Рассматривается гамильтониан $\hat{h}_{\mu\lambda}$ описывающий движение одной частицы на d ($d = 1, 2, 3$)- мерной решетке, где μ (соотв. λ) энергия взаимодействия частиц, находящихся на одном узле (соотв. соседних узлах) решетки.
Пусть $\ell^2_e(\mathbb{Z}^d)$– пространство кв.сум-х ф-й.на $\mathbb{Z}^d$.
В коорд. представлениии свободный гамильтониан одной частицы, движущейся на $\mathbb{Z}^d$, асс-я с ограниченным самосопряженным оператором, действующим $\ell^2(\mathbb{Z}^d)$:

$$(\hat{h}_0\hat{\varphi})(x) = \sum_{s\in\mathbb{Z}^d} \hat{\varepsilon}(x - s)\hat{\varphi}(s), \quad \hat{\varphi} \in \ell^2(\mathbb{Z}^d).$$

Здесь функция $\hat{\varepsilon}(\cdot)$ определена на $\mathbb{Z}^d$ по формуле

$$\hat{\varepsilon}(s) = \begin{cases} d, & \text{при} \quad |s| = 0 \\ -\frac{1}{2}, & \text{при} \quad |s| = 1 \\ 0, & \text{при} \quad |s| > 1, \end{cases}$$

$$s = (s^{(1)}, \dots, s^{(d)}) \in \mathbb{Z}^d, \qquad |s| = |s^{(1)}| + \dots + |s^{(d)}|.$$

В координатном представлении (полный) гамильтониан одной частицы в потенциальном поле $\hat{v}_{\mu\lambda}$ определяется как ограниченное возмущение свободного гамильтониана $\hat{h}_0$:

$$\hat{h}_{\mu\lambda} = \hat{h}_0 - \hat{v}_{\mu\lambda}.$$

Здесь $\hat{v}_{\mu\lambda}$ оператор умножения на функцию $\hat{v}_{\mu\lambda}(\cdot)$ в $\ell^2(\mathbb{Z}^d)$, т.е.

$$(\hat{v}_{\mu\lambda}\hat{\varphi})(x) = \hat{v}_{\mu\lambda}(x)\hat{\varphi}(x), \quad \hat{\varphi} \in \ell^2(\mathbb{Z}^d).$$

Функция $\hat{v}_{\mu\lambda}(\cdot)$ определена на $\mathbb{Z}^d$ следующим образом

$$\hat{v}_{\mu\lambda}(s) = \begin{cases} \mu, & \text{при} \quad |s| = 0 \\ \frac{\lambda}{2}, & \text{при} \quad |s| = 1 \\ 0, & \text{при} \quad |s| > 1 \end{cases},$$

где числа $\mu \geq 0$ и $\lambda \geq 0$ одновременно не равны нулю. $\hat{h}_{\mu\lambda}$ яв-ся огр-ым с-ным оп-ом в $\ell^2(\mathbb{Z}^d)$.

Пусть $L^2(\mathbb{T}^d)$– гильбертово пространство квадратично-интегрируемых функций на $\mathbb{T}^d$, и $L^2_e(\mathbb{T}^d) \subset L^2(\mathbb{T}^d)$– подпространство четных функций.

В импульсном представлении гамильтониан $h_{\mu\lambda}$ является ограниченным самосопряженным оператором в $L^2_e(\mathbb{T}^d)$

$$h_{\mu\lambda} = h_0 - v_{\mu\lambda},$$

где h_0– оператор умножения на функцию ε:

$$(h_0 f)(p) = \varepsilon(p) f(p), \ \ \varepsilon(p) = \sum_{i=1}^{d} (1 - \cos p^{(i)}),$$

$$p = (p^{(1)}, p^{(2)}, \ldots, p^{(d)}) \in \mathbb{T}^d, \quad f \in L_e^2(\mathbb{T}^d)$$

$v_{\mu\lambda}$– ин-ный оп-р ранга не больше $d+1$:

$$(v_{\mu\lambda} f)(p) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{\mathbb{T}^d} \left(\mu + \lambda \sum_{i=1}^{d} \cos p^{(i)} \cos t^{(i)} \right) f(t) dt.$$

Так как возмущенный оператор $v_{\mu\lambda}$ есть интегральный оператор и его ранг не больше $d+1$, согласно теореме Вейля

$$\sigma_{cont}(h_{\mu\lambda}) = \sigma(h_0) = [0,\, 2d].$$

Рассмотрим следующую ортгональную систему в $L_e^2(\mathbb{T}^d)$:

$$\alpha_0 = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}, \quad \alpha_i(p) = \frac{\sqrt{2}}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \cos p^{(i)}, \quad i = \overline{1, d}.$$

Оператор $v_{\mu\lambda}$ представляется в виде:

$$v_{\mu\lambda} f = \mu \alpha_0 (f, \alpha_0) + \frac{\lambda}{2} \sum_{i=1}^{d} (f, \alpha_i) \alpha_i,$$

где $(\cdot, \cdot)$– скалярное произ-е в $L_e^2(\mathbb{T}^d)$.

Пусть $r_0(z)$, $z \in \mathbb{C}\setminus[0, 2d]$– резольвента h_0.
Положим

$$a(z) = (\alpha_0, r_0(z)\alpha_0) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{\mathbb{T}^d} \frac{dq}{\varepsilon(q) - z},$$

$$b(z) = (\alpha_0, r_0(z)\alpha_i) = \frac{\sqrt{2}}{(2\pi)^d} \int\limits_{\mathbb{T}^d} \frac{\cos q^{(i)} dq}{\varepsilon(q) - z},$$

$$c(z) = (\alpha_i, r_0(z)\alpha_i) = \frac{2}{(2\pi)^d} \int\limits_{\mathbb{T}^d} \frac{\cos^2 q^{(i)} dq}{\varepsilon(q) - z}, \tag{1}$$

$$d(z) = (\alpha_i, r_0(z)\alpha_j) = \frac{2}{(2\pi)^d} \int\limits_{\mathbb{T}^d} \frac{\cos q^{(i)} \cos q^{(j)} dq}{\varepsilon(q) - z},$$

$z < 0, \quad i, j = \overline{1, d}, \;\; i \neq j.$

Для любых фиксированных $\mu, \lambda \geq 0$ и $z \in \mathbb{C} \backslash [0, 2d]$ определим конечномерный интегральный оператор Бирмана-Швингера $G_{\mu\lambda}(z)$, действующий в $L_e^2(\mathbb{T}^d)$

$$G_{\mu\lambda}(z) = v_{\mu\lambda}^{\frac{1}{2}} r_0(z) v_{\mu\lambda}^{\frac{1}{2}}.$$

Для любых $\mu, \lambda \geq 0$ определим определитель оператора $h_{\mu\lambda} - zI$ как определитель Фредгольма оператора $I - G_{\mu\lambda}(z)$

$$\Delta(\mu, \lambda; z) := det(h_{\mu\lambda} - zI) := det(I - G_{\mu\lambda}(z)). \qquad (2)$$

Очевидно, что функция $\Delta(\mu, \lambda; \cdot)$ является аналитической в $\mathbb{C}\backslash[0, 2d]$.

Lemma

$\forall\ \mu, \lambda \geq 0$ и $z \in \mathbb{C}\backslash[0, 2d]$ верны

$$\Delta_d(\mu, \lambda; z) = \Delta_d^{(1)}(\mu, \lambda; z)\Big(\Delta_d^{(22)}(\lambda; z)\Big)^{d-1},$$

$$\Delta_d(0, \lambda; z) = \Delta_d^{(21)}(\lambda; z)\Big(\Delta_d^{(22)}(\lambda; z)\Big)^{d-1},$$

$$\Delta_d^{(1)}(\mu, \lambda; z) = (1 - \mu a(z))\Delta_d^{(21)}(\lambda; z) - \frac{\mu\lambda d}{2} b^2(z),$$

$$\Delta_d^{(21)}(\lambda; z) = 1 - \frac{\lambda}{2}\big(c(z) + (d-1)d(z)\big),$$

$$\Delta_d^{(22)}(\lambda; z) = 1 - \frac{\lambda}{2}\big(c(z) - d(z)\big), d = 1, 2, 3.$$

Замечание

Оператор $v_{\mu\lambda}$ отображает гильбертово пространство $L_e^2(\mathbb{T}^d)$ в подпространство L_{d+1} натянутое на векторы 1 и $\cos p^{(i)} \quad i = \overline{1, d}$. .

Замечание

$h_{\mu\lambda}$ не имеет собственных значений, лежащих правее непрерывного спектра $[0, 2d]$.

Lemma

Для любых $\mu, \lambda \geq 0$ число $z < 0$ является собственным значением оператора $h_{\mu\lambda}$ тогда и только тогда, когда число 1 является собственным значением самосопряженного оператора $G_{\mu\lambda}(z)$.

Lemma

(Принцип Бирмана-Швингера). Для любых $\mu, \lambda \geq 0$ число собственных значений оператора $h_{\mu\lambda}$, лежащих левее точки $z < 0$, совпадает с числом собственных значений оператора $G_{\mu\lambda}(z)$, лежащих правее точки 1.

Lemma

Для любых $\mu, \lambda \geq 0$ число $z \in \mathbb{C} \backslash [0, 2d]$ яв-ся $m-$ кратным с. з-ем $h_{\mu\lambda}$ тогда и только тогда, когда оно я-ся $m-$ кратным нулем ф-и $\Delta(\mu, \lambda; z) = 0$.

Пусть $d = 1$. Тогда

$$\sigma_{cont}(h_{\mu\lambda}) = \sigma(h_0) = [0, 2].$$

Theorem

a). Пусть $\mu > 0$. Тогда $h_{\mu 0}$ имеет един-ное соб-ное з-е $\zeta_1^{(1)}(\mu) < 0$;
b). Пусть $\lambda > 0$. Тогда $h_{0\lambda}$ имеет един-ное соб-ное з-е $\zeta_2^{(1)}(\lambda) < 0$.

Положим

$$\zeta^{(1)}_{min}(\mu,\lambda) = min\{\zeta^{(1)}_1(\mu), \zeta^{(1)}_2(\lambda)\},$$
$$\zeta^{(1)}_{max}(\mu,\lambda) = max\{\zeta^{(1)}_1(\mu), \zeta^{(1)}_2(\lambda)\};$$
$$G^{(0)}_{12} = \{(\mu,\lambda) \in \mathbb{R}^2_+ : \mu\lambda = \mu + \lambda\}.$$

Theorem

a). Пусть $(\mu,\lambda)\in G_{11}$. Тогда оператор $h_{\mu\lambda}$ имеет ед-ное соб-ное зн-ие $z^{(11)}(\mu,\lambda)<\zeta^{(1)}_{min}(\mu,\lambda)<0$.
b) Пусть $(\mu,\lambda)\in G_{12}$. Тогда $h_{\mu\lambda}$ им-т двух собст-х зн-й $z^{(11)}(\mu,\lambda)$ и $z^{(12)}(\mu,\lambda)$;

$$z^{(11)}(\mu,\lambda)<\zeta^{(1)}_{min}(\mu,\lambda)\le\zeta^{(1)}_{max}(\mu,\lambda)<z^{(12)}(\mu,\lambda)<0.$$

Lemma

$\forall\mu,\lambda\ge 0$ им. место асимп. разл.

$$\Delta_1(\mu,\lambda;z)=C_{-\frac{1}{2}}(\mu,\lambda)(-z)^{-\frac{1}{2}}+C_0(\mu,\lambda)$$

$$+\,O((-z)^{\frac{1}{2}}),z\to 0-,$$

$$C_{-\frac{1}{2}}(\mu,\lambda)=\frac{\mu\lambda-(\mu+\lambda)}{\sqrt{2}},\ C_0(\mu,\lambda)=1-\lambda(\mu-1).$$

Пусть $d = 2$. Тогда

$$\sigma_{cont}(h_{\mu\lambda}) = \sigma(h_0) = [0,\, 4].$$

Положим $\lambda^0 = 2(c(0) - d(0))^{-1}$.

Lemma

$\forall \mu, \lambda \geq 0$ им. место асимп. разл.

$$\Delta_2(\mu, \lambda; z) = \left(1 - \frac{\lambda}{2}(c(0) - d(0))\right)\Big[C(\mu, \lambda)\ln(-z)$$

$$+\, C_0(\mu, \lambda)\Big] + O(-z), z \to 0-;$$

$$C(\mu, \lambda) = \frac{1}{2\pi^2}\Big((\mu + 2\lambda)\pi - 2\mu\lambda\Big),$$

$$C_0 = \frac{1}{\pi^2}\Big((\pi + 2\lambda)\pi - 2\mu\lambda\Big)$$

Theorem

a). $\forall\, \mu > 0$ $h_{\mu 0}$ им.ед. с.зн.$\zeta_1^{(2)}(\mu) < 0$;

b). Пусть $0 < \lambda \le \lambda^0$. Тогда $h_{0\lambda}$ им.ед. с.зн. $\zeta_2^{(2)}(\lambda) < 0$;

c). Пусть $\lambda > \lambda^0$. То $h_{0\lambda}$ им.двух с.з. . $\zeta_2^{(2)}(\lambda) < z^{(23)}(\lambda) < 0$.

Положим

$$\zeta_{min}^{(2)}(\mu,\lambda) = min\{\zeta_1^{(2)}(\mu), \zeta_2^{(2)}(\lambda)\},$$
$$\zeta_{max}^{(2)}(\mu,\lambda) = max\{\zeta_1^{(2)}(\mu), \zeta_2^{(2)}(\lambda)\}.$$

Пусть

$$G_{21} = \{(\mu,\lambda) \in \mathbb{R}_+^2 : \mu\lambda \le \frac{(\mu+2\lambda)\pi}{2}\},$$
$$G_{22} = \{(\mu,\lambda) \in \mathbb{R}_+^2 : \mu\lambda > \frac{(\mu+2\lambda)\pi}{2}\}.$$

Theorem

a). Пусть $0 < \lambda \leq \lambda^0$ и $(\mu, \lambda) \in G_{21}$. Тогда оператор $h_{\mu\lambda}$ имеет единственное собственное значение $z^{(21)}(\mu, \lambda) < \zeta^{(2)}_{min}(\mu, \lambda) < 0$.
b). Пусть $0 < \lambda \leq \lambda^0$ и $(\mu, \lambda) \in G_{22}$. Тогда оператор $h_{\mu\lambda}$ имеет двух соб-ных зн-й $z^{(21)}(\mu, \lambda)$ и $z^{(22)}(\mu, \lambda)$,

$$z^{(21)}(\mu, \lambda) < \zeta^{(2)}_{min}(\mu, \lambda) \leq \zeta^{(2)}_{max}(\mu, \lambda) < z^{(22)}(\mu, \lambda) < 0;$$

c). Пусть $\lambda > \lambda^0$ и $(\mu, \lambda) \in G_{21}$. Тогда $h_{\mu\lambda}$ имеет двух соб-ных зн-й $z^{(21)}(\mu, \lambda)$ и $z^{(23)}(\lambda)$; $z^{(21)}(\mu, \lambda) < z^{(23)}(\lambda) < 0$.
d). Пусть $\lambda > \lambda^0$ и $(\mu, \lambda) \in G_{22}$.То $h_{\mu\lambda}$ имеет трех соб-ных зн-й $z^{(21)}(\mu, \lambda)$, $z^{(22)}(\mu, \lambda)$, и $z^{(23)}(\lambda) < 0$. При этом $z^{(21)}(\mu, \lambda) < z^{(22)}(\mu, \lambda) < 0$ и $z^{(21)}(\mu, \lambda) < z^{(23)}(\lambda) < 0$.

Пусть $d = 3$. Тогда

$$\sigma_{cont}(h_{\mu\lambda}) = \sigma(h_0) = [0, 6].$$

Пусть $r_0(z)$, $z \in \mathbb{C} \backslash [0, 6]-$ резольвента оператора h_0.

Замечание

По определению виртуальный уровень $z = 0$ являются ОТНС $h_{\mu\lambda}$. ОТНС может быть соб-м зн-м (см. утверждения $c1$) и $c3$) теоремы 15) оп-а $h_{\mu\lambda}$. Более того, ОТНС может быть одновременно вирт-м ур-м и собственным значением (см. утверждение $c2$) теоремы 15) оп-а $h_{\mu\lambda}$.

Пусть

$$\mu^0 = (a(0))^{-1},\ \lambda_1^0 = (3\sqrt{2}b(0)/2)^{-1},\ \lambda_2^0 = 2(c(0) - d(0))^{-1}.$$

Заметим, что $\lambda_2^0 > \lambda_1^0$.

Theorem

$a1$). Пусть $0 < \mu < \mu^0$. Тогда оператор $h_{\mu 0}$ не имеет собственных значений в $(-\infty, 0)$ и точка $z = 0$ является РТНС оператора $h_{\mu 0}$;
$a2$). Пусть $\mu = \mu^0$. Тогда число $z = 0$ является виртуальным уровнем оператора $h_{\mu 0}$, и оператор $h_{\mu 0}$ не имеет собственных значений в $(-\infty, 0)$;
$a3$). Пусть $\mu > \mu^0$. Тогда оператор $h_{\mu 0}$ имеет единственное собственное значение $\zeta_1^{(3)}(\mu) < 0$, и точка $z = 0$ является РТНС оператора $h_{\mu 0}$;
$b1$). Пусть $0 < \lambda < \lambda_1^0$. Тогда оператор $h_{0\lambda}$ не имеет собственных значений в $(-\infty, 0)$ и точка $z = 0$ является РТНС оператора $h_{0\lambda}$;

$b2$). Пусть $\lambda = \lambda_1^0$. Тогда число $z = 0$ является виртуальным уровнем оператора $h_{0\lambda}$, и оператор $h_{0\lambda}$ не имеет собственных значений в $(-\infty, 0)$;
$b3$). Пусть $\lambda_1^0 < \lambda < \lambda_2^0$. Тогда оператор $h_{0\lambda}$ имеет единственное собственное значение $\zeta_2^{(3)}(\lambda) < 0$ и точка $z = 0$ является РТНС оператора $h_{0\lambda}$;
$b4$). Пусть $\lambda = \lambda_2^0$. Тогда число $z = 0$ является двукратным собственным значением оператора $h_{0\lambda}$. Кроме того, оператор $h_{0\lambda}$ имеет единственное собственное значение $\zeta_2^{(3)}(\lambda) < 0$;
$b5$). Пусть $\lambda > \lambda_2^0$. То $h_{0\lambda}$ имеет три соб-х зн-й (с уч. крат.) $\zeta_2^{(3)}(\lambda) < z^{(32)}(\lambda) = z^{(33)}(\lambda) < 0$ и $z = 0$ яв-я РТНС оп-а $h_{0\lambda}$.

Положим

$$\zeta^{(3)}_{min}(\mu,\lambda) = min\{\zeta^{(3)}_1(\mu), \zeta^{(3)}_2(\lambda)\},\ \zeta^{(3)}_{max}(\mu,\lambda) = max\{\zeta^{(3)}_1(\mu), \zeta^{(3)}_2(\lambda)\}.$$

Theorem

$a1$) Пусть $0 < \lambda \leq \lambda_1^0$ и $(\mu,\lambda) \in G_{30}$. Тогда $h_{\mu\lambda}$ не имеет с.з. в $(-\infty, 0)$ и $z = 0$ я-ся РТНС $h_{\mu\lambda}$;
$a2$) Пусть $0 < \lambda \leq \lambda_1^0$ и $(\mu,\lambda) \in G_{31}^{(0)}$. Тогда $z = 0$ я-ся вирт. ур. $h_{\mu\lambda}$ и $h_{\mu\lambda}$ не имеет с.зн. в $(-\infty, 0)$;
$a3$) Пусть $0 < \lambda < \lambda_2^0$ и $(\mu,\lambda) \in G_{31}$. Тогда $h_{\mu\lambda}$ им. ед. с.зн. При этом $z^{(31)}(\mu,\lambda) < \zeta^{(3)}_{min}(\mu,\lambda) < 0$ и $z = 0$ я-ся РТНС.
$b1$) Пусть $\lambda_1^0 < \lambda < \lambda_2^0$ и $(\mu,\lambda) \in G_{32}^{(0)}$. Тогда $z = 0$ яв-ся вирт. ур-ем $h_{\mu\lambda}$. Кроме того $h_{\mu\lambda}$ им. ед-ное с. зн. $z^{(31)}(\mu,\lambda) < 0$;

$b2$) Пусть $\lambda_1^0 < \lambda < \lambda_2^0$ и $(\mu,\lambda) \in G_{32}$. Тогда $h_{\mu\lambda}$ им. два соб-х зн-й $z^{(31)}(\mu,\lambda) < 0$ и $z^{(34)}(\mu,\lambda) < 0$. При этом

$$z^{(31)}(\mu,\lambda) < \zeta^{(3)}_{min}(\mu,\lambda) \leq \zeta^{(3)}_{max}(\mu,\lambda) < z^{(34)}(\mu,\lambda)$$

и $z = 0$ яв-я РТНС оп-а $h_{\mu\lambda}$;
$c1$) Пусть $\lambda = \lambda_2^0$ и $(\mu,\lambda) \in G_{31}$. Т-да $h_{\mu\lambda}$ им.ед-е с. зн-е $z^{(31)}(\mu,\lambda) < 0$, и $z = 0$ яв-я двукр-м с-ым зн-м оп-а $h_{\mu\lambda}$;
$c2$) Пусть $\lambda = \lambda_2^0$ и $(\mu,\lambda) \in G_{32}^{(0)}$. Тогда $z = 0$ яв-ся вирт.м уров. и двукр-м соб-ным зн-ем $h_{\mu\lambda}$. Кроме того $h_{\mu\lambda}$ им-т ед-ное соб-е зн-е $z^{(31)}(\mu,\lambda) < 0$;

$c3$) Пусть $\lambda = \lambda_2^0$ и $(\mu, \lambda) \in G_{32}$. Тогда $z = 0$ яв-ся двук-ным соб-м зн-ем $h_{\mu\lambda}$. Кроме того, $h_{\mu\lambda}$ им-т два соб-ных зн-й $z^{(31)}(\mu, \lambda) < 0$ и $z^{(34)}(\mu, \lambda) < 0$. При этом

$$z^{(31)}(\mu, \lambda) < \zeta_{min}^{(3)}(\mu, \lambda) \leq \zeta_{max}^{(3)}(\mu, \lambda) < z^{(34)}(\mu, \lambda);$$

$d1$) Пусть $\lambda > \lambda_2^0$ и $(\mu, \lambda) \in G_{31}$. Тогда оператор $h_{\mu\lambda}$ им-т три соб-ных зн-й (с учетом кратности) $z^{(31)}(\mu, \lambda) < 0$ и $z^{(32)}(\lambda) = z^{(33)}(\lambda) < 0$. При этом $z^{(31)}(\mu, \lambda) < z^{(32)}(\lambda) = z^{(33)}(\lambda)$ и $z = 0$ яв-ся РТНС оп-а $h_{\mu\lambda}$;

$d2)$ Пусть $\lambda > \lambda_2^0$ и $(\mu, \lambda) \in G_{32}^{(0)}$. Тогда $z = 0$ яв-я вирт. уровн. $h_{\mu\lambda}$. Кроме того $h_{\mu\lambda}$ им-т три соб-х зн-й (с учетом кратности) $z^{(31)}(\mu, \lambda) < 0$ и $z^{(32)}(\lambda) = z^{(33)}(\lambda) < 0$. При этом $z^{(31)}(\mu, \lambda) < z^{(32)}(\lambda) = z^{(33)}(\lambda)$;

$d3)$ Пусть $\lambda > \lambda_2^0$ и $(\mu, \lambda) \in G_{32}$. Тогда $h_{\mu\lambda}$ им-т четыре собс-х зн-й (с учетом кратности)
$z^{(31)}(\mu, \lambda),\ z^{(32)}(\lambda) = z^{(33)}(\lambda),\ \ z^{(34)}(\mu, \lambda)$. При этом

$$z^{(31)}(\mu, \lambda) < z^{(32)}(\lambda) = z^{(33)}(\lambda),$$

$z^{(31)}(\mu, \lambda) < z^{(34)}(\mu, \lambda) < 0$ и $z = 0$ яв-ся РТНС оп-а $h_{\mu\lambda}$.

Следующая лемма важна для доказательства существования виртуальных уровней оператора $h_{\mu\lambda}$.

Theorem

Собственные ф-ии f_1, f_2, f_3 и f_4 оп-а $h_{\mu\lambda}$, соот-щие соб-ным зн-ям $z^{(31)}$, $z^{(32)}$, $z^{(33)}$ и $z^{(34)}$ $(z^{(32)} = z^{(33)})$, соотв-но имеют вид

$$f_1(p) = \frac{\left(\sqrt{\mu}\alpha_0 + \sqrt{\frac{\lambda}{2}}k(z^{(31)}) \sum\limits_{i=1}^{3} \alpha_i(p)\right) C}{\varepsilon(p) - z^{(31)}},$$

$$f_2(p) = \frac{(\alpha_1(p) - \alpha_2(p))C}{\varepsilon(p) - z^{(32)}}, \; f_3(p) = \frac{(\alpha_2(p) - \alpha_3(p))C}{\varepsilon(p) - z^{(32)}}$$

$$f_4(p) = \frac{\left(\sqrt{\mu}\alpha_0 + \sqrt{\frac{\lambda}{2}}k(z^{(34)}) \sum\limits_{i=1}^{3} \alpha_i(p)\right) C}{\varepsilon(p) - z^{(34)}}, \; C = const \neq 0,$$

$$k(z) = \frac{\Delta(\mu, 0; z)}{3\sqrt{\frac{\mu\lambda}{2}}b(z)}.$$

Замечание

Пункт $a2$) теоремы 15 утверждает, что порог $z = 0$ является виртуальным уровнем оператора $h_{\mu\lambda}$ при некоторых $\mu, \lambda \geq 0$. Пункт $c1$) показывает, что порог $z = 0$ является двукратным собственным значением, а пункт $c2$) показывает, что порог $z = 0$ является одновременно и виртуальным уровнем и собственным значением.

Замечание

Ут-я $a2)$ и $a3)$ т-ы вместе означают, что первое отрицательное собственное значение оператора $h_{\mu\lambda}$ рождается только из порогового виртуального уровня при изменении $\mu, \lambda \geq 0$. Пункты $b1)$ и $b2)$ вместе утверждают, что второе отрицательное собственное значение оператора $h_{\mu\lambda}$ также рождается из порогового виртуального уровня. Утверждения $c3)$ и $d1)$ показывают, что отрицательные собственные значения оператора $h_{\mu\lambda}$ возникают из кратного порогового собственного значения $z = 0$ при изменении $\mu, \lambda \geq 0$. Утверждения $c2)$, $d2)$ и $d3)$ вместе указывают, что отрицательные собственные значения оператора $h_{\mu\lambda}$ появляются как из порогового виртуального уровня так из пороговых и собственных значений $z = 0$.

Замечание

Теорема показывает, что мн-во значений параметров $\mu, \lambda \geq 0$, где порог $z = 0$ является либо вирт. ур-ем, либо с. зн. есть некоторая кривая. Множество значений параметров $\mu, \lambda \geq 0$, где порог $z = 0$ является и вирт. ур-ем и с. зн. $h_{\mu\lambda}$ есть единственная точка.

Цели работы

Главная цель — выяснение причины появления из непрерывного спектра или поглощения в непрерывном спектре собственных значений гамильтониана $H_{\gamma\mu\lambda}(k)$ ассоцированного системе состоящей из не более чем двух частиц движущихся на $d-$мерной решетке в зависимости от значений квазиимпульса $k \in \mathbb{T}^d$, где $\mathbb{T}^d -$ $d-$мерный тор.

Другой целью работы является нахождение числа собственных значений в зависимости как от параметров взаимодействий $\gamma, \mu, \lambda \geq 0$ так и от квазиимпульса системы $k \in \mathbb{T}^d$.

Предварительные сведения

Рассмотрим двух-канальное гильбертово пространство $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$ состоящие из одномерного гильбертова пространства $\mathcal{H}_0 = C^1$ (канал 1) и "ядерного"гильбертова пространства $\mathcal{H}_1 = L^2_e(\mathbb{T}^d)$-пространство квадратично-интегрируемых (комплекснозначных) ччтных функций, на торе $\mathbb{T}^d$.
Элементы $\mathcal{H}$ пред-ся как векторы $u = (f_0, f_1)$, где $f_0 \in \mathcal{H}_0, f_1 \in \mathcal{H}_1$. Скалярное произведение $\langle f, g \rangle = (f_0, g_0) + (f_1, g_1)$ в $\mathcal{H}$ естественно определяется через скалярные произведения

$$(f_0, g_0)_{\mathcal{H}_0} = f_0 \cdot \bar{g}_0, \ (f_1, g_1)_{\mathcal{H}_1} = \int f_1(t)\overline{g_1(t)}dt$$

.

Предварительные сведения

Пусть $E(k), k \in \mathbb{T}^d$– скалярный оператор действующий в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_0$, т.е.,

$$E(k)f_0 = \varepsilon(k)f_0, \quad \varepsilon(k) = \sum_{i=1}^{d}(1 - \cos k^{(i)}), \quad f_0 \in \mathcal{H}_0,$$

и $h_{\mu\lambda}(k),\ k \in \mathbb{T}^d$– оператор Шредингера ассоциированный с гамильтонианом системы двух одинаковых бозонов с контактным взаимодействием $\mu > 0$ и взаимодействием на соседних узлах $\lambda > 0$.

Предварительные сведения

Оператор $h_{\mu\lambda}(k)$, $k \in \mathbb{T}^d$ действует в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_1$ по формуле

$$h_{\mu\lambda}(k) = h_0(k) - v_{\mu\lambda}.$$

Здесь $h_0(k)$– оператор умножения на функцию $\varepsilon_k(\cdot)$:

$$(h_0(k)f_1)(q) = \varepsilon_k(q)f_1(q), \quad \varepsilon_k(q) = \varepsilon(\frac{k}{2}-q)+\varepsilon(\frac{k}{2}+q), \quad f_1 \in \mathcal{H}_1,$$

и $v_{\mu\lambda}$– неотрицательный интегральный оператор и его ранг не больше $d+1$:

$$(v_{\mu\lambda}f_1)(q) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{\mathbb{T}^d}\Big(\mu+\lambda\sum_{i=1}^{d}(\cos(q^{(i)}-s^{(i)})\Big)f_1(s)ds, \quad f_1 \in \mathcal{H}_1,$$

Предварительные сведения

Рассматриваемый гамильтониан (обобщенная модель Фридрихса) $H_{\gamma\mu\lambda}(k), \gamma, \mu, \lambda \in [0, +\infty)$, (они одновременно не равны нулю) $k \in \mathbb{T}^d$, действует в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ по формуле

$$H_{\gamma\mu\lambda}(k) \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1(q) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon(k) f_0 + \frac{\gamma}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int\limits_{\mathbb{T}^d} f_1(s) ds \\ \frac{\gamma}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} f_0 + (h_{\mu\lambda}(k) f_1)(q) \end{pmatrix}. \qquad (3)$$

Легко можно проверить, что оператор $H_{\gamma\mu\lambda}(k)$, $k \in \mathbb{T}^d$, $\gamma, \mu, \lambda \in [0, +\infty)$ является ограниченным и самосопряженным.

Предварительные сведения

Заметим, что оператор $H_{000}(k)$, $k \in \mathbb{T}^d$ является прямой суммой операторов $E(k)$ и $h_0(k)$, т.е. действует в $\mathcal{H}$ по формуле

$$H_{000}(k)\begin{pmatrix} f_0 \\ f_1(q) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon(k) f_0 \\ \varepsilon_k(q) f_1(q) \end{pmatrix}.$$

Легко видеть, что для любого $k \in \mathbb{T}^d$ имеют место неравенства $\varepsilon_{min}(k) \leq \varepsilon(k) < \varepsilon_{max}(k)$, где

$$\varepsilon_{min}(k) = \min_{q \in \mathbb{T}^d} \varepsilon_k(q) = 2\sum_{i=1}^{d}(1 - \cos\frac{k^{(i)}}{2}), \tag{4}$$

$$\varepsilon_{max}(k) = \max_{q \in \mathbb{T}^d} \varepsilon_k(q) = 2\sum_{i=1}^{d}(1 + \cos\frac{k^{(i)}}{2}). \tag{5}$$

Предварительные сведения

Поэтому оператор $H_{000}(k)$ имеет существенный спектр $[\varepsilon_{min}(k), \varepsilon_{max}(k)]$ и вложенное собственное значение $\varepsilon(k) \in [\varepsilon_{min}(k), \varepsilon_{max}(k)]$.

При этом это вложенное собственное значение меняется при изменении квазиимпульса $k \in \mathbb{T}^d$ и это изменение влияет на число собственных значений лежащих левее существенного спектра возмущенного оператора $H_{\gamma\mu\lambda}(k), \quad k \in \mathbb{T}^d$.

Так как разность операторов $H_{\gamma\mu\lambda}(k)$ и $H_{000}(k)$ есть компактный оператор, в силу известной теоремы Г.Вейля [11] о сохранении существенного спектра при возмущениях конечнего ранга, существенный спектр оператора $H_{\gamma\mu\lambda}(k)$, k$\in \mathbb{T}^d$ совпадает со спектром оператора $H_{000}(k), \;\; k \in \mathbb{T}^d$.

Поэтому

$$\sigma_{ess}(H_{\gamma\mu\lambda}(k)) = [\varepsilon_{min}(k), \varepsilon_{max}(k)].$$

Предварительные сведения

Замечание

В случае $\gamma = 0$ оператор $H_{0\mu\lambda}(k), \quad k \in \mathbb{T}^d$ является прямой суммой операторов $E(k)$ и $h_{\mu\lambda}(k)$, т.е. изучение спектральных свойств $H_{0\mu\lambda}(k)$ сводится к изучению спектральных свойств оператора $h_{\mu\lambda}(k)$. Заметим также, что оператор $H_{0\mu\lambda}(k)$ имеет вложенное в существенный спектр $\sigma_{ess}(H_{\gamma\mu\lambda}(k))$ собственное значение $\varepsilon(k), \quad k \in \mathbb{T}^d$.

Предварительные сведения

Рассмотрим следующую ортонормированную систему в $\mathcal{H}_1$:

$$\alpha_0 = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}, \;\; \alpha_i(q) = \frac{\sqrt{2}}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \cos q^{(i)}, \quad i = 1, 2, \ldots, d.$$

Оператор $v_{\mu\lambda}$ представляется в виде:

$$v_{\mu\lambda} f_1(q) = \mu\alpha_0(f_1, \alpha_0) + \lambda\alpha_i(q) \sum_{i=1}^{d} (f_1, \alpha_i),$$

Предварительные сведения

Для любых фиксированных $\gamma, \mu, \lambda \geq 0$ и $z \in \mathbb{C} \backslash [\varepsilon_{min}(k), \varepsilon_{max}(k)]$ определим конечномерный интегральный оператор Бирмана-Швингера $G_{\gamma\mu\lambda}(z)$, действующий в $\mathcal{H}_1$ по формуле

$$G_{\gamma\mu\lambda}(k,z) = V^{\frac{1}{2}}_{\gamma\mu\lambda}(k,z) r_0(k,z) V^{\frac{1}{2}}_{\gamma\mu\lambda}(k,z),$$

где $r_0(k;z)$– резольвента оператора $h_0(k)$ и

$$V^{\frac{1}{2}}_{\gamma\mu\lambda}(k,z) f_1(q) = \Big(\frac{\gamma^2}{\varepsilon(k)-z} + \mu\Big)^{\frac{1}{2}} \alpha_0(f_1,\alpha_0) + \sqrt{\lambda}\alpha_i(q) \sum_{i=1}^{d} (f_1,\alpha_i)$$

неотрицательный квадратный корень оператора

$$V_{\gamma\mu\lambda}(k,z) f_1(q) = \Big(\frac{\gamma^2}{\varepsilon(k)-z} + \mu\Big) \alpha_0(f_1,\alpha_0) + \lambda\alpha_i(q) \sum_{i=1}^{d} (f_1,\alpha_i)$$

действующего в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_1$.

Предварительные сведения

$$a(k,z) = (\alpha_0, r_0(k,z)\alpha_0) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{\mathbb{T}^d} \frac{dq}{\varepsilon_k(q) - z},$$

$$b_i(k,z) = (\alpha_0, r_0(k,z)\alpha_i) = \frac{\sqrt{2}}{(2\pi)^d} \int\limits_{\mathbb{T}^d} \frac{\cos q^{(i)} dq}{\varepsilon_k(q) - z},$$

$$c_i(k,z) = (\alpha_i, r_0(k,z)\alpha_i) = \frac{2}{(2\pi)^d} \int\limits_{\mathbb{T}^d} \frac{\cos^2 q^{(i)} dq}{\varepsilon_k(q) - z}, \qquad (6)$$

$$d_{ij}(k,z) = (\alpha_i, r_0(k,z)\alpha_j) = \frac{2}{(2\pi)^d} \int\limits_{\mathbb{T}^d} \frac{\cos q^{(i)} \cos q^{(j)} dq}{\varepsilon_k(q) - z},$$

$z < \varepsilon_{min}(k), \quad i,j = 1,2,\ldots,d \;\; i \neq j.$

Предварительные сведения

Для любых фиксированных $\gamma, \mu, \lambda \in [0, +\infty)$ определим функцию $\Delta_{\gamma\mu\lambda}(k; z)$ (определитель Фредгольма оператора $I - G_{\gamma\mu\lambda}(k, z)$) по формуле

$$\Delta_{\gamma\mu\lambda}(k; z) = det(I - G_{\gamma\mu\lambda}(k, z)),$$

где $I-$ единичный оператор в $\mathcal{H}_1$.
Очевидно, что для любых $\gamma, \mu, \lambda \in (0, +\infty)$ функция $\Delta_{\gamma\mu\lambda}(k; \cdot)$ является аналитической в области $\mathbb{C} \backslash [\varepsilon_{min}(k), \varepsilon_{max}(k)]$.

Формулировка основных результатов

Связь между собственными значениями самосопряженного оператора $H_{\gamma\mu\lambda}(k)$ и нулями функции $\Delta_{\gamma\mu\lambda}(k;z)$ устанавливается следующей леммой.

Lemma

Для любых $\gamma, \mu, \lambda \in (0, +\infty)$ число $z \in \mathbb{C} \setminus [\varepsilon_{min}(k), \varepsilon_{max}(k)]$ является собственным значением оператора $H_{\gamma\mu\lambda}(k)$, $k \in \mathbb{T}^d$, тогда и только тогда, когда $\Delta_{\gamma\mu\lambda}(k;z) = 0$.

Формулировка основных результатов

Lemma

Число $z \in \mathbb{C} \setminus [\varepsilon_{min}(k), \varepsilon_{max}(k)]$ является n-кратным собственным значением оператора $H_{\gamma\mu\lambda}(k)$ тогда и только тогда, когда число $z \in \mathbb{C} \setminus [\varepsilon_{min}(k), \varepsilon_{max}(k)]$ является $n-$кратным собственным значением оператора

$$H_{\gamma\mu\lambda}(k,z)f_1(q) = \varepsilon_k(q)f_1(q) - \Big(\frac{\gamma^2}{\varepsilon(k)-z} + \mu\Big)\alpha_0(f_1,\alpha_0) -$$

$$-\lambda \sum_{i=1}^{d} \alpha_i(q)(f_1,\alpha_i).$$

Формулировка основных результатов

Lemma

Число $z \in \mathbb{C} \setminus [\varepsilon_{min}(k), \varepsilon_{max}(k)]$ является собственным значением оператора $H_{\gamma\mu\lambda}(k,z)$ тогда и только тогда, когда число "1" является собственным значением оператора $G_{\gamma\mu\lambda}(k,z)$.

Формулировка основных результатов

Lemma

Число собственных значений оператора $H_{\gamma\mu\lambda}(k)$ лежащих левее $z < \varepsilon_{min}(k)$ совпадает с числом собственных значений оператора $G_{\gamma\mu\lambda}(k, z)$ лежащих правее "1".

Пусть $d = 1$. Тогда

$$\Delta_{\gamma\mu\lambda}(k;z) = \Delta_{\gamma\mu 0}(k;z)\Delta_{00\lambda}(k;z) - \frac{\lambda}{2}(\frac{\gamma^2}{\varepsilon(k)-z} + \mu)b^2(k,z),$$

где

$$\Delta_{\gamma\mu 0}(k;z) = 1 - (\frac{\gamma^2}{\varepsilon(k)-z} + \mu)a(k,z),$$

$$\Delta_{00\lambda}(k;z) = 1 - \frac{\lambda}{2}c(k,z).$$

Положим

$$\tilde{\Delta}_{\gamma\mu\lambda}(k;z) = (\varepsilon(k)-z)\Delta_{\gamma\mu\lambda}(k;z).$$

Нули функции $\tilde{\Delta}_{\gamma\mu\lambda}(k;\cdot)$ и $\Delta_{\gamma\mu\lambda}(k;\cdot)$ в $(-\infty, \varepsilon_{min}(k))$ сов-т.

Формулировка основных результатов

Предложение

$\forall \gamma, \mu, \lambda \in (0, +\infty)$ и $k \in (-\pi, \pi)$,

$$\tilde{\Delta}_{\gamma\mu\lambda}(k; z) = C_{-\frac{1}{2}}(\gamma, \mu, \lambda, k)(\varepsilon_{min}(k) - z)^{-\frac{1}{2}}$$
$$+ C_0(\gamma, \mu, \lambda, k) + O(\varepsilon_{min}(k) - z)^{\frac{1}{2}}, z \to \varepsilon_{min}(k) - .$$

Здесь

$$C_{-\frac{1}{2}}(\gamma, \mu, \lambda, k) = \frac{F_{\gamma\mu\lambda}(k)}{4\cos^{\frac{3}{2}} \frac{k}{2}},$$

$$F_{\gamma\mu\lambda}(k) = \gamma^2(\lambda - 2\cos\frac{k}{2}) + 2\cos\frac{k}{2}(1 - \cos\frac{k}{2})[\mu\lambda - 2\cos\frac{k}{2}(\mu + \lambda)]$$

$$C_0(\gamma, \mu, \lambda, k) = \frac{1}{4\cos^2 \frac{k}{2}}[4\cos^2\frac{k}{2}(1 - \cos\frac{k}{2})][2\cos\frac{k}{2} + \lambda]$$

Формулировка основных результатов

Пусть $F^{>}_{\gamma\mu\lambda} = \{k \in \mathbb{T}^1 : F_{\gamma\mu\lambda}(k) > 0\}$.
Так как $F_{\gamma\mu\lambda}(\cdot)$ четная вещественно-аналитическая функция на $\mathbb{T}^1$, множество $F^{>}_{\gamma\mu\lambda}$ является открытым.

Theorem

a) Пусть $k \in F^{>}_{\gamma\mu\lambda}$. Тогда оператор $H_{\gamma\mu\lambda}(k)$ имеет два собственных значения на полуоси $(-\infty, \varepsilon_{min}(k))$.
b) Пусть $k \in \mathbb{T}^1 \setminus F^{>}_{\gamma\mu\lambda}$. Тогда оператор $H_{\gamma\mu\lambda}(k)$ имеет единственное собственное значение на полуоси $(-\infty, \varepsilon_{min}(k))$.

Формулировка основных результатов

Предложение

a_1) Пусть $\min\limits_{k\in\mathbb{T}^1} F_{\gamma\mu\lambda}(k) > 0$. Тогда $F^{>}_{\gamma\mu\lambda} = \mathbb{T}^1$. a_2) Пусть $F_{\gamma\mu\lambda}(0) > 0,\ \min\limits_{k\in\mathbb{T}^1} F_{\gamma\mu\lambda}(k) = F_{\gamma\mu\lambda}(k_1) = 0,\ 0 < k_1 < \pi$. Тогда $F^{>}_{\gamma\mu\lambda} = [-\pi, -k_1) \cup (-k_1, k_1) \cup (k_1, \pi]$. a_3) Пусть $F_{\gamma\mu\lambda}(0) > 0$ и $\min\limits_{k\in\mathbb{T}^1} F_{\gamma\mu\lambda}(k) < 0$.
Тогда существуют $k_1, k_2 \in (0, \pi)$ $(0 < k_1 < k_2 < \pi)$ такие, $F^{>}_{\gamma\mu\lambda} = [-\pi, -k_2) \cup (-k_1, k_1) \cup (k_2, \pi]$.
b_1) Пусть $F_{\gamma\mu\lambda}(0) = \min\limits_{k\in\mathbb{T}^1} F_{\gamma\mu\lambda}(k) = 0$. Тогда $F^{>}_{\gamma\mu\lambda} = \mathbb{T}^1 \setminus \{0\}$.
b_2) Пусть $F_{\gamma\mu\lambda}(0) \le 0$ и $F_{\gamma\mu\lambda}(0) \ge \min\limits_{k\in\mathbb{T}^1} F_{\gamma\mu\lambda}(k)$. Тогда существует $0 < k_1 < \pi$ такое, $F^{>}_{\gamma\mu\lambda} = [-\pi, -k_1) \cup (k_1, \pi]$.

Литература

- S. Albeverio, S. N. Lakaev, Z. I. Muminov: Schrödinger operators on lattices. The Efimov effect and discrete spectrum asymptotics. Ann. Henri Poincaré. 5 743–772 (2004).
- K. O. Friedrichs: On the perturbation of continuous spectra. Communications on Appl. Math. 1(1948), 361–406.
- L. D. Faddeev: On a model of Friedrichs in the theory of perturbations of the continuous spectrum. (Russian) Trudy Mat. Inst. Steklov 73 (1964), 292–313.
- S. N. Lakaev: On an infinite number of three-particle bound states of a system of quantum lattice particles. Theor. and Math. Phys. 89 (1991), No.1, 1079–1086.

Литература

- S. N. Lakaev: The Efimov's Effect of a system of Three Identical Quantum lattice Particles. Функциональный анализ и его прилож., 27 (1993), No. 3, pp. 15-28,(transl. in Funct.Anal.Appl.)
- V. A. Malishev and R. A. Minlos: Linear infinite-particle operators. Translations of Mathematical Monographs, 143. American Mathematical Society, Providence, RI, 1995.
- Albeverio,Sergio; Lakaev, Saidakhmat N.; Ramiza Kh. Djumanova: The essential and discrete spectrum of a model operator associated to a system of three identical quantum particles Reports on Mathematical Physics 63 3, (2009) P.359-380
- S. N. Lakaev and I.Bozorov: The number of bound states of a one particle Hamiltonian on a three-demensional lattice, Theoretical and Mathematical Physics, 158(3), (2009), 360 – 376

Литература

- Albeverio, Sergio; Lakaev, Saidakhmat N.; Muminov, Zahriddin I.: On the number of eigenvalues of a model operator associated to a system of three-particles on lattices. Russ. J. Math. Phys. 14 (2007), no. 4, 377–387.
- Albeverio, Sergio; Lakaev, Saidakhmat N.; Rasulov, Tulkin H. On the spectrum of an Hamiltonian in Fock space. Discrete spectrum asymptotics. J. Stat. Phys. 127 (2007), no. 2, 191–220.
- Albeverio, Sergio; Lakaev, Saidakhmat N.; Rasulov, Tulkin H.: The Efimov effect for a model operator associated with the Hamiltonian of a non conserved number of particles. Methods Funct. Anal. Topology 13 (2007), no. 1, 1–16.