НАРУШЕНИЕ ЛОРЕНЦ-ИНВАРИАНТНОСТИ И КОСМОЛОГИЧЕСКИЕ ВОЗМУЩЕНИЯ

Максим Либанов,

ИЯИ, Москва

План

- Стандартная теория космологических возмущений
- Влияние нарушения Лоренц-инвариантности на космологические возмущения
- Игрушечная модель мира на бране
- Заключение

Стандартная теория космологических возмущений при инфляции

Инфляционная Вселенная

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) d\vec{x}^2$$

$$a(t) = \text{const} \cdot \mathrm{e}^{+\int H(t)dt} \approx \text{const} \cdot \mathrm{e}^{Ht}$$

H почти постоянна до конца инфляции.

Безмассовое скалярное поле $\varphi(\vec{x}, t)$

$\varphi =$ Инфлатон $\Longrightarrow$ возмущения плотности

Гравитон. Тензорное поле, но уравнения такие же:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (g^{\mu\nu} \partial_\nu \varphi) = 0$$

$\Downarrow$

Фурье-преобразование по $\vec{x}$:

$$\varphi(\vec{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d\vec{p}\, \mathrm{e}^{-i\vec{p}\vec{x}} \varphi_{\vec{p}}(t) + \text{к.с.}$$

$$\boxed{\partial_t^2 \varphi_{\vec{p}} + 3H\partial_t \varphi_{\vec{p}} + \frac{\vec{p}^{\,2}}{a^2(t)}\varphi_{\vec{p}} = 0}$$

$\mathcal{NB}$: H остается почти постоянным во время инфляции

$\mathcal{NB}$: p — конформный импульс, не зависит от времени

$$P(t) \equiv \frac{p}{a(t)}$$ — физический импульс, краснеет.

Ранние времена

$$\frac{p}{a(t)} = P(t) \gg H$$

$$\boxed{\omega = |p|}$$

$$\varphi_{\vec{p}} = \frac{1}{a(t)\sqrt{2\omega_p}} \exp\left\{ i \int \frac{\omega_p}{a(t)} dt \right\} A_p^+$$

Обычное поведение скалярного поля в медленно расширяющейся Вселенной

Поздние времена

$$P(t) \ll H$$

$$\varphi_{\vec{p}} = \textit{const} \; + \text{затухающая мода}$$

не интересует

Сшиваем при

$$P(t) = \frac{p}{a(t)} \sim H \implies a \sim \frac{p}{H}$$

когда мода с данной физической длиной волны $\lambda = \dfrac{1}{P(t)}$ пересекает горизонт де Ситтера H^{-1}

.

не важна

В этот момент

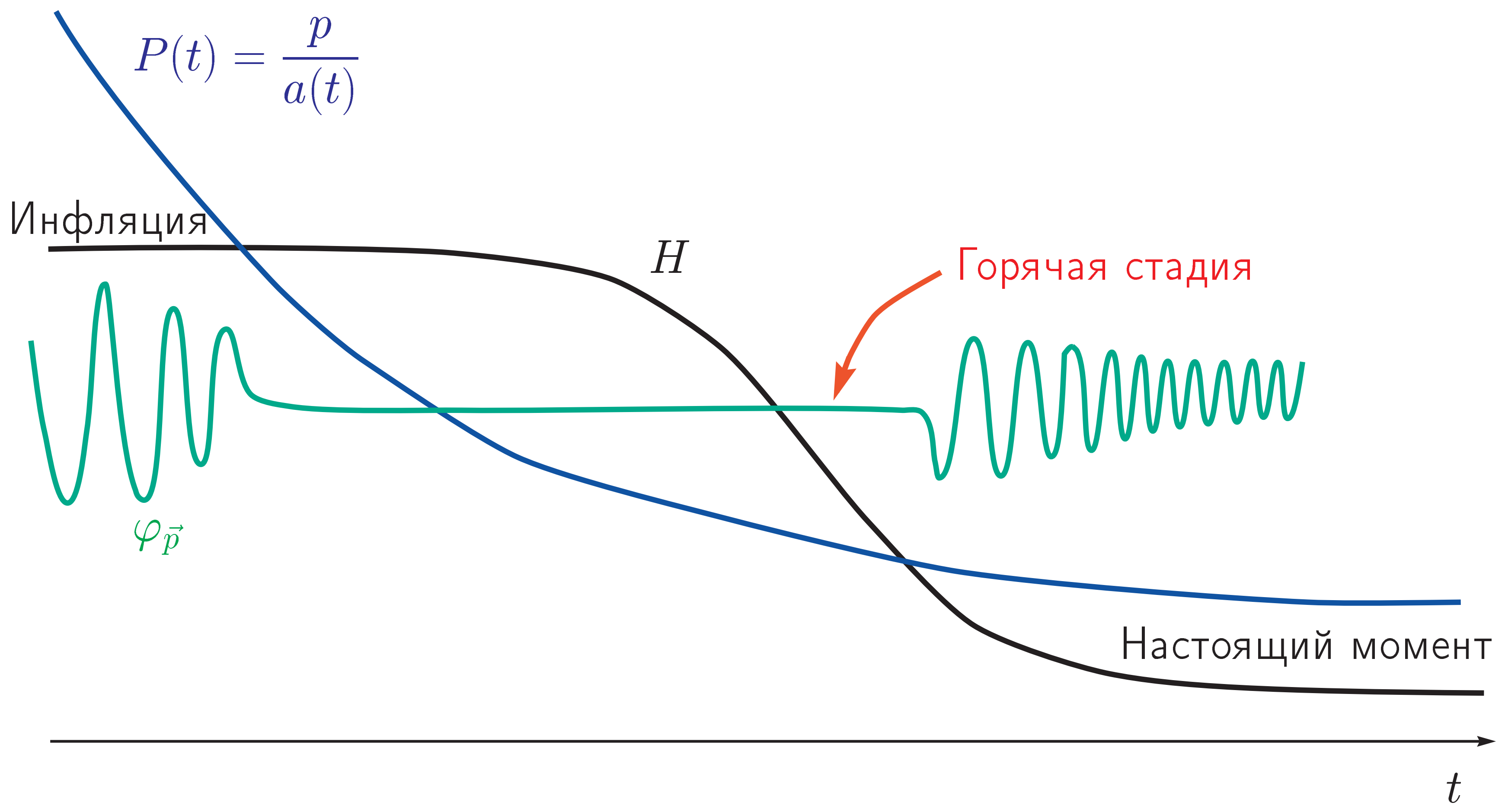
$$\varphi_{\vec{p}} = \frac{1}{a}\frac{1}{\sqrt{2\omega_p}}\text{phase} \cdot A_p^+$$

