• Калибров. теории на матем. яз.: алгебра $\tilde{g}$ гр. G

связность на главном расслоении (P, M, π, G)

$$A = A_\mu dx^\mu, \quad A_\mu \in \tilde{g}, \quad (\text{генер. } (\lambda^i)^a{}_b,\ \lambda^+ = -\lambda) \quad x^\mu$$

Не связ. с метрикой} **Кривизна** расслоения (общее понятие!)

$$F = dA + A^2 = \frac{1}{2}(\underbrace{\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu]}_{F_{\mu\nu}})dx^\mu dx^\nu$$

$$d \equiv dx^\mu \partial_\mu, \quad dx^1 \wedge dx^2 \equiv dx^1 \cdot dx^2 = dx^1 \otimes dx^2 - dx^2 \otimes dx^1$$

Ковар. произв. p-формы $\underbrace{\Sigma^{a\ldots}_{b\ldots,\mu_1\ldots\mu_p} dx^{\mu_1}\ldots dx^{\mu_p}}_{\text{p-форма}}$ и т.д.

$$D\Sigma \equiv (d + [A, \ldots])\Sigma$$

{Опред.: $[\theta^{(p)}, Q^{(q)}] = \theta^{(p)}\theta^{(q)} - (-1)^{pq}\theta^{(q)}\theta^{(p)}$ }

p-форма, q-форма

• Пример: $dF = d(dA + A^2) = dA \cdot A - A \cdot dA = FA - AF$

т.е. $DF = dF + [A, F] = 0$

Калибровочные преобразования: $g \in G$

$$A^g = g^{-1}(A + q)g, \quad F^g = (g^{-1}Fg), \ldots$$

• Геометрия расслоения реперов

$e^a = e^a{}_\mu dx^\mu$ – (общее опред. связности осн. на эт.)

Аффинная спин-связность $\omega^a{}_b = \omega^a{}_{b,\mu} dx^\mu$

$(\omega_{ab} \equiv \eta_{ac}\omega^c{}_b; \quad \omega_{ab} + \omega_{ba} = 0)$ $\omega_{ab} \in so(d)$ алгебр.

обычн.: в случае Римановой связн.

$(E_a{}^\mu = \eta_{ab} g^{\mu\nu} e^b{}_\nu$, в общем случае $g^{\mu\nu}$ не следует использ.)

Но! $D \equiv d + [\omega, \ldots]$, $R^a{}_b = d\omega^a{}_b + \omega^a{}_c \omega^c{}_b = \frac{1}{2}R^a{}_{bcd} e^c e^d$

$T^a = de^a + \omega^a{}_b e^b = De^a$

эти опред. не требуют метрики.

2,

• В общем случае связность определяют с пом. параллельного переноса:

Общее опред. $\Big\}$ $\delta Q^\mu = -\Gamma^\mu_{\lambda\nu} Q^\lambda dx^\nu \qquad \Gamma^\mu_{\lambda\nu} = -e^a_\lambda \partial_\nu e^\nu_a$

(где $e^a_\lambda e^\nu_a = \delta^\nu_\lambda$) $\Big\{$ метрика здесь не нужна, но ее можно ввест

• Переход к Римановой связности (с $g_{\mu\nu}$)

I. метрика ковар. постоянна

симм. связн. $\Big\}$ II. кручение $T \equiv 0$ $\left(T^\lambda_{\mu\nu} = \Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda_{\nu\mu}\right)$

$ds^2 = \underbrace{g_{\mu\nu}}_{e^a_\mu e_{a\nu} = g_{\mu\nu}} dx^\mu \otimes dx^\nu, \quad E_a{}^\mu e^b{}_\mu = \delta^b_a, \quad E_a{}^\mu e^a{}_\nu = \delta^\mu_\nu$

Можно теперь перейти к обычному координ. базису, где $\Big\{ \Gamma_{\alpha\beta\gamma} = g_{\alpha\lambda} \Gamma^\lambda_{\beta\gamma} =$

(Кристоффели: $\Big\{ = \frac{1}{2}\left(\partial_\beta g_{\alpha\gamma} + \partial_\gamma g_{\alpha\beta} - \partial_\alpha g_{\beta\gamma}\right)$

здесь возвращ. к „обычной" ОТО.

• Аналогию между Римановой связностью (ОТО) и калибр. теорией (Я.-М.) можно увидеть в любом базисе:

$$\begin{cases} e \to L^{-1} e = (L^{-1}(x))^a{}_b \, e^b{}_\mu \\ \omega \to L^{-1} \omega L + L^{-1} dL \\ R \to L^{-1} R L \\ \dots \end{cases} \quad \Bigg| \quad \begin{aligned} &\Gamma(x) \to \Gamma'(x') = \Lambda^{-1}(\Gamma + d)\Lambda \Big|_x \\ &(\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \\ &\dots\dots \text{ и т.д.} \end{aligned}$$

• Калибр. частицы гравит. $\overset{\text{пока}}{\text{не}}$ наблюдались!

Аналогия недостаточна;
для объединения — нужно больше!

NB: в теории без метрики удобен вар. принцип Палатини (см. Э. Шредингер. Простр.-врем. структура Вселенной М. Наука, 1986 (оригинал — 1950 г.)

Очень хор. книга!

3.

• Обобщение теории Эйнштейна по А. Эддингтону ('21) и Э. Шредингеру ('50)

$$S = \int \sqrt{-\det R_{\mu\nu}}\; d^4x$$

(без метрики, связность несимм. в общем случае)

(возможно и дальнейшее обобщение)

Вариация S по $R_{\mu\nu}$ дает $R_{\mu\nu} = \lambda \tilde{g}_{\mu\nu}$, где $\tilde{g}_{\mu\nu}$ выраж. через $R_{\mu\nu}$, $\Gamma^{\mu}_{\lambda\nu}$... (см. кн. Шредингера)

В симметричном случае $\tilde{g}_{\mu\nu} \to g_{\mu\nu}$ (станд. метрика!)

! и получаем

(В некоторых обобщениях Λ естественна)

$$\boxed{R_{\mu\nu} = \lambda g_{\mu\nu}}$$

Ур-е с космол. постоянной!

М.б. работы Эйнштейна, Эддингтона, Шредингера и др. по единым теориям эм. и грав. не столь бесполезны?!

(как принято думать!)

См. например:

1964–1966

ЖЭТФ

т. 46 с. 1285

т. 51 с. 1389

т. 52 с. 1092

Б. А. Арбузов (слабые взаим. лептонов и грав)

Б.А.А. + А.Т.Ф. (слабые взаим. барионов и лепт.) (кабиббо)

из гравитации, вложенной в $D=11$

(слабые и э.-м. взаимодействия фермионов в теории с несимм. связностью, в $D = 11$)

~~СР~~

*) Это — необязательное замечание

4.

Другой взгляд на 'аналогию' между ОТО и Я-М. (сформулирован впервые Дираком)

• Динамика систем со связями = калибр. теор

Дирак. 'Лекции по квантовой механике' М. 'Мир', 1968 (оригинал 1964г)

Приложения к квантованию гравит.
(Гамильтонова теория гравитации: Швингер; Редже; Арновитт, Дезер, Мизнер ......)

• 'Элементарный' пример порождения таких сист.

Рассм. $\mathcal{L}_0 = g_{\mu\nu} p_i^{\mu} \dot{q}_i^{\nu} - \frac{1}{2} h_{\alpha\beta} \xi^{\alpha} \dot{\xi}^{\beta} - H(p,q;\xi)$ 'материя'

$(-1,\ldots -1; +1,\ldots,+1)$ Грассманы билин.

Обозначим: $\psi^T = (p_1, q_1, \ldots q_N; \xi_1 \ldots \xi_K)$

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2} \underbrace{\psi^T C}_{\bar{\psi}} (\partial_t - H_0) \psi + \frac{1}{2} \partial_t (p_i q_i)$$

супермат.

(бозон | ферм / ферм | бозон)

Инвар. отн. $\delta\psi = F(f,\varphi)\psi$, если $F^T C + C F = 0$

$F \in osp(2N|K)$

Локализация: $f \to f(t)$, $\varphi \to \varphi(t)$

$$\boxed{\mathcal{L}_{gauge} = \frac{1}{2} \psi^T C (\partial_t - A) \psi + \text{(гр. чл.)}}$$

$\delta\psi = F\psi$, $\delta A = \dot{F} + [F, A]$

1 скал. частица: $\mathcal{L} = p\dot{q} - \frac{1}{2} e(t) p^2$

растяжен

Вейлевская частица: $\mathcal{L} = p\dot{q} - \frac{1}{2} e_1(t) p^2 - \frac{1}{2} e_2 (pq)$

Письма ЖЭТФ т.46(87)337

Далее: А.Т.Ф., А.П. Исаев, Д. Гангопадья....

Хорошее упражнение!

5.

- Локализация (супер) ~~...~~ симплектической (канонической) группы возможна в теории бозонной и фермионной струн (и их дискретных аналогов)

Можно ли это сделать в гравитации?

+материи (мне известно это лишь $D=1$ и $D=2$ случаи)

(Связь с 'матричными' теориями?)

- Другое использ. гамильт. структуры в гравитации: A. Ashtekar; L. Smolin; C. Rovelli ....

→ Loop Quantum Gravity

Переменные: спин связность ω_a^M (на $d=3$) и канон. сопряж. ~~величина~~ E_M^a ('триада')

(конкретные результаты ??)

('Естественные 'браны')

В подобных теориях (без метрики) можно попытаться (?) реально 'смешать' (?) 'внешнее' и 'внутр. пр-во' (см. Б.А, А.Т)

- Общая связность для грав. и фермион т.п.

(Интересно, но пока больше сказать не могу)

Недавние работы: S. Alexander 'Isogravity: Toward EW and GR Unif' 0706.4481 (hep-th)

топологич. модель.

G. Lisi BF and Standard Model gr-qc/051120

Arxiv: 0711.0770 — Exceptional Unification

R. Percacci...

F. Nesti. SM ~~from~~ and GR from Spinors 0706.3304 etc.

6. • Что мы слышали на этой школе?

* Проблемы стандартной теории:

• Хиггс и массы частиц в EW
(не найден; непонятны) (иерархия)

• Нарушение CP и барионная асимметр.
(недостаточно для)

• Адронные факторы в ℓh процессах
(SU_3 — 'слабая' часть станд. модели)
(сильно осложняют интерпрет. ν-эксперим.!)

* 'Сигналы' новой физики

• DM, • DE — из космологии
осцилляции ν (?)

бар. асимм.

* Проблемы гравитации: Гравитон?
ищем, но пока не видим

• (не)перенормируемость и др. проблемы с квантованием (гравитации)

• Недостаточность эксп. данных, подтвержд. ОТО (Модификации?)
(позволяет пока обсуждать

• Эстетические тесты альтернативн. теорий: B.H: Schwarzschild, R-N, Kerr!

• Самый важный: возможность (объединения) унификации со СМ.?

? С. Струны — мат. красиво, но нет однозн. связи с реальн.
(тест С.С суперсимм. на LHC)

? Браны в косм. — не очень красиво. Возник. в струнах
(тест.: разм. пр-ва на LHC) Связь с реальн.?