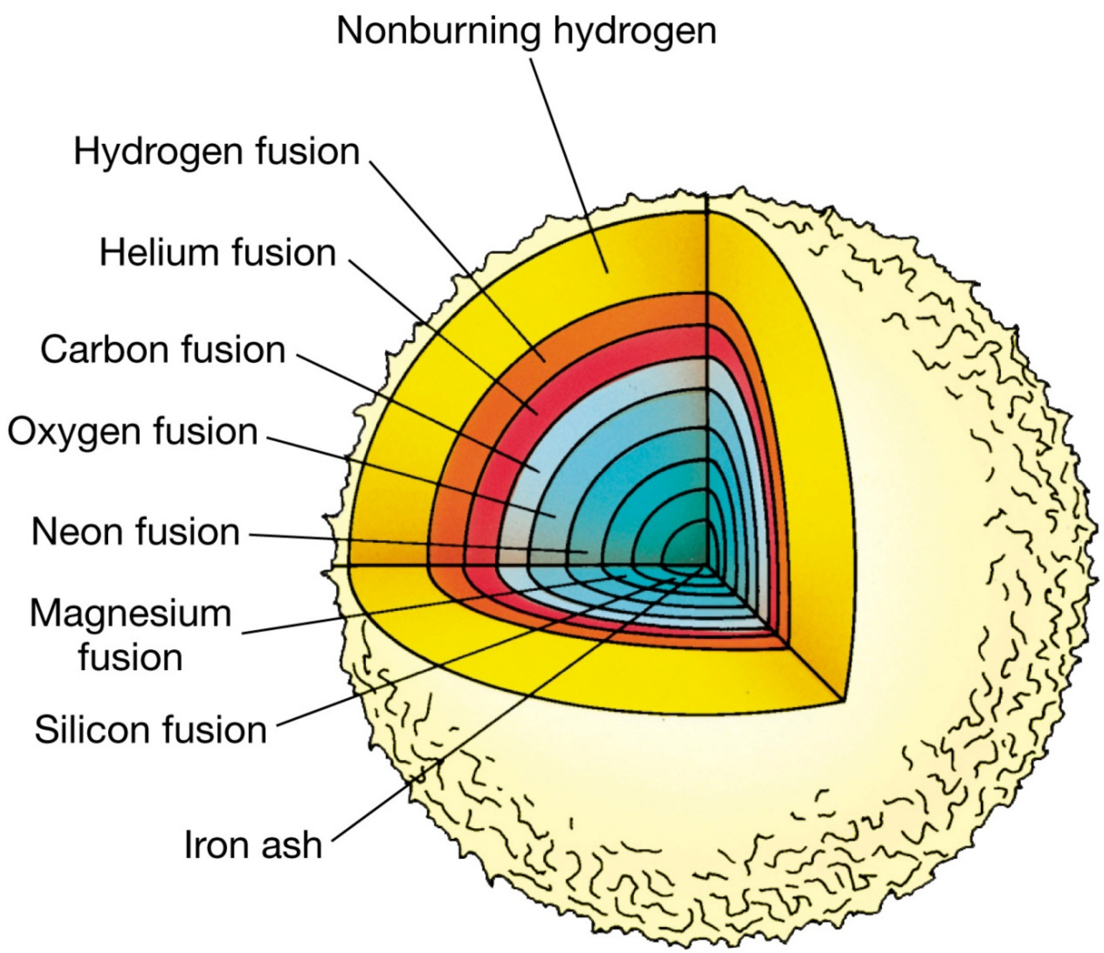
Википедия: Большинство химических элементов, кроме нескольких самых лёгких, возникли во Вселенной *главным образом в ходе звёздного нуклеосинтеза*

Эволюция звёзд



(из лекций Д.Г. Яковлева на школе современной астрофизики, Пущино, 2010)

Луковичная структура на поздних стадиях эволюции



(картинка с сайта http://www2.astro.psu.edu/users/cpalma/astro10/class12.html)

Ядерные реакции в звездной плазме

Лекция 1 . Термоядерные реакции в звёздной плазме

1.Нерезонансные реакции: астрофизический фактор, гамовский пик

2.Вклад резонансов в термоядерное горение

3.Экспериментальные данные об астрофизических факторах

4.Астрофизические факторы в модели проникновения под барьер и база данных астрофизических факторов

Лекция 2. Пять режимов ядерных реакций в звёздной плазме

1.Пять режимов ядерных реакций: термоядерное горение, термоядерное горение с сильным экранированием, термопикноядерное горение, пикноядерное горение с тепловым усилением, пикноядерное горение при нулевой температуре

2.Усиление ядерных реакций в модели среднего поля

3.Пикноядерное горение при нулевой температуре

Термоядерные реакции

$$Z_1 + Z_2 \to Z_c \to \ldots$$

На примере Солнца: Светимость $L = 4 \times 10^{33}$ erg/s

Энерговыделение $\eta = \frac{L}{M} = 2$ erg/g/s

Скорость реакции: $$R = \frac{1}{1+\delta_{ij}} n_i n_j v\sigma(E)$$

Энерговыделение реакции: $\eta = RQ/\rho$

Наивно: $E \sim T$ ⇨ Сложно проникнуть под кулоновский барьер. Очень малое сечение, реакция не идёт

$E \sim E_\mathrm{C}$ ⇨ Очень мало частиц с такой энергией, реакция не идёт

⇩

$$\langle v\sigma(E) \rangle$$

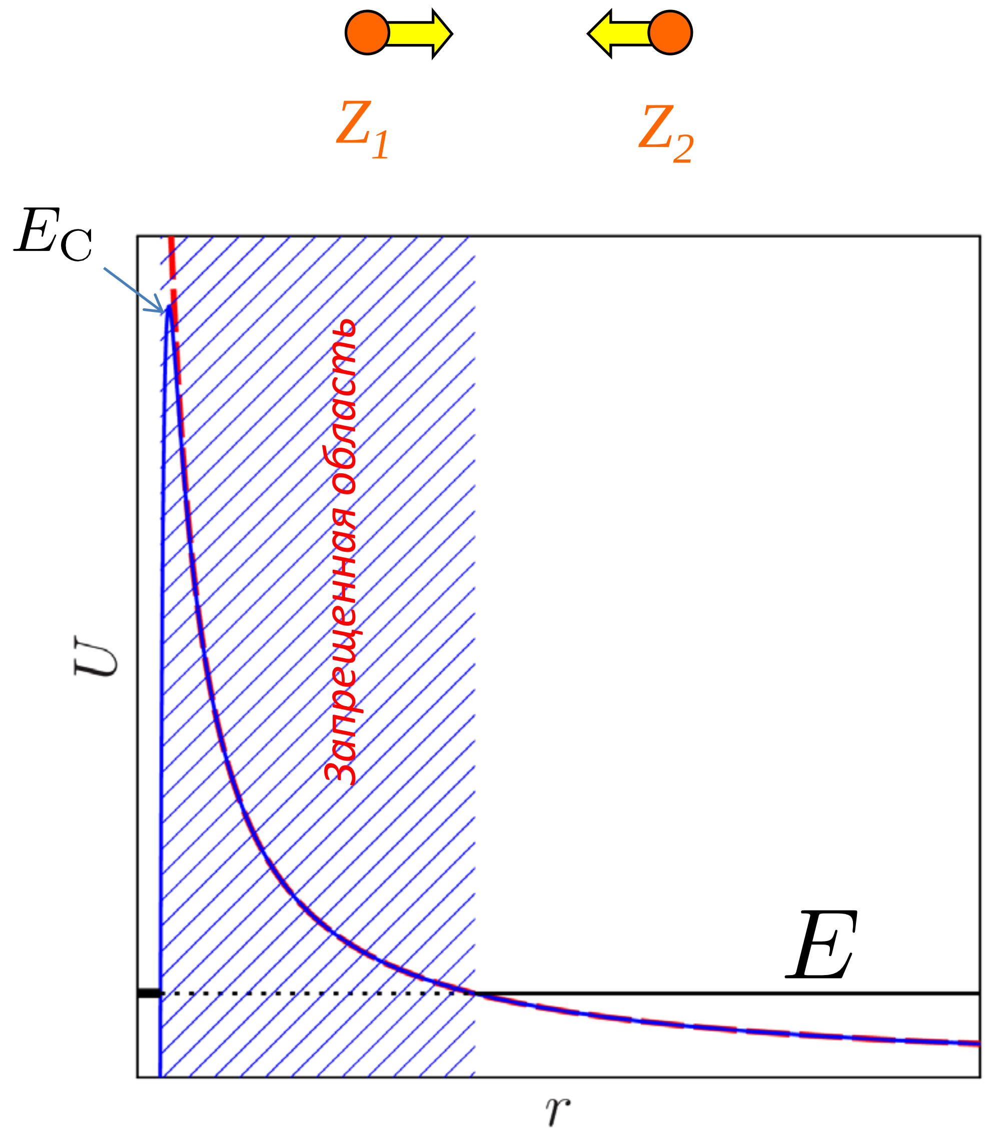
Кулоновский барьер. Сечение и астрофизический фактор

$$Z_1 + Z_2 \to Z_c \to \ldots$$

Скорость реакции:

$$R = \frac{n_1 n_2}{1+\delta_{12}} \langle v\sigma \rangle \, \frac{\text{реакций}}{\text{см}^3\ \text{с}}$$

$$\boxed{\int_0^\infty \mathrm{d}v\, v^3\, \mathrm{e}^{-E/T} \sigma(E)}$$



Кулоновский барьер. Сечение и астрофизический фактор

$$Z_1 + Z_2 \to Z_c \to \ldots$$

Скорость реакции:

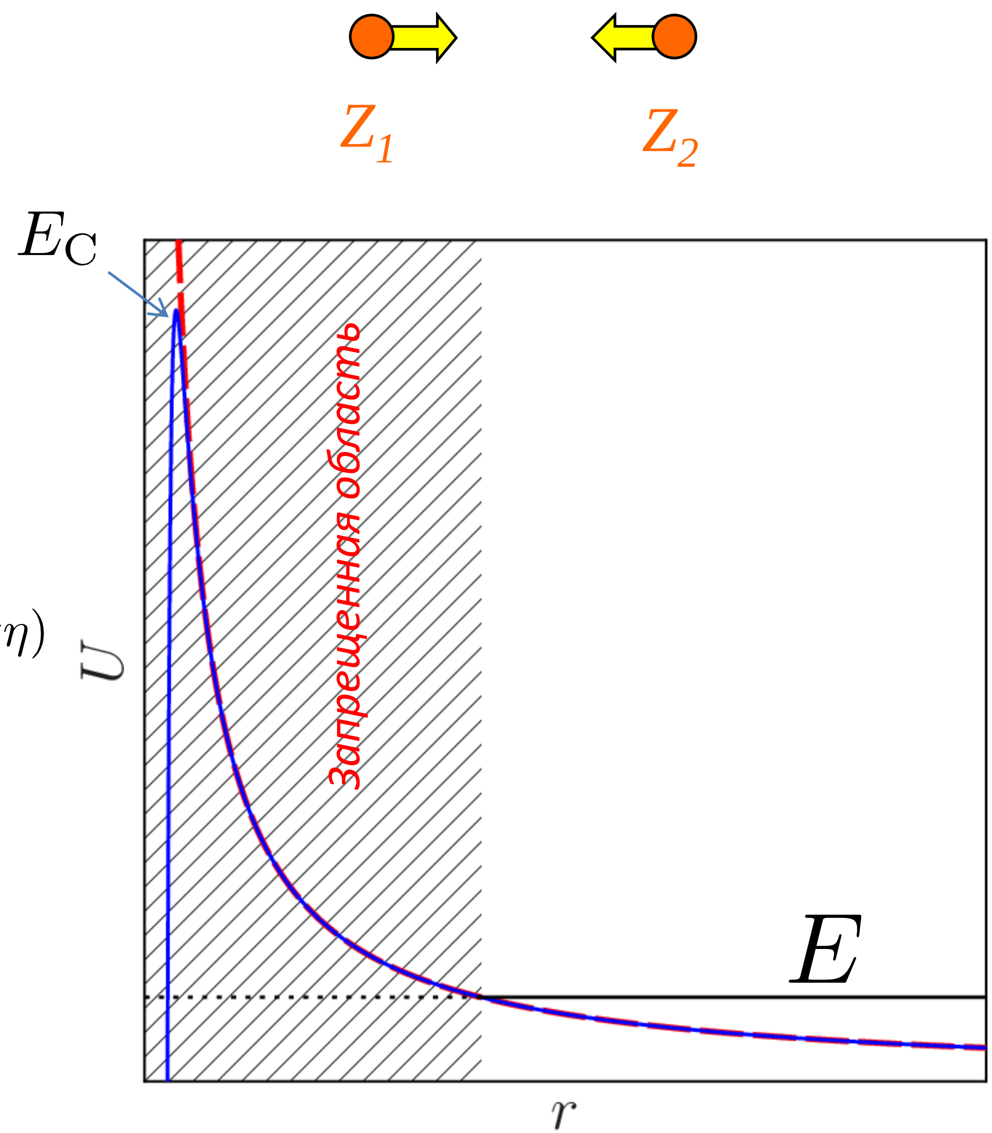
$$R = \frac{n_1 n_2}{1+\delta_{12}} \langle v\sigma \rangle \; \frac{\text{реакций}}{\text{см}^3\ \text{с}}$$

$$\int_0^\infty \mathrm{d}v\, v^3\, \mathrm{e}^{-E/T} \sigma(E)$$

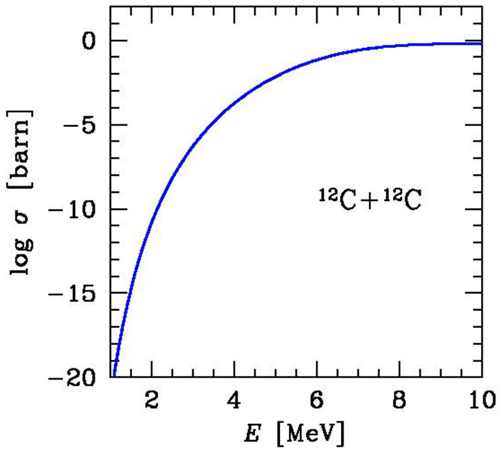
$$\sigma(E) = \frac{S(E)P(E)}{E}, \quad P(E) = \exp(-2\pi\eta)$$

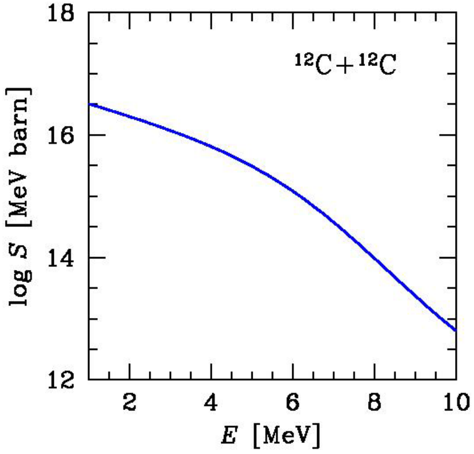
$$\eta(E) = \frac{1}{\pi\hbar} \int_{r_1}^{r_2} |p(r)|\, \mathrm{d}r = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{\hbar v}$$

$$v = \sqrt{2E/\mu}$$



Нерезонансные термоядерные реакции: Гамовский пик





$$R \propto \langle \sigma v \rangle \propto \int_0^\infty \sigma(E) \exp(-E/T) E \mathrm{d}E = \int_0^\infty S(E) \exp(-2\pi\eta) \exp(-E/T) \mathrm{d}E$$

$$\eta = \frac{Z_i Z_j e^2}{\hbar} \left(\frac{\mu_{ij}}{2E}\right)^{1/2} = \frac{b}{2\pi E^{1/2}} \qquad b = 0.99\, Z_i Z_j \tilde{\mu}_{ij}^{1/2}\ \mathrm{MeV}^{1/2}$$

$$\tilde{\mu}_{ij} = A_i A_j / (A_i + A_j) \qquad 1\ \mathrm{MeV} = 1.16 \times 10^{10}\ \mathrm{K}$$

$$\boxed{S(E)} \exp(-(\boxed{E/T} + \boxed{b/\sqrt{E}}))$$

Плавная функция

Подавляет вклад высоких энергий

Подавляет вклад низких энергий

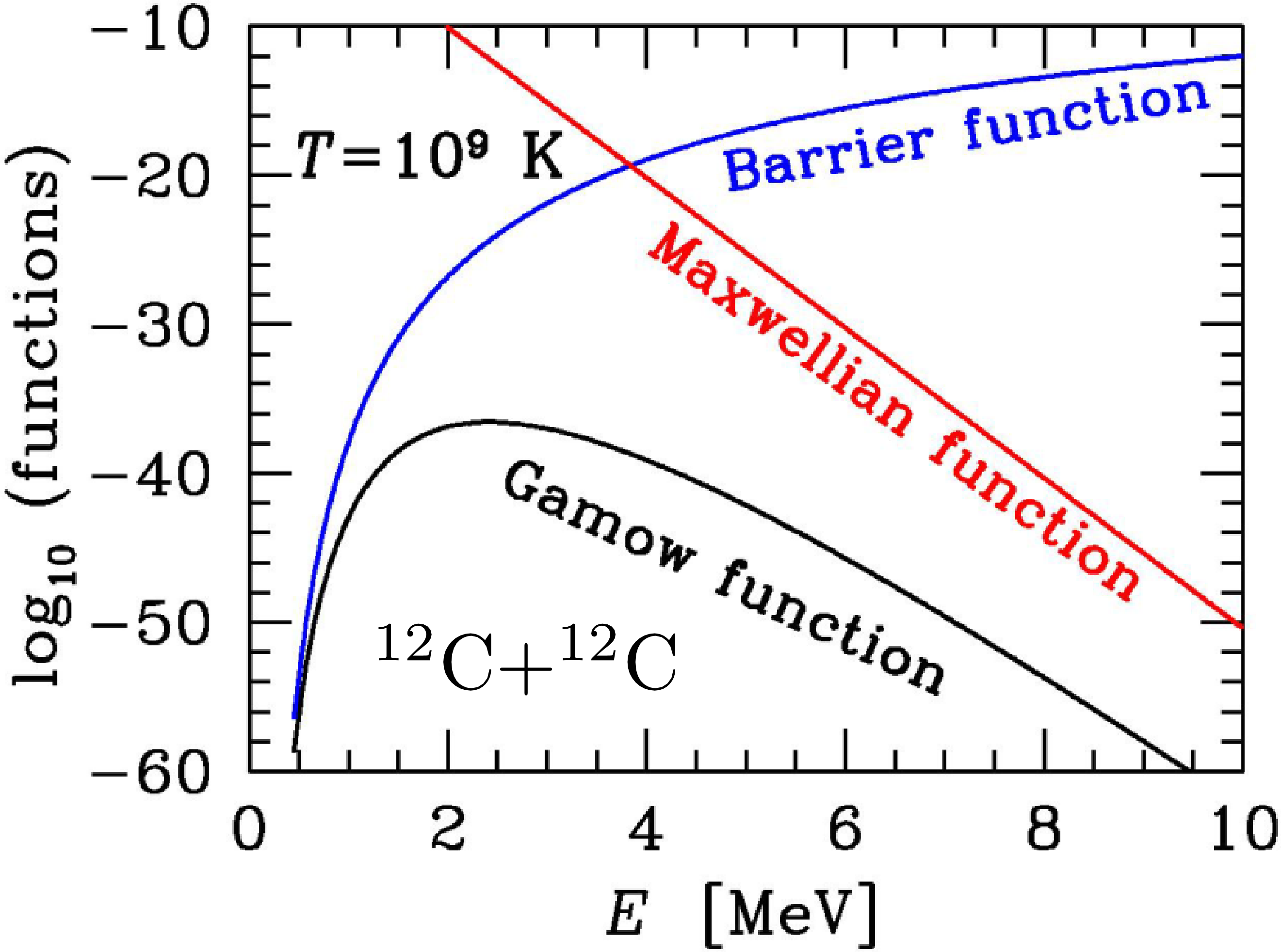
Нерезонансные термоядерные реакции: Гамовский пик

$$\boxed{f_{\mathrm{G}}} = \exp(-(\boxed{E/T} + \boxed{b/\sqrt{E}}))$$

Резкая функция

Подавляет вклад высоких энергий

Подавляет вклад низких энергий



Нерезонансные термоядерные реакции: Гамовский пик

$$\boxed{f_G} = \exp(-(\boxed{E/T} + \boxed{b/\sqrt{E}}))$$

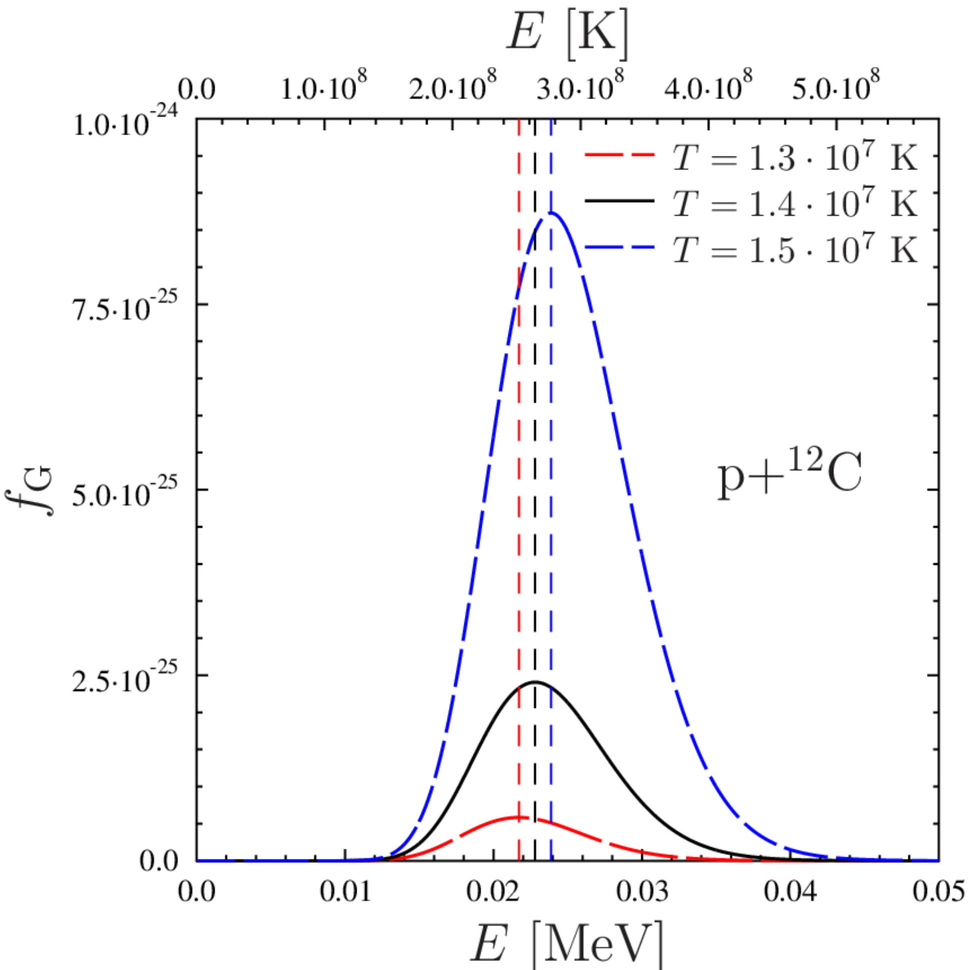
Резкая функция

Подавляет вклад высоких энергий

Подавляет вклад низких энергий

$$E_{pk}/T = (b^2/4T)^{1/3} \gg 1$$

$$E_{pk} = 5.7\left[Z_i^2 Z_j^2 \tilde{\mu}(T/10^7\ \mathrm{K})^2\right]^{1/3}\ \mathrm{keV}$$



Нерезонансные термоядерные реакции: метод перевала

$$f_{\mathrm{G}} \approx \exp\left(-3E_{\mathrm{pk}}/T - \frac{3}{4E_{\mathrm{pk}}T}(E - E_{\mathrm{pk}})^2\right)$$

Положение пика

$$E_{\mathrm{pk}}/T = (b^2/4T)^{1/3} \gg 1$$

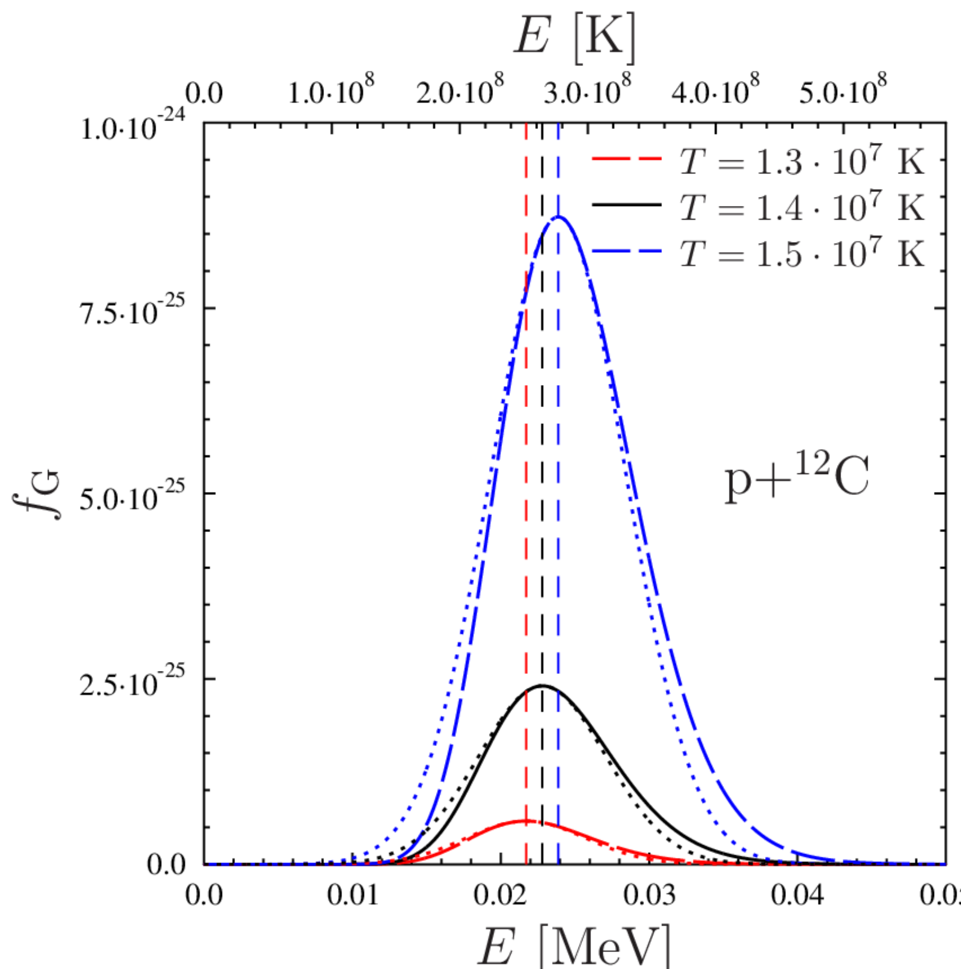
$$E_{\mathrm{pk}} = 5.7\left[Z_i^2 Z_j^2 \tilde{\mu}(T/10^7\ \mathrm{K})^2\right]^{1/3}\ \mathrm{keV}$$

Ширина пика

$$T \ll \Delta E \sim 4\sqrt{E_{\mathrm{pk}}T/3} \ll E_{\mathrm{pk}}$$

$$\langle\sigma v\rangle \quad \propto \quad \int_0^\infty S(E)\exp(-(E/T + b/\sqrt{E}))\mathrm{d}E$$

$$\langle\sigma v\rangle \quad \approx \quad 4\sqrt{\frac{2E_{\mathrm{pk}}}{3\mu}}\frac{S(E_{\mathrm{pk}})}{T}\exp\left(-\frac{3E_{\mathrm{pk}}}{T}\right)$$



Нерезонансные термоядерные реакции: уточненная формула

$$R \propto \int_0^\infty S(E)\exp\left(-\left(E/T + b/\sqrt{E}\right)\right)\mathrm{d}E$$

$$E = E_{\mathrm{pk}}\left(1+\sqrt{\frac{T}{3E_{\mathrm{pk}}}}u\right)^2 = E_{\mathrm{pk}}\left(1+\tau^{-1/2}u\right)^2$$

$$R \quad \propto \quad \int_{-\tau^{1/2}}^{\infty}\left(\tau^{1/2}+u\right)\boxed{S\left(E_{\mathrm{pk}}\left(1+\tau^{-1/2}u\right)\right)}$$

$$\times \quad \boxed{\mathrm{e}^{-u^2}}\boxed{\exp\left(\frac{2u^3}{3}\left(\tau^{1/2}+u\right)^{-1}\right)}\mathrm{d}u$$

Основной вклад от малых *u*

В ряд по *u*

J.N. Bahcall, ApJ, **143** (1966), p.259;
W.A. Fowler et al., ARA&A **5** (*1967)*, 525

Нерезонансные термоядерные реакции: уточненная формула

$$R \propto \int_0^\infty S(E)\exp\left(-\left(E/T + b/\sqrt{E}\right)\right)\mathrm{d}E$$

$$S(E) \approx S(E_{\mathrm{pk}}) + S'(E_{\mathrm{pk}})(E - E_{\mathrm{pk}}) + \frac{(E - E_{\mathrm{pk}})^2}{2}S''(E_{\mathrm{pk}})$$

$$\begin{aligned}
\langle\sigma v\rangle &\approx 4\sqrt{\frac{2E_{\mathrm{pk}}}{3\mu}}\frac{S_{\mathrm{eff}}}{T}\exp\left(-\frac{3E_{\mathrm{pk}}}{T}\right)\\
S_{\mathrm{eff}} &\approx S(E_{\mathrm{pk}})\left[1 + \frac{T}{3E_{\mathrm{pk}}}\left(\frac{5}{12} + \frac{5}{2}\frac{S'(E_{\mathrm{pk}})E_{\mathrm{pk}}}{S(E_{\mathrm{pk}})} + \frac{S''(E_{\mathrm{pk}})E_{\mathrm{pk}}^2}{S(E_{\mathrm{pk}})}\right)\right]\\
&\approx S(0)\left(1 + \frac{5T}{36E_{\mathrm{pk}}}\right) + S'(0)E_{\mathrm{pk}}\left(1 + \frac{35T}{36E_{\mathrm{pk}}}\right)\\
&+ \frac{1}{2}S''(0)E_{\mathrm{pk}}^2\left(1 + \frac{89T}{36E_{\mathrm{pk}}}\right)
\end{aligned}$$

J.N. Bahcall, ApJ, **143** (1966), p.259;
W.A. Fowler et al., ARA&A **5** (*1967)*, 525

Резонансные термоядерные реакции

$$\langle\sigma v\rangle \propto \int_0^\infty \boxed{\sigma(E)}\,\boxed{\exp(-E/T)}\,\mathrm{d}E$$

Имеет резкий максимум

Сравнительно плавная функция
в области резонанса

$$\sigma = \frac{\pi\hbar^2}{2\mu_{ij}E}\,\frac{2J_\mathrm{r}+1}{(2J_i+1)(2J_j+1)}\,\frac{\Gamma_e\Gamma_r}{(E-E_\mathrm{r})^2+\Gamma^2/4}$$

Сила резонанса

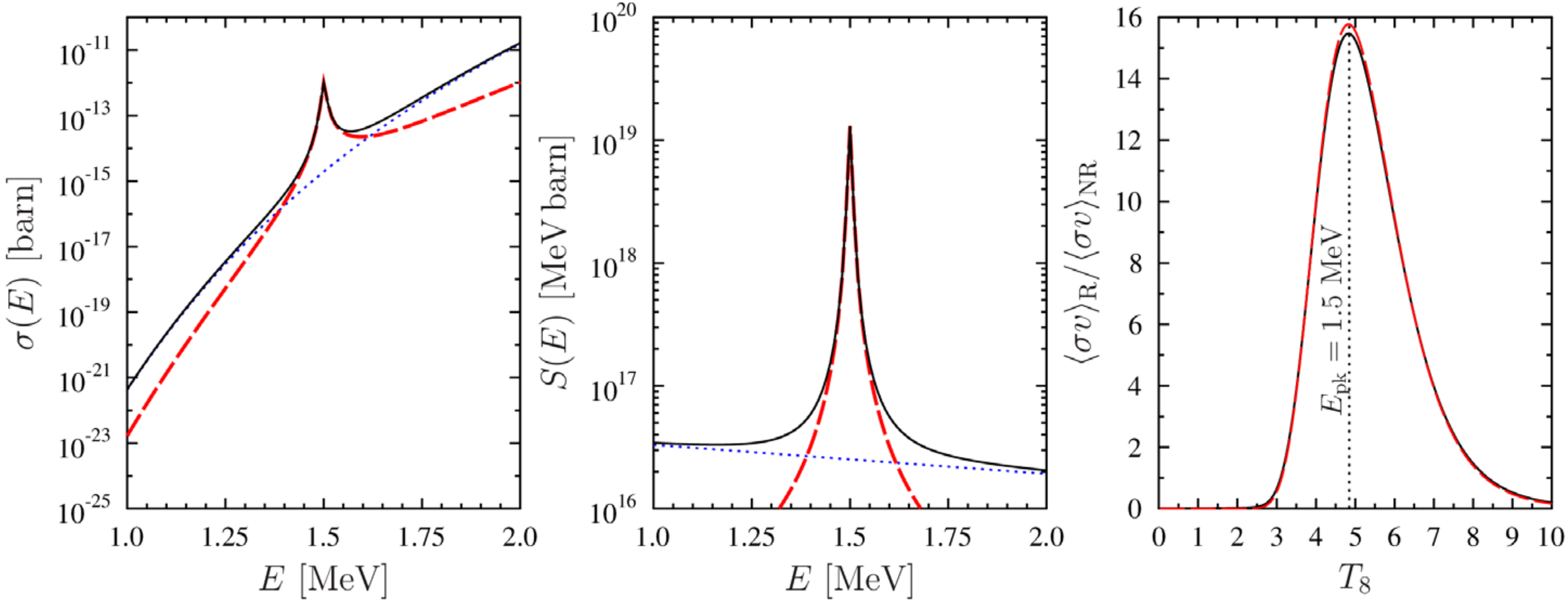
$$(\omega\gamma)_\mathrm{R} = \frac{2J_\mathrm{r}+1}{(2J_i+1)(2J_j+1)}\,\frac{\Gamma_e\Gamma_r}{\Gamma}$$

$$\langle\sigma v\rangle_\mathrm{R} \approx \sqrt{\frac{8}{\pi\mu_{ij}T^3}}\,\frac{\pi\hbar^2}{2\mu_{ij}}(\omega\gamma)_\mathrm{R}\exp(-E_\mathrm{r}/T)\,\boxed{\int_0^\infty \frac{\Gamma}{(E-E_\mathrm{r})^2+\Gamma^2/4}\,\mathrm{d}E}$$

$$2\pi$$

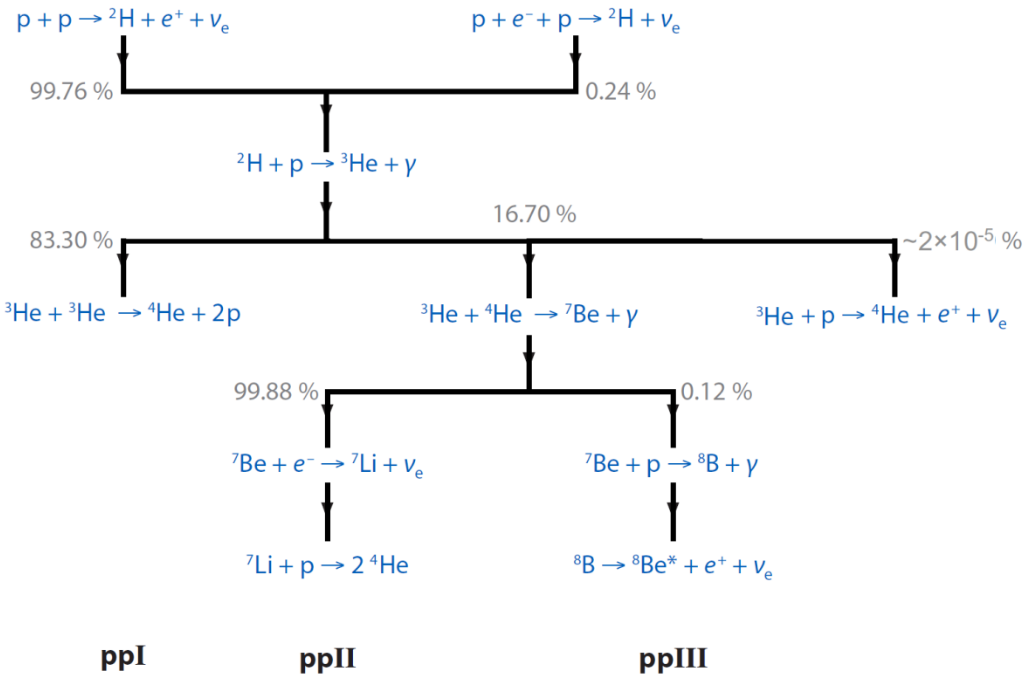
Резонансные термоядерные реакции

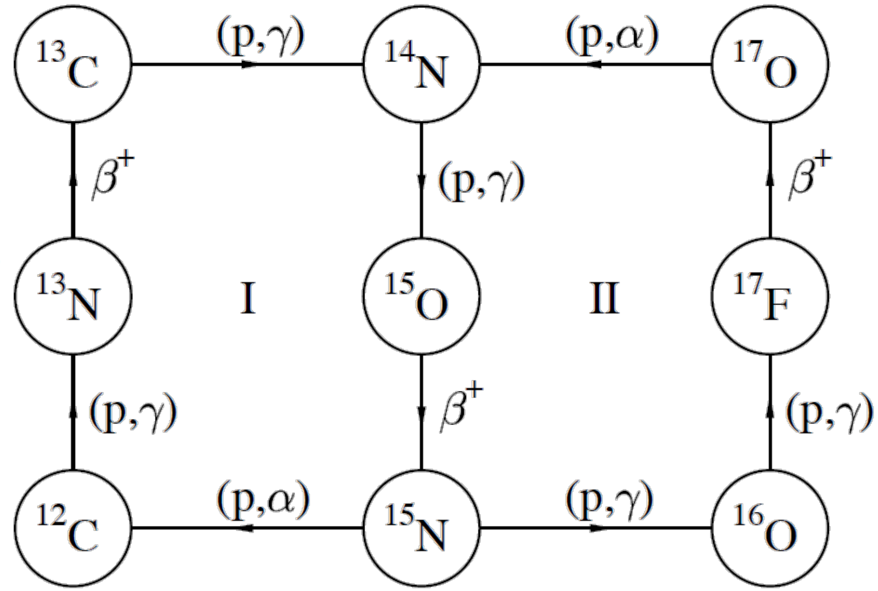
Пример: возможный резонанс в реакции $^{12}C+^{12}C$



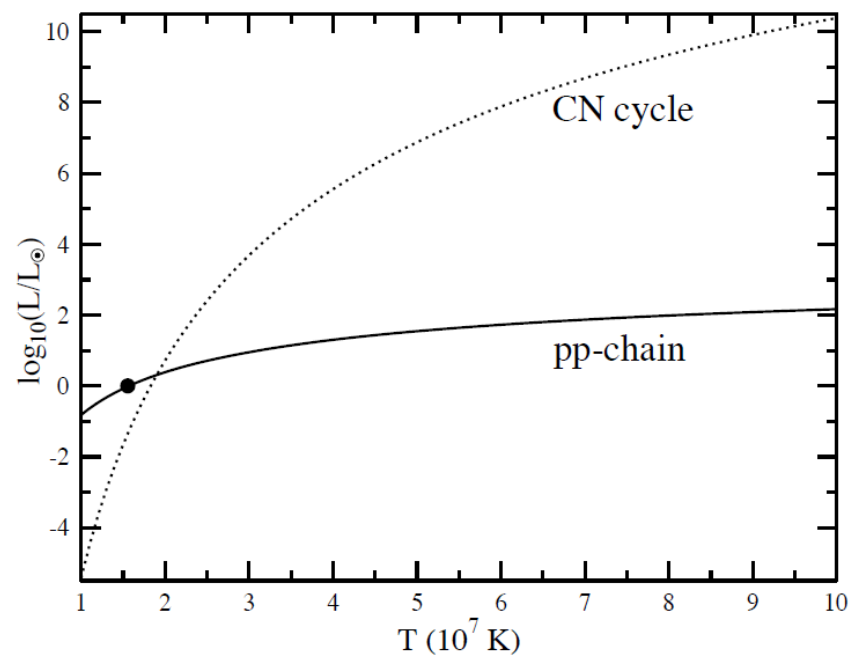
- Резонансы могут существенно повышать скорость реакции
- Они особенно эффективны когда $E_{\rm R} \sim E_{\rm pk}$

Цепочки ядерных реакций



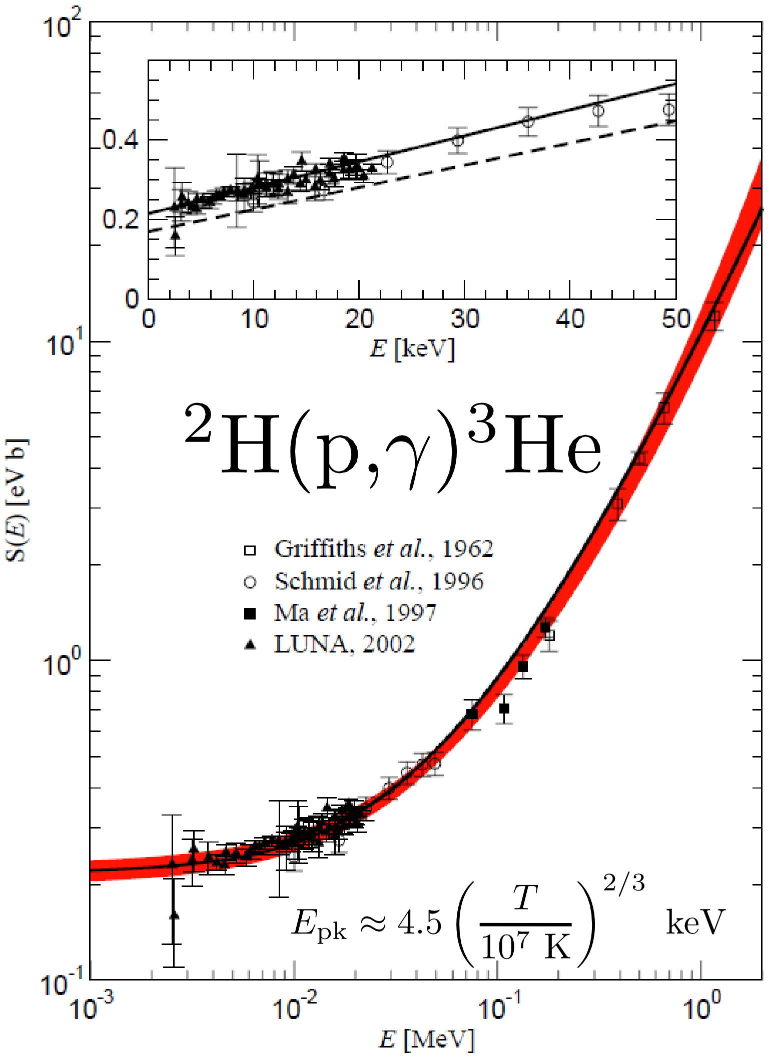


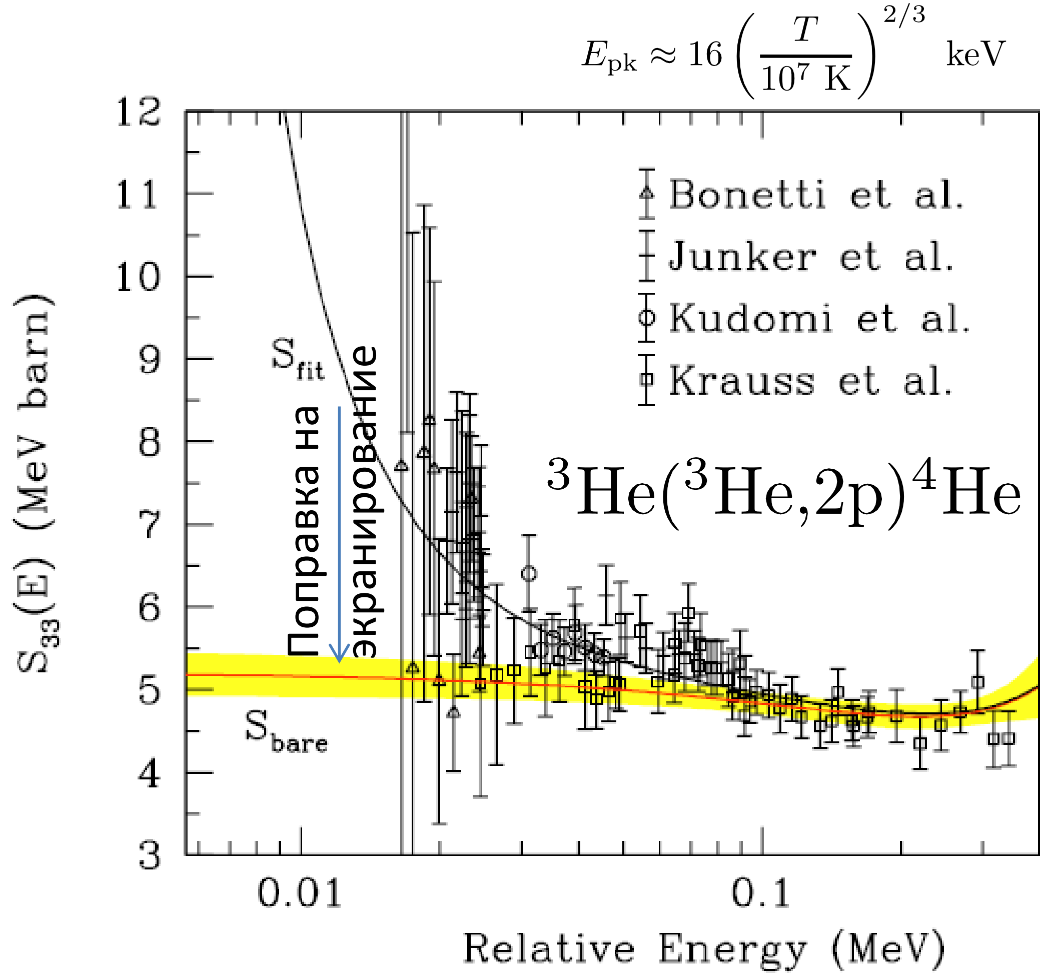
From: *Solar fusion cross sections II: the pp chain and CNO cycles*
Adelberger et al., Rev. Mod. Phys. **83** (2011), 195-246



Астрофизические факторы: pp цикл

В звёздах реакции идут при низких энергиях, глубоко под кулоновским барьером. Сечение реакции очень *маленькое* и его сложно измерять в лаборатории

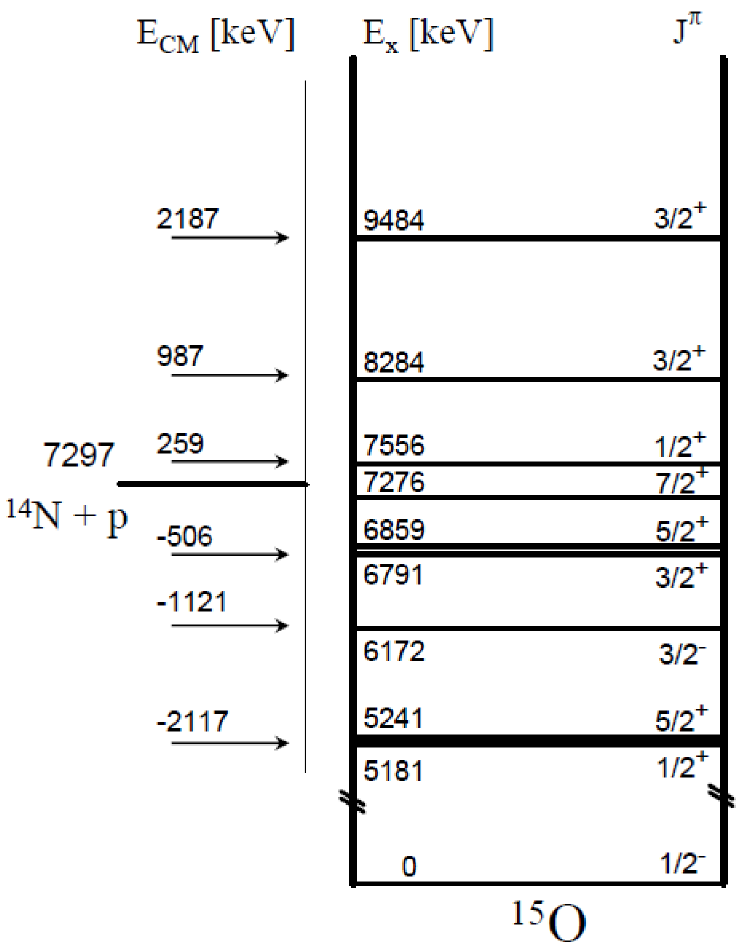


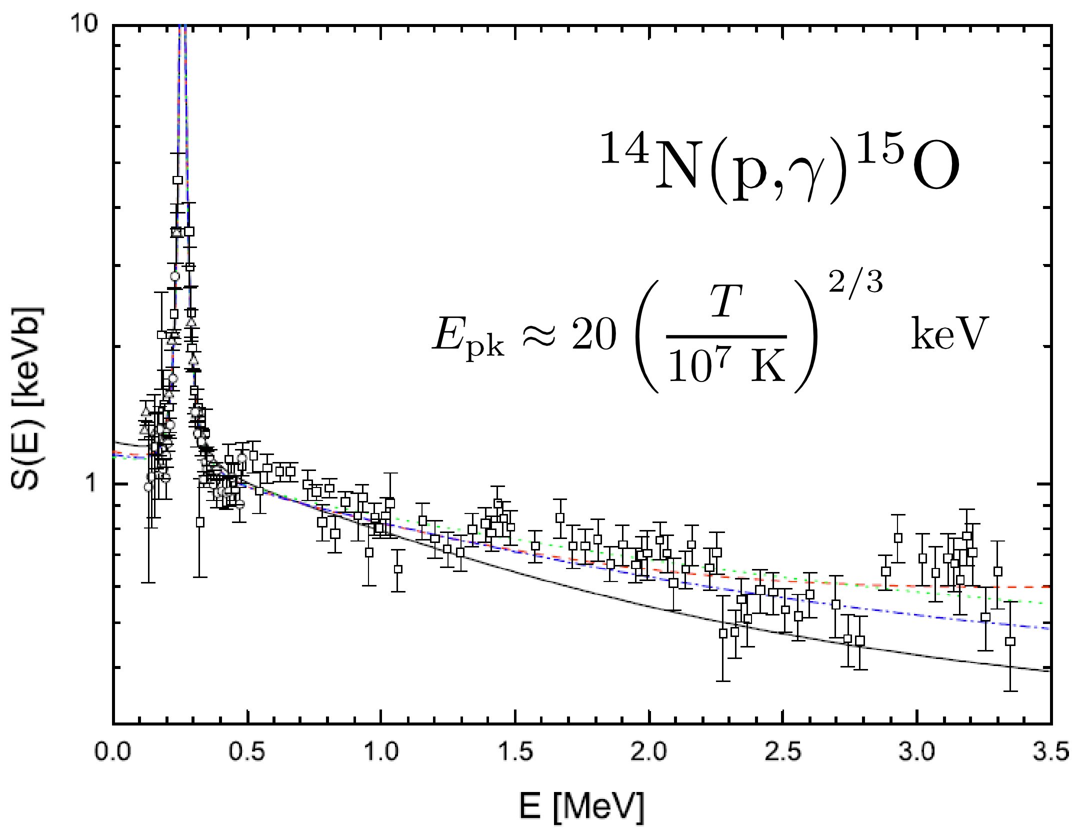


Figures from: Adelberger et al., *Solar fusion cross sections II: the pp chain and CNO cycles,* Rev. Mod. Phys. **83** (2011), 195-246

Астрофизические факторы: CNO цикл

В звёздах реакции идут при низких энергиях, глубоко под кулоновским барьером.
Сечение реакции очень *маленькое* и его невозможно измерять в лаборатории





Figures from: Adelberger et al., *Solar fusion cross sections II: the pp chain and CNO cycles,* Rev. Mod. Phys. **83** (2011), 195-246

CNO цикл

Reaction	Cycle	S(0) keV b	S′(0) b	S″(0) keV^{-1} b	References
$^{12}C(p,\gamma)^{13}N$	I	1.34 ± 0.21	2.6×10^{-3}	8.3×10^{-5}	Recommended: Solar Fusion I
$^{13}C(p,\gamma)^{14}N$	I	7.6 ± 1.0	-7.83×10^{-3}	7.29×10^{-4}	Recommended: Solar Fusion I
		7.0 ± 1.5			NACRE: Angulo *et al.* (1999)
$^{14}N(p,\gamma)^{15}O$	I	1.66 ± 0.12	-3.3×10^{-3}	4.4×10^{-5}	Recommended: this paper
$^{15}N(p,\alpha_0)^{12}C$	I	$(7.3 \pm 0.5)\times10^4$	351	11	Recommended: this paper
$^{15}N(p,\gamma)^{16}O$	II	36 ± 6			Mukhamedzhanov *et al.* (2008)
		64 ± 6			Rolfs and Rodney (1974)
		29.8 ± 5.4			Hebbard (1960)
$^{16}O(p,\gamma)^{17}F$	II	10.6 ± 0.8	-0.054		Recommended: this paper
$^{17}O(p,\alpha)^{14}N$	II		Resonances		Chafa *et al.* (2007)
$^{17}O(p,\gamma)^{18}F$	III	6.2 ± 3.1	1.6×10^{-3}	-3.4×10^{-7}	Chafa *et al.* (2007)
$^{18}O(p,\alpha)^{15}N$	III		Resonances		See text
$^{18}O(p,\gamma)^{19}F$	IV	15.7 ± 2.1	3.4×10^{-4}	-2.4×10^{-6}	Recommended: Solar Fusion I

From: *Solar fusion cross sections II: the pp chain and CNO cycles*
Adelberger et al., Rev. Mod. Phys. **83** (2011), 195-246

Астрофизические факторы: горение углерода и кислорода

В звёздах реакции идут при низких энергиях, глубоко под кулоновским барьером. Сечение реакции очень *маленькое* и его *невозможно* измерять в лаборатории

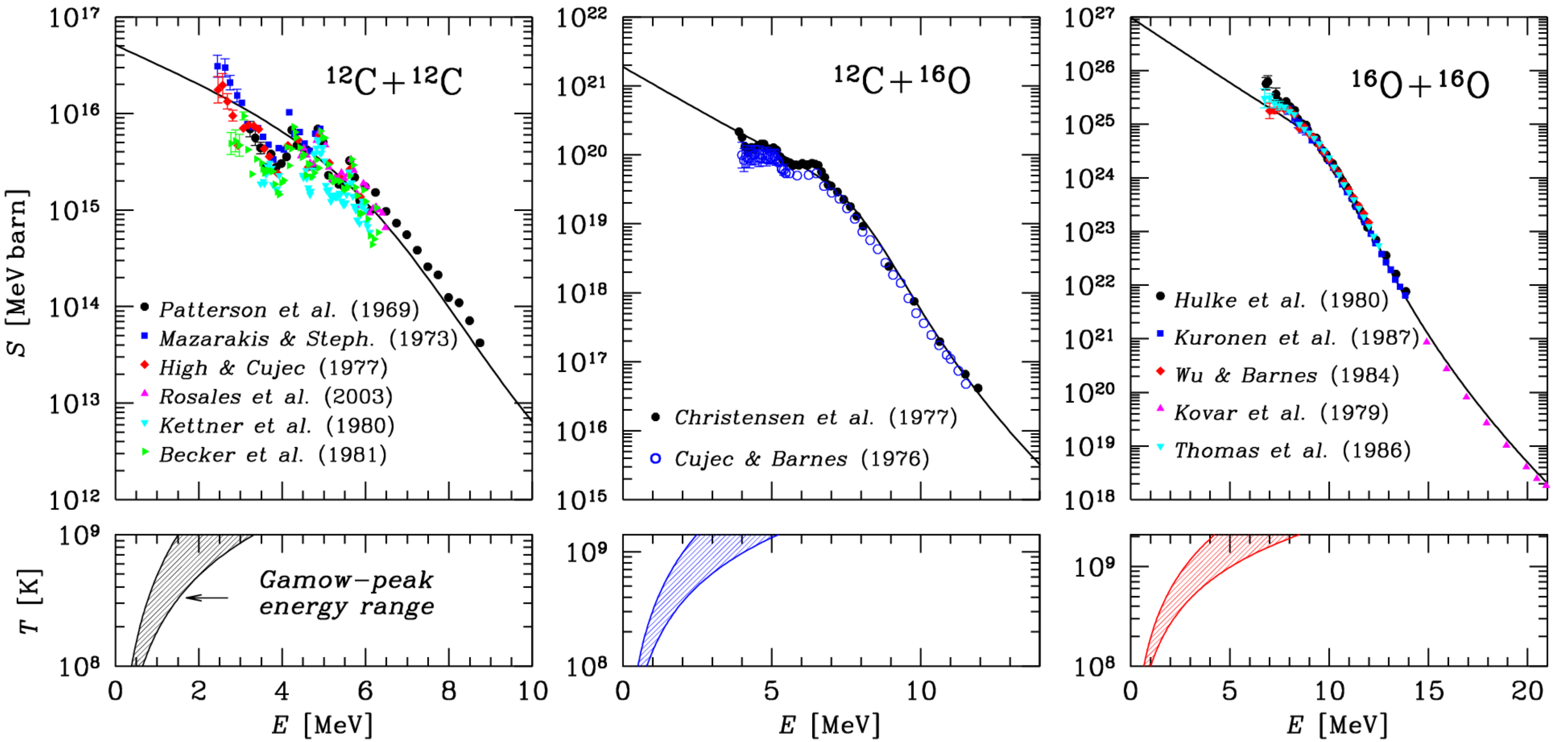


Рисунок из статьи Yakovlev et al., PRC **74** (2006), 035803

Астрофизические факторы: о влиянии погрешностей

Для моделирования ядерного горения в звезде требуется знать зависимость скорости ядерных реакций от параметров

$$R_{ij}(n, \{x_k = n_k/n\}, T) \propto S_{\rm eff}$$

Пусть аппроксимация неточна $\quad S_{\rm eff}^{\rm appr} = (1+\epsilon)\, S_{\rm eff}^{\rm real}$

$$R_{ij}^{\rm calc} = (1+\epsilon)\, R_{ij}^{\rm real}(n, \{x_k\}, T)$$

Но такая скорость реакции реализуется при $\quad \tilde{T} \approx T(1+\epsilon/A_T)$

$$R_{ij}^{\rm calc}(n, \{x_k\}, T) = R_{ij}^{\rm real}(n, \{x_k\}, \tilde{T})$$

$$A_T = \frac{T}{R_{ij}}\frac{\partial R_{ij}}{\partial T} \approx \frac{E_{\rm pk}}{T} - \frac{2}{3} \sim \left\{ \begin{array}{ll} 4, & {\rm pp} \\ 15, & {\rm p} +^{14}{\rm N} \\ 50 & ^{12}{\rm C} +^{12}{\rm C} \end{array} \right.$$

Астрофизические факторы: модель проникновения под барьер

Для моделирования ядерных реакций в звёздах требуется знать сечения реакций при низких энергиях, недоступных для прямого измерения в лаборатории. Эти сечения приходится рассчитывать теоретически (в рамках моделей).

Простейшая модель:

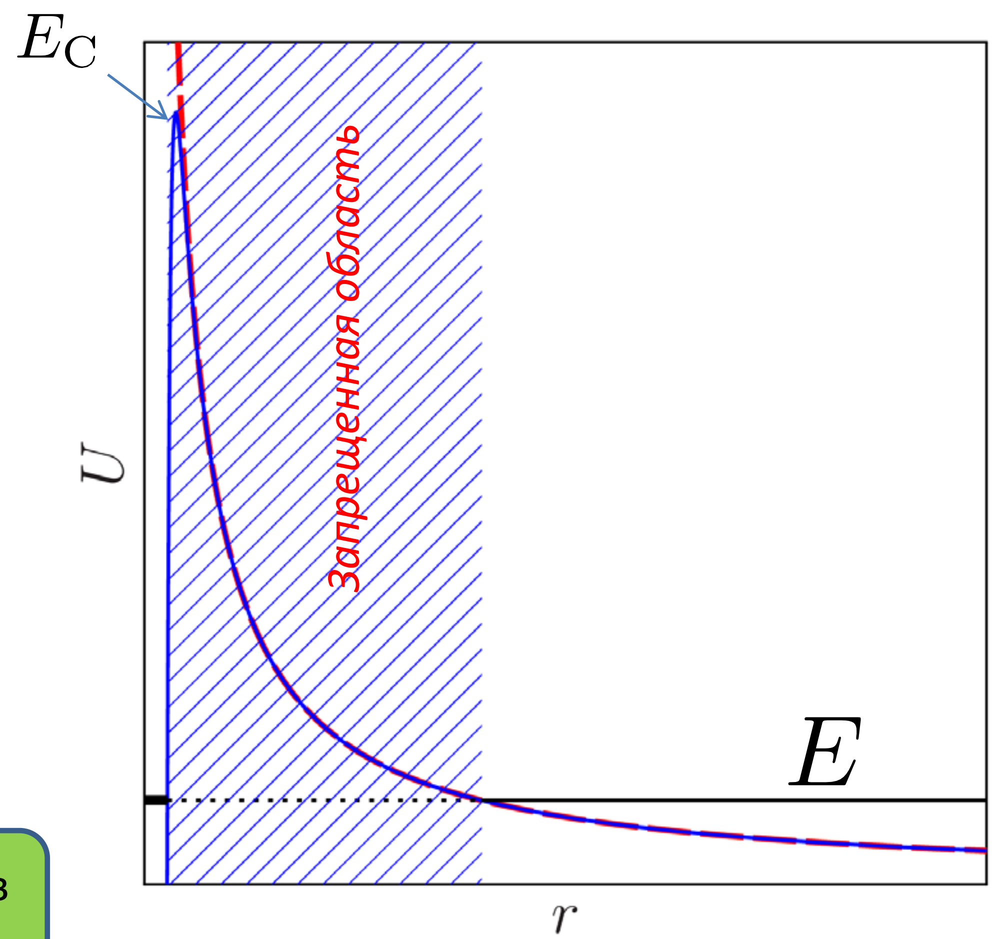
Проникновение под барьер

Эффективный потенциал:

$$U_{\text{eff}} = U_{\text{C}}(R) + U_{\text{nuc}} + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu R^2}$$

Описывает ядерную физику

$$\sigma(E) = \frac{\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{l_{\max}} (2l+1) T_l$$



Рассчитывается вероятность попасть в область ядерного взаимодействия

Астрофизические факторы: модель проникновения под барьер

$$U_{\mathrm{eff}} = U_{\mathrm{C}}(R) + U_{\mathrm{nuc}} + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu R^2}$$

$$\sigma(E) = \frac{\pi}{k^2}\sum_{l=0}^{l_{\max}}(2l+1)T_l = \frac{\pi\hbar^2}{2\mu E}\sum_{l=0}^{l_{\max}}(2l+1)T_l$$

$$T_l = P_l\left[1+\exp(S_l)\right]^{-1}$$

$$S_l = 2\int_{r_1}^{r_2}\frac{\sqrt{2\mu(U_{\mathrm{eff}}-E)}}{\hbar}\mathrm{d}r$$

$$\sigma = \frac{S(E)P(E)}{E}, \quad P(E) = \exp(-2\pi\eta)$$

$$\eta(E) = 2\int_0^{r_2}\frac{\sqrt{2\mu(U_{\mathrm{C}}-E)}}{2\pi\hbar}\mathrm{d}r = \frac{Z_1Z_2e^2}{\hbar v}$$

$$\Rightarrow \quad S(E) = \frac{\pi\hbar^2}{2\mu}\tilde{S}$$

- Влияние ядерного взаимодействия
- Вклад высших мультиполей

Астрофизические факторы: модель проникновения под барьер

$$U_{\text{eff}} = U_{\text{C}}(r) + U_{\text{nuc}} + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu r^2}$$

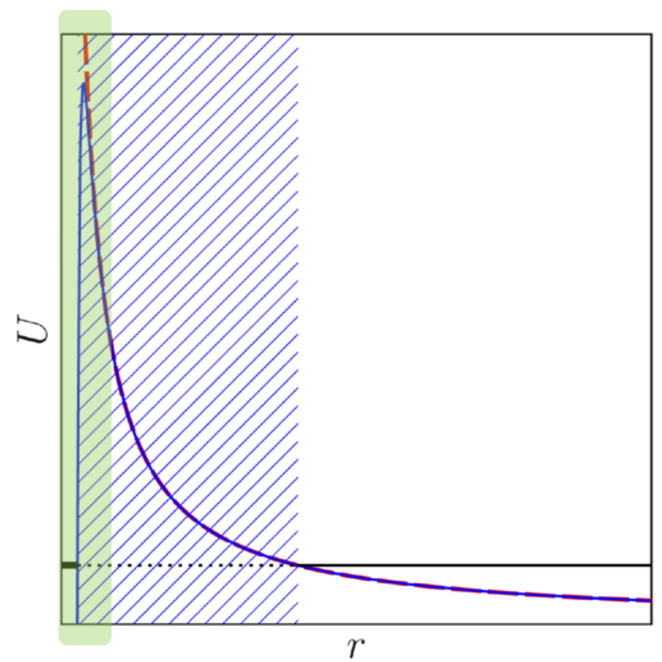
$$\sigma(E) = \frac{\pi}{k^2}\sum_{l=0}^{l_{\max}}(2l+1)T_l = \frac{\pi\hbar^2}{2\mu E}\sum_{l=0}^{l_{\max}}(2l+1)T_l$$

$$T_l = P_l\left[1+\exp(S_l)\right]^{-1} \qquad S_l = 2\int_{r_1}^{r_2}\frac{\sqrt{2\mu(U_{\text{eff}}-E)}}{\hbar}\mathrm{d}r$$

$$S(E) = \frac{\pi\hbar^2}{2\mu}\,\tilde{S}$$

$$l=0: \quad \tilde{S}_{l=0} = \frac{\exp(-2\int_{r_1}^{r_2}\sqrt{2\mu(U_{\text{eff}}-E)}/\hbar\mathrm{d}r)}{\exp(-2\int_{0}^{r_2}\sqrt{2\mu(U_{\text{C}}-E)}/\hbar\mathrm{d}r)}$$

$$\tilde{S}_{l=0} = \frac{\exp(-2\int_{r_1}^{R_0}\sqrt{2\mu(U_{\text{eff}}-E)}/\hbar\mathrm{d}r)}{\exp(-2\int_{0}^{R_0}\sqrt{2\mu(U_{\text{C}}-E)}/\hbar\mathrm{d}r)}$$



Астрофизические факторы: модель проникновения под барьер

$$U_{\text{eff}} = U_{\text{C}}(R) + U_{\text{nuc}} + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu R^2}$$

$$\sigma(E) = \frac{\pi}{k^2}\sum_{l=0}^{l_{\max}}(2l+1)T_l = \frac{\pi\hbar^2}{2\mu E}\sum_{l=0}^{l_{\max}}(2l+1)T_l$$

$$T_l = P_l\left[1+\exp(S_l)\right]^{-1} \qquad S_l = 2\int_{r_1}^{r_2}\frac{\sqrt{2\mu(U_{\text{eff}}-E)}}{\hbar}\mathrm{d}r$$

Простейшая модель: $U_{\text{eff}} = \begin{cases} \dfrac{Z_1Z_2e^2}{r} = E_{\text{C}}\dfrac{R_0}{r}, & r > R_0 \\ -U_0, & r < R_0 \end{cases}$

$$S_{l=0} \approx -4\left(\frac{2\mu R_0^2}{\hbar^2}E_{\text{C}}\right)^{1/2} + bE^{1/2} + \frac{2\sqrt{2\mu}R_0}{3\hbar}\frac{E}{E_{\text{C}}^{1/2}}$$

$$\approx 1.05(\tilde{\mu}RZ_1Z_2)^{1/2} \qquad \approx (\tilde{\mu}R^3/Z_1Z_2)^{1/2}E/8\ \text{MeV}$$

$$S \approx \frac{\pi\hbar^2}{2\mu}\exp\left(1.05(\tilde{\mu}RZ_1Z_2)^{1/2}\right)\exp\left(-(\tilde{\mu}R^3/Z_1Z_2)^{1/2}E/8\ \text{MeV}\right)$$

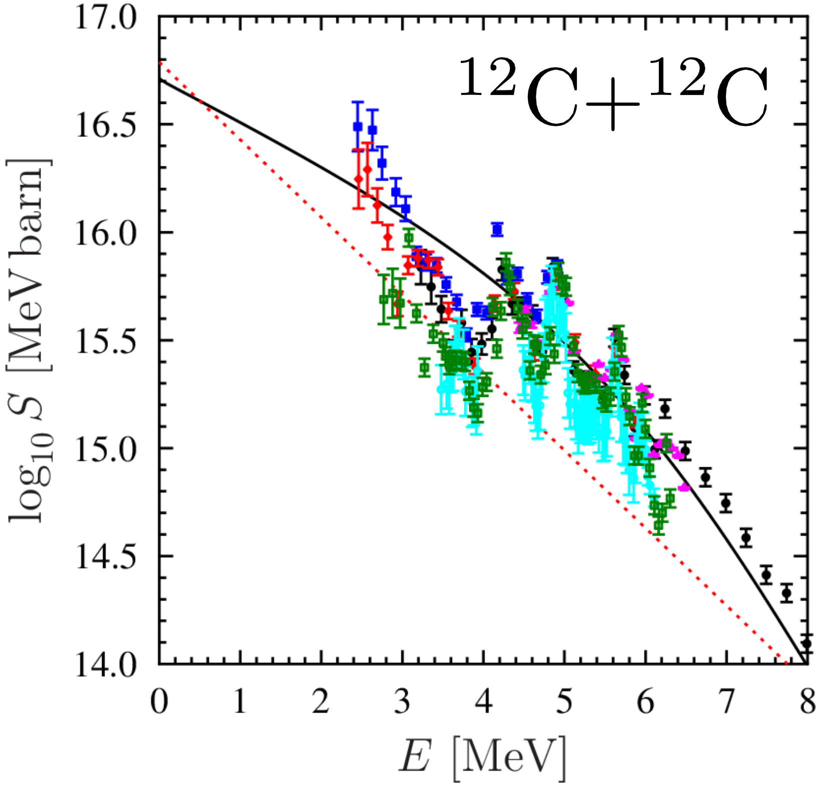
Астрофизические факторы: простейшая модель

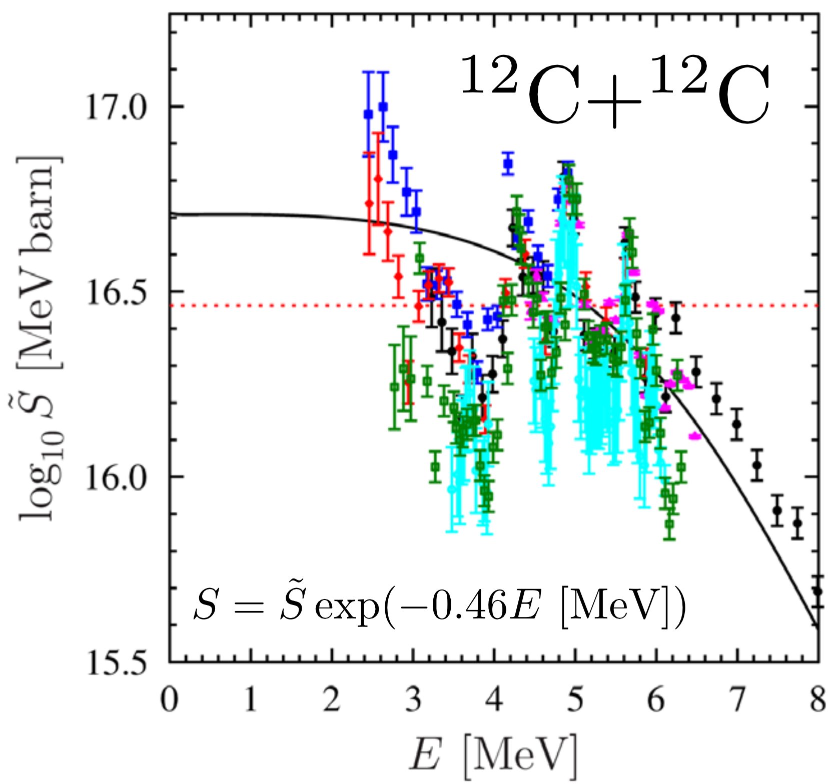
$$U_{\text{eff}} = \begin{cases} \dfrac{Z_1 Z_2 e^2}{r} = E_{\text{C}} \dfrac{R}{r}, & r > R_0 \\ -U_0, & r < R_0 \end{cases}$$

$$R_0 \approx 1.4 \left(A_1^{1/3} + A_2^{1/3} \right) \text{fm}$$

$$S \approx \frac{\pi \hbar^2}{2\mu} \exp\left(1.05 (\tilde{\mu} R Z_1 Z_2)^{1/2}\right) \exp\left(-(\tilde{\mu} R^3 / Z_1 Z_2)^{1/2} E / 8 \text{ MeV}\right)$$

Хорошая аппроксимация астрофизического фактора: $S = \tilde{S} \exp(-E/E_0)$





Астрофизические факторы: модель проникновения под барьер

$$U_{\text{eff}} = U_{\text{C}}(R) + U_{\text{nuc}} + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu R^2}$$

$$\sigma(E) = \frac{\pi}{k^2}\sum_{l=0}^{l_{\max}}(2l+1)T_l = \frac{\pi\hbar^2}{2\mu E}\sum_{l=0}^{l_{\max}}(2l+1)T_l$$

$$T_l = P_l\left[1+\exp(S_l)\right]^{-1}$$

$$S_l = 2\int_{r_1}^{r_2}\frac{\sqrt{2\mu(U_{\text{eff}}-E)}}{\hbar}\mathrm{d}r$$

$$U_{\text{nuc}}(R) = \exp(-4v^2/c^2)\int\rho_2(\mathbf{r}_1)\rho_2(\mathbf{r}_2)V_0\delta(\mathbf{R}-\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)\mathrm{d}\mathbf{r}_1\mathrm{d}\mathbf{r}_2$$

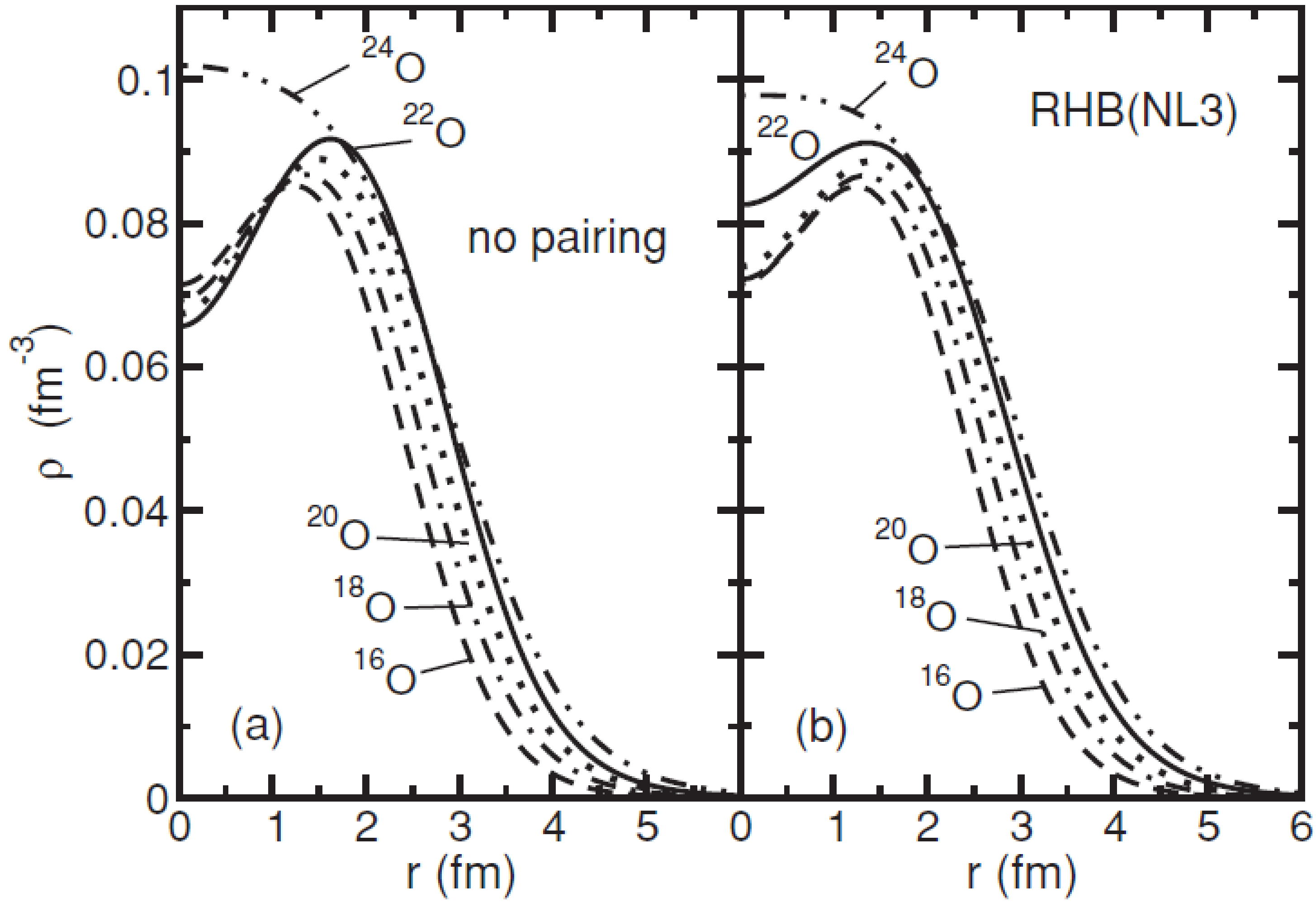
$$V_0 \approx -456\ \text{MeV fm}^{-3}$$

L. R. GASQUES et al., PRC **72** (2005)**, 025806**

Астрофизические факторы: модель проникновения под барьер

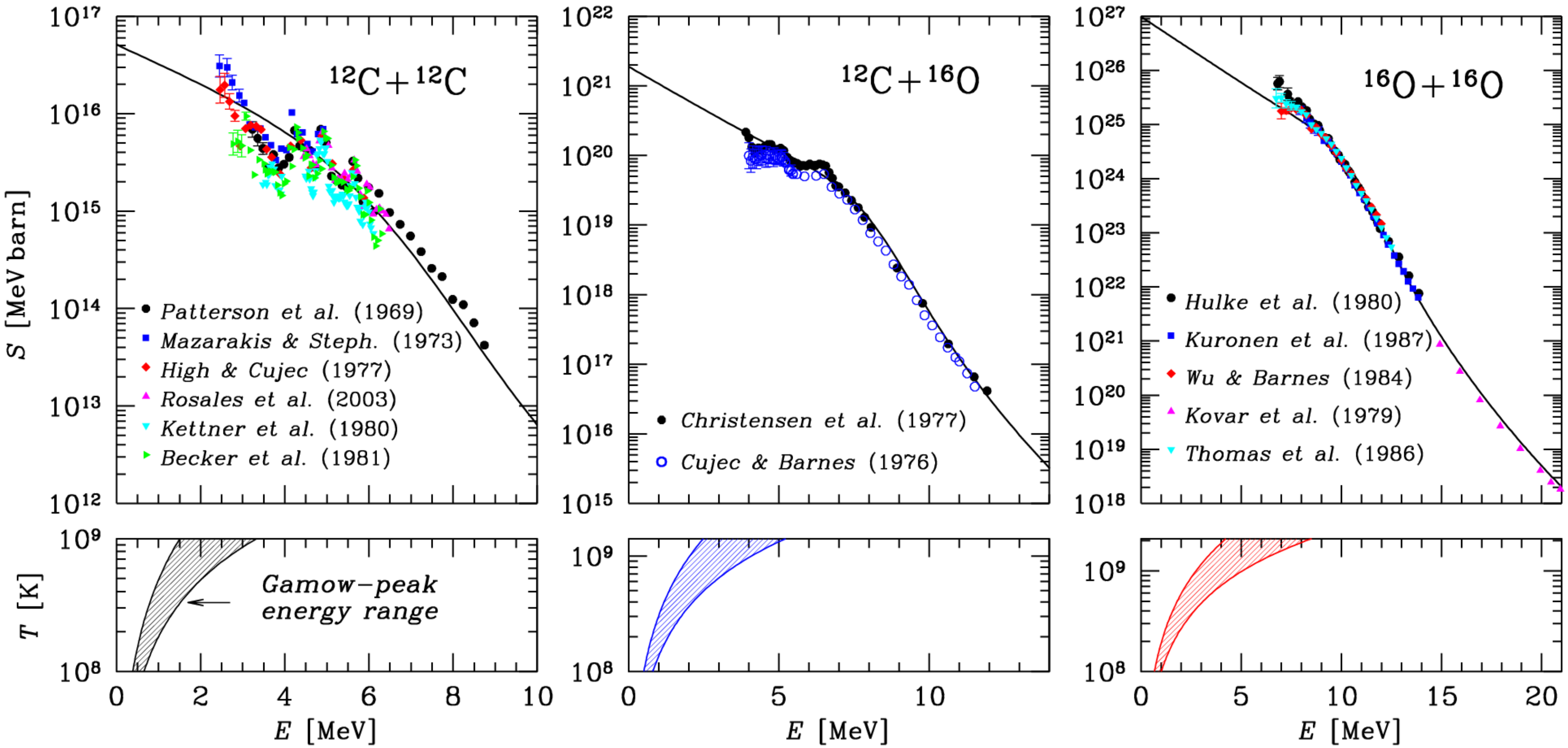
$$U_{\rm nuc}(R) = \exp(-4v^2/c^2) \int \rho_2(\mathbf{r}_1)\rho_2(\mathbf{r}_2)V_0\delta(\mathbf{R}-\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)\mathrm{d}\mathbf{r}_1\mathrm{d}\mathbf{r}_2$$

Релятивистское приближение Хартри-Фока-Боголюбова



L. R. GASQUES et al., PRC **76**, 045802 (2007)

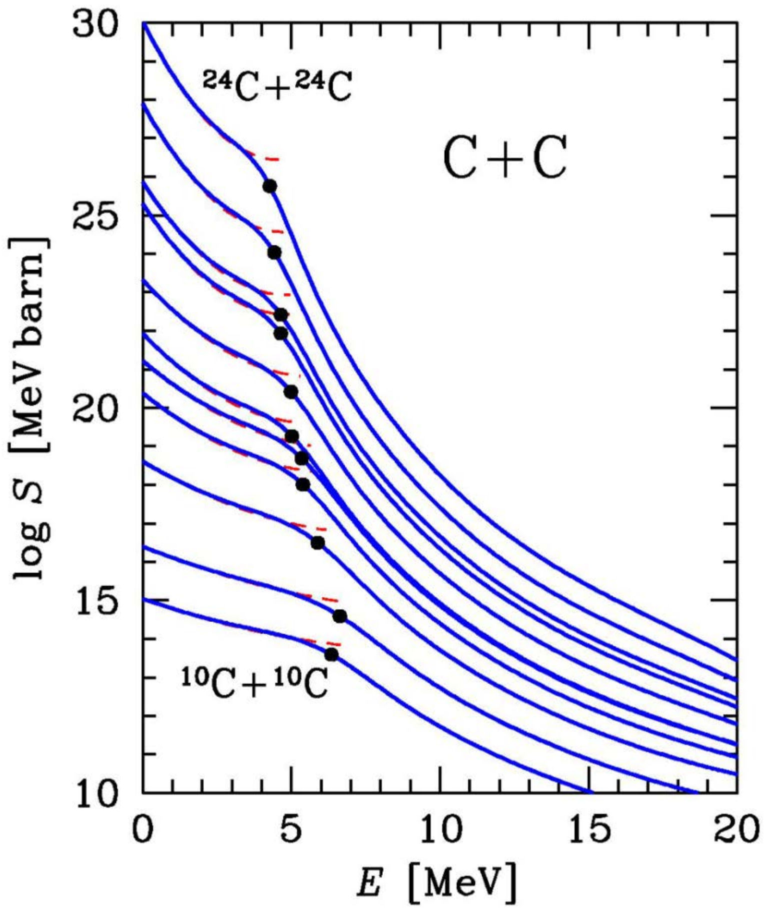
Астрофизические факторы: модель проникновения под барьер

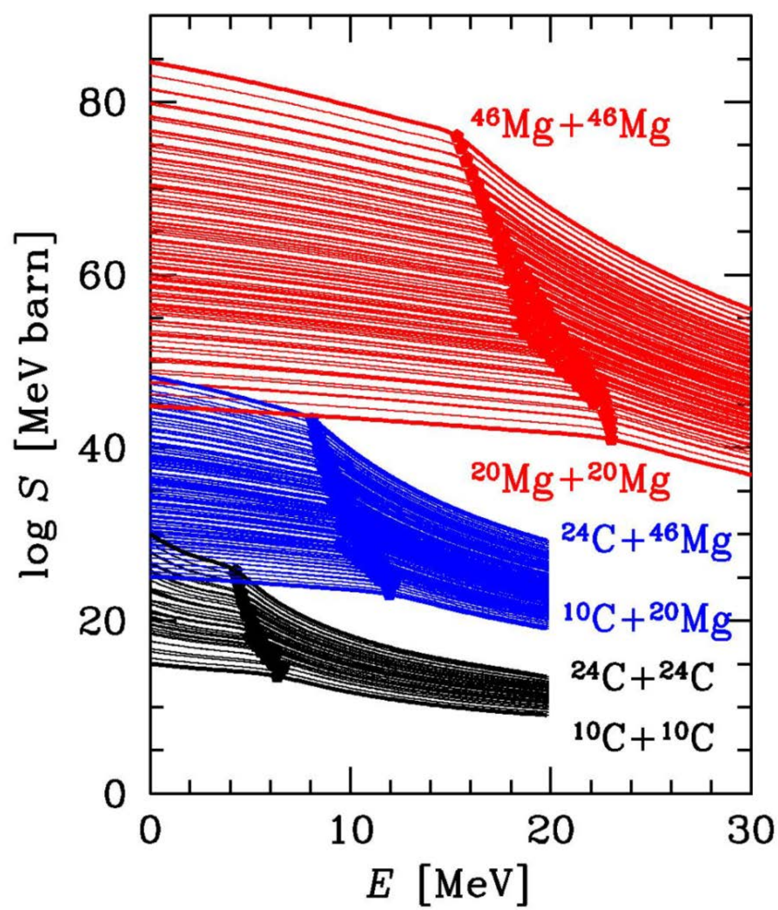


(рисунок из статьи Yakovlev et al., PRC **74** (2006), 035803)

Хорошее согласие с существующими экспериментальными данными позволяет использовать результаты для расчета астрофизических факторов в области гамовского пика, где экспериментальные результаты недоступны, а также для реакций экзотических (нестабильных) атомных ядер

Астрофизические факторы: модель проникновения под барьер





105

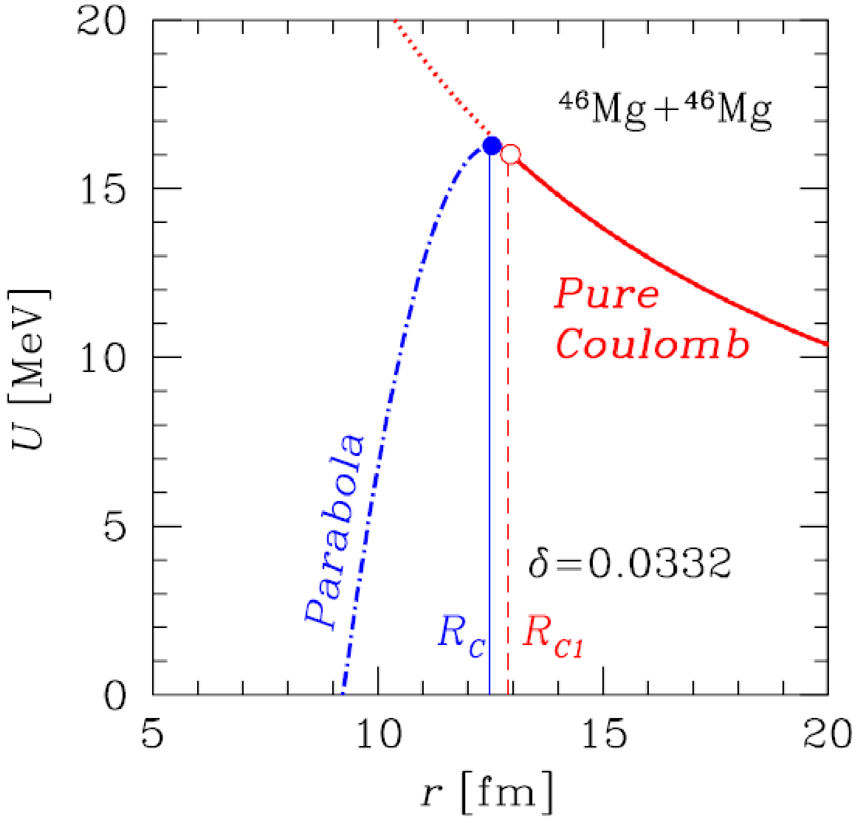
112

36

- Функции S(E) для разных реакций похожи
- S(E) заметно меняется с энергией
- Четко выражены две области энергий – выше и ниже порога E_c
- S(E) сильно меняется от одной реакции к другой

Аналитическая модель для астрофизических факторов

Идея: аппроксимация эффективного потенциала модели проникновения под барьер так, чтобы можно было рассчитать астрофизический фактор аналитически



$$U(r) = \frac{\alpha}{r} \quad \text{at} \quad r \geq R_{C1}$$

$$U(r) = E_C \left[1 - \beta \frac{(r - R_C)^2}{R_C^2} \right] \quad \text{at} \quad r < R_{C1}.$$

U(*r*) описывается двумя параметрами:

$$E_C = U(R_C)$$

$$\delta = (R_{C1} - R_C)/R_C$$

$$R_C = \frac{\alpha(2+3\delta)}{2E_C(1+\delta)^2}, \quad \beta = \frac{1}{\delta(2+3\delta)}, \qquad \alpha = Z_1 Z_2 e^2$$

$$R_{C1} = R_C\,(1+\delta), \quad E_{C1} = U(R_{C1}) = E_C\,\frac{2+2\delta}{2+3\delta}. \qquad E_R = \alpha^2\mu/(2\hbar^2)$$

Yakovlev et al., PRC **82**, 044609 (2010); Afanasjev et al., PRC **85**, 054615 (2012)

Аналитическая модель для астрофизических факторов. Вклад l=0

При E<E_C получается полностью аналитический модельный S-фактор, зависящий от трех параметров: $\boxed{S_0,\ E_c,\ \delta}$

Разложение в ряд Тэйлора при E< E_C:

$$S(E) = S_0 \exp(g_1 + g_2 E + g_3 E^2)$$

g_1 и g_2 берем из аналитической модели

g_3 выберем, чтобы квазиклассический коэффициент прохождения сквозь барьер при E=E_C равнялся 1

Далее g_1 и g_2 берем в пределе $\delta << 1$

$$g_0 = \sqrt{\frac{E_R}{E_C}}\,(8 - \pi\sqrt{2\delta} - 2\delta), \qquad g_1 = -\sqrt{\frac{E_R}{E_C^3}}\left(\frac{4}{3} - \pi\sqrt{2\delta} - \delta\right).$$

$$g_2 = (2\pi\eta_C - g_0 - g_1 E_C)/E_C^2.$$

Аналитическая модель для астрофизических факторов. Вклад *l*=0

При E<E_C получается полностью аналитический модельный S-фактор, зависящий от трех параметров: $\boxed{S_0,\ E_c,\ \delta}$

Разложение в ряд Тэйлора при E< E_C:

$$S(E) = S_0 \exp(g_0 + g_1 E + g_2 E^2)$$

$$g_0 = \sqrt{\frac{E_R}{E_C}}\,(8 - \pi\sqrt{2\delta} - 2\delta), \qquad g_1 = -\sqrt{\frac{E_R}{E_C^3}}\left(\frac{4}{3} - \pi\sqrt{2\delta} - \delta\right).$$

$$g_2 = (2\pi\eta_C - g_0 - g_1 E_C)/E_C^2.$$

Простейшая модель: $$U_{\text{eff}} = \begin{cases} \dfrac{Z_1 Z_2 e^2}{r} = E_{\text{C}}\dfrac{R}{r}, & r > R_0 \\ -U_0, & r < R_0 \end{cases}$$

$$S \approx \frac{\pi\hbar^2}{2\mu}\exp\left(8\sqrt{\frac{E_R}{E_C}} - \frac{4}{3}\sqrt{\frac{E_R}{E_C^3}}\right)$$

$$E_R = \alpha^2\mu/(2\hbar^2)$$

Астрофизические факторы: аналитическая модель. Вклад l>0

$$S(E) = S^{(0)}(E)\, J(E), \quad J(E) = 1 + \sum_{\ell=1}^{\infty}(2\ell+1)\frac{T_\ell(E)}{T_0(E)}$$

$S^{(0)}(E)$ = вклад s-волны
$J(E)$ = вклад волн с l>1, $J(E)=J_0$

Соотношение подобия при $E<E_C$: $$J_0 = 1 + j_0\sqrt{E_C/E_0}.$$

$$E_0 = \hbar^2/(2\mu R_C^2)$$

Окончательно при $E<E_C$: $$\boxed{S(E) = S_{0s} J_0 \exp(g_0 + g_1 E + g_2 E^2)}$$

4 параметра: $S_{0s},\ E_C,\ \delta,\ j_0$

Аналитическая модель для астрофизических факторов. $E>E_C$

При $E=E_C$: становится классически разрешенным s-канал
Далее с ростом E открываются новые каналы $l=1,2,\ldots$

$$\sigma(E) = \frac{\pi}{k^2} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) T_\ell(E)$$

Простейшая модель при $E>E_C$:
$$\begin{cases} T_\ell(E) = 1 \\ T_\ell(E) = 0 \end{cases}$$

$$\sigma(E) = \frac{\pi}{k^2} \left(\ell_0(E) + 1\right)^2.$$

Для нашего модельного потенциала при $l_0(E)\gg 1$:

$$y(E) \equiv (\ell_0 + 1)\ell_0 = \frac{E - E_C}{E_0} \left(1 - \frac{E - E_C}{\beta E_C}\right)$$

При $E=E_C$ классически разрешен s-канал: $\sigma_0(E_C) = \pi/k_C^2$

$$\Rightarrow \boxed{S_{0s} = \frac{\pi\hbar^2}{2\mu} = 0.6566 \, \frac{A_1 + A_2}{A_1 A_2} \ \text{MeV barn}}$$

Три параметра

Аналитическая модель для астрофизических факторов. $E>E_C$

$$\boxed{S(E) = S_{0s}\,\exp(2\pi\eta)\,\sqrt{y^2(E) + J_0^2}}$$

- Применимость: E<~ неск. E_C
- Достоинство: из «первых принципов», исключая узкую область энергий
- 3 независимых параметра для одной реакции:

$$E_C,\ \delta,\ j_0$$

$$E_C = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{R_{12}}$$

$$R_{12} = R + \Delta R_1\,|A_1 - 2Z1| + \Delta R_2\,|A_2 - 2Z2|$$

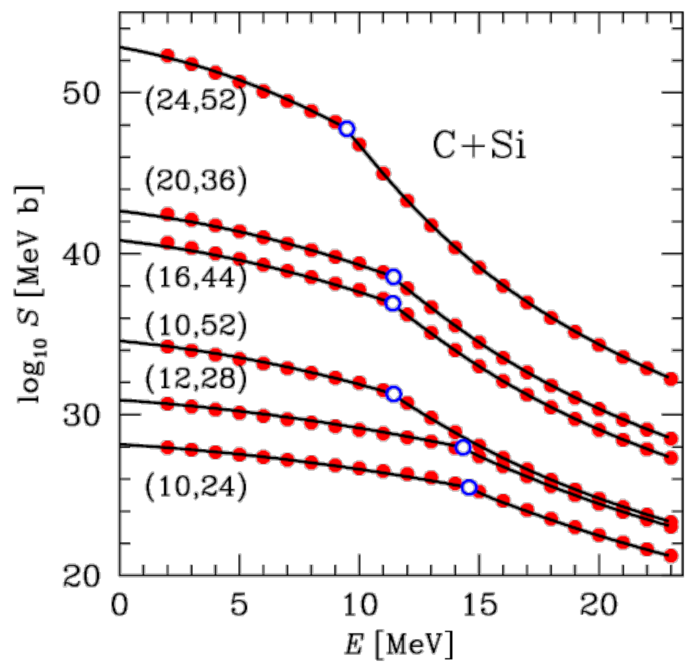
Аналитическая модель для астрофизических факторов

Reaction type	R fm	ΔR_{1a} fm	ΔR_{2a} fm	ΔR_{1b} fm	ΔR_{2b} fm	δ	j_0	$\eta_{\rm rms}$	$\eta_{\max}$	$\widetilde{\eta}_{\max}$
Be+Be	7.5010	0.2480	0.2480	0.1557	0.1557	0.0330	0.7453	0.08	0.37	0.59
Be+B	7.5065	0.2547	0.2223	−1.7469	0.0635	0.0370	0.7814	0.08	0.40	0.54
Be+C	7.6982	0.2543	0.1877	2.0844	−0.0012	0.0441	0.7349	0.09	0.47	0.67
Be+N	7.9324	0.2523	0.1546	7.7591	−0.0233	0.0484	0.7446	0.10	0.41	0.70
Be+O	8.0708	0.2507	0.1346	−0.0738	−0.0271	0.0509	0.7699	0.11	0.44	0.80
Be+F	8.1585	0.2510	0.1201	−0.6214	−0.0272	0.0509	0.8117	0.12	0.48	0.82
Be+Ne	8.1485	0.2510	0.1270	−1.5671	0.0007	0.0513	0.8697	0.13	0.59	1.26
Be+Na	8.2139	0.2494	0.1161	−1.3477	−0.0059	0.0505	0.9065	0.13	0.52	1.10
Be+Mg	8.2734	0.2481	0.1067	−0.5794	−0.0128	0.0499	0.9528	0.14	0.57	1.30
Be+Si	8.3390	0.2462	0.0937	1.8651	−0.0126	0.0481	1.0538	0.16	0.62	1.26
B+B	7.6600	0.2175	0.2175	0.0511	0.0511	0.0459	0.7772	0.07	0.51	0.51
B+C	7.8155	0.2155	0.1839	0.0414	−0.0148	0.0511	0.7919	0.07	0.40	0.43
B+N	8.0004	0.2132	0.1522	0.0334	−0.0359	0.0523	0.8523	0.07	0.37	0.37
B+O	8.1037	0.2117	0.1331	0.0338	−0.0378	0.0520	0.9001	0.08	0.47	0.47
B+F	8.1700	0.2114	0.1188	0.0349	−0.0379	0.0502	0.9575	0.09	0.48	0.51
B+Ne	8.1755	0.2088	0.1244	0.0113	−0.0098	0.0501	1.0353	0.12	0.57	1.08
B+Na	8.2418	0.2075	0.1137	0.0082	−0.0160	0.0492	1.0885	0.11	0.56	0.85
B+Mg	8.3033	0.2064	0.1047	0.0061	−0.0211	0.0485	1.1431	0.12	0.58	1.03
B+Si	8.3977	0.2048	0.0921	0.0035	−0.0201	0.0472	1.2073	0.14	0.59	1.05
C+C	7.8843	0.1836	0.1836	−0.0107	−0.0107	0.0524	0.8476	0.08	0.49	0.49
C+N	8.0464	0.1816	0.1516	−0.0181	−0.0375	0.0515	0.9341	0.08	0.45	0.45
C+O	8.1523	0.1806	0.1324	−0.0173	−0.0393	0.0507	0.9647	0.10	0.51	0.59
C+F	8.2103	0.1804	0.1184	−0.0164	−0.0383	0.0487	1.0425	0.10	0.53	0.58
C+Ne	8.2146	0.1790	0.1239	−0.0293	−0.0089	0.0487	1.1230	0.15	0.64	1.34
C+Na	8.2839	0.1780	0.1132	−0.0306	−0.0165	0.0479	1.1797	0.14	0.63	1.01
C+Mg	8.3785	0.1772	0.1043	−0.0305	−0.0214	0.0477	1.1405	0.16	0.61	1.24
C+Si	8.4392	0.1763	0.0916	−0.0320	−0.0205	0.0461	1.3190	0.16	0.66	1.28

Результаты:

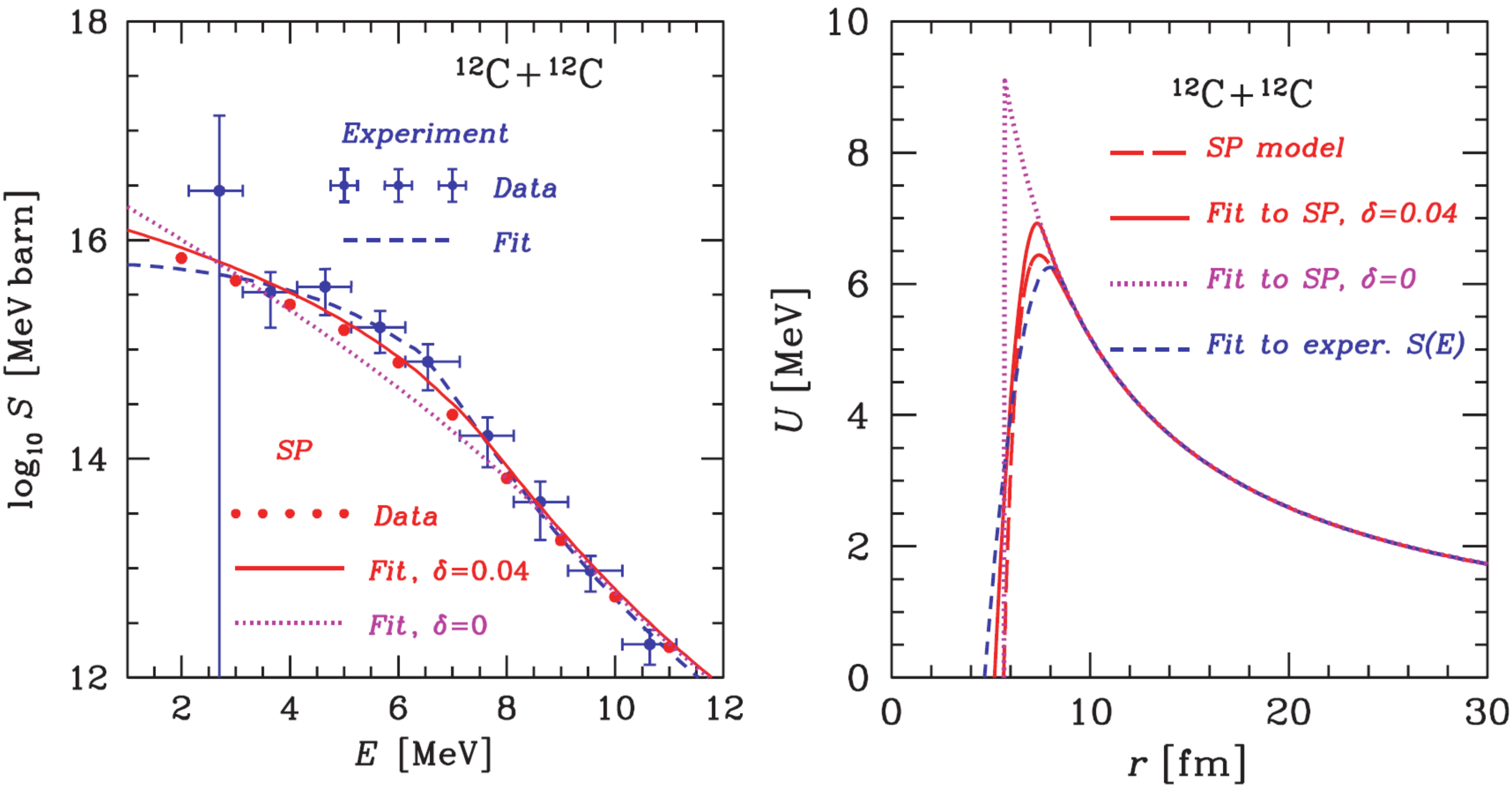
- Компактная, однородная база данных
- Точность подгонки – не хуже точности расчета

Подгоночные параметры – одного порядка



Yakovlev et al., PRC **82**, 044609 (2010); Afanasjev et al., PRC **85**, 054615 (2012)

Аналитическая модель для астрофизических факторов. Восстановление эффективного потенциала



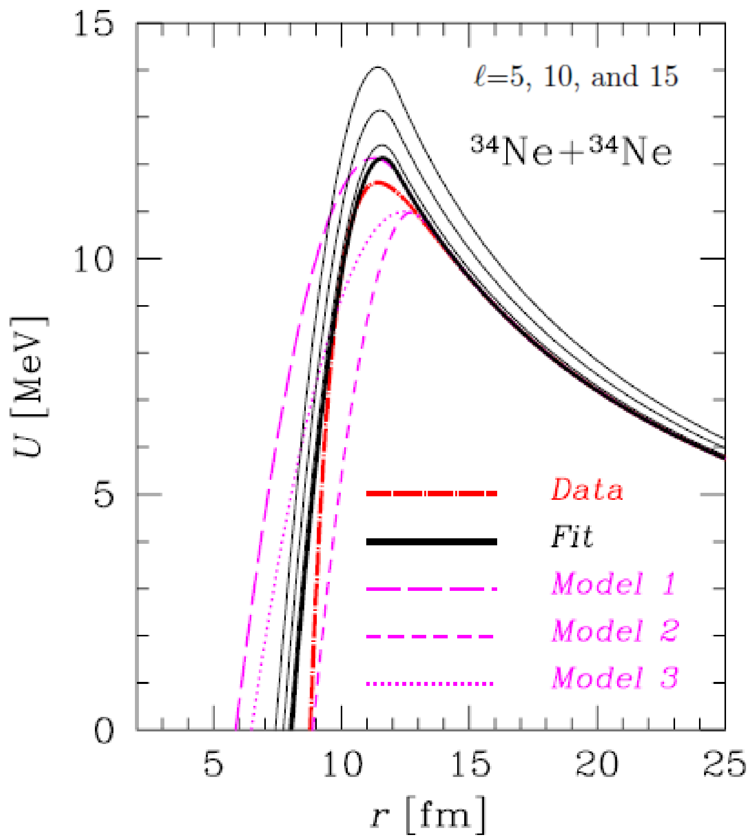
Аналитическая модель для астрофизических факторов: анализ неопределенности в эффективном потенциале

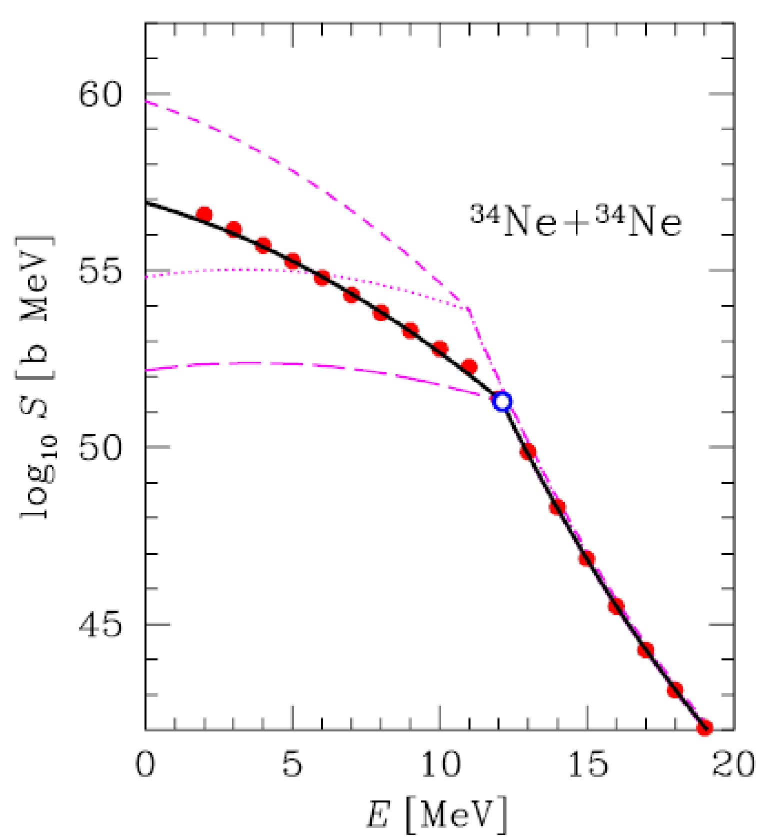
Пример (Haensel and Zdunik 1990):

$$^{34}\mathrm{Ne}+{}^{34}\mathrm{Ne}\rightarrow{}^{68}\mathrm{Ca}$$

$$\rho \approx 1.7\times10^{12}\ \mathrm{g\ cm^{-3}}$$

	E_C, MeV	*delta*
Fit	12.137	0.0441
Model 1	12.137	0.1
Model 2	11	0.0441
Model 3	11	0.1





Лекция 1 . Термоядерные реакции в звёздной плазме

• Основной вклад в термоядерное горение вносят надтепловые частицы (гамовский пик)
• Резонансы способны существенно усиливать скорость реакции
• Скорость реакции быстро растёт с ростом температуры
• Экспериментальные данные о сечениях ядерных реакций в области гамовского пика доступны лишь для лёгких ядер
• Теоретический расчет сечений (астрофизических факторов) удобно проводить в модели проникновения под барьер.
• Эффективный потенциал отличается от кулоновского лишь для расстояний порядка радиуса ядра

Лекция 2. Пять режимов ядерных реакций в звёздной плазме

Плазма экранирует кулоновское отталкивание реагирующих частиц, меняя эффективный потенциал на расстояниях порядка расстояния между частицами