$$a = \frac{p}{H}, \qquad \omega_p = p$$

$$\Downarrow$$

$$\varphi_{\vec{p}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{H}{p^{3/2}}A_p^+$$

Остается постоянной до момента выхода из-под горизонта


$P(t) = \frac{p}{a(t)}$
Инфляция
H
Горячая стадия
$\varphi_{\vec{p}}$
Настоящий момент
t

К концу инфляции

$$\varphi(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{d^3p}{p^{3/2}} H (A_p^+ \mathrm{e}^{-i\vec{p}\vec{x}} + A_p^- \mathrm{e}^{i\vec{p}\vec{x}})$$

Стохастическое поле $\Downarrow$ $\langle A_p^-, A_q^+ \rangle = \delta(\vec{p} - \vec{q})$

$$\langle [\varphi(\vec{x} = 0)]^2 \rangle = \frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{p^3} \cdot H^2 \equiv \int \frac{dp}{p} \mathcal{P}(p)$$

Плоский спектр; амплитуда $= \dfrac{H}{2\pi}$

$\mathcal{NB}$: H медленно изменяется во время инфляции $\Rightarrow$ наклон

$\mathcal{NB}$: Гравитационные волны: амплитуда действительно равна H.

Возмущения плотности: еще НЕ φ;

Возмущения инфлатона порождают возмущения плотности материи. Окончательная амплитуда

$$\frac{\delta\rho}{\rho} \propto F(H, \dot{\varphi}) \delta\phi$$

Удобные переменные:

- конформное время

$$\eta \in (-\infty, 0)$$

$$ds^2 = a^2(\eta)\left[d\eta^2 - d\vec{x}^{\,2}\right]$$

$$a(\eta) = -\frac{1}{H\eta}$$

- новое поле $\psi(\vec{x}, \eta)$

$$\varphi(\vec{x}, \eta) = \frac{1}{a(\eta)}\psi(\vec{x}, \eta)$$

канонически нормировано при ранних временах,

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\int d^4x\sqrt{-g}\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi g^{\mu\nu} \\ &= \frac{1}{2}\int d\eta d^3x \left\{(\partial_\eta\psi)^2 - (\partial_{\vec{x}}\psi)^2 + \frac{\partial_\eta^2 a}{a}\psi^2\right\} \end{aligned}$$

$\mathcal{NB}$: $\psi(\eta) \propto a(\eta)$ после пересечения горизонта.

Постоянная мода $\varphi \Leftrightarrow$ растущая мода ψ

Явное вычисление при H =const

- В комфорных переменных уравнения для поля

$$\chi = \frac{\psi}{\sqrt{-\eta}} = \frac{a\varphi}{\sqrt{-\eta}}$$

$$\ddot{\chi} + \frac{\dot{\chi}}{\eta} + p^2\chi - \frac{9}{4}\cdot\frac{\chi}{\eta^2} = 0$$

- Условия нормировки:

$$\varphi^*_{\vec{p}}\dot{\varphi}_{\vec{p}} - \dot{\varphi}^*_{\vec{p}}\varphi_{\vec{p}} = -i$$

- Решения:

$$\psi_{\vec{p}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\sqrt{-\eta}H^{(1)}_{\frac{3}{2}}(-\eta p)$$

- Асимптотики:

$$\eta \ll -\frac{1}{p} \ : \ \psi_{\vec{p}} \simeq \frac{1}{\sqrt{2p}}\mathrm{e}^{-i\eta p}$$

$$0 > \eta \gg -\frac{1}{p} \ : \ \psi_{\vec{p}} \simeq \frac{Ha}{\sqrt{2}p^{3/2}}$$

Все это предполагает Лоренц-инвариантность на малых расстояниях . . .

Сомнительно:

Например $H \sim 10^{10}$ GeV во время инфляции.

Откуда нам известно, что возмущения инфлатона или гравитационных волн Лоренц-инвариантны на масштабах

$$l \sim M_{\mathrm{Pl}}^{-1}$$

и даже

$$l \sim H^{-1}$$

?

Влияние нарушения Лоренц-инвариантности на космологические возмущения

- “Транспланковская проблема”:
  В обычном подходе, длины волн соответствующих возмущений более короткие, чем планковские длины.
- Лоренц-инвариантность не гарантирована даже в конце инфляции.

Влияет ли это на спектр или другие свойства?

- Параметры:
  - ✓ k — масштаб энергии нарушения Лоренц-инвариантности — нестандартная физика при пространственных импульсах $P \gtrsim k$.
  - ✓ H — хаббловский масштаб во время инфляции
    - $k \gg H \iff$ “транспланковская проблема”
    - $k \lesssim H \iff$ **позднее** нарушение Лоренц-инвариантности
- Из общих соображений: незначительный эффект при $k \gg H$

Starobinsky '01,
Kaloper et.al. '02,
....

Несколько подходов

- Лоренц-нарушенное дисперсионное соотношение — Martin, Brandenberger '01÷'04, Niemeyer '01, ...
- Предположения о начальном состоянии — Danielsson '02, Bozza et.al. '03, ...
- ....
- **Рождение мод** — Kempf '01; Kempf, Nimeyer '01; Easther et.al. '01,'03; Brandenberger, Ho '02

Что если не существует мод с $P > k$ вообще?

☹ Трудно смоделировать в 4-мерной теории: неопределенность в состоянии моды “при рождении”.

Наш подход: $\boxed{\text{МИР НА БРАНЕ}}$

- ✓ Нарушение Лоренц-инвариантности “натурально” в моделях с миром на бране — Visser '85; Chung, Freese '00; Chung, Kolb, Riotto '02; Csaki, Erlich, Grojean '01
- ✓ Аналог “рождения мод” легко построить — Dubovsky '02
- ✓ Возмущения и начальное состояние естественным образом определены

Игрушечная модель

- Модель
  - 5 измерений: η, x_i, z
  - Брана при $z = 0$
  - Метрика в 5d

$$ds^2 = a^2(\eta)\left[\alpha^2(z)d\eta^2 - \beta^2(z)d\vec{x}^{\,2}\right] - \alpha^2(z)dz^2$$

Масштабный фактор;

во время инфляции

$$a(\eta) = -\frac{1}{H\eta}$$

warp-факторы:

Выбор координат

$\alpha(0) = \beta(0) = 1 \iff 4d$ Лоренц-инвариантность справедлива на бране

$\alpha(z) \neq \beta(z) \iff$ Нарушение Лоренц-инвариантности в дополнительном измерении

  - Считаем, что α, β уменьшаются с ростом z

$$\frac{\alpha(z)}{\beta(z)} \to \epsilon \ll 1 \quad \text{при} \quad |z| \to \infty$$

  - Безмассовое $5d$ скалярное поле φ, минимально связаное с гравитацией

$$S_\varphi = \frac{1}{2}\int d^5X\sqrt{g}\cdot g^{AB}\partial_A\varphi\partial_B\varphi$$

$\mathcal{NB}$: Модель – игрушечная.
Преимущество: скалярное поле имеет хорошо определенные свойства.

Введем новое поле ψ

$$\varphi = \frac{1}{a(\eta)\beta^{3/2}(z)}\psi$$

Уравнение для $3d$-Фурье мод:

$$\boxed{-\partial_\eta^2\psi + \frac{\partial_\eta^2 a}{a}\psi - U(z)p^2\psi - a^2(\eta)\left[-\partial_z^2\psi + V(z)\psi\right] = 0}$$

Здесь

✓ $U(z) = \dfrac{\alpha^2(z)}{\beta^2(z)} \to \epsilon^2$ при $|z| \to \infty$

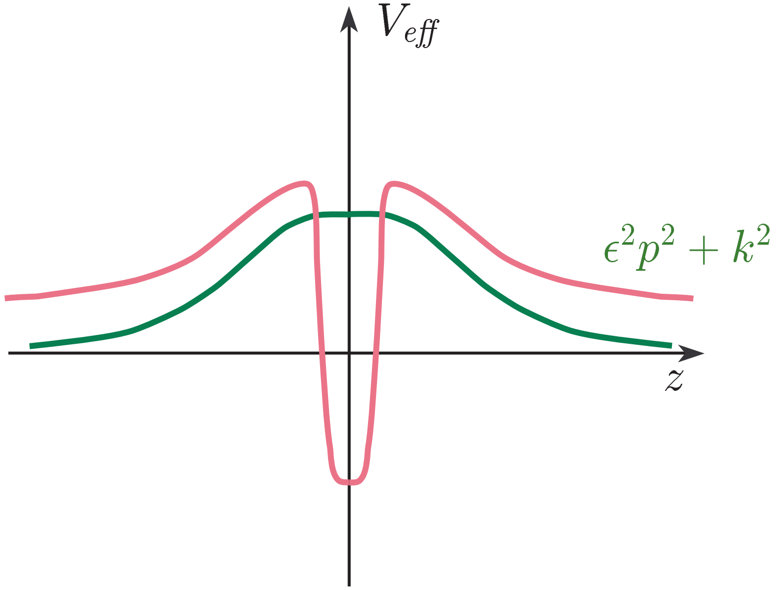
✓ $V(z) = \dfrac{3}{2}\dfrac{\partial_z^2\beta}{\beta} + \dfrac{3}{4}\left(\dfrac{\partial_z\beta}{\beta}\right)^2 \to$ const $= k^2$ при $|z| \to \infty$

$\mathcal{NB}$: $U(z) = 1 \Longrightarrow$ три первых члена $\Longleftrightarrow$ **стандартное** $4d$ уравнение для возмущений

$\mathcal{NB}$: $U(z) \ll 1$ при большом $|z| \Longrightarrow$ при данном p **уменьшает** энергию при удалении от браны

$\mathcal{NB}$: $\partial_z\beta$ разрывна на бране $\Longrightarrow$ **притягивающая** $\delta(z)$-фунция в “потенциале” $V(z)$.

Постоянный масштабный $a(\eta) = 1$: $V_{eff} = U(z)p^2 + V(z)$ $\boxed{\omega^2\psi = -\partial_z^2\psi + V_{eff}\psi}$

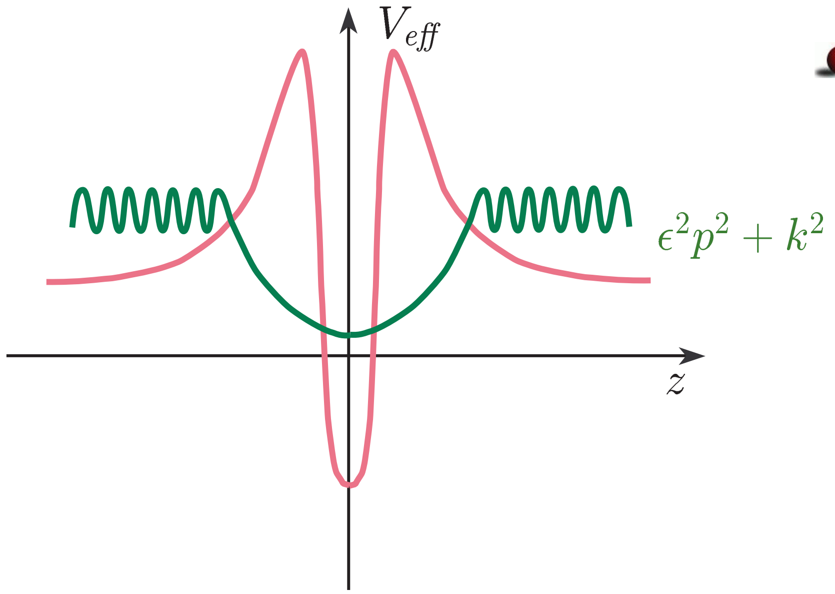


- $\boxed{p \ll k}$ *Нулевая мода* ***локализованная на бране*** *(возмущения браны) с законом дисперсии* $\omega^2 = p^2$:

$$\psi_0(z) = \beta^{3/2}(z) \iff \varphi(z) = \text{const}$$

$$\oplus$$

непрерывный спектр, $\omega > k$



- $\boxed{p \gg k}$ ***Нет*** *локализованных мод.* ***Только*** *непрерывный спектр,* $\omega^2 > \epsilon^2 p^2 + k^2$.

Рождение мод на бране:

Для данного p:

✓ Нет локализованных мод на бране при $\eta \to -\infty$. Физика 5-мерная в ранние времена.

✓ Локализованная мода **появляется**, когда 3-импульс достаточно покраснеет.

Инфляция

- Ранние времена $\left[P(\eta) = \dfrac{p}{a(\eta)} \gg k\right]$: $a(\eta)$ слабо меняется

$$\psi = \int \frac{d\lambda}{\sqrt{2\pi\omega_{\lambda,p}}} \psi_{\lambda,p} \mathrm{e}^{-i\int \omega_{\lambda,p} d\eta} A^-_{\lambda,p}$$

$$\omega^2_{\lambda,p}\psi_{\lambda,p} = U(z)\cdot p^2 + a^2(\eta)\cdot\left[-\partial_z^2 + V(z)\right]\psi_{\lambda,p}$$

$$\omega^2_{\lambda,p} = a(\eta)^2(\lambda^2 + k^2) + \epsilon^2 p^2$$

— изменяется адиабатически.

Хорошо определенные начальные состояния:

Адиабатический вакуум в $5d$-пространстве

В раннее время моды только в непрерывном спектре

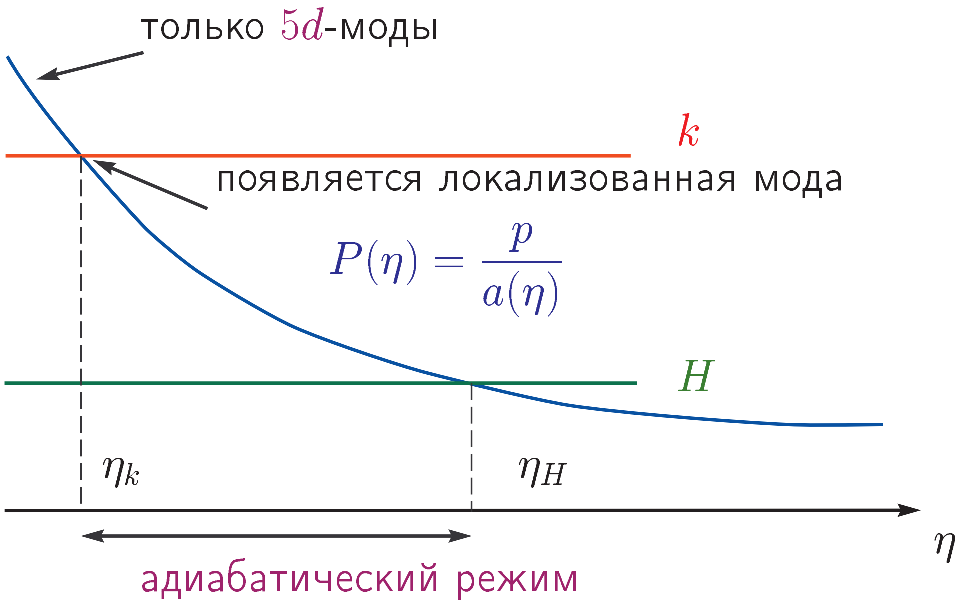
- Поздние времена $\left[P(\eta) = \dfrac{p}{a(\eta)} < k\right]$:

$$\psi = \beta^{3/2}(z)\cdot a(\eta)\cdot \mathbf{C} + \text{непрерывный спектр}$$

$\mathbf{C}(A^\pm)$— “амплитуда” возмущений в локализованной моде.

Каков спектр возмущений **в локализованной моде**?

- $k \gg H$



При $\eta = \eta_k$ возникает локализованная мода. Адиабатический режим;

ЩЕЛЬ $\sim k$ между отрицательной и положительной частотами

$\Downarrow$

НЕТ рождения частиц; локализованная и $5d$-моды остаются в адиабатическом вакууме

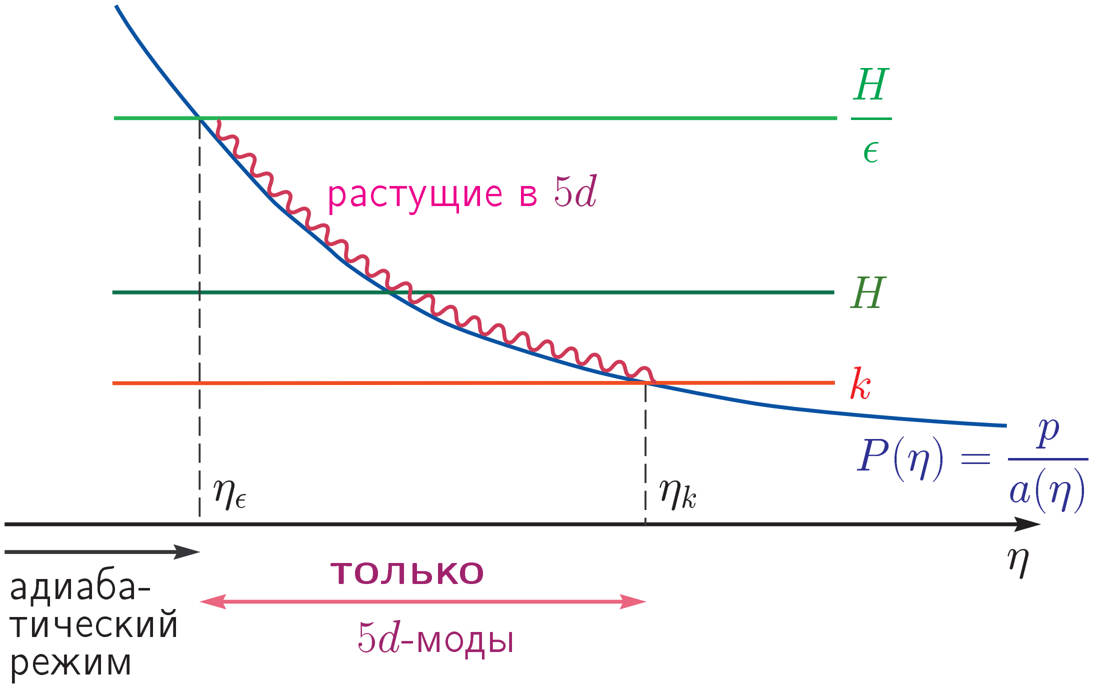
Результат.

Стандартный плоский спектр, стандартная амплитуда и наклон.

$k \gg H \Longleftrightarrow$ Нарушение Лоренц-инвариантности выше инфляционного масштаба $\Longrightarrow$ обычный $4d$ результат.

Согласно результатам других подходов.

- $k < H$: гораздо более интересен. (Предположим k **не сильно** меньше, чем H.)



✓ $\eta < \eta_k$: **Только** $5d$-моды

$$\omega^2_{\lambda,p} = a^2(\eta)\left[\lambda^2 + k^2\right] + \epsilon^2 p^2$$

$$P(\eta_\epsilon) = \frac{p}{a(\eta_\epsilon)} \sim \frac{H}{\epsilon} \implies \frac{\omega^2}{a^2(\eta_\epsilon)} \sim H^2$$

✓ $\eta = \eta_\epsilon$: Адиабатичность нарушена

✓ $\eta_\epsilon < \eta < \eta_k$:

$$-\ddot{\psi} + \frac{2}{\eta^2}\psi - \frac{1}{\eta^2}\frac{\lambda^2 + k^2}{H^2}\psi = 0$$

$5d$-моды — **"тахионные"** — растут со временем для достаточно малых λ

$$\psi \propto \frac{1}{|\eta|^{\alpha_\lambda - 1/2}}$$

$$\alpha_\lambda = \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{\lambda^2 + k^2}{H^2}}$$

Амплитуда при $\eta = \eta_k$

$$\psi(\eta_k) = \frac{1}{\sqrt{\epsilon p}} \left(\frac{\eta_\epsilon}{\eta_k}\right)^{\alpha_k - \frac{1}{2}}$$

начальная амплитуда $\omega_{\text{in}} = \epsilon p$

$$\frac{p}{a(\eta_\epsilon)} = \frac{H}{\epsilon}; \quad \frac{p}{a(\eta_k)} = k$$

$$a(\eta) = -\frac{1}{\eta H}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\eta_\epsilon}{\eta_k} \sim \frac{1}{\epsilon} \cdot \frac{H}{k}$$

Большое — не очень большое

$\psi(\eta_k) \propto \frac{1}{\epsilon^\alpha}$ — усиление при малых ϵ

✓ $\eta = \eta_k \Longrightarrow$ **появляется** локализованная мода, растет как $a(\eta)$.

✓ $\eta = \eta_{\rm eoi}$: Амплитуда в нулевой моде к **концу** инфляции

$$\varphi_0 = \frac{H}{p^{3/2}} \cdot \frac{1}{\epsilon^\alpha} \cdot f\left(\frac{H}{k}\right)$$

обычный результат; плоский спектр

фактор усиления

приблизительно $O(1)$

- Независящие от времени $5d$ параметры;

  точный де Ситтер $\Longrightarrow$ **плоский спектр**

  растяжения $p \to \nu p$

  $\eta \to \frac{1}{\nu}\eta$

- Независящие от времени $5d$ параметры, изменяющийся $H \Longrightarrow$ наклон

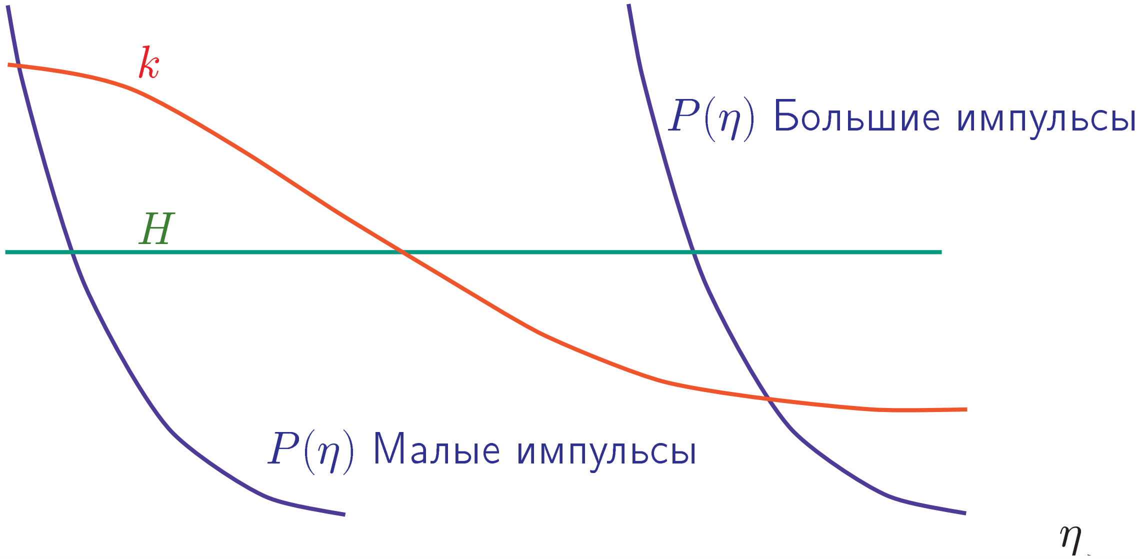
- Варьирующиеся $5d$ параметры

  Например:

  $$\epsilon(\eta) \ , \quad k(\eta);$$

  При $\eta_\epsilon < \eta < \eta_k$; $\eta_\epsilon, \ \eta_k \propto -\frac{1}{p}$, **сильное отклонение от плоского спектра**

Пример #1 $k(\eta)\downarrow$ при $\eta\uparrow$



✓ Малые импульсы

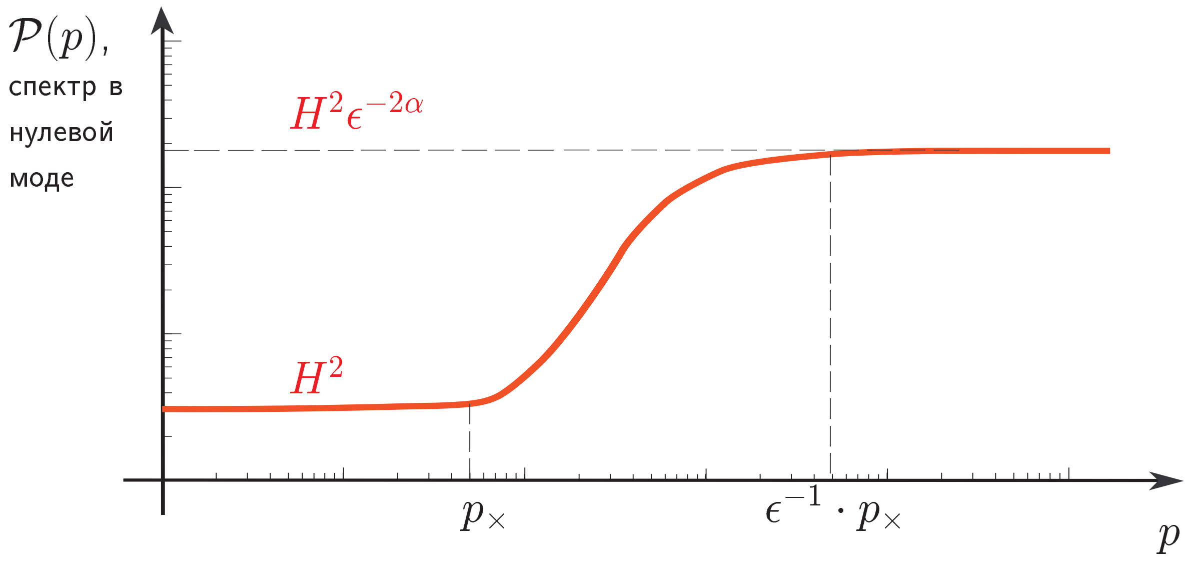
$$\varphi_0 = \frac{H}{p^{3/2}}$$

✓ Большие импульсы

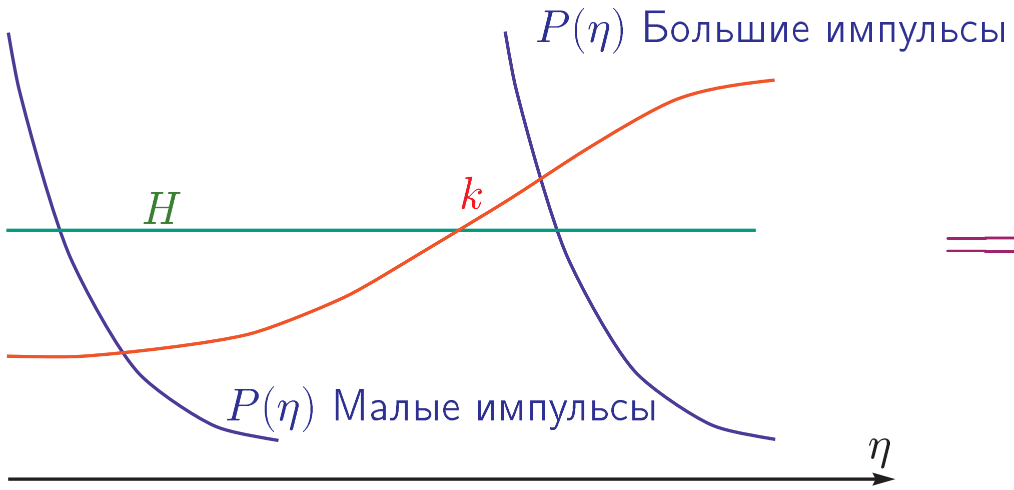
$$\varphi_0 = \frac{H}{p^{3/2}} \frac{1}{\epsilon^\alpha} \qquad 0 < \alpha < \frac{3}{2}$$

φ — гравитационные волны

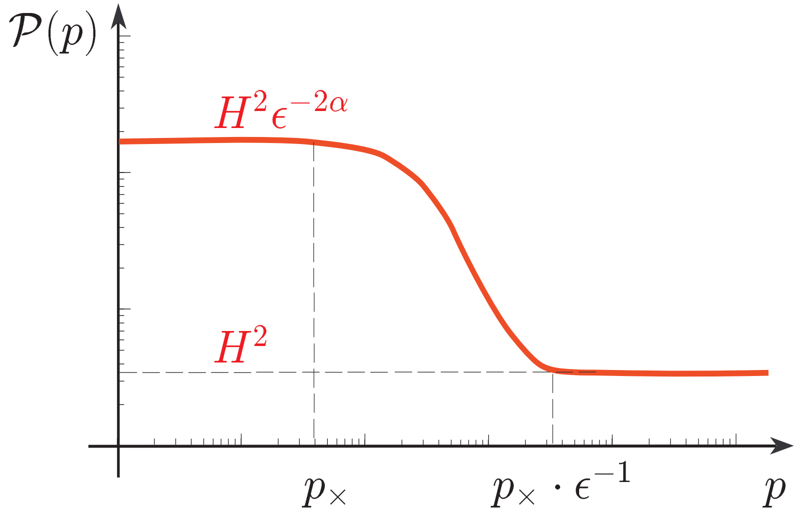
$\Longrightarrow$ шанс для LISA, Pulsar timing, LIGO/VIRGO, ...



Пример #2 $k(\eta)\uparrow$ при $\eta\uparrow$



$\Longrightarrow$



Больше примеров с $\epsilon(\eta)$

$\mathcal{NB}$: Моды с большими импульсами, $P_{eoi} \gtrsim H$, подавлены обычным образом

$\mathcal{NB}$: Нет проблем с обратным влиянием... (можно надеяться — нужен механизм Лоренц-нарушения для количественного изучения).

Заключение

✓ k: Энергетический масштаб нарушения Лоренц-инвариантности

✓ H: Параметр Хаббла при инфляции

- $k \gg H$: Обычные предсказания
- $k \lesssim H$: Сильно искаженный спектр. Зависит от эволюции в дополнительном измерении.

  Шанс для LISA, Pulsar timing, LIGO/VIGRO,...

$\mathcal{NB}$: Инфлатон и гравитационные волны могут вести себя совершенно по-разному.

- Хорошо определенная теория скалярного поля. Адиабатический вакуум в прошлом
- Модель (метрика) сама по себе может быть проблематичной
- Вряд ли есть проблемы с обратным влиянием во время инфляции и сегодня