Д.И.КАЗАКОВ

ВВЕДЕНИЕ В КВАНТОВУЮ ТЕОРИЮ ПОЛЯ

ЛЕКЦИИ

УДК 530.145 М-16

ВВЕДЕНИЕ В КВАНТОВУЮ ТЕОРИЮ ПОЛЯ (Лекции)
Препринт ИТЭФ 01-04

Д.И.Казаков - М., 2004 - 64 с.

Настоящие лекции содержат элементарное введение в основы квантовой теории поля. Наша цель состоит в том, чтобы начав с самых азов и обсуждая основные концепции, построить формализм, необходимый для построения Стандартной Модели фундаментальных взаимодействий.
Лекции рекомендованы кафедрой физики элементарных частиц факультета Общей и Прикладной физики МФТИ в качестве учебного пособия для студентов старших курсов, специализирующихся в экспериментальной и теоретической физике элементарных частиц.

INTRODUCTION TO QUANTUM FIELD THEORY (Lecture Notes)

D.I.Kazakov

The present lectures contain an elementary introduction to the principles of quantum field theory. Our aim is, starting from the very beginning and discussing the basic concepts, to build up the formalism needed to construct the Standard Model of particle interactions.

These lectures are recommended by the Elementary Particle Physics Division of Department of General and Applied Physics of MIPT as the training course for the students who are specialized in experimental amd theoretical elementary particle physics.

Рис.20, список лит. - 3 наим.

Содержание

1 Лекция I

Поля, Лагранжианы, Уравнения движения, Законы сохранения, Квантование

Современная теория фундаментальных взаимодействий есть теория **квантованных полей**. Главным объектом квантовой теории поля является квантовое поле.

1.1 Поля

Поле является наиболее фундаментальной и универсальной формой материи известной в настоящее время, которая описывает систему с бесконечным числом степеней свободы. Оно появляется уже в классической физике при описании действия двух источников на расстоянии (см. Рис.1). Из-за конечной скорости передачи взаимодействия, ограниченного скоростью света, источники не чувствуют друг друга немедленно. Субстанция, несущая взаимодействие называется полем, введенным Майклом Фарадеем в XIX веке.

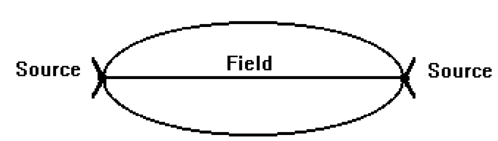


Рис. 1:

Квантовое поле является синтезом классического электромагнитного поля Фарадея-Максвелла и поля вероятностей нерелятивистской квантовой механики. Квантовое поле является единым объектом, заменяющим поля и частицы в классической физике. Одно поле данного сорта, являясь функцией пространственно-временной точки x_μ, описывает все частицы данного сорта во Вселенной.

Концепция квантового поля позволяет нам описывать системы с несохраняющимся числом частиц и переходы одних частиц в другие. Элементарным актом взаимодействия становится взаимодействие нескольких квантовых полей в пространственно-временной точке, в то время как обычные классические "силы" оказываются вторичным эффектом обмена промежуточными полями.

Математически поле является прямым обобщением точки. В случае поля мы имеем бесконечную и непрерывную систему точек с бесконечным числом степеней свободы.

1.2 Лагранжианы

В дальнейшем мы рассмотрим так называемый **лагранжевый** подход в квантовой теории поля. Он строится в полной аналогии с обычной лагранжевой механикой точки. Главную роль играет **лагранжева функция** $L(t)$, которая в действительности является функцией динамических переменных и есть сумма по всем точкам системы. В случае теории поля эта сумма заменяется интегралом по пространству. Соответствие с классической механикой показано в Таблице 1.

Таблица 1.

Точка	Поле
$x^i_\mu \quad i=1,2,...,N$	$\varphi(x_\mu)$
$L(t)=\sum\limits_{i=1}^{N}\mathcal{L}(x^i)$	$L(t)=\int\limits_{space} d^3x\mathcal{L}(x)$
$A=\int\limits_{t_1}^{t_2}L(t)dt$	$A=\int\limits_{time}L(t)dt=\int\limits_{space-time}d^4x\mathcal{L}(x)$

Действие A тогда становится интегралом от лагранжевой плотности по всему пространству-времени. Лагранжева плотность, обычно называемая просто **лагранжианом**, удовлетворяет следующим требованиям:

1) **Лоренц (Пуанкаре) инвариантность.** Это есть физическое требование инвариантности уравнений движения, получаемых из лагранжиана (см. ниже ур. (1.1)), по отношению к изменению системы отсчета. Это означает, что лагранжиан, будучи функцией полей и их производных, не зависит явным образом от x:

$$\mathcal{L}(x)=\mathcal{L}[\varphi(x),\partial\varphi(x),...].$$

Лоренц-инвариантность означает, что

$$\mathcal{L}'(x')=\mathcal{L}[\varphi'(x'),\partial\varphi'(x'),...]=\mathcal{L}[\varphi(x),\partial\varphi(x),...]=\mathcal{L}(x),$$

т.е. $\mathcal{L}(x)$ есть скаляр, в то время как поля могут принадлежать к различным представлениям группы Лоренца, например, спинорным, векторным и т.д.

2) **Локальность.** Это есть постулат, который проверяется экспериментально. До сих пор мы не имеем свидетельств отклонения от локальной КТП. Локальность $\mathcal{L}(x)$ означает, что он содержит конечное число частных производных от полей.

3) **Соответствие с классической механикой.** Уравнения движения классической механики содержат вторые производные по времени. Это означает, что Лагранжиан должен зависеть только от первых производных полей, чтобы иметь правильные уравнения движения, т.е.

$$\mathcal{L}(x)=\mathcal{L}[\varphi(x),\partial\varphi(x)].$$

4) **Унитарность.** Это есть свойство S матрицы, вытекающее из требования сохранения нормы вектора состояния. Унитарность означает, что лагранжиан должен быть действительной (эрмитовой) функцией, которая дает действительные (эрмитовы) динамические инварианты, типа энергии, импульса и т.д.

Следует заметить, что лагранжиан определен неоднозначно. К нему можно добавить полную производную произвольной функции

$$\mathcal{L} \to \mathcal{L}' = \mathcal{L} + \partial_\mu F^\mu$$

без изменения действия, т.е. $A' = A$, и, следовательно, уравнений движения. Строго говоря, это справедливо, если пренебречь топологически нетривиальными вкладами, идущими из граничных условий. Это свойство иногда используется для того, чтобы выбрать лагранжиан в наиболее удобном виде.

1.3 Уравнения движения

Уравнения движения могут быть получены из лагранжиана с помощью **принципа наименьшего действия,** который утверждает, что во время движения классической системы, действие вдоль пути движения принимает наименьшее значение, т.е. $\delta A = 0$. Для нахождения соответствующих уравнений, рассмотрим вариацию поля $\delta u_i(x)$ такую, что $\delta u_i(x) = 0$ на границе. Тогда уравнение $\delta A/\delta u_i = 0$ приводит к уравнению движения *Эйлера-Лагранжа*

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta u_i(x)} - \partial_\mu \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu u_i(x)} = 0, \tag{1.1}$$

где $\partial_\mu \equiv \partial/\partial x_\mu$.

1.4 Динамические инварианты

Уравнение движения позволяют нам сконструировать динамические инварианты, т.е. не зависящие от времени величины, такие как энергия, импульс, угловой момент, заряд и т.п.

Рассмотрим вариацию $\delta\mathcal{L}$ соответствующую преобразованию поля $u_i \to u_i + \delta u_i$ с неизменным пока аргументом x_μ . Имеем

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta u_i}\delta u_i + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu u_i}\delta(\partial_\mu u_i).$$

Используя уравнения движения для первого члена и тот факт, что $\delta\partial_\mu u_i = \partial_\mu \delta u_i$, находим

$$\delta\mathcal{L} = \partial_\mu \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu u_i}\delta u_i + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu u_i}\partial_\mu \delta u_i.$$

Итак, окончательно получаем

$$\delta\mathcal{L} = \partial_\mu [\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu u_i}\delta u_i].$$

Рассмотрим теперь глобальное преобразование $\delta u_i = i\alpha^a T^a_{ij} u_j$, где параметры $\alpha^a = const$, а T^a суть генераторы преобразования. Тогда

$$\delta\mathcal{L} = -\alpha^a \partial_\mu j^{\mu a},$$

где ток $j^{\mu a}$ есть

$$j^{\mu a} = -i\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu u_i}T^a_{ij}u_{j.} \qquad (1.2)$$

Если $\mathcal{L}$ инвариантен, т.е. $\delta\mathcal{L}\ = 0$, то имеем сохраняющиеся токи

$$\partial_\mu j^{\mu a} = 0.$$

Беря интеграл по всему пространству, получаем

$$\int d^3x(\frac{\partial}{\partial t}j^{0a} - \overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{j}^a) = 0.$$

Если $\overrightarrow{j}^a$исчезает на пространственной бесконечности, тогда член с полной производной исчезнет и мы приходим к

$$\frac{d}{dt}\int d^3xj^{0a}(\overrightarrow{x},t) = 0,$$

т.е. заряд

$$Q^a = \int d^3xj^{0a}(\overrightarrow{x},t) \qquad (1.3)$$

сохраняется

$$\frac{dQ^a}{dt} = 0. \qquad (1.4)$$

Это есть теорема Нётер.

1.5 Теорема Нётер

Пусть действие инвариантно относительно некоторых s-параметрических преобразований

$$\begin{cases} x_\mu \to x'_\mu = f_\mu(x,\omega), \\ u_i(x) \to u'_i(x') = U_i(x,\omega), \end{cases}$$

где $\omega_k, k = 1,2,...,s$ - параметры, так что $\delta A = 0$.

Тогда существуют s динамических инвариантов

$$C_k = \int d^3x\Theta^0_k(x), \qquad \frac{dC_k}{dt} = 0, \qquad k = 1,2,...,s,$$

где

$$\Theta^\mu_k = \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu u_i}(\partial_\nu u_i X^\nu_k - \Psi_{i,k}) - X^\mu_k\mathcal{L}, \qquad (1.5)$$

$$X^\mu_k = \frac{\partial f^\mu(x,\omega)}{\partial\omega_k}\ |_{\omega=0}, \qquad \Psi_{i,k} = \frac{\partial U_i(x,\omega)}{\partial\omega_k}\ |_{\omega=0}\ . \qquad (1.6)$$

Предыдущий случай (ур.(1.2)) соответствует преобразованием внутренней симметрии, когда

$$X^\mu_k = 0, \quad \Theta^\mu_k = j^\mu_k, \quad C_k = Q_k.$$

1.5.1 Пример 1: Трансляция

$$\begin{cases} x'_\mu = x_\mu + \omega_\mu, & X^\mu_k = \delta^\mu_k, \quad \Theta^\mu_\nu = T^\mu_\nu, \\ u'_i(x') = u_i(x), & \Psi_{i,k} = 0, \quad C_\nu = P_\nu. \end{cases}$$

Здесь T^μ_ν и P_ν есть тензор энергии-импульса и четырех-импульс, соответственно.

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu}(\mathcal{L}) &= \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu u_i}\partial_\nu u_i - g^{\mu\nu}\mathcal{L}, \\ P^\nu &= \int d^3x T^{\nu 0}(\overrightarrow{x}, t). \end{aligned} \tag{1.7}$$

Сохранение импульса $P^\nu(t_1) = P^\nu(t_2)$ следует из инвариантности лагранжиана относительно трансляции $\mathcal{L}(x+\omega) = \mathcal{L}(x)$.

1.5.2 Пример 2: Лоренцево вращение

$$\begin{cases} x'_\mu = x_\mu + \delta L_{\mu\nu} x_\nu, & X^{(\rho\sigma)}_\nu = x^\sigma \delta^\rho_\nu - x^\rho \delta^\sigma_\nu, \\ u'_i(x') = A^{j(\mu\nu)}_i u_j(x)\delta L_{\mu\nu}, & \Psi^{(\rho\sigma)}_{i,k} = A^{j(\rho\sigma)}_i u_j. \end{cases}$$

Здесь $A^{j(\rho\sigma)}_i$ зависит от спина поля. Сохраняющаяся величина теперь - это полный угловой момент

$$M^{\tau(\rho\sigma)} = \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\tau u_i}(\partial^\rho u_i x^\sigma - \partial^\sigma u_i x^\rho) + \mathcal{L}(x^\rho g^{\sigma\tau} - x^\sigma g^{\rho\tau}) - \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\tau u_i} A^{j(\rho\sigma)}_i u_j. \tag{1.8}$$

Последний член есть спин-тензор $S^{\tau(\rho\sigma)}$.

Проиллюстрируем эти общие выражения на некоторых простых примерах.

1.6 Иллюстрация

1.6.1 Пример 1: Скалярные поля

Лагранжиан, обладающий выше перечисленными свойствами, для действительного скалярного поля имеет вид

$$\mathcal{L}_s = \frac{1}{2}\partial_\mu\varphi(x)\partial^\mu\varphi(x) - \frac{m^2}{2}\varphi^2(x). \tag{1.9}$$

Первый член здесь есть кинетическая энергия, а последний - массовый член. Уравнение движения, следующее из (1.9) есть хорошо известное уравнение **Клейна-Гордона**

$$(\Box - m^2)\varphi(x) = 0, \tag{1.10}$$

где мы использовали обозначение $\Box = -\partial^2 = -\partial_0^2 + \overrightarrow{\partial}_x^2$.

Построим теперь динамические инварианты (1.7):

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu} = &\ \partial^\mu\varphi\partial^\nu\varphi - g^{\mu\nu}\mathcal{L}, \\ T^{00} = &\ \mathcal{H} = \tfrac{1}{2}[\dot{\varphi}^2 + (\overrightarrow{\nabla}\varphi)^2 + m^2\varphi^2], \\ P^k = &\ \int T^{0k} d\overrightarrow{x} = -\int \dot{\varphi}\, \partial^k\varphi d\overrightarrow{x}, \end{aligned}$$

где точка означает производную по t.

Для решения уравнения Клейна-Гордона полезно перейти в импульсное представление. Совершая Фурье-преобразование, получаем

$$\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int d^4k e^{ikx}\tilde{\varphi}(k),$$

где $\tilde{\varphi}(k)$ удовлетворяет уравнению

$$(k^2 - m^2)\tilde{\varphi}(k) = 0. \tag{1.11}$$

Решение ур. (1.11) есть

$$\tilde{\varphi}(k) = \sqrt{2\pi}\delta(k^2 - m^2)\varphi(k),$$

где $\varphi(k)$ есть произвольная функция k_μ с $k_0 = \pm\sqrt{\overrightarrow{k}^2 + m^2}$. Два возможных знака квадратного корня соответствуют двум линейно независимым решениям

$$\varphi(x) = \varphi^+(x) + \varphi^-(x) \tag{1.12}$$

таким что

$$\varphi^\pm(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d^4k e^{\pm ikx}\delta(k^2 - m^2)\tilde{\varphi}^\pm(k), \quad k_0 = +\sqrt{\overrightarrow{k}^2 + m^2}.$$

Беря интеграл по k_0 , получаем

$$\varphi^\pm(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int \frac{d\overrightarrow{k}}{\sqrt{2k_0}} e^{\pm ikx} a^\pm(\overrightarrow{k}), \tag{1.13}$$

с переопределением $a^\pm(\overrightarrow{k}) \equiv \tilde{\varphi}^\pm(k)/\sqrt{2k_0}$. Теперь четырех-импульс принимает вид

$$P^\mu = \int T^{0\mu} d\overrightarrow{x} = \int d\overrightarrow{k}\, k^\mu a^+(\overrightarrow{k}) a^-(\overrightarrow{k}) \tag{1.14}$$

или, если восстановить первоначальный порядок множителей,

$$P^\mu = \frac{1}{2}\int d\overrightarrow{k}\, k^\mu [a^+(\overrightarrow{k}) a^-(\overrightarrow{k}) + a^-(\overrightarrow{k}) a^+(\overrightarrow{k})]. \tag{1.15}$$

Теперь можно дать интерпретацию коэффициентам $a^\pm(\overrightarrow{k})$. Как следует из ур. (1.15), произведение $a^+(\overrightarrow{k})a^-(\overrightarrow{k})$ имеет смысл плотности частиц с импульсом $\overrightarrow{k}$ и энергией k_0. Мы увидим, что после квантования $a^\pm(\overrightarrow{k})$ станут операторами рождения (уничтожения), и их произведение - оператором числа частиц с данным импульсом.

1.6.2 Пример 2: Векторные поля

Лагранжиан с учетом замечания на стр. 4 может быть выбран в виде

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x) + \frac{m^2}{2}U_\mu(x)U^\mu(x), \tag{1.16}$$

где $F_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu U_\nu(x) - \partial_\nu U_\mu(x)(x)$.

Соответствующее уравнение движения

$$\partial_\nu F^{\nu\mu} - m^2 U^\mu = (\Box - m^2)U^\mu + \partial^\mu \partial_\nu U^\nu = 0 \tag{1.17}$$

называется уравнением **Прока**. Вычисляя производную от ур.(1.17) по отношению к ∂_μ мы получим условие

$$\partial_\mu U^\mu = 0, \tag{1.18}$$

которое называется условием **Лоренца**. Таким образом, уравнение Прока эквивалентно уравнению Клейна-Гордона с условием Лоренца. Следовательно, решения уравнения (1.17) совпадают с решениями (1.12), (1.13).

$$\begin{aligned} U_\mu(x) &= U_\mu^+(x) + U_\mu^-(x), \\ U_\mu^\pm(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d\overrightarrow{k}}{\sqrt{2k_0}} e^{\pm ikx} U_\mu^\pm(\overrightarrow{k}) \end{aligned} \tag{1.19}$$

плюс условие

$$k_0 U_0^\pm(\overrightarrow{k}) = k_n U^{\pm,n}(\overrightarrow{k}), \quad n = 1,2,3. \tag{1.20}$$

Четырех-импульс и спин-вектор для действительного векторного поля равны (ср. ур.(1.14))

$$\begin{aligned} P^\nu &= -\int d\overrightarrow{k}\, k^\nu [U_\mu^+(\overrightarrow{k}) U^{-,\mu}(\overrightarrow{k})], \\ \overrightarrow{S} &= i\int d\overrightarrow{k}\, k^\nu [\overrightarrow{U}^+(\overrightarrow{k}) \times \overrightarrow{U}^-(\overrightarrow{k})], \end{aligned} \tag{1.21}$$

где стрелка означает трех-вектор, а спин-вектор определен как $S^a = \epsilon^{abc} \int d\overrightarrow{x} S^0_{bc}$. Как следует из ур.(1.21) P^ν не является положительно определенным из-за сигнатуры пространства Минковского, в то время как положительная определенность гамильтониана (P^0) является необходимым условием устойчивости классической системы. Однако, мы еще не использовали условие (1.18). Подставляя ур.(1.18) в ур. (1.20), находим

$$-U_\mu U^\mu = \overrightarrow{U}\overrightarrow{U} - \frac{1}{k_0^2}(\overrightarrow{k}\overrightarrow{U})(\overrightarrow{k}\overrightarrow{U}).$$

Эта форма должна быть диагонализована, что можно сделать путем введения локальной системы отсчета

$$\overrightarrow{U}(\overrightarrow{k}) = \overrightarrow{e}_1 a_1(\overrightarrow{k}) + \overrightarrow{e}_2 a_2(\overrightarrow{k}) + \frac{\overrightarrow{k}}{|\overrightarrow{k}|}\frac{k_0}{m} a_3(\overrightarrow{k}), \tag{1.22}$$

где вектора поляризации $\overrightarrow{e}_i$ нормированы условием

$$(\overrightarrow{e}_i \cdot \overrightarrow{e}_i) = \delta_{ij}, \qquad \overrightarrow{e}_3 = \frac{\overrightarrow{k}}{|\overrightarrow{k}|}.$$

Ур.(1.22) ведет к $-U_\mu U^\mu = a_n a_n$, $n = 1,2,3$, так что ур.(1.21) принимает вид

$$\begin{aligned} P^\nu &= \int d\overrightarrow{k}\, k^\nu \sum_n [a_n^+(\overrightarrow{k}) a_n^-(\overrightarrow{k})] \\ &= \frac{1}{2}\int d\overrightarrow{k}\, k^\nu \sum_n [a_n^+(\overrightarrow{k}) a_n^-(\overrightarrow{k}) + a_n^-(\overrightarrow{k}) a_n^+(\overrightarrow{k})], \end{aligned}$$

который теперь очевидно положительно определен. Однако, если рассмотреть проекцию спин-вектор на направление импульса, то он оказывается недиагональным

$$S_3 \sim i[a_1^+(\overrightarrow{k})a_2^-(\overrightarrow{k}) - a_2^+(\overrightarrow{k})a_1^-(\overrightarrow{k})], \tag{1.23}$$

делая интерпретацию не столь прозрачной. Для диагонализации ур.(1.23) воспользуемся линейной подстановкой

$$a_1^\pm = \frac{b_1^\pm + b_2^\pm}{\sqrt{2}}, \qquad a_2^\pm = \frac{b_1^\pm - b_2^\pm}{i\sqrt{2}}, \qquad a_3^\pm = b_3^\pm$$

и окончательно получим

$$\begin{aligned} P^\nu &= \frac{1}{2}\int d\overrightarrow{k}\, k^\nu \sum_n [b_n^+(\overrightarrow{k})b_n^-(\overrightarrow{k}) + b_n^-(\overrightarrow{k})b_n^+(\overrightarrow{k})], \\ S_3 &\sim i[b_1^+(\overrightarrow{k})b_1^-(\overrightarrow{k}) - b_2^+(\overrightarrow{k})b_2^-(\overrightarrow{k})]. \end{aligned} \tag{1.24}$$

Теперь интерпретация становится ясной. Например, $b_1^+ b_1^-$ есть плотность частиц с импульсом $\overrightarrow{k}$, энергией k_0 и проекцией спина $+1$. В действительности, $b_{1,2}^\pm$ соответствует циркулярной поляризации, в то время как $a_{1,2}^\pm$ - линейной. Ввиду отсутствия члена $b_3^+ b_3^-$ в ур.(1.24) он соответствует нулевой проекции спина. Таким образом мы заключаем, что векторное поле с ненулевой массой описывает частицы с тремя возможными проекциями спина равными $+1, 0, -1$.

1.6.3 Пример 3: Спинорные поля

В этом случае лагранжиан имеет вид

$$\mathcal{L} = \overline{\psi}(x) i\gamma^\mu \partial_\mu \psi(x) - m\overline{\psi}(x)\psi(x) \tag{1.25}$$

и приводит к уравнению движения, которое есть уравнение **Дирака**

$$(i\hat{\partial} - m)\psi(x) = 0. \tag{1.26}$$

Здесь $\hat{\partial} \equiv \gamma^\mu \partial_\mu$, γ^μ есть 4x4 γ матрицы Дирака. Спинорное поле $\psi_\alpha(x)$ является столбцом

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \\ \psi_3(x) \\ \psi_4(x) \end{pmatrix},$$

а его сопряжение - строкой $\overline{\psi}(x) = \psi^+(x)\gamma^0$, где ψ^+означает эрмитовое сопряжение.

Динамические инварианты здесь также даются теоремой Нётер. Тензор энергии-импульса, заряженный ток и тензор спина равны, соответственно

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu}(x) &= \frac{i}{2}[\overline{\psi}\gamma^\mu \partial^\nu \psi - \partial^\nu \overline{\psi}\gamma^\mu \psi], \\ J^\mu(x) &= \overline{\psi}\gamma^\mu \psi, \\ S^{\tau(\mu\nu)}(x) &= \frac{1}{4}\overline{\psi}(\gamma^\tau \sigma^{\mu\nu} + \sigma^{\mu\nu}\gamma^\tau)\psi, \qquad \sigma^{\mu\nu} = \frac{1}{2i}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]. \end{aligned} \tag{1.27}$$

Для решения уравнения Дирака перейдем к импульсному представлению. Также как и в бозонном случае, существуют два решения

$$\psi^{\pm}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d\overrightarrow{p}}{\sqrt{2p_0}} e^{\pm ipx} \psi^{\pm}(\overrightarrow{p}),$$

где $\psi^{\pm}(\overrightarrow{p})$ удовлетворяет уравнению

$$(m \pm \widehat{p})\psi^{\pm}(\overrightarrow{p}) = 0. \tag{1.28}$$

В системе покоя $\overrightarrow{p} = 0$ это приводит к

$$(\gamma^0 \pm I)\psi^{\pm}(0) = 0.$$

Выбирая представление γ^0 матрицы в виде

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}, \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix},$$

получаем следующие двух-параметрические решения для обоих случаев

$$\begin{aligned} \psi^-_\alpha(0) &= c_1\delta_{1\alpha} + c_2\delta_{2\alpha}, \\ \psi^+_\alpha(0) &= c_3\delta_{3\alpha} + c_4\delta_{4\alpha}. \end{aligned} \tag{1.29}$$

Здесь α есть спинорный индекс, пробегающий значения от 1 до 4, а $\delta_{i\alpha}$ есть символ Кронекера.

Следовательно, существуют два независимых решения ур.(1.28), которые являются двумя спиновыми собственными состояниями для ψ^+ and ψ^-. Для перехода к произвольному импульсу следует совершить преобразование Лоренца в ур.(1.29).

Введем пару таких нормированных решений уравнения Дирака (1.28):

$$v^{s,\pm}_\alpha(\overrightarrow{p}), \qquad s = 1, 2; \quad \alpha = 1, 2, 3, 4$$

и сопряженные им $v^{*s,\pm}_\alpha(\overrightarrow{p})$ определенные как

$$v^{*s,\pm}_\alpha(\overrightarrow{p}) = (v^{s,\pm}_\alpha(\overrightarrow{p}))^*$$

с условием нормировки

$$v^{*s,\pm}_\alpha(\overrightarrow{p}) v^{\tau,\pm}_\alpha(\overrightarrow{p}) = \delta^{s\tau}.$$

Тогда для произвольного решения имеем разложение

$$\psi^{\pm}_\alpha(\overrightarrow{p}) = \sum_{s=1,2} v^{s,\pm}_\alpha(\overrightarrow{p}) a^{\pm}_s(\overrightarrow{p}). \tag{1.30}$$

Подставляя ур.(1.30) в ур.(1.27), получаем

$$P^\nu = \frac{1}{2} \int d\overrightarrow{p} p^\nu \sum_s [a^{*+}_s(\overrightarrow{p}) a^-_s(\overrightarrow{p}) - a^{*-}_s(\overrightarrow{p}) a^+_s(\overrightarrow{p})]. \tag{1.31}$$

Заметим важное отличие в знаке во втором члене по сравнению с бозонным случаем (1.14). Гамильтониан оказывается не положительно определенным. Чтобы избежать этого требуется правильная процедура квантования (Ферми-Дирака), обсуждаемая ниже.

Для интерпретации коэффициентов $a_s^{\pm}(\overrightarrow{p})$ полезно также рассмотреть спиновые проекции и операторы заряда:

$$
\begin{aligned}
S_3 &\sim \frac{1}{2}[a_1^{*+}a_1^- - a_2^{*+}a_2^- + a_1^{*-}a_1^+ - a_2^{*-}a_2^+], \\
Q &= \int \psi^*\psi d\overrightarrow{x} = \int d\overrightarrow{p} \sum_s [a_s^{*+}a_s^- + a_s^{*-}a_s^+]. \qquad (1.32)
\end{aligned}
$$

Теперь интерпретация становится прозрачной, как в предыдущих случаях. Мы видим, что поле Дирака описывает заряженные частицы с двумя проекциями спина равными $\pm 1/2$.

1.7 Квантование

Следующий шаг нашей программы есть процедура квантования, ибо мы знаем, что на малых расстояниях Природа обладает квантовыми свойствами. Квантование в теории поля есть обобщение этой процедуры в нерелятивистской квантовой механике N частиц при $N \to \infty$.

Начнем с рассмотрения наиболее популярной модели прямо связанной со свободной теорией поля, а именно, с гармонического осциллятора.

1.7.1 Представление чисел заполнения ("вторичного"квантования)

Гамильтониан гармонического осциллятора, который входит в уравнение Шредингера, имеет вид

$$H = \frac{1}{2}(p^2 + \omega^2 q^2), \qquad (1.33)$$

где p и q суть импульс и координата, соответственно. Решая уравнение на собственное значение

$$H\psi_n = E_n\psi_n,$$

мы находим спектр $E_n = \hbar\omega(n + 1/2)$. Собственные функции связаны друг с другом действием неких операторов a^+ и a

$$a^+\psi_n = \sqrt{n+1}\psi_{n+1}, \quad a\psi_n = \sqrt{n}\psi_{n-1},$$

где

$$a^+ = \sqrt{\frac{\omega}{2}}(\widehat{q} - \frac{i\widehat{p}}{\omega}) \quad a\sqrt{\frac{\omega}{2}}(\widehat{q} + \frac{i\widehat{p}}{\omega})$$

обычно называют повышающим и понижающим операторами, соответственно, а $\widehat{q}$ и $\widehat{p}$ суть операторы координаты и импульса в некотором представлении. Можно также определить и вакуумное состояние ψ_0 как $a\psi_0 = 0$.

Операторы a^+ и a подчиняются следующей алгебре

$$
\begin{aligned}
&aa^+ = \widehat{n} + 1, \quad a^+a = \widehat{n}, \quad [a, a^+] = 1, \\
&[a, a] = 0, \quad [a^+, a^+] = 0, \qquad (1.34)
\end{aligned}
$$

где $\widehat{n}\psi_n = n\psi_n$. Гамильтониан можно выразить через эти операторы

$$H = \frac{\omega}{2}(aa^+ + a^+a) = \omega(\widehat{n} + 1/2). \tag{1.35}$$

В силу эквидистантности спектра, мы можем теперь интерпретировать операторы следующим образом:

a^+ - оператор рождения кванта,

a - оператор уничтожения кванта,

$\widehat{n}$ - оператор числа квантов.

Следовательно, любое n-частичное состояние может быть получено действием операторов рождения на вакуум

$$\psi_n = \frac{(a^+)^n}{\sqrt{n!}}\psi_0.$$

В случае N осцилляторов гамильтониан есть просто сумма гамильтонианов индивидуальных осцилляторов

$$H = \sum_{k=1}^{N} H_k = \sum_{k=1}^{N} \omega_k(a_k^+ a_k + 1/2), \tag{1.36}$$

в то время как алгебра операторов принимает вид

$$[a_k, a_l^+] = \delta_{kl}, \quad [a_k, a_l] = 0, \quad [a_k^+, a_l^+] = 0. \tag{1.37}$$

Таким образом, произвольное квантовое состояние может описываться так называемыми числами заполнения, т.е. числами, указывающими сколько операторов рождения данного сорта действуют на вакуум

$$\psi(n_1, ..., n_N) = \prod_{1\leq k\leq N} [\frac{(a_k^+)^{n_k}}{\sqrt{n_k!}}]\psi_0.$$

Это представление называется **представлением числа заполнения** (или фоковским представлением).

Покажем теперь, что скалярное поле, удовлетворяющее уравнению Клейна- Гордона, эквивалентно набору осцилляторов (1.36). Рассмотрим 3-мерное Фурье преобразование

$$u(t, \overrightarrow{x}) = \int d\overrightarrow{k}[e^{i\overrightarrow{k}\overrightarrow{x}} a(t, \overrightarrow{k}) + e^{-i\overrightarrow{k}\overrightarrow{x}} a^*(t, \overrightarrow{k})].$$

Тогда уравнение Клейна-Гордона дает уравнение движения для $a(t, \overrightarrow{k})$

$$\ddot{a}\,(t, \overrightarrow{k}) + \omega_k^2 a(t, \overrightarrow{k}) = 0,$$

где частота $\omega_k^2 = \overrightarrow{k}^2 + m^2$. Но это есть не что иное, как осцилляторное уравнение. Если мы теперь поместим систему в "ящик"объемом $V = L^3$ с периодическими граничными условиями, мы получим дискретный набор возможных значений импульса

$$\overrightarrow{k}(n_1, n_2, n_3) = \left\{\frac{2\pi}{L}n_1, \frac{2\pi}{L}n_2, \frac{2\pi}{L}n_3\right\}.$$

Каждому значению $\overrightarrow{k}_n$ соответствует осциллятор с частотой

$$\omega_n^2 = m^2 + \frac{4\pi^2}{L^2}(n_1^2 + n_2^2 + n_3^2).$$

Таким образом, поле, удовлетворяющее уравнению Клейна-Гордона соответствует набору осцилляторов, помеченных тремя целыми числами n_1, n_2, n_3. Переход к бесконечному пределу $L \to \infty$ означает, что все суммы типа (1.36) становятся интегралами, а операторы перенормируются согласно правилам

$$\left(\frac{2\pi}{L}\right)^3 \sum_k \to \int d\overrightarrow{k}, \quad \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 \delta_{kk'} \to \delta(\overrightarrow{k} - \overrightarrow{k}'), \quad a_n \to \left(\frac{2\pi}{L}\right)^3 a(\overrightarrow{k}).$$

Коммутационные соотношения (1.37) принимают вид

$$[a(\overrightarrow{k}), a^+(\overrightarrow{l})] = \delta(\overrightarrow{k} - \overrightarrow{l}),\ [a(\overrightarrow{k}), a(\overrightarrow{l})] = 0,\ [a^+(\overrightarrow{k}), a^+(\overrightarrow{l})] = 0. \tag{1.38}$$

Следовательно, **квантование** означает переход от полей $u(x)$ к операторам $u(x)$ действующим на вектор состояния ψ. Коммутационные соотношения для для операторов $u(x)$ следует из соотношений для операторов a^+ и a (ур.(1.38)) и будут получены ниже.

1.7.2 Каноническое квантование

Эта схема квантования очень естественна с точки зрения классической механики в рамках гамильтоновой формулировки. В каноническом формализме основными переменными являются обобщенная координата q и обобщенный импульс p

$$p = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{q}}, \qquad \dot{q} = \frac{\partial q}{\partial t}.$$

Гамильтоновы уравнения движения для некоторой динамической переменной $A(p, q)$ имеют вид

$$\frac{dA(p,q)}{dt} = \{A, H\}, \tag{1.39}$$

где скобка **Пуассона** есть

$$\{a, b\} \equiv \frac{\partial a}{\partial q}\frac{\partial b}{\partial p} - \frac{\partial a}{\partial p}\frac{\partial b}{\partial q}. \tag{1.40}$$

Для осциллятора

$$H = \frac{1}{2}(p^2 + \omega^2 q^2), \qquad \{q, p\} = 1, \tag{1.41}$$

так что уравнение движения есть

$$\dot{q} = \{q, H\} = p, \quad \dot{p} = \{p, H\} = -\omega^2 q.$$

Их решение может быть выражено в терминах двух функций $a^{(\pm)}(t)$:

$$q(t) = \frac{a^{(+)}(t) + a^{(-)}(t)}{\sqrt{2\omega}}, \quad p(t) = i\sqrt{\frac{\omega}{2}}(a^{(+)}(t) - a^{(-)}(t)),$$

где $a^{(\pm)}(t)$ подчиняются уравнениям

$$\dot{a}^{(\pm)}(t) = \pm i\omega a^{(\pm)}(t)$$

с решением

$$a^{(\pm)}(t) = a^{(\pm)}(0)e^{\pm i\omega t}.$$

После идентификации $a^{(+)} = a^+, a^{(-)} = a$, ур.(1.41) принимает вид

$$H = \frac{\omega}{2}(aa^+ + a^+a), \qquad \left\{a, a^+\right\} = -i. \tag{1.42}$$

Каноническое квантование может быть теперь произведено согласно следующему **постулату канонического квантования**: *все динамические переменные* $(q, p, a, a^+, H,$ *и т.д.) являются операторами, действующими на волновую функцию* ψ *с коммутационными соотношениями получаемыми подстановкой*

$$\{a, b\}_{classical} \to \{a, b\}_{quantum} = \frac{1}{i}\left[a, b\right].$$

Тогда уравнения движения для оператора A (1.39) принимают вид

$$i\frac{dA}{dt} = \left[A, H\right], \tag{1.43}$$

причем коммутаторы равны

$$[q, p] = i, \qquad \left[a, a^+\right] = 1.$$

1.7.3 Релятивистская схема квантования

В лагранжевом подходе квантование может быть произведено полностью в лоренц-ковариантном виде. **Постулат квантования** в этом случае есть: *Все динамические переменные выражаются через полевые операторы* $u_i(x)$ *тем же самым путем как и в классической теории поля с учетом коммутационных соотношений (определенных ниже).* Например, для скалярного поля четырех-импульс дается формулой (1.14), где $a^{\pm}(\overrightarrow{k})$ суть операторы.

Для того, чтобы найти физический смысл полевых операторов $u^{\pm}(x)$ или $a^{\pm}(\overrightarrow{k})$, рассмотрим трансформационные свойства этих операторов под действием группы трансляций

$$u'(x) = u(x - \omega) = U^{-1}(\omega)u(x)U(\omega). \tag{1.44}$$

Здесь $U(\omega) = e^{iP_\mu\omega^\mu}$ есть оператор трансляции, P_μ является генератором. Инфинитезимальная форма ур.(1.44) есть

$$i\frac{\partial u(x)}{\partial x_\mu} = [u(x), P_\mu], \tag{1.45}$$

что есть обобщение ур.(1.43). Для Фурье компонент это ведет к

$$k_\mu a^{\pm}(\overrightarrow{k}) = \mp[a^{\pm}(\overrightarrow{k}), P_\mu]. \tag{1.46}$$

Рассмотрим собственный вектор Φ_p

$$P_\mu \Phi_p = p_\mu \Phi_p.$$

Тогда из ур.(1.46) получим

$$\begin{aligned} P_\mu a^+(\overrightarrow{k})\Phi_p = & \ (p+k)_\mu a^+(\overrightarrow{k})\Phi_p, \\ P_\mu a^-(\overrightarrow{k})\Phi_p = & \ (p-k)_\mu a^-(\overrightarrow{k})\Phi_p. \end{aligned}$$

Следовательно

$$a^\pm(\overrightarrow{k})\Phi_p = \Phi_{p\pm k}, \qquad k^2 = m^2.$$

Таким образом, интерпретация оператора $a^\pm(\overrightarrow{k})$ очевидна:

$a^+(\overrightarrow{k})$ есть оператор рождения частицы с импульсом $\overrightarrow{k}$ и массой m.

$a^-(\overrightarrow{k})$ есть оператор уничтожения частицы с импульсом $\overrightarrow{k}$ и массой m.

Аналогично,

$u^+(x)$ есть оператор рождения частицы массы m в пространственно-временной точке x_μ , $u^-(x)$ есть оператор уничтожения частицы массы m в пространственно-временной точке x_μ .

В силу принципа неопределенности мы знаем либо положение, либо импульс частицы. Вакуумное состояние определяется как

$$a^-(\overrightarrow{k})\Phi_0 = 0, \qquad \Phi_0^* a^+(\overrightarrow{k}) = 0, \qquad \Phi_0^*\Phi_0 = 1.$$

Тогда произвольное s-частичное состояние есть

$$\Phi_s = \int d\overrightarrow{k_1}...d\overrightarrow{k_s} F_s^{(i_1,...,i_s)}(\overrightarrow{k_1},...,\overrightarrow{k_s}) a_{i_1}^+(\overrightarrow{k_1})...a_{i_s}^+(\overrightarrow{k_s})\Phi_0, \tag{1.47}$$

где F_s называется волновой функцией системы s частиц в импульсном представлении. Для любого состояния мы имеем **Фоковское** представление

$$\Phi = \sum_s \Phi_s,$$

где Φ_s задаётся ур.(1.47).

1.7.4 Типы коммутационных соотношений

Получим теперь коммутационные соотношения между операторами в координатном представлении. Согласно общим правилам имеем

$$\{u_i(x), u_j(y)\}_\mp \to [u_i(x), u_j(y)]_\mp = \Delta_{ij}(x-y), \tag{1.48}$$

где знак "$\mp$" соответствует Бозе и Ферми случаям, соответственно.

Для скалярных полей имеем ур.(1.38)

$$[a^-(\overrightarrow{k}), a^+(\overrightarrow{q})] = \delta(\overrightarrow{k} - \overrightarrow{q}).$$

Беря интеграл по $d\overrightarrow{k}d\overrightarrow{q}$,получаем

$$\begin{array}{c}\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{d\overrightarrow{k}}{\sqrt{2k_0}}\frac{d\overrightarrow{q}}{\sqrt{2q_0}}e^{i(qy-kx)}\left\{[,]=\delta\right\}\\ =\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{d\overrightarrow{k}}{\sqrt{2k_0}}\frac{d\overrightarrow{q}}{\sqrt{2q_0}}\delta(\overrightarrow{k}-\overrightarrow{q})e^{i(qy-kx)}=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{d\overrightarrow{k}}{2k_0}e^{ik(y-x)}\\ \equiv\frac{1}{i}D^-(x-y),\end{array}$$

где мы ввели обозначение

$$\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{d\overrightarrow{k}}{2k_0}e^{ik(x-y)}=\frac{1}{i}D^-(y-x)=iD^+(x-y). \tag{1.49}$$

Теперь

$$\begin{aligned}\left[u^-(x),u^+(y)\right] &= -iD^-(x-y),\\ \left[u^+(x),u^-(y)\right] &= -iD^+(x-y),\\ [u(x),u(y)] &= -iD(x-y),\end{aligned} \tag{1.50}$$

где

$$D(x-y)=D^+(x-y)+D^-(x-y)=\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^4ke^{-ik(x-y)}\epsilon(k_0)\delta(k^2-m^2),$$

$$\epsilon(k_0)=\left\{\begin{array}{ll}1 & k_0>0,\\ -1 & k_0<0.\end{array}\right.$$

Полученные коммутаторы обладают очень важным свойством **локальной коммутативности**, а именно

$$[u(x),u(y)]=0,\qquad (x-y)^2<0,$$

что отражает причинные свойства независимости двух событий связанных пространственно-подобно интервалом.

В случае заряженных массивных векторных полей коммутатор имеет вид

$$[a_n^-(\overrightarrow{k}),a_m^{*+}(\overrightarrow{q})]=\delta_{nm}\delta(\overrightarrow{k}-\overrightarrow{q}). \tag{1.51}$$

Это приводит к

$$\begin{aligned}[U_n^{*-}(\overrightarrow{k}),U_m^+(\overrightarrow{q})]= &\ \delta(\overrightarrow{k}-\overrightarrow{q})[\delta_{nm}+\tfrac{k_nk_m}{m^2}],\\ [U_0^{*-}(\overrightarrow{k}),U_n^+(\overrightarrow{q})]= &\ -\tfrac{k_0k_n}{m^2}\delta(\overrightarrow{k}-\overrightarrow{q}).\end{aligned}$$

В координатном пространстве имеем

$$[U_\nu^*(x),U_\mu(y)]=(g_{\mu\nu}+\frac{1}{m^2}\frac{\partial^2}{\partial x_\nu\partial x_\mu})iD(x-y) \tag{1.52}$$

с той же самой функцией $D(x-y)$.

В случае спинорных полей следует не забывать проблему с положительной определенностью энергии. Четыре-импульс в этом случае (ур.(1.31)) имеет вид

$$P^\nu=\frac{1}{2}\int d\overrightarrow{p}p^\nu\sum_s[a_s^{*+}(\overrightarrow{p})a_s^-(\overrightarrow{p})-a_s^{*-}(\overrightarrow{p})a_s^+(\overrightarrow{p})]$$

так что мы вынуждены выбрать антикоммутиционные соотношения вместо коммутационных

$$[a_s^{*-}(\overrightarrow{k}), a_r^+(\overrightarrow{q})]_+ = \delta_{rs}\delta(\overrightarrow{k} - \overrightarrow{q}), \tag{1.53}$$

что приводит к четырех-импульсу

$$P^\nu = \frac{1}{2}\int d\overrightarrow{p}p^\nu \sum_s [a_s^{*+}(\overrightarrow{p})a_s^-(\overrightarrow{p}) + a_s^+(\overrightarrow{p})a_s^{*-}(\overrightarrow{p})], \tag{1.54}$$

теперь положительно определенному. Антикоммутатор (1.53) Ферми типа и приводит к следующему антикоммутатору для спинорных операторов в координатном пространстве

$$[\psi(x), \overline{\psi}(y)] = \frac{1}{i}S(x-y), \tag{1.55}$$

где

$$S(x-y) = (i\hat{\partial}_x + m)D(x-y).$$

1.7.5 Нормальное произведение

Знание коммутационных соотношений помогает нам определить так называемую нормальную форму операторов, что является полезным при вычислении матричных элементов.

Нормальная форма оператора это такая форма, когда все операторы рождения a^+ стоят слева от операторов уничтожения a^-. Она обозначается двоеточием: : ... :. Например, произведение двух операторов есть

$$u^*(x)u(y) = u^{*+}(x)u^+(y) + u^{*+}(x)u^-(y) + \underline{u^{*-}(x)u^+(y)} + u^{*-}(x)u^-(y).$$

Тогда нормальное произведение определяется как

$$: u^*(x)u(y) := u^{*+}(x)u^+(y) + u^{*+}(x)u^-(y) + \underline{u^+(y)u^{*-}(x)} + u^{*-}(x)u^-(y).$$

Таким образом,

$$u^*(x)u(y) =: u^*(x)u(y) : -iD^-(x-y).$$

При вычислении матричных элементов S-матрицы имеем

$$\Phi_0^* : ... : \Phi_0 = 0,$$

так что вклад дают только коммутаторы.

Обычно применим следующий постулат: Все динамические переменные записываются в нормальной форме. Например,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} : \partial_\mu\varphi(x)\partial^\mu\varphi(x) : -\frac{m^2}{2} : \varphi^2(x) :$$

* * * * * * * * * * *

2 Лекция II

Непрерывные симметрии, Глобальные и Локальные Симметрии, Калибровочные поля.

Перейдем теперь к конструированию взаимодействующих полей. Направляющая идея: форма взаимодействия определяется **принципами симметрии.** Лагранжиан строится так, чтобы он был инвариантен относительно преобразования полей определенных групп симметрии.

2.1 Непрерывные симметрии.

Преобразования могут быть дискретными и непрерывными. Примерами **дискретных** преобразований, играющих важную роль в физике могут служить

P - отражение пространственных координат $\overrightarrow{x} \to -\overrightarrow{x} : P\varphi(\overrightarrow{x}, t) = \varphi(-\overrightarrow{x}, t)$,

T- отражение времени$t \to -t : T\varphi(\overrightarrow{x}, t) = \varphi(\overrightarrow{x}, -t)$,

C - зарядово-сопряжение: $C\varphi(x) = \varphi^*(x)$.

Фундаментальным свойством локальной КТП является CPT - инвариантность

Идея симметрии является является весьма привлекательной и вполне естественной. Мы сталкиваемся с ней повсюду в природе. Человеческое тело, по крайней мере снаружи, лево-право симметрично. Хорошо известные снежинки (Рис.2) инвариантны относительно i) отражений в cc' плоскости, ii) вращений на угол $\frac{\pi}{3}k$, где k есть целое число.

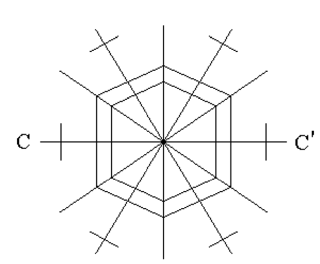


Рис. 2:

Если рассмотреть многоугольник (n-угольник), то он окажется инвариантным относительно вращений на угол $\frac{2\pi}{n}k$. Когда n стремится к бесконечности. мы получаем ковариантность относительно произвольного вращения, т.е. мы приходим к **непрерывной** симметрии, называемой $U(1)$ инвариантностью.

2.2 Глобальные симметрии

2.2.1 Глобальная U(1) симметрия

Группа $U(1)$ есть группа 1x1 матриц с единичным детерминантом, т.е. попросту фазовых факторов вида $e^{i\alpha}$. Очевидно, что

$$e^{i\alpha}e^{i\beta} = e^{i\beta}e^{i\alpha},$$

так что группа - абелева. Преобразование полей под действием группы выглядит следующим образом

$$U(\alpha)\varphi(x) = e^{i\alpha Q}\varphi(x), \tag{2.1}$$

где α есть действительный параметр, независимый от x, а Q есть заряд поля φ, генератор преобразования.

Лагранжиан

$$\mathcal{L} = \partial_\mu\varphi^*\partial^\mu\varphi - m^2\varphi^*\varphi - \lambda(\varphi^*\varphi)^2 \tag{2.2}$$

очевидно инвариантен относительно группы $U(1)$. Он содержит только пары $\varphi^*\varphi$. Нётеровский ток (1.2) при этом имеет вид ($\delta\varphi = i\alpha\varphi$)

$$j^\mu = -i\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu\varphi}\varphi + i\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu\varphi^*}\varphi^* = -i(\partial^\mu\varphi^*\varphi - \partial^\mu\varphi\varphi^*).$$

Комплексные поля φ^*, φ могут быть записаны в терминах действительных компонент

$$\varphi = \frac{\varphi_1 + i\varphi_2}{\sqrt{2}}, \qquad \varphi^* = \frac{\varphi_1 - i\varphi_2}{\sqrt{2}}.$$

Тогда лагранжиан (2.2) принимает вид

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi_1)^2 + \frac{1}{2}(\partial^\mu\varphi_2)^2 - \frac{m^2}{2}(\varphi_1^2 + \varphi_2^2) - \frac{\lambda}{4}(\varphi_1^2 + \varphi_2^2)^2. \tag{2.3}$$

Он инвариантен относительно вращения

$$\begin{aligned}\varphi_1 \to \varphi_1' = &\ \cos\alpha\ \varphi_1 - \sin\alpha\ \varphi_2,\\ \varphi_2 \to \varphi_2' = &\ \sin\alpha\ \varphi_1 + \cos\alpha\ \varphi_2.\end{aligned}$$

Для $\alpha \ll 1$

$$\varphi_1' = \varphi_1 - \alpha\varphi_2, \quad \varphi_2' = \varphi_2 + \alpha\varphi_1.$$

Соответственно,

$$\delta\varphi_i = i\alpha t_i^j\varphi_j, \qquad t = \begin{pmatrix} 0 & +i \\ -i & 0 \end{pmatrix}.$$

Нётеровский ток в этом случае есть

$$j^\mu = -i\partial^\mu\varphi_1(i\varphi_2) - i\partial^\mu\varphi_2(-i\varphi_1) = \partial^\mu\varphi_1\varphi_2 - \partial^\mu\varphi_2\varphi_1. \tag{2.4}$$

Заметим, что поля φ_1 и φ_2 вырождены: $m_1^2 = m_2^2 = m^2$. Это есть типичное следствие симметрии, хотя и не необходимое, как мы увидим позже.

Другим примером ковариантного лагранжиана служит

$$\mathcal{L} = i\overline{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\overline{\psi}\psi, \tag{2.5}$$

В этом случае ток имеет вид

$$j^\mu = i\overline{\psi}(x)\gamma^\mu\psi.$$

2.2.2 Глобальная SU(2) симметрия

Группа SU(2) есть группа унитарных 2x2 матриц с единичным детерминантом

$$U(\alpha) = e^{i\alpha^a T^a}, \tag{2.6}$$

где генераторы T^a $(a = 1, 2, 3)$ суть $T^a = \tau^2/2$, τ^a - матрицы Паули

$$\tau^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

В силу ненулевых коммутаторов

$$[T^a, T^b] = i\epsilon^{abc} T^c,$$

где ϵ^{abc} есть полностью антисимметричный тензор, $\epsilon^{123} = 1$, группа SU(2) является неабелевой группой.

Рассмотрим дублет $\underline{2}$ скалярных полей $\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}$, где $\varphi_{1,2}$ суть комплексные поля. Сопряженные поля есть $\varphi^+ = (\varphi_1^*, \varphi_2^*)$. Тогда преобразование полей под действием группы (2.6) имеет вид

$$\begin{aligned} \varphi' = \quad & U\varphi = & e^{i\alpha^a T^a}\varphi, \\ \varphi^{+\prime} = \quad & \varphi^+ U^+ = & \varphi^+ e^{-i\alpha^a T^a}. \end{aligned}$$

Заметим, что $U^+U = 1$, т.е. $T^+ = T$.

Лагранжиан инвариантный относительно группы SU(2) выглядит как (2.2)

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \varphi^+ \partial^\mu \varphi - m^2 \varphi^+ \varphi - \lambda(\varphi^+\varphi)^2. \tag{2.7}$$

Для $\alpha \ll 1$ $\delta\varphi_i = i\alpha^a (T^a)_{ij}\varphi_j$, так что Нётеровский ток (1.2) есть

$$j^{\mu a} = i\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu\varphi_i} T_i^{aj}\varphi_j - i\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu\varphi_i^+}(-\varphi^{+j}T_j^{ai}) = -\frac{i}{2}[\partial^\mu\varphi^{+i}T_i^{aj}\varphi_j - \partial^\mu\varphi_i T_j^{ai}\varphi^{+j}].$$

Опять симметрия приводит к вырожденности полей φ_1 и φ_2. Это происходит только если существует единственное невырожденное низшее энергетическое состояние - вакуум. В нашем случае $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$.

2.2.3 Группа SU(N)

Естественным обобщением группы SU(2) является группа SU(N). Она часто используется в физике частиц, и мы рассмотрим здесь общие свойства этой группы.

Группа SU(N) есть группа NxN унитарных матриц с единичным детерминантом:

$$U \in SU(N), \qquad U^+U = 1, \qquad \det U = 1.$$

Число генераторов SU(N) есть число действительных параметров, характеризующих общую SU(N) матрицу. В общем случае NxN матрица имеет $2N^2$ действительных параметров. Условие $U^+U = 1$ накладывает N^2 ограничений, а условие $\det U = 1$

добавляет еще одно ограничение. Итого получаем N^2-1 свободных параметров, что дает число генераторов группы SU(N). Обычная параметризация имеет вид (2.6)

$$U = \exp[i\sum_{a=1}^{N^2-1}\alpha^a T^a] \equiv \exp(i\alpha^a T^a), \tag{2.8}$$

где T^a суть генераторы. Они обладают следующими свойствами:

$$U^{-1} = U^+ : \exp(-i\alpha^a T^a) = \exp(-i\alpha^a T^{+a}) \Rightarrow T^a = T^{+a},$$
$$\det U = 1 : \det U = \exp Tr \ln U = \exp Tr(i\alpha^a T^a) \Rightarrow TrT^a = 0.$$

Матрицы T^a принадлежат к алгебре Ли группы SU(N) с коммутатором

$$[T^a, T^b] = if^{abc}T^c, \tag{2.9}$$

где f^{abc} (числа) называются структурными константами группы. Очевидно, что f^{abc} антисимметричным по индексам. Набор чисел f^{abc} полностью характеризует группу.

Заметим, что до сих пор мы говорили о наборе N^2-1, NxN матриц T^a. Они известны как генераторы группы SU(N) в **фундаментальном представлении.** Однако, любой набор N^2-1 бесследовых эрмитовых матриц, который удовлетворяет алгебре Ли (2.9) также представляет группу.

Рассмотрим N комплексных полей φ_i $(i = 1, 2, ..., N)$ образующих вектор

$$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_N \end{pmatrix}.$$

Его SU(N) преобразование есть

$$\varphi \to \varphi' = U\varphi,$$

или в компонентах

$$\varphi_i \to \varphi'_i = U_i^j \varphi_j; \qquad \delta\varphi_i = i(\alpha^a T^a)_i^j \varphi_j.$$

N полей, преобразующиеся таким образом, называются преобразующимися по **фундаментальному представлению** группы SU(N), и обозначаются как $\underline{N}$. Комплексно сопряженное поле φ_i^* преобразуется как

$$\varphi_i^* \to \varphi_i^{*\prime} = U_i^{*j}\varphi_j^*.$$

Если сделать транспонирование, т.е. записать поле φ_j^* как строку, получим эрмитово сопряженное поле

$$(\varphi_i^*)^T = \varphi^{+i}$$

преобразующееся как

$$\varphi^{+i} \to \varphi^{+i\prime} = \varphi^{+j}(U^+)_j^i.$$

N полей, преобразующиеся таким путем, называются преобразующимися по **сопряженному фундаментальному представлению** группы SU(N) и обозначаются $\underline{\overline{N}}$.

Комбинируя фундаментальное представление с его сопряженным, получим прямое (тензорное) произведение представлений, которое есть NxN матрица

$$(\varphi \otimes \chi^+)_i^j = \varphi_i \chi^{+j} = (\varphi_i \chi^{+j} - \frac{1}{N}\delta_i^j \varphi_k \chi^{+k}) + \frac{1}{N}\delta_i^j \varphi_k \chi^{+k}. \tag{2.10}$$

Если взять след от ур.(2.10)

$$Tr(\varphi \otimes \chi^+) = \varphi_k \chi^{+k}$$

мы найдем, что первый член есть бесследовая матрица с $N^2 - 1$ независимыми компонентами

$$M_i^j = \varphi_i \chi^{+j} - \frac{1}{N}\delta_i^j \varphi_k \chi^{+k},$$

а оставшаяся матрица диагональна и имеет одну компоненту

$$S_i^j = \frac{1}{N}\delta_i^j \varphi_k \chi^{+k}.$$

Полезно представить как матрицы M и S преобразуются под действием группы SU(N). Имеем

$$M_i^j \to (M')_i^j = U_i^l \varphi_l \chi^{+m} U_m^{+j} - \frac{1}{N}\delta_i^j U_k^l \varphi_l \chi^{+m} U_m^{+k}.$$

Используя свойство унитарности, это дает

$$(M')_i^j = U_i^l \varphi_l \chi^{+m} U_m^{+j} - \frac{1}{N}\delta_i^j \varphi_l \chi^{+l},$$

или в матричном виде

$$\begin{aligned} M &\to M' = UMU^+, \\ S &\to S' = S. \end{aligned} \tag{2.11}$$

$N^2 - 1$ независимых компонент матрицы M_i^j называются преобразующимися по **присоединенному представлению** группы SU(N) и обозначаются как $\underline{N^2 - 1}$. Оставшаяся компонента S_i^j инвариантна относительно группы SU(N), она преобразуется как **синглет** обозначаемый как $\underline{1}$.

Таким образом мы продемонстрировали закон декомпозиции, справедливый для любой группы SU(N)

$$\underline{N} \otimes \underline{\overline{N}} = \underline{N^2 - 1} \oplus \underline{1}.$$

Заметим, что если мы идентифицируем f^{abc} с элементами $N^2 - 1 \times N^2 - 1$ матрицы T^b

$$f^{abc} = i(T^b)_{ac}$$

то матрицы T^b будут генераторами группы SU(N) в присоединенном представлении.

2.3 Локальные симметрии и калибровочные поля

2.3.1 Локальные симметрии

Локальные симметрии в теорию поля были введены Янгом и Миллсом в 1954 году. Они задумались над тем, что произойдет, если разрешить локальные преобразования симметрии, т.е. если параметры группы симметрии α^a зависят от пространственно-временной точки

$$\alpha^a = \alpha^a(x).$$

Преобразования

$$\varphi(x) \to \varphi'(x) = U(x)\varphi(x) \tag{2.12}$$

называются **калибровочными преобразованиями.**

Этот шаг оказывается нетривиальным. Кинетический член в лагранжиане не является более инвариантным. Чтобы это увидеть, рассмотрим N-компонентное дираковское поле ψ в фундаментальном представлении группы SU(N). Кинетический член ведет себя как

$$\overline{\psi} i\gamma^\mu \partial_\mu \psi \to \overline{\psi} U^+(x) i\gamma^\mu \partial_\mu (U(x)\psi) = \overline{\psi} i(\underbrace{U^+\gamma^\mu U}_{\gamma^\mu.})\partial_\mu \psi + \overline{\psi} U^+ i\gamma^\mu (\partial_\mu U)\psi$$

Последнее слагаемое - это добавка, которая делает лагранжиан неинвариантным. Чтобы избежать этого, введем т.н. **ковариантную** производную D_μ определенную таким образом, чтобы кинетический член стал инвариантным

$$\overline{\psi} i\gamma^\mu D_\mu \psi \to \overline{\psi}' i\gamma^\mu D'_\mu \psi' = \overline{\psi} i\gamma^\mu D_\mu \psi. \tag{2.13}$$

Ур.(2.13) определяет преобразование D_μ:

$$\overline{\psi}' i\gamma^\mu D'_\mu \psi' \overline{\psi} U^+ i\gamma^\mu D'_\mu U\psi \stackrel{def}{=} \overline{\psi} i\gamma^\mu D_\mu \psi.$$

Следовательно

$$D'_\mu = U D_\mu U^+ \tag{2.14}$$

или

$$(D_\mu \psi)' = U D_\mu \psi. \tag{2.15}$$

2.3.2 Калибровочные поля

Вводя разность двух производных

$$V_\mu = \partial_\mu - D_\mu$$

получаем с помощью ур.(2.14), (2.15)

$$\begin{aligned}[(\partial_\mu - D_\mu)\psi]' = \ & \partial_\mu \psi' - U D_\mu \psi = \partial_\mu U\psi + U\partial_\mu \psi - U D_\mu \psi \\ & = U(\partial_\mu - D_\mu)\psi + \partial_\mu U\psi.\end{aligned}$$

следовательно

$$(\partial_\mu - D_\mu)'\psi' = [U(\partial_\mu - D_\mu)U^+ + (\partial_\mu U)U^+]\psi.$$

Это дает закон преобразования V_μ

$$V'_\mu = U V_\mu U^+ + (\partial_\mu U)U^+. \tag{2.16}$$

Первый член в ур.(2.16) это хорошо известное присоединенное представление (2.11). Оно может быть разложено по генераторам $V_\mu = V_\mu^a T^a$. Второй член также может быть разложен по генераторам как $C_\mu^a T^a$.

Таким образом, мы приходим к $N^2 - 1$ **калибровочным полям** V_μ^a преобразующимся по присоединенному представлению группы SU(N).

Теперь локально инвариантный лагранжиан для фермионов в фундаментальном представлении принимает вид

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_F &= \overline{\psi} i\gamma^\mu D_\mu \psi - m\overline{\psi}\psi \\ &= \overline{\psi} i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\overline{\psi}\psi - i\overline{\psi}\gamma^\mu V_\mu^a T^a \psi \end{aligned} \tag{2.17}$$

и содержит **взаимодействие**. Нам необходим также кинетический член для полей V_μ, который тоже должен быть калибровочно инвариантным. Чтобы найти его, рассмотрим коммутатор двух ковариантных производных

$$[D_\mu, D_\nu] \to [D'_\mu, D'_\nu] = U[D_\mu D_\nu - D_\nu D_\mu]U^+.$$

Действуя на некоторое поле ψ, имеем

$$\begin{gathered} [D_\mu, D_\nu]\psi = D_\mu(D_\nu\psi) - D_\nu(D_\mu\psi) = \\ -(\partial_\mu V_\nu - \partial_\nu V_\mu - [V_\mu, V_\nu])\psi = -G_{\mu\nu}\psi. \end{gathered}$$

Согласно ур. (2.14) и (2.15) **тензор напряженности** $G_{\mu\nu}$ преобразуется следующим образом

$$G_{\mu\nu} \to G'_{\mu\nu} = UG_{\mu\nu}U^+.$$

Таким образом, кинетический член ковариантный относительно группы SU(N) есть

$$\mathcal{L}_{gauge} = \frac{1}{2g^2} Tr(G_{\mu\nu}G^{\mu\nu}), \tag{2.18}$$

где g есть число, введенное для правильной нормировки (см. ниже). Инвариантность $\mathcal{L}_{gauge}$ следует из свойства матриц:

$$Tr(G'_{\mu\nu}G'^{\mu\nu}) = Tr(UG_{\mu\nu}U^+UG^{\mu\nu}U^+) = Tr(U^+UG_{\mu\nu}G^{\mu\nu}) = Tr(G_{\mu\nu}G^{\mu\nu}).$$

Рассмотрим теперь взаимодействие со скалярными полями. Рецепт следующий: подстановка ковариантной производной D_μ вместо ∂_μ в глобально инвариантный лагранжиан, например, (2.7)

$$\mathcal{L}_s = (D_\mu\Phi)^+(D^\mu\Phi) - V(\Phi^+\Phi). \tag{2.19}$$

Ур. (2.19) очевидно калибровочно-инвариантно.

Заметим, что так как $V_\mu = V_\mu^a T^a$, то же справедливо и для тензора $G_{\mu\nu}$:

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} = \partial_\mu V_\nu^a T^a - \partial_\nu V_\mu^a T^a - V_\mu^b V_\nu^c [T^b, T^c] = \\ = (\partial_\mu V_\nu^a - \partial_\nu V_\mu^a - if^{abc} V_\mu^b V_\nu^c) T^a = G_{\mu\nu}^a T^a. \end{aligned}$$

Переопределяя поля $V_\mu^a = igA_\mu^a$, имеем

$$\frac{1}{2g^2} Tr(G_{\mu\nu}G^{\mu\nu}) = \frac{1}{2g^2} G_{\mu\nu}^a G^{\mu\nu b} Tr(T^a T^b) = \frac{1}{4g^2} G_{\mu\nu}^a G^{\mu\nu a} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a},$$

где

$$G_{\mu\nu}^a = igF_{\mu\nu}^a, \qquad F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf^{abc} A_\mu^b A_\nu^c$$

и мы учли обычную нормировку генераторов в фундаментальном представлении

$$Tr(T^aT^b) = \frac{1}{2}\delta^{ab}.$$

Окончательно, лагранжиан (2.17), (2.18) и (2.19) принимает вид:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{gauge} &= -\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{\mu\nu a}, \qquad (2.20)\\ \mathcal{L}_{fermion} &= \overline{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi + g\overline{\psi}\gamma^\mu A^a_\mu T^a_F\psi,\\ \mathcal{L}_{scalar} &= [(\partial_\mu - igA^a_\mu T^a_S)\Phi]^+[(\partial^\mu + igA^{a\mu}T^a_S)\Phi] - V(\Phi^+\Phi). \end{aligned}$$

Имеем следующие замечательные свойства:

i) Единая константа связи g ;

ii) Неабелевы калибровочные теории нелинейны, т.е. содержат самодействие калибровочных полей естественным образом.

iii) калибровочные поля безмассовы, массовый член нарушил бы калибровочную инвариантность.

2.3.3 Замечание о квантовании калибровочных полей

Имея лагранжиан калибровочных полей, мы можем проквантовать его согласно общим правилам. Однако, прямое квантование сталкивается с некоторыми проблемами. Чтобы увидеть это, рассмотрим каноническое квантование. Обобщенный канонический импульс в соответствии с ур.(2.18) имеет вид

$$p^a_\mu = \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_0 A^a_\mu} = F^a_{\mu 0}.$$

Следовательно $p^a_0 = F^a_{00} = 0$. В то же время, мы хотели бы сохранить обычные коммутационные соотношения $[q,p] = 1$. Очевидно, мы имеем противоречие. Причина в том, что лагранжиан (2.18) является сингулярным, A^a_0 не имеет канонически сопряженного импульса, это не есть динамическая переменная, а является связью и может быть устранена из уравнений.

Рассмотрим уравнение движения для калибровочных полей (Абелев случай)

$$\Box A_\nu + \partial_\nu(\partial_\mu A_\mu) = 0. \qquad (2.21)$$

Производя калибровочное преобразование$A_\mu \to A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu f$, мы видим, что продольная часть векторного поля $\partial_\mu A_\mu \equiv \chi(x)$ не инвариантна, но преобразуется как

$$\chi \to \chi' = \chi + \partial^2 f$$

и может быть исключена выбором $\partial^2 f = -\chi$. Такой выбор калибровки $\partial_\mu A_\mu = \chi(x) = 0$ называется калибровкой Лоренца.

Таким образом, калибровочное поле может быть разделено на две части

$$A_\mu = A^{tr}_\mu + A^{long}_\mu,$$

где физические степени свободы ассоциированы с поперечными модами, удовлетворяющими уравнению

$$(g_{\mu\nu}\partial^2 - \partial_\mu\partial_\nu)A^{tr}_\mu = 0. \tag{2.22}$$

Дифференциальный оператор в ур.(2.22) $K^{tr}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}\partial^2 - \partial_\mu\partial_\nu$ не имеет обратного, необходимого для нахождения решения. Это есть другой аспект той же проблемы. Заметим, что такой проблемы нет в случае массивных векторных полей благодаря массовому члену. Ур.(1.22) сингулярно в пределе $m \to 0$.

Решение указанной проблемы достигается следующим путем: введем нарушающий симметрию член, чтобы снять вырождения лагранжиана

$$\mathcal{L}^{tr} \to \mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\alpha}(\partial_\mu A_\mu)^2, \tag{2.23}$$

где α есть число. Тогда ур.(2.20) принимает вид

$$\partial^\nu F_{\mu\nu} - \frac{1}{\alpha}\partial_\mu(\partial A) = \Box A_\mu + (1-\frac{1}{\alpha})\partial_\mu(\partial A) = 0 \tag{2.24}$$

и ведет к

$$\Box\partial^\mu A_\mu = \Box\chi = 0. \tag{2.25}$$

Дифференциальный оператор в ур.(2.24) теперь есть

$$K^{tr}_{\mu\nu} \to K_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}\Box + (1-\frac{1}{\alpha})\partial_\mu\partial_\nu.$$

Его Фурье-образ имеет вид

$$g_{\mu\nu}k^2 - (1-\frac{1}{\alpha})k_\mu k_\nu = k^2 P^{tr}_{\mu\nu} - \frac{1}{\alpha}k^2 P^l_{\mu\nu},$$

где

$$P^{tr}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}, \qquad P^l_{\mu\nu} = \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}$$

суть соответствующие проекции. Обратный оператор теперь существует

$$K^{-1}_{\mu\nu} = \frac{1}{k^2}P^{tr}_{\mu\nu} + \frac{d_l}{k^2}P^l_{\mu\nu}, \qquad d_l = \alpha.$$

Это позволяет нам решить ур.(2.24), используя фурье-преобразование. Диагонализация теперь может быть достигнута переходом в локальную систему отсчета

$$A^\pm_\mu(\overrightarrow{k}) = e^1_\mu a^\pm_1(\overrightarrow{k}) + e^2_\mu a^\pm_2(\overrightarrow{k}) + e^3_\mu a^\pm_3(\overrightarrow{k}) + e^0_\mu a^\pm_0(\overrightarrow{k}), \tag{2.26}$$

с коммутационными соотношениями в виде

$$[a^-_\mu(\overrightarrow{k}), a^+_\nu(\overrightarrow{q})] = g_{\mu\nu}\delta(\overrightarrow{k} - \overrightarrow{q}). \tag{2.27}$$

Отметим "неправильный"знак коммутатора для a_0 (индефинитная метрика). Однако, благодаря условию Лоренца

$$|\overrightarrow{k}|a^\pm_3(\overrightarrow{k}) - k_0 a^\pm_0(\overrightarrow{k}) = 0, \qquad |\overrightarrow{k}| = k_0,$$

и, следовательно,

$$a_3^+a_3^- = a_0^+a_0^-.$$

Поэтому четырех-импульс содержит только вклад поперечных квантов

$$P^\nu = \int d\overrightarrow{k}\, k^\nu \sum_{s=1,2} a_s^+(\overrightarrow{k}) a_s^-(\overrightarrow{k}). \tag{2.28}$$

и ур.(2.28), очевидно, положительно определено. Ур.(2.27) приводит к следующему коммутатору полей в координатном пространстве

$$[A_\mu(x), A_\nu(y)] = i g_{\mu\nu} D(x-y), \qquad (d_l = 1). \tag{2.29}$$

2.3.4 Поля духов

Ситуация является более сложной в неабелевом случае. Ур.(2.25) здесь имеет вид

$$D^\mu \partial_\mu \chi^a = 0 \tag{2.30}$$

или

$$\partial_\mu^2 \chi^a + g f^{abc} A_\mu^b \partial_\mu \chi^c = 0.$$

Следовательно, теперь нельзя положить поле $\chi^a = 0$. Оно будет воссоздано через взаимодействие с другими полями. Конечно, можно игнорировать χ -поля в конечных состояниях. Но как исключить нефизические вклады χ-полей в петлях? Элегантный способ решения этой проблемы был предложен Фаддеевым и Поповым. Они ввели т.н. **духовые** поля ξ^a, удовлетворяющие тому же самому уравнению (2.30), но обладающие Ферми-статистикой. Лагранжиан для полей ξ^a имеет вид

$$\mathcal{L}_{ghost} = D_\mu \xi^{+a} \partial^\mu \xi^a. \tag{2.31}$$

Это поле появляется только в петлях. Благодаря Ферми-статистике, вклад духовых полей имеет дополнительный знак "$-$"в каждой петле и сокращает вклад χ-полей, восстанавливая унитарность в физическом подпространстве.

2.3.5 БРСТ инвариантность

Можно задаться вопросом: что происходит с калибровочной инвариантностью после всех этих пертурбаций? К счастью, ответ следующий: амплитуды всех физических процессов остаются инвариантными. Кратчайший путь продемонстрировать это есть т.н. БРСТ-инвариантность. Оказывается, что полный лагранжиан

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{gauge} + \mathcal{L}_{gauge-fixing} + \mathcal{L}_{ghost} \tag{2.32}$$

инвариантен относительно БРСТ преобразования

$$\delta A_\mu^a = \lambda^+ D_\mu \xi^a, \quad \delta\xi^{+a} = -\frac{1}{\alpha}\lambda^+ \partial_\mu A_\mu^a, \quad \delta\xi^a = -\frac{1}{2} g f^{abc} \lambda^+ \xi^b \xi^c, \tag{2.33}$$

где λ есть постоянный антикоммутирующий параметр, а α есть параметр фиксации калибровки.

БРСТ инвариантность эквивалентна обычной калибровочной инвариантности в физическом секторе с параметрами калибровочного преобразования $\omega^a(x) = \lambda^+ \xi^a(x)$. Это позволяет доказать калибровочную инвариантность физических амплитуд.

* * * * * * * * * * * * * * * * *

3 Лекция III

Спонтанное нарушения симметрии, Голдстоуновские частицы,
Эффект Хиггса.

3.1 Спонтанное нарушение симметрии

Нарушение симметрии иногда играет не менее важную роль, чем сама симметрия. Решая уравнения движения, которые являются дифференциальными уравнениями, приходится накладывать граничные или начальные условия. Пусть лагранжиан инвариантен относительно некоторой группы симметрии. А как начальные условия? Существуют различные возможности. Потенциал может иметь симметричные или несимметричные минимумы, они могут быть устойчивыми или неустойчивыми (см. Рис.3).

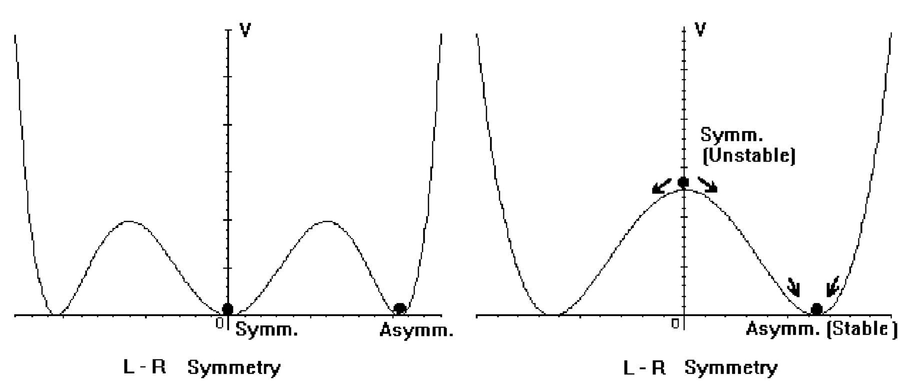


Рис. 3:

Спонтанное нарушение симметрии означает несимметричное граничное (начальное) условие при симметричном лагранжиане. Необходимое условие для этого есть вырождение вакуума. Почему вакуум столь важен? Потому, что в КТП частицы есть квантовые флуктуации поля φ вокруг низшего энергетического состояния (вакуума). Постоянное значение поля, соответствующее вакууму называется вакуумным ожиданием или вакуумным средним (vev). Как вакуумное среднее, так и вид флуктуаций вокруг него определяется лагранжианом $\mathcal{L}$.

Чтобы определить спектр частиц нужно разложить потенциал вокруг его минимума

$$\begin{aligned} V(\varphi_i) = & \; V(\varphi_{i0}) + \sum_i \frac{\partial V}{\partial \varphi_i}|_{\varphi_i=\varphi_{i0}}(\varphi_i - \varphi_{i0}) + \\ + & \; \frac{1}{2}\sum_{i,j} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi_i \partial \varphi_j}|_{\varphi_i=\varphi_{i0}}(\varphi_i - \varphi_{i0})(\varphi_j - \varphi_{j0}) + ... \end{aligned}$$

Для нахождения спектра частиц, нужно диагонализировать массовую матрицу

$$M_{ij} = \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi_i \partial \varphi_j}|_{\varphi_i=\varphi_{i0}}. \tag{3.1}$$

3.1.1 Спонтанное нарушения дискретной симметрии

Рассмотрим лагранжиан действительного скалярного поля, обладающий дискретной симметрией $\varphi \to -\varphi$:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi)^2 - \frac{m^2}{2}\varphi^2 - \frac{\lambda}{4}\varphi^4. \tag{3.2}$$

Когда $m^2 > 0$ и $\lambda > 0$ потенциал имеет минимум $\varphi_0 = 0$ (Рис. 4a) и массовая матрица имеет вид

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}|_{\varphi=0} = m^2.$$

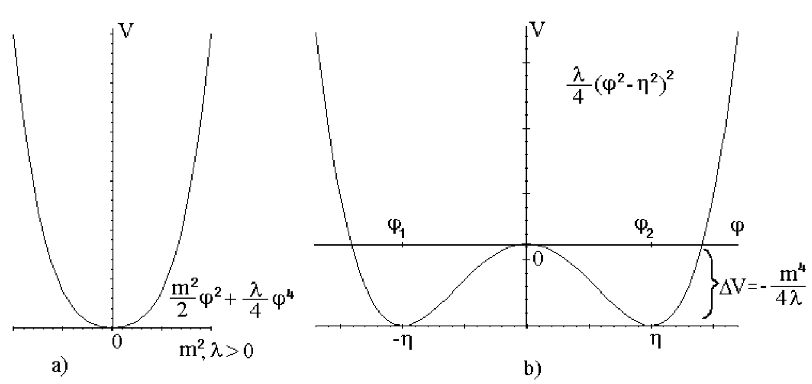


Рис. 4:

Ситуация меняется, когда $m^2 < 0$. Подставляя в этом случае $m^2 \to -m^2$, получим

$$E^2 = \vec{p}^2 - m^2, \qquad v = \frac{p}{m} = \frac{\sqrt{E^2 + m^2}}{E} > 1,$$

что означает, что спектр частиц содержит тахионное состояние. Однако, этот вывод основан на неустойчивом вакууме $\varphi_0 = 0$. Существуют и другие решения

$$V' = 0 \Rightarrow \varphi_{1,2} = \pm\frac{m}{\lambda}, \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}|_{\varphi=\varphi_{1,2}} = 2m^2.$$

Потенциал может быть переписан как

$$V(\varphi) = \frac{\lambda}{4}(\varphi^2 - \eta^2)^2, \qquad \eta = \frac{m}{\sqrt{\lambda}}$$

и имеет два устойчивых минимума $\varphi_{1,2} = \pm\eta$ (Рис.4b).

Спонтанное нарушение симметрии соответствует симметричному лагранжиану $\mathcal{L}(\varphi) = \mathcal{L}(-\varphi)$, но несимметричному вакууму $vac(\varphi) \neq vac(-\varphi)$. Выбирая несимметричный вакуум и сдвигая поле $\varphi = \eta + \chi$, мы получаем лагранжиан

$$\mathcal{L}(\chi) = \frac{1}{2}(\partial_\mu\chi)^2 - \lambda\eta^2\chi^2 - \lambda\eta\chi^3 - \frac{\lambda}{4}\chi^4, \tag{3.3}$$

который не обладает очевидной симметрией и описывает частицу с массой $\sqrt{2}m$.

Естественно возникает вопрос, возможно ли восстановить симметрию путем туннельного перехода из одной ямы в другую. Для ответа на этот вопрос нужно вычислить амплитуду туннельного перехода, которая пропорциональна $\exp(iS)$, где S есть действие вдоль пути переходе. Это действие чисто мнимое и стремится к бесконечности когда объем $V \to \infty$, так что вероятность туннелирования стремится к нулю. Следовательно, восстановление симметрии возможно только в маленьких областях.

3.1.2 Спонтанное нарушение непрерывной симметрии

Здесь мы сталкиваемся с новым явлением. Рассмотрим для простоты U(1) инвариантный лагранжиан

$$\mathcal{L} = \partial_\mu\varphi^*\partial^\mu\varphi - V(\varphi^*\varphi) \tag{3.4}$$

или в терминах действительных полей

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi_1)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi_2)^2 - V(\varphi_1^2 + \varphi_2^2). \tag{3.5}$$

Потенциал V должен быть ограничен снизу и иметь низшее состояние. Выберем его в виде

$$V = \frac{m^2}{2}(\varphi_1^2 + \varphi_2^2) + \frac{\lambda}{4}(\varphi_1^2 + \varphi_2^2)^2. \tag{3.6}$$

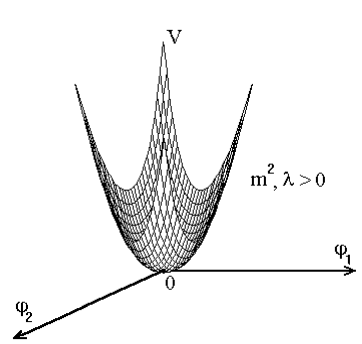


Рис. 5:

Тогда у нас опять есть две возможности:
i) $m^2,\ \lambda > 0$. Потенциал показан на Рис.5. Его минимум может быть получен из уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \varphi_1} &= m^2\varphi_1 + \lambda\varphi_1(\varphi_1^2+\varphi_2^2) = 0, \\ \frac{\partial V}{\partial \varphi_2} &= m^2\varphi_2 + \lambda\varphi_2(\varphi_1^2+\varphi_2^2) = 0. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Единственное решение есть $\varphi_{10} = \varphi_{20} = 0$. Симметрия не нарушена. Как и ранее, мы имеем вырожденный спектр

$$m^2(\varphi_1) = m^2(\varphi_2) = m^2.$$

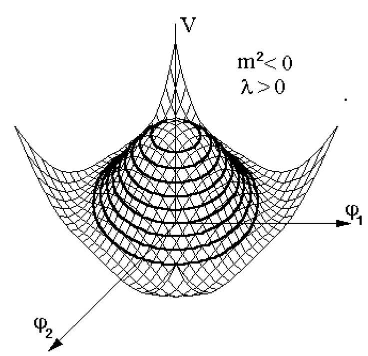


Рис. 6:

ii) $m^2 = -\mu^2 < 0, \lambda > 0$. Потенциал теперь выглядит как дно бутылки (см. Рис.6). Уравнение (3.7) в этом случае имеет другое решение

$$\varphi_{10}^2 + \varphi_{20}^2 = v^2 = \frac{\mu^2}{\lambda}.$$

Геометрически это есть точки, лежащие на окружности радиусом v в плоскости (φ_1, φ_2) (см. Рис.7). Физически ненулевое вакуумное среднее поле соответствует конденсации пар, так что вакуумный конденсат $< \varphi^*\varphi >= v^2 \neq 0$.

Мы видим, что вакуум более не является единственным! Группа симметрии $O(2)$ преобразует одну точку на окружности в другую. Можно выбрать любую точку, например, $\varphi_{10} = v, \varphi_{20} = 0$ или $\varphi_{10} = \varphi_{20} = v/\sqrt{2}$, и т.п.

Массовая матрица (3.1) имеет вид

$$\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi_1\partial\varphi_2} = 2\lambda\varphi_1\varphi_2, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial\varphi_1^2} = -\mu^2 + \lambda(\varphi_1^2+\varphi_2^2) + 2\lambda\varphi_1^2,$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi_2^2} = -\mu^2 + \lambda(\varphi_1^2+\varphi_2^2) + 2\lambda\varphi_2^2.$$

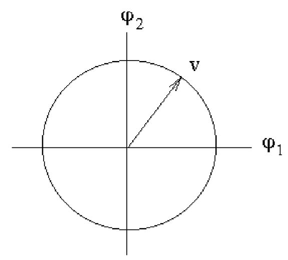


Рис. 7:

Для ее диагонализации выберем одно из полей, φ_{10} или φ_{20}, равным нулю, скажем $\varphi_{10} = v, \varphi_{20} = 0$, тогда

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 2\lambda v^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.8}$$

Таким образом поле $\varphi_1' = \varphi_1 - v$ соответствует частице с массой $m^2 = 2\lambda v^2 = 2\mu^2$, в то время как поле $\varphi_2' = \varphi_2$ оказывается безмассовым. Результат не зависит от выбора вакуумных средних. Для любой точки на окружности после диагонализации вывод будет тем же самым.

Лагранжиан в терминах новых полей принимает вид

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi_1')^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi_2')^2 - \lambda v^2 \varphi_1^{'2} - \lambda v \varphi_1'(\varphi_1^{'2} + \varphi_2^{'2}) - \frac{\lambda}{4}(\varphi_1^{'2} + \varphi_2^{'2})^2. \tag{3.9}$$

$O(2)$ симметрия более не очевидна. Она спонтанно нарушена.

Рассмотрим другую параметризацию $U(1)$ модели. Если записать комплексное поле в полярных координатах

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\rho(x)e^{i\theta(x)}. \tag{3.10}$$

то производная становится

$$\partial_\mu \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\theta(x)}[\partial_\mu \rho(x) + i\partial_\mu \theta(x)\rho(x)],$$

так что лагранжиан приобретает вид

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \rho)^2 + \frac{1}{2}\rho^2(\partial_\mu \theta)^2 - V(\rho^2), \tag{3.11}$$

где

$$V(\rho^2) = -\mu^2\rho^2 + \frac{\lambda}{4}\rho^4 = \frac{\lambda}{4}(\rho^2 - v^2)^2 - \frac{\lambda}{4}v^4. \tag{3.12}$$

Мы видим, что поле θ исчезает из потенциала. Это есть проявление $U(1)$ симметрии. Для нахождения массы частицы, соответствующей "радиальному"полю $\rho(x)$, разложим потенциал вокруг минимума $\rho_0 = v$. Получим

$$\rho(x) = v + \eta(x), \qquad m_\rho^2 = 2\mu^2,$$

в то время как $m_\theta = 0$ из-за отсутствия квадратичного по θ члена в лагранжиане (3.12).

Итак, окончательный вывод следующий: спектр модели (3.5) при $m^2 = -\mu^2 < 0$ состоит из двух частиц, одной массивной и одной безмассовой.

3.2 Голдстоуновские частицы

Присутствие безмассовых частиц не есть дело случая, но есть общее свойство известное как **теорема Голдстоуна,** которая утверждает, что когда глобальная непрерывная симметрия спонтанно нарушена, существует набор безмассовых частиц (**голдстоуновских бозонов**) в количестве, равном числу нарушенных генераторов. Рассмотрим теперь обобщение этого результата на случай неабелевой симметрии.

3.2.1 SU(2) симметрия

Пусть $\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}$ есть комплексный дублет группы SU(2). Тогда SU(2) инвариантный лагранжиан есть

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \varphi^+ \partial^\mu \varphi - V(\varphi^+\varphi). \tag{3.13}$$

Если выбрать потенциал как и ранее в виде

$$V = -\mu^2(\varphi^+\varphi) + \lambda(\varphi^+\varphi)^2$$

то минимум достигается, когда

$$\varphi^+\varphi = \mu^2/2\lambda \equiv v^2.$$

Выбирая параметризацию в форме (3.10)

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\frac{\tau^a\xi^a}{v}} \begin{pmatrix} 0 \\ H(x)+v \end{pmatrix} \tag{3.14}$$

получаем

$$\partial_\mu\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\frac{\tau^a\xi^a}{v}} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \partial_\mu H(x) \end{pmatrix} + i\frac{\tau^a\partial_\mu\xi^a}{v} \begin{pmatrix} 0 \\ H(x)+v \end{pmatrix} \right\}.$$

Заметим, что в ур.(3.14) мы имеем 4 действительных поля: $\xi^a, a = 1,2,3$ и H.

Лагранжиан (3.13) теперь приобретает вид

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2}\left\{(0,\partial_\mu H) - i\frac{\partial_\mu\xi^a}{v}(0,H+v)\tau^a\right\} \\ &\times \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \partial_\mu H(x) \end{pmatrix} + i\frac{\tau^a\partial_\mu\xi^a}{v} \begin{pmatrix} 0 \\ H(x)+v \end{pmatrix} \right\} - V(H+v) \\ &= \frac{1}{2}(\partial_\mu H)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu\xi^a)^2\frac{(H+v)^2}{v^2} - V(H+v). \end{aligned} \tag{3.15}$$

Это выглядит также как в случае группы U(1), но только три поля ξ^a,(a=1,2,3 для группы SU(2)) теперь оказываются безмассовыми. $H(x)$ приобретает массу и первоначальная SU(2) симметрия более не очевидна, но становится "скрытой"симметрией. Число безмассовых полей в общем случае дает

Теорема Голдстоуна: *Существует столько безмассовых голдстоуновских бозонов, сколько существует направлений в пространстве полей φ_i (внутреннем пространстве), вдоль которых вакуум вырожден, т.е. не единственен.*

Рассмотрим преобразования вакуума, генерируемые некоторыми зарядами Q^a, $a = 1, 2, ..., N$. Пусть

$$\begin{aligned} &Q^k|0>\neq 0, \;\; k = 1, 2, ...M \quad \text{(нарушенные генераторы)},\\ &Q^n|0>=0, \;\; n = M+1, ..., N \quad \text{(ненарушенные генераторы)}. \end{aligned}$$

Согласно теореме Нётер (ур.(1.40) и ур. (1.14))

$$\dot{Q}^a = 0 = i[H, Q^a].$$

Следовательно

$$[H, Q^a]|0>=0$$

или

$$H(Q^a|0>) = Q^a(H|0>). \tag{3.16}$$

Уравнение (3.16) означает, что для любого $k = 1, 2, ..., M$ состояние $Q^a|0>$ вырождено с вакуумным состоянием $|0>$, т.е. соответствует безмассовым возбуждениям, называемым голдстоуновскими бозонами. Поэтому число голдстоуновских бозонов равно M, числу нарушенных генераторов.

Следует сделать два замечания:

i) число нарушенных генераторов зависит от выбора представления скалярных полей;

ii) в случае фермионных генераторов Q^a соответствующая частица будет фермионом. Эта возможность реализуется в суперсимметричных моделях.

Чтобы осознать необходимость безмассовых частиц в случае спонтанного нарушения симметрии, остановимся на некоторых свойствах голдстоуновоских бозонов. Рассмотрим преобразование некоторого вектора состояния под действием группы симметрии

$$e^{i\alpha Q}|a(\overrightarrow{k})>=|a(\overrightarrow{k})>+i\alpha Q|a(\overrightarrow{k})>+...,$$

где Q есть генератор. Пусть

$$Q|a(\overrightarrow{k})>\sim v, \tag{3.17}$$

где $v = 0$ соответствует симметричному состоянию, а $v \neq 0$ означает, что состояние неинвариантно относительно группы преобразований. Поскольку

$$Q = \int d^3x j^0(x),$$

можно найти матричный элемент типа

$$<0|j^\mu(x)|a(\overrightarrow{k})>\sim v \cdot k^\mu.$$

Вычисляя производную, находим

$$<0|\partial_\mu j^\mu(x)|a(\overrightarrow{k})>\sim v \cdot k^2. \tag{3.18}$$

Однако, согласно теореме Нётер, ток должен сохраняться, т.е. $\partial_\mu j^\mu(x) = 0$. Чтобы избежать противоречия с ур.(1.81), мы должны либо положить $v = 0$ (ненарушенная симметрия), либо $v \neq 0$, но $k^2 = m^2 = 0$ (голдстоуновский бозон). Следовательно, если симметрия нарушена, безмассовые частицы с неизбежностью появляются.

Пример: U(1) или SO(2) симметрия.

Согласно ур.(2.5) ток имеет вид

$$j^\mu = \partial^\mu\varphi_1\varphi_2 - \partial^\mu\varphi_2\varphi_1.$$

Если $< \varphi_1 >= v$, то можно произвести сдвиг $\varphi_1 = \varphi_1' + v$, так что $< \varphi_1' >= 0$. Тогда ток становится равен

$$j^\mu = -v\partial^\mu\varphi_2 - \varphi_1'\partial^\mu\varphi_2 + \partial^\mu\varphi_1'\varphi_2. \tag{3.19}$$

Вычисляя матричный элемент между вакуумом и одночастичным состоянием, мы видим, что единственный вклад идет от первого члена в ур.(3.19)

$$< 0|j^\mu(x)|a_2(\overrightarrow{k}) >= -v < 0|\partial_\mu\varphi_2|a_2(\overrightarrow{k}) >= -vik^\mu e^{ikx}.$$

Таким образом

$$< 0|\partial_\mu j^\mu(x)|a_2(\overrightarrow{k}) >= vk^2 e^{ikx}.$$

Следовательно, или $v = 0$ и $m_1 = m_2 = m$, или $m_1 \neq 0$, и $m_2 = 0$, что соответствует спонтанно нарушенной симметрии, причем, $a_2^+(\overrightarrow{k})|0 >= |a_2(\overrightarrow{k}) >$ есть голдстоуновский бозон.

3.3 Эффект Хиггса

3.3.1 Спонтанное нарушение локальной калибровочной инвариантности

Рассмотрим теперь явление, называемое **эффектом Хиггса** - появление массы у калибровочного бозона как результат спонтанного нарушения симметрии и исчезновение голдстоуновских бозонов.

Рассмотрим сначала абелев случай, а именно локальную U(1) ковариантность. Лагранжиана

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + D_\mu\varphi^* D^\mu\varphi + \mu^2\varphi^*\varphi - \lambda(\varphi^*\varphi)^2 \tag{3.20}$$

инвариантен относительно локального фазового преобразования

$$\begin{aligned} \varphi &\rightarrow \varphi' = e^{i\alpha(x)}\varphi, \\ A_\mu &\rightarrow A_\mu' = A_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha(x). \end{aligned} \tag{3.21}$$

Скалярный потенциал вырожден, причем минимум дается формулой

$$|\varphi_0|^2 = \frac{v^2}{2} = \frac{\mu^2}{2\lambda}.$$

Сдвигая поле φ , выберем следующую параметризацию

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\eta(x) + v)e^{i\theta(x)/v}.$$

Калибровочное преобразование (3.21) теперь выглядит как

$$\theta(x) \to \theta'(x) = \theta(x) + v\alpha(x), \tag{3.22}$$

где $\theta(x)$ есть голдстоуновский бозон. Согласно ур.(3.22) можно выбрать калибровку (она называется унитарной калибровкой), где $\theta'(x) = 0$, т.е. $\alpha(x) = -\theta(x)/v$. Тогда голдстоуновский бозон исчезает, т.е. это не есть физическая частица. Что же происходит в этом случае со степенью свободы? Для ответа на этот вопрос определим новый набор полей

$$\begin{aligned} \varphi'(x) = &\quad e^{-i\theta(x)/v}\varphi(x) = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(\eta(x)+v), \\ B_\mu(x) = &\quad A_\mu - \tfrac{1}{ev}\partial_\mu\theta(x). \end{aligned}$$

Производные примут вид

$$\begin{aligned} &(D_\mu\varphi)' = UD_\mu\varphi = e^{-i\theta/v}\tfrac{1}{\sqrt{2}}[\partial_\mu\eta(x) - ieB_\mu(\eta+v)]e^{i\theta/v}, \\ &F_{\mu\nu}(A) = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu = F_{\mu\nu}(B), \end{aligned}$$

а лагранжиан преобразуется в

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}(B)F^{\mu\nu}(B) + \frac{1}{2}|\partial_\mu\eta(x) - ieB_\mu(\eta+v)|^2 + \frac{\mu^2}{2}(\eta+v)^2 - \frac{\lambda}{4}(\eta+v)^4 \\ &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}(B)F^{\mu\nu}(B) + \frac{1}{2}(\partial_\mu\eta)^2 - \mu^2\eta^2 + \frac{1}{2}(ev)^2B_\mu B^\mu \\ &\quad + \frac{1}{2}e^2B_\mu B^\mu\eta(2v+\eta) - \lambda v\eta^3 - \frac{1}{4}\lambda\eta^4. \end{aligned} \tag{3.23}$$

Этот лагранжиан описывает **массивное** векторное поле с массой $M_B = ev$ и **массивное** скалярное поле η с массой $m_\eta = \sqrt{2}\mu$. Таким образом, вместо безмассового скаляра (голдстоуновского бозона) мы имеем третью (продольную) степень свободы векторного поля. Отметим сохранение числа степеней свободы: 2 действительных скалярных поля (φ_1, φ_2) или (η, θ) плюс 2 поляризации безмассового фотона против 1 действительного скалярного поля Хиггса η плюс 3 поляризации массивного векторного поля, т.е. $2+2=3+1$. Голдстоуновский бозон "съедается" векторным полем, которое при этом приобретает массу.

Посмотрим теперь как то же явление имеет место в неабелевом случае, который очень близок к Стандартной Модели. Рассмотрим SU(2) ковариантность. Выбирая скалярные поля в дублетном представлении, мы получаем знакомый лагранжиан

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{\mu\nu a} + D_\mu\Phi^+D^\mu\Phi - V(\Phi^+\Phi), \tag{3.24}$$

где

$$V(\Phi^+\Phi) = -\mu^2\Phi^+\Phi + \lambda(\Phi^+\Phi)^2, \qquad \mu^2, \lambda > 0.$$

В унитарной калибровке можно определить

$$\begin{aligned} &\Phi(x) = \tfrac{1}{\sqrt{2}}e^{i\dfrac{\tau^a\xi^a}{v}}\begin{pmatrix} 0 \\ H(x)+v \end{pmatrix}, \\ &\Phi'(x) = U(x)\Phi(x) = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ H(x)+v \end{pmatrix}, \\ &B_\mu = U^{-1}A_\mu U + U^{-1}\partial_\mu U. \end{aligned}$$

Лагранжиан при этом имеет вид

$$\mathcal{L} = [D_\mu \Phi']^+ D^\mu \Phi' + \mu^2 \Phi'^+ \Phi' - \lambda(\Phi'^+ \Phi')^2 - \frac{1}{4} F^a_{\mu\nu}(B) F^{\mu\nu a}(B) \tag{3.25}$$

Опять голдстоуновские бозоны ξ^a исчезают. Окончательная форма лагранжиана такова

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{1}{4} F^a_{\mu\nu}(B) F^{\mu\nu a}(B) + \frac{1}{2}(\partial_\mu H)^2 - \mu^2 H^2 + \frac{1}{8}(gv)^2 B^a_\mu B^{\mu a} \\ &+ \frac{1}{2} g^2 B^a_\mu B^{\mu a} H(2v + H) - \lambda v H^3 - \frac{1}{4}\lambda H^4. \end{aligned} \tag{3.26}$$

Он описывает триплет **массивных** векторных полей B^a_μ $(a = 1, 2, 3)$ с массой $M_B = \frac{1}{2} gv$ и **массивное** скалярное поле Хиггса H с массой $m_H = \sqrt{2}\mu$. Заметим опять сохранение числа степеней свободы.

Следовательно, в результате мы не имеем безмассовых полей в физическом спектре: голдстоуновские бозоны "съедаются"векторными полями, превращаясь в их продольные компоненты. Остающаяся скалярная частица **массивна** и обычно называется **хиггсовским бозоном**.

В точности этот эффект имеет место в Стандартной Модели, где W и Z -бозоны приобретают свои массы в результате спонтанного нарушения симметрии с помощью описанного выше механизма. Это единственный известный на сегодняшний день механизм, который дает массы калибровочным бозонам, сохраняя в то же время калибровочную инвариантность. Сохранение калибровочной ковариантности играет ключевую роль в перенормируемости теории (см. ниже).

* * * * * * * * * * * * * *

4 Лекция IV

Взаимодействие, S-матрица, Теория Возмущений, Правила Фейнмана.

До сих пор мы рассматривали только теорию свободных полей. Уравнения движения были линейными и их решения, удовлетворяющие принципу суперпозиции, были плоскими волнами. Коэффициенты Фурье-разложения были квантованы.

4.1 Взаимодействие

Как ввести взаимодействие квантовых полей? Взаимодействие означает нелинейность уравнений движения, которая, в свою очередь, означает присутствие полиномов высшего порядка в лагранжиане. Что происходит при этом со свободными состояниями, которые являются собственными состояниями свободного гамильтониана? Существуют две возможности: i) сильная деформация спектра: новые собственные состояния, новые решения уравнений движения, и т.п.; ii) слабая деформация свободной теории, т.е. слабая пертурбация свободного движения. Последняя ситуация символически показана на Рис.7. Она основывается на следующей **гипотезе**: существует предел слабой связи и разложение по теории возмущений. Если это так, то теория возмущений дает нам, как в квантовой механике, регулярный способ построения амплитуд рассеяния.

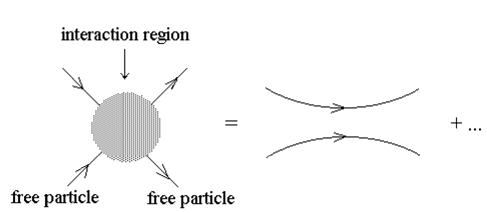


Рис. 8:

4.1.1 Представление взаимодействия

Рассмотрим уравнение Шредингера для амплитуды

$$i\frac{\partial\psi(t)}{\partial t} = H_0\psi(t)$$

с решением

$$\psi(t) = e^{iH_0t}\Phi, \tag{4.1}$$

где Φ - константа (не зависящая от времени). Для взаимодействующей системы уравнение Шредингера есть

$$i\frac{\partial\psi(t)}{\partial t} = (H_0 + H_I)\psi(t).$$

Решение теперь дается ур.(4.1), однако Φ не является более константой, а удовлетворяет уравнению

$$i\frac{\partial\Phi(t)}{\partial t} = e^{iH_0t}H_Ie^{-iH_0t}\Phi(t),$$

или

$$i\frac{\partial\Phi(t)}{\partial t} = H_I(t)\Phi(t), \tag{4.2}$$

где $H_I(t) = \int d\overrightarrow{x}\mathcal{H}(x)$ есть гамильтониан в т.н. **представлении взаимодействия**. Ур.(4.2) называется уравнением Шредингера в представлении взаимодействия.

Для определения среднего значения любого оператора B можно пользоваться как представлением Шредингера, так и представлением взаимодействия

$$\overline{B}_t = \psi^*(t)B\psi(t) = \Phi^*(t)e^{iH_0t}Be^{-iH_0t}\Phi(t) = \Phi^*(t)B(t)\Phi(t).$$

4.2 Матрица рассеяния (S-матрица)

Предположим, что взаимодействие адиабатически исчезает при $t \to \pm\infty$. Тогда S-матрица определяется как

$$\Phi(\infty) = S\Phi(-\infty). \tag{4.3}$$

S-матрица, как оператор, характеризуется своими матричными элементами

$$S_{\alpha\beta} =< \beta|S|\alpha >,$$

где $|\alpha >$ и $< \beta|$ суть начальные и конечные состояния, соответственно. Вероятность перехода P дается квадратом модуля элемента S-матрицы: $P \sim |S_{\alpha\beta}|^2$.

Чтобы найти явное выражение для S-матрицы, рассмотрим уравнение Шредингера (4.2) по теории возмущений. Для этой цели определим сначала конечно-временной оператор $S(t,t_0)$ такой, что

$$\Phi(t) = S(t,t_0)\Phi(t_0). \tag{4.4}$$

Подставляя его в ур.(4.2), находим

$$S(t,t_0) = 1 - i\int\limits_{t_0}^{t} H(t')dt' + (-i)^2\int\limits_{t_0}^{t} H(t')dt'\int\limits_{t_0}^{t'} H(t'')dt'' + ..., \tag{4.5}$$

где $H(t) \equiv H_I(t)$. Рассмотрим область интегрирования во втором слагаемом в ур.(4.5). Она показана на Рис. 9а (заштрихованный треугольник). Изменяя порядок интегрирования, мы можем переписать последний член как

$$\int\limits_{t_0}^{t} dt''\int\limits_{t''}^{t} dt' H(t')H(t'')$$

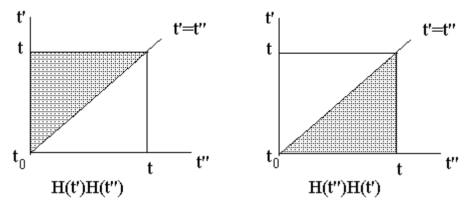


Рис. 9:

или, переопределяя переменные,

$$\int_{t_0}^{t} dt' \int_{t'}^{t} dt'' H(t'')H(t'),$$

что соответствует области интегрирования, показанной на Рис. 9b. Суммируя два выражения, находим

$$S_2 = \frac{(-i)^2}{2} \int_{t_0}^{t} dt' \left\{ \int_{t_0}^{t'} dt'' H(t')H(t'') + \int_{t'}^{t} dt'' H(t'')H(t') \right\} \tag{4.6}$$

То, что стоит в фигурных скобках, называется **хронологическим** или **T-произведением** и определяется как

$$T\{H(t')H(t'')\} = \begin{cases} H(t')H(t''), & t' > t'' \\ H(t'')H(t'), & t' < t'' \end{cases} . \tag{4.7}$$

Следовательно, во втором порядке вклад в S-матрицу может быть записан как

$$S_2 = \frac{(-i)^2}{2} \int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t} dt_2 T\{H(t_1)H(t_2)\}. \tag{4.8}$$

Обобщение на высшие порядки очевидно.

$$S = \sum_n S_n, \tag{4.9}$$

$$S_n = \frac{(-i)^n}{n!} \int_{t_0}^{t} dt_1 ... \int_{t_0}^{t} dt_n T\{H(t_1)...H(t_n)\}.$$

Формально суммируя (4.9), получаем

$$S(t, t_0) = T\left\{ \exp[-i \int_{t_0}^{t} H(t)dt] \right\} = T\left\{ \exp[-i \int_{t_0}^{t} dt \int d\overrightarrow{x} \mathcal{H}(x)] \right\}.$$

В случае, когда взаимодействие не содержит производных, существует простое соотношение между гамильтонианом и лагранжианом соответствующей теории поля

$$H_I(t) = -L_I(t) = -\int d\overrightarrow{x} \mathcal{L}_{\mathcal{I}}(x).$$

С помощью этого соотношения и беря предел $t \to \infty$, $t_0 \to -\infty$, получаем окончательное выражение для S-матрицы

$$S = S(\infty, -\infty) = T \exp[i \int d^4x \mathcal{L}_{\mathcal{I}}(x)], \tag{4.10}$$

которое справедливо и в общем случае. Ур.(4.10) определяет лагранжеву теорию возмущений.

Напомним некоторые свойства S-матрицы:

1. **Релятивистская инвариантность.** Благодаря ур.(4.10) она достигается инвариантностью Лагранжиана, обсуждаемой выше.

2. **Причинность.** Это свойство следует из причинных свойств функции Грина или пропагаторов свободных полей.

3. **Унитарность.** (Сохранение нормы волновой функции).

   $$\Phi^*(\infty)\Phi(\infty) = \Phi^*(-\infty)\Phi(-\infty).$$

   Для S-матрицы это ведет к
   $$S^+S = SS^+ = 1,$$
   и означает, что лагранжиан должен быть эрмитовой функцией полей, т.е. $\mathcal{L}^+ = \mathcal{L}$.

4.3 Теория Возмущений

Теория возмущений строится на основе ур.(4.10). Полный лагранжиан делится на две части
$$\mathcal{L}_{total} = \mathcal{L}_0 + g\mathcal{L}_I, \tag{4.11}$$
где $\mathcal{L}_0$ - это свободный лагранжиан, а $\mathcal{L}_I$ - взаимодействие. Константа связи g определяет силу взаимодействия и служит параметром разложения. Решение ур.(4.2) может быть представлено в форме степенного разложения

$$S(g) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int dx_1...dx_n g^n S_n(x_1, ..., x_n), \tag{4.12}$$

где
$$S_n(x_1, ..., x_n) = i^n T(\mathcal{L}_I(x_1)...\mathcal{L}_I(x_n)).$$
Для вычисления S_n, рассмотрим T-произведение более внимательно. Вспомним нормальное произведение двух операторов

$$A(x)B(y) =: A(x)B(y) : + \underline{A(x)B(y)}.$$

Последний член обычно называется **нормальным спариванием** и является c-числом (не оператором). T-произведение может быть выражено в терминах N-произведений

$$T\left(A(x)B(y)\right) = \begin{cases} A \cdot B, & x^0 > y^0 \\ B \cdot A, & x^0 < y^0 \end{cases} = \begin{cases} : AB : + \underline{AB} \\ : BA : + \underline{BA} \end{cases}$$

Заметим, что $:AB:=:BA:$, следовательно

$$T\left(A(x)B(y)\right) =: A(x)B(y): + \overline{A(x)B(y)},$$

где

$$\overline{A(x)B(y)} = \begin{cases} \underline{A(x)B(y)}, & x^0 > y^0 \\ \underline{B(y)A(x)}, & x^0 < y^0 \end{cases}$$

называется **хронологическим спариванием** (с-числом).

Давайте найдем хронологическое спаривание для скалярного поля. Согласно ур.(1.50) имеем

$$\overline{\varphi(x)\varphi(y)} = -iD^{-}(x-y)\Theta(x^0-y^0) + iD^{+}(x-y)\Theta(y^0-x^0) \equiv -iD^{c}(x-y),$$

где $D^c(x)$ есть причинная функция Грина.

Для сведения Т-произведения нескольких операторов к N-произведению, может быть применена следующая теорема:

Теорема Вика:

1.Произведение n линейных операторов равно сумме нормальных произведений этих операторов со всевозможными спариваниями, включая член без спаривания.

2.Т-произведение n линейных операторов равно сумме нормальных произведений этих операторов со всевозможными хронологическими спариваниями, включая член без спаривания.

Чтобы проиллюстрировать эту теорему, рассмотрим произведение четырех операторов:

$$\begin{aligned} A_1A_2A_3A_4 = {} & :A_1A_2A_3A_4: + :A_1A_2A_3A_4: + :A_1A_2A_3A_4: \\ & + :A_1A_2A_3A_4: + :A_1A_2A_3A_4: + :A_1A_2A_3A_4: \\ & + :A_1A_2A_3A_4: + :A_1A_2A_3A_4: + :A_1A_2A_3A_4: \\ & + :A_1A_2A_3A_4: \end{aligned}$$

В случае Т-произведения, все спаривания следует заменить хронологическими спариваниями.

4.3.1 Причинные функции Грина свободных полей

Рассмотрим свободные уравнения движения в присутствии источника

$$(\Box - m^2)\varphi(x) = -J(x), \tag{4.13}$$

где $J(x)$ есть внешний источник скалярного поля. Решение может быть найдено с помощью функции Грина

$$\varphi(x) = \int dy G(x-y)J(y),$$

где функция Грина $G(x)$ удовлетворяет уравнению

$$(\Box - m^2)G(x) = -\delta(x). \tag{4.14}$$

Решение ур. (4.14) может быть найдено в импульсном представлении

$$G(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{e^{-ikx}}{m^2 - k^2} d^4k. \tag{4.15}$$

Ур.(4.15) содержит полюс при $k_0 = \pm\sqrt{m^2 + \vec{k}^2}$. Это означает, что мы должны определить контур интегрирования, чтобы избежать полюса. Однако, различные контуры интегрирования приводят к различным свойствам функций Грина. Причинная функция Грина

$$D^c(x) = \Theta(x^0)D^-(x) - \Theta(-x^0)D^+(x)$$

соответствует следующему выбору контура интегрирования

$$D^c(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{e^{-ikx}}{m^2 - k^2 - i\epsilon} d^4k, \qquad \epsilon \to +0. \tag{4.16}$$

показанному на Рис. 10. Причинные функции Грина для спинорного и векторного

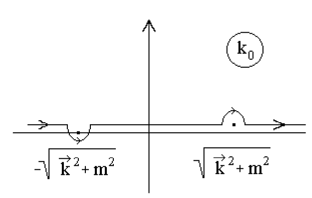


Рис. 10:

полей строятся в полной аналогии с ур.(4.16)

$$S^c_{\alpha\beta}(x) = (i\hat{\partial} + m)_{\alpha\beta} D^c(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{e^{-ikx}(m + \hat{k})_{\alpha\beta}}{m^2 - k^2 - i\epsilon} d^4k, \tag{4.17}$$

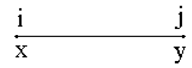
$$D^c_{\mu\nu}(x) = (g_{\mu\nu} + \frac{\partial_\mu \partial_\nu}{m^2}) D^c(x), \quad m \neq 0, \tag{4.18}$$

$$D^c_{\mu\nu}(x) = (g_{\mu\nu} + \frac{\partial_\mu \partial_\nu}{\partial^2} d_l) D^c(x), \quad m = 0. \tag{4.19}$$

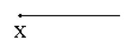
4.4 Правила Фейнмана

4.4.1 Правила Фейнмана в x-пространстве

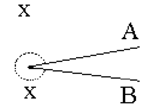
S-матричные элементы в теории возмущений допускают весьма наглядное графическое представление, известное как правила Фейнмана:

$\overline{u_i(x)u_j(y)}$ $\Leftrightarrow$ 

пропагатор,

$u(x)$ $\Leftrightarrow$ 

внешняя линия

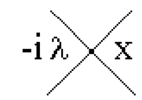
$: A(x)B(x)... :$ $\Leftrightarrow$ 

вершина

Пример 1. $\mathcal{L}_I = -\lambda : \varphi^4(x) :$

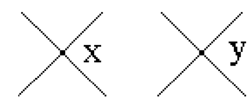
S – матричный элемент — Графическое представление

$S_1(x) \quad = -i\lambda : \varphi^4(x) :$

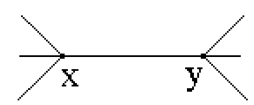


$S_2(x, y) \quad = i^2\lambda^2 T\{: \varphi^4(x) :: \varphi^4(y) :\}$ (теорема Вика)

$= i^2\lambda^2 : \varphi^4(x)\varphi^4(y) :$

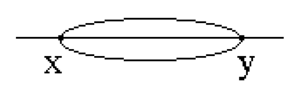


$+16i^2\lambda^2\overline{\varphi(x)\varphi(y)} : \varphi^3(x)\varphi^3(y) :$

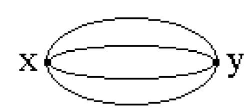


$+72i^2\lambda^2(\overline{\varphi(x)\varphi(y)})^2 : \varphi^2(x)\varphi^2(y) :$

$+96i^2\lambda^2(\overline{\varphi(x)\varphi(y)})^3 : \varphi(x)\varphi(y) :$

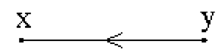


$+24i^2\lambda^2(\overline{\varphi(x)\varphi(y)})^4$

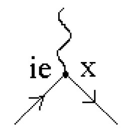


Мы учли здесь комбинаторные факторы. Графические правила могут быть использованы для построения S-матричных элементов без использования теоремы Вика. Обычно гораздо удобнее рисовать графики, принимая во внимание симметрийные факторы.

Пример 2. QED $\mathcal{L}_I = e : \overline{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi :$

$\overline{\psi(x)\overline{\psi}(y)}$ $\Leftrightarrow$  пропагатор,

$\overline{A_\mu(x)A_\nu(y)}$ $\Leftrightarrow$  пропагатор,

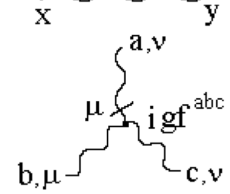
$e\overline{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi$ $\Leftrightarrow$  вершина

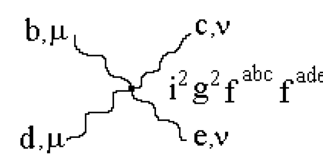
Различные типы полей обычно обозначаются различными типами линий. Стрелка на спинорной линии различает операторы ψ и $\overline{\psi}$.

Пример 3. Теория Янга-Миллса

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}\left[\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf^{abc}A_\mu^b A_\nu^c\right]^2$$

$\overline{A_\mu^a(x)A_\nu^b(y)}$ $\Leftrightarrow$ 

$gf^{abc}A_\mu^b A_\nu^c \partial_\mu A_\nu^a$ $\Leftrightarrow$ 

$g^2 f^{abc}A_\mu^b A_\nu^c f^{ade}A_\mu^d A_\nu^e$ $\Leftrightarrow$ 

Перечеркнутая линия означает производную в соответствующем лагранжиане.

4.4.2 Правила Фейнмана в p-пространстве

Иногда более удобно производить вычисления непосредственно в p-пространстве. Для вычисления матричного элемента нужно поместить S-оператор в обкладки векторов состояния

$$\Phi_{...k...} = a_1^+(\overrightarrow{k_1})...a_s^+(\overrightarrow{k_s})\Phi_0. \tag{4.20}$$

В n-ом порядке теории возмущений

$$S_n = \sum\int dx_1...dx_n K(x_1,...,x_n) : u_i(x_i)...u_j(x_j)... :,$$

Таким образом, амплитуда пропорциональна

$$M \sim \Phi^*_{...k...} : u_i(x_i)...u_j(x_j)... : \Phi_{...k...}$$

Разделяя $u_i(x_i)$ на две части $u_i = u_i^+ + u_i^-$ и принимая во внимание свойства вакуума

$$u^-\Phi_0 = 0 = \Phi_0^* u^+,$$

приходим к выводу, что $M \neq 0$ только если все $u^{\pm}$ сокращаются с соответствующими $a^{\mp}$ из ур.(4.20), образуя коммутаторы. Иначе, они подействуют на вакуум и дадут нулевой результат.

Используя общее выражение для Фурье-образа

$$u^{\pm}(x_j) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int e^{\pm ipx_j} \sum_{\sigma} v_{\sigma}^{\pm}(\overrightarrow{p}) a_{\sigma}^{\pm}(\overrightarrow{p}) d\overrightarrow{p}, \tag{4.21}$$

где коэффициенты $v_{\sigma}^{\pm}(\overrightarrow{p})$ зависят от рассматриваемого поля (ср. ур.(1.13), (1.19) и (1.30) и принимая во внимание коммутационные соотношения, ур.(1.38), (1.51) и (1.53), окончательно получаем

$$\begin{aligned} M \quad \sim \quad & \int \prod_{in-particles} (2\pi)^{-3/2} e^{-ik_i x_i} v_{\sigma}^{-}(\overrightarrow{k_i}) \prod_{out-particles} (2\pi)^{-3/2} e^{-ik_f x_f} v_{\sigma}^{+}(\overrightarrow{k_f}) \cdot \\ & \cdot K(x_1, ..., x_n) dx_1 ... dx_n, \end{aligned} \tag{4.22}$$

где коэффициентная функция $K(x_1, ..., x_n)$ есть произведение соответствующих D^c-функций. Вычисляя интеграл по $\{dx\}$ мы получаем свертку Фурье образов D^c-функций.

Описанная выше процедура приводит к следующим правилам вычисления матричных элементов в импульсном пространстве (**Правилам Фейнмана**):

1. Нарисовать соответствующие фейнмановские диаграммы, принимая во внимание все топологически возможные конфигурации (теорема Вика);

2. Ввести импульсную переменную, соответствующую каждой линии диаграммы;

3. Каждая внешняя линия, соответствующая начальному (конечному) состоянию ассоциируется с
$$(2\pi)^{-3/2} v_{\sigma}^{-}(\overrightarrow{p}_{in}) \qquad ((2\pi)^{-3/2} v_{\sigma}^{+}(\overrightarrow{p}_{out}).$$

4. Каждая внутренняя линия с импульсом q есть
$$(2\pi)^{-4} D_{\alpha\beta}^{c}(q).$$

5. Каждая вершина дает
$$igQ_{\alpha}(2\pi)^4 \delta(\sum p_i),$$
где g есть константа связи, Q есть матрица (оператор) из соответствующего лагранжиана, а все импульсы p_i считаются входящими импульсами;

6. Проинтегрировать по всем внутренним импульсам;

7. В случае Ферми-полей учесть дополнительный множитель $(-)^c$, где c есть число замкнутых фермионных петель;

8. Принять во внимание симметрийный фактор.

4.5 Иллюстрация

Пример 1. Скалярные поля $\mathcal{L}_I = -\lambda : \varphi^4(x) :$

В этом случае

$$v^-(\overrightarrow{p}) = v^+(\overrightarrow{p}) = (2p_0)^{-1/2},$$

$$D^c(q) = \tfrac{1}{i}\frac{1}{m^2 - q^2 - i\epsilon}, \quad Q = 1.$$

Рассмотрим амплитуду двухчастичного упругого рассеяния во втором порядке теории возмущений. Фейнмановские диаграммы показаны на Рис. 11. Рассмотрим деталь-

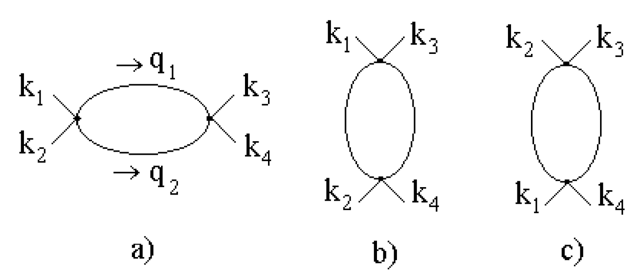


Рис. 11:

но вклад диаграммы, показанной на Рис. 11a. Согласно описанным выше правилам, имеем

$$M_a = [(2\pi)^{12} 2k_1^0 2k_2^0 2k_3^0 2k_4^0]^{-1/2} \frac{1}{i}\frac{1}{(2\pi)^4}\int \frac{d^4q_1}{m^2 - q_1^2 - i\epsilon}\frac{1}{i}\frac{1}{(2\pi)^4}\int \frac{d^4q_2}{m^2 - q_2^2 - i\epsilon} \cdot$$
$$\cdot i^2\lambda^2(2\pi)^8\delta(k_1 + k_2 - q_1 - q_2)\delta(q_1 + q_2 - k_3 - k_4)\frac{4!}{2(4!)^2} \tag{4.23}$$

Вычисляя интеграл с помощью δ -функции и собирая все факторы, получаем из ур.(4.23)

$$M_a = \frac{\lambda^2}{2}\frac{\delta(k_1 + k_2 - k_3 - k_4)}{\sqrt{16k_1^0k_2^0k_3^0k_4^0}}\frac{1}{(2\pi)^6}\int \frac{d^4q}{(m^2 - q^2)(m^2 - (q - k_1 - k_2)^2)}.$$

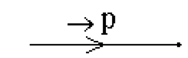
Мы обсудим вычисление оставшегося интеграла позже. Полный вклад во втором порядке дается суммой

$$M^{(2)} = M_a + M_b + M_c.$$

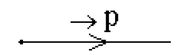
Пример 2. КЭД

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + \overline{\psi}(i\widehat{\partial} - m)\psi + e\overline{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi$$
$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad \widehat{\partial} \equiv \gamma^\mu\partial_\mu. \tag{4.24}$$

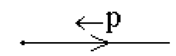
Соответствующие правила фейнмана имеют вид

электрон в начальном состоянии 

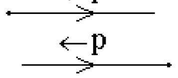
$(2\pi)^{-3/2} v^{s,-}(\overrightarrow{p})$

электрон в конечном состоянии 

$(2\pi)^{-3/2} \overline{v}^{s,+}(\overrightarrow{p})$

позитрон в начальном состоянии 

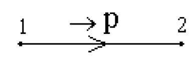
$(2\pi)^{-3/2} \overline{v}^{s,-}(\overrightarrow{p})$

позитрон в конечном состоянии 

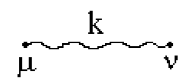
$(2\pi)^{-3/2} v^{s,+}(\overrightarrow{p})$

фотон в начальном или конечном состоянии с поляризацией e_μ^ν 

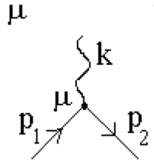
$(2\pi)^{-3/2} e_\mu^\nu / \sqrt{2k_0}$

пропагатор электрона $1 \to 2$ (или позитрона $2 \to 1$) 

$\frac{1}{i} \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{m+\widehat{p}}{m^2-p^2-i\epsilon}$

распространение фотона из μ в ν (калибровка Фейнмана) 

$\frac{1}{i} \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{g_{\mu\nu}}{k^2+i\epsilon}$

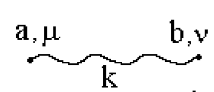
Вершина μ 

$ie\gamma^\mu (2\pi)^4 \delta(p_1 - p_2 - k)$

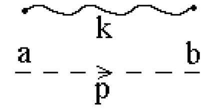
Пример 3. Теория Янга-Миллса

$$
\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^a_{\mu\nu} F^a_{\mu\nu} - \frac{1}{2\alpha} (\partial_\mu A^a_\mu)^2 - D_\mu \overline{\xi}^a \partial_\mu \xi^a,
$$
$$
F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + g f^{abc} A^b_\mu A^c_\nu, \quad D_\mu \overline{\xi}^a = \partial_\mu \overline{\xi}^a + g f^{abc} \overline{\xi}^b A^c_\mu.
$$

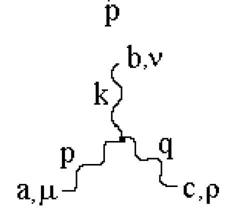
Второй член в ур.(4.25) есть член фиксирующий калибровку, а ξ^a суть духовые поля. Фейнмановские правила, соответствующие ур.(4.25), имеют вид

Векторный пропагатор 

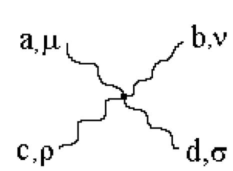
$\frac{1}{i} \frac{1}{(2\pi)^4} \delta^{ab} \frac{g_{\mu\nu} - (1-\alpha) k_\mu k_\nu / k^2}{k^2+i\epsilon}$

Пропагатор поледухов 

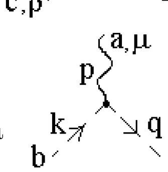
$i \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{\delta^{ab}}{k^2+i\epsilon}$

Тройная вершина 

$igf^{abc}(2\pi)^4 \delta(p+k+q) \cdot$
$\cdot [(p-k)_\rho g_{\mu\nu} + (k-q)_\mu g_{\nu\rho} +$
$(q-p)_\nu g_{\mu\rho}]$

Четверная вершина 

$-ig^2 \{ f^{abe} f^{cde} (g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma} g_{\nu\rho})$
$+$ перестановки$\} \cdot (2\pi)^4 \delta(\sum p_i)$

Векторно – духовая вершина 

$\frac{i}{2} g f^{abc} q_\mu (2\pi)^4 \delta(k+q+p)$

4.6 Вероятности физических процессов

Описываемая техника позволяет нам вычислять амплитуды вероятности различных процессов

$$\Phi^*_{p'} S \Phi_p = \delta(\sum p - \sum p') F(p,p').$$

Для вычисления вероятности мы должны взять квадрат модуля амплитуды

$$W = \frac{|\Phi^*_{p'} S \Phi_p|^2}{\Phi^*_{p'}\Phi_p} \sim \underbrace{(2\pi)^{-4} VT}_{\delta(0)} \delta(\sum p - \sum p') |F(p,p')|^2. \qquad (4.25)$$

Она пропорциональна $\delta(0) = (2\pi)^{-4}VT$ и стремится к бесконечности.Однако, мы интересуемся вероятностью процесса, когда в начальном состоянии мы имеем s частиц с импульсами $\overrightarrow{k}_1, ..., \overrightarrow{k}_s$ и квантовыми числами $\sigma_1, ..., \sigma_s$ а в конечном состоянии $\overrightarrow{p}_1, ..., \overrightarrow{p}_r$ в единичном объеме в единицу времени:

$$w = (2\pi)^{3s-4} n_1 ... n_s |F(p,p')|^2 \delta(\sum p - \sum p') dp_1 ... dp_r, \qquad (4.26)$$

где $n_1 ... n_s$ есть среднее число частиц в начальном состоянии в единичном объеме. Амплитуда такого процесса $F(p,p')$ вычисляется по правилам Фейнмана.

4.6.1 Двух-частичное рассеяние

Рассмотрим двух-частичное рассеяние ($s = r = 2$). Заметим, что $w \neq 0$ даже, если $S = 1$, т.е. в отсутствии взаимодействия (см. Рис. 8). Чтобы выделить эффект взаимодействия, рассмотрим матричный элемент

$$\Phi^*_{...p...}(S-1)\Phi_{...k...}.$$

Определим амплитуду рассеяния (ограничим себя скалярными частицами для простоты)

$$\begin{aligned} &\Phi^*_0 a^-_1(\overrightarrow{p_1}) a^-_2(\overrightarrow{p_2})(S-1) a^+_1(\overrightarrow{k_1}) a^+_2(\overrightarrow{k_2})\Phi_0 = \\ &= i\frac{\delta^{(4)}(p_1+p_2-k_1-k_2)}{2\pi\sqrt{p^0_1 p^0_2 k^0_1 k^0_2}} f(p_1,p_2,k_1,k_2). \end{aligned}$$

Эффективное дифференциальное сечение согласно ур.(4.27) имеет вид

$$d\sigma = (2\pi)^2 n_1 n_2 |f|^2 \frac{d\overrightarrow{p_1} d\overrightarrow{p_2}}{p^0_1 p^0_2 k^0_1 k^0_2} \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - k_1 - k_2).$$

Интегрируя по $\overrightarrow{p_1}, \overrightarrow{p_2}$, мы получаем вероятность рассеяния в телесный угол $d\Omega$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_{p'}} = \frac{p'_0 (p')^3}{p[(p')^2 Q_0 - p'_0(\overrightarrow{p}'\overrightarrow{Q})]} |f|^2, \qquad (4.27)$$

где мы использовали обозначения

$$\overrightarrow{p_1} = \overrightarrow{p},\ \overrightarrow{p_2} = \overrightarrow{p}'\ , p \equiv |\overrightarrow{p}|,\ p' \equiv |\overrightarrow{p}'|,\ \overrightarrow{Q} = \overrightarrow{k_1} + \overrightarrow{k_2}.$$

Полное сечение дается формулой

$$\sigma = \int\limits_{4\pi} d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega}.$$

4.6.2 Двух-частичный распад

Другой пример есть двух-частичный распад ($s = 1, r = 2$). Символически он показан на Рис. 12. Кин

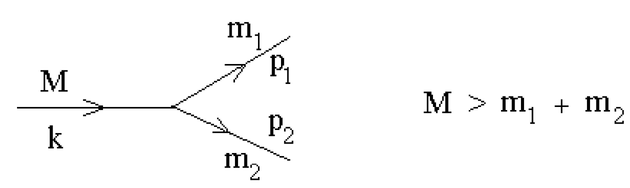


Рис. 12:

распада равна

$$w = 2\pi n \frac{|F|^2}{2k_0} \frac{d\overrightarrow{p_1} d\overrightarrow{p_2}}{2p_1^0 2p_2^0} \delta^{(4)}(k - p_1 - p_2). \tag{4.28}$$

Для нахождения полной вероятности двух-частичного распада нужно проинтегрировать по $\overrightarrow{p_1}$ и $\overrightarrow{p_2}$. Результат имеет вид:

$$w_{tot} = \frac{k}{32\pi^2 M^2} \int d\Omega |F(k, \Omega)|^2, \tag{4.29}$$

где $4k^2 = M^2 - 2(m_1^2 + m_2^2) + \frac{(m_1^2 - m_2^2)^2}{M^2}$. Вероятность распада определяет полную ширину как сумма парциальных ширин

$$w_{tot} = \Gamma_{tot} = \sum_i \Gamma_i.$$

В свою очередь, время жизни частицы определяется как $\tau = 1/\Gamma_{tot}$ или $\hbar/\Gamma_{tot}$ если восстановить константу Планка.

* * * * * * * * * * * * * *

5 Лекция V

Радиационные Поправки, Перенормировка, Построение квантовополевых моделей

Фейнмановские правила предоставляют нам простой алгоритм вычисления элементов S-матрицы для различных процессов. Высшие порядки разложения по теории возмущений обычно называют **радиационными поправками** (вслед за КЭД). Оказывается, что радиационные поправки могут быть вычислены не для всякого лагранжиана, что приводит к довольно жестким ограничениям на вид взаимодействий.

5.1 Радиационные поправки

Рассмотрим амплитуду комптоновского рассеяния в КЭД. Графически оно показано на Рис. 13. В теории возмущений амплитуда имеет вид степенного разложения по

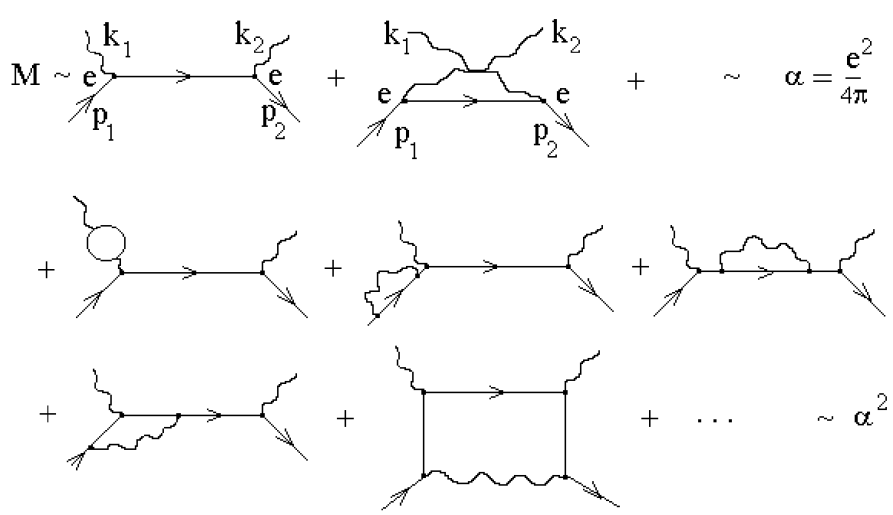


Рис. 13:

параметру $\alpha = e^2/4\pi$, постоянной тонкой структуры

$$M = \alpha M_1 + \alpha^2 M_2 + ... \tag{5.1}$$

Рассмотрим вклад в M_2 от первой диаграммы с петлей $\sim \alpha^2$ (см. Рис. 14). Согласно

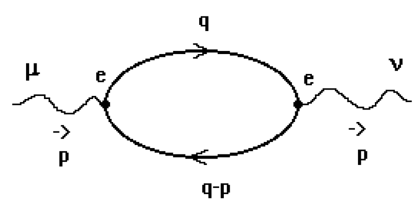


Рис. 14:

правилам Фейнмана имеем интеграл

$$I_{\mu\nu}(p) = \int \frac{d^4q Sp[\gamma_\mu(m+\hat{q})\gamma_\nu(m+\hat{q}-\hat{p})]}{[m^2-q^2][m^2-(q-p)^2]}.$$

Рассмотрим ультрафиолетовое поведение этого интеграла ($q \to \infty$). Для $q \gg m, p$ мы имеет грубую оценку

$$\int^\Lambda \frac{d^4q q^2}{(q^2)^2} = \int^\Lambda \frac{d^4q}{q^2} \sim \int^\Lambda dq^2 \sim \Lambda^2 \to \infty.$$

Здесь Λ есть параметр ультрафиолетового обрезания. В пределе $\Lambda \to \infty$ получаем расходимость, называемую ультрафиолетовой расходимостью. Более аккуратное (калибровочно-инвариантное) вычисление дает

$$I_{\mu\nu}(p) = (g_{\mu\nu}p^2 - p_\mu p_\nu)[\ln\frac{\Lambda^2}{p^2} + \text{конечная часть}]. \tag{5.2}$$

Так что амплитуда кулоновского рассеяния есть

$$M(...) = \alpha R_1 + \alpha^2[aR_1 \ln\frac{\Lambda^2}{p^2} + R_2] + ..., \tag{5.3}$$

где R_1 и R_2 суть некоторые регулярные (при $\Lambda \to \infty$) функции импульсов, α - константа связи, а a - некоторое число.

5.1.1 Поляризация вакуума

Появление расходящегося вклада есть особенность квантовой теории поля. Его происхождение связано со свойствами вакуума. Вакуум в КТП не есть пустое пространство. Это есть флуктуирующая среда, где происходит рождение и уничтожение виртуальных частиц, вызывая поляризацию среды. Эффект поляризации вакуума виртуальными парами показан символически на Рис. 15. Он приводит к ненаблюдаемости "голого"заряда. Мы не можем избежать взаимодействия с поляризованной средой. То, что мы видим, есть эффективный заряд. Разница между голым и эффективным зарядом пропорциональная эффекту поляризации

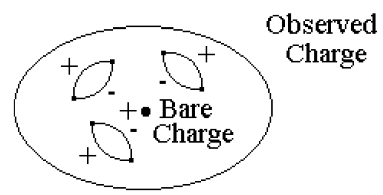
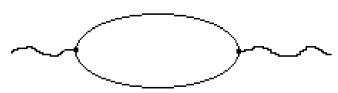


Рис. 15:

 $\sim \alpha \ln \frac{\Lambda^2}{p^2} \to \infty$

Заметим, что расходимость имеет тот же вид, что и в ур.(5.2), т.е. возможно может быть поглощена в переопределении заряда.

5.2 Перенормировка

5.2.1 Идея перенормировки

В этом как раз и состоит идея перенормировки (переопределения). Допустим, что голый заряд α_{bare} сингулярен (бесконечен), в то время как наблюдаемый заряд $\alpha_{observable}$ конечен, и попробуем выразить все величины через $\alpha_{observable}$.

Выбирая голую константу связи в виде

$$\alpha_{bare} = \alpha + x\alpha^2 \ln\frac{\Lambda^2}{\mu^2} + ..., \tag{5.4}$$

где α есть перенормированный заряд, перепишем амплитуду (5.3) следующим образом

$$\begin{gathered} M(...\alpha_{bare}...) = \widetilde{M}(...\alpha...) = \\ = \alpha R_1 + \alpha^2[aR_1 \ln\tfrac{\Lambda^2}{p^2} + R_2 + x\ln\tfrac{\Lambda^2}{\mu^2}] + ... \end{gathered}$$

Выбирая теперь параметр x так, чтобы $\widetilde{M}$ была конечной при $\Lambda \to \infty$, найдем, что $x = -a$, т.е.

$$\widetilde{M}(...\alpha...) = \alpha R_1 + \alpha^2[aR_1 \ln\frac{\mu^2}{p^2} + R_2] + ... \tag{5.5}$$

Теперь выражение для амплитуды конечно. На первый взгляд оно содержит новый параметр, μ, играющий роль точки нормировки. Однако, согласно ур.(5.4), заряд также зависит от μ: $\alpha = \alpha(\mu)$. Они сокращают друг друга, т.е. эта зависимость является фиктивной. Физический результат не зависит от μ. Можно выбрать любое удобное определение константы связи. Это утверждение следует из ренорм-групповой инвариантности, которая составляет основу метода ренормгруппы, используемого для улучшения поведения разложений теории возмущений.

Возникает резонный вопрос: всегда ли возможно поглотить бесконечности в переопределение зарядов? Все ли амплитуды становятся конечными одновременно? Для ответа на эти вопросы необходимо более глубокое понимание процедуры перенормировки.

5.2.2 Перенормируемость

Рассмотрим произвольную диаграмму Фейнмана G, (Рис. 16) и попробуем опреде-

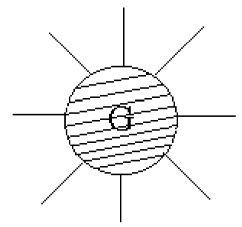


Рис. 16:

лить, расходится ли она ультрафиолетово или нет. Для этого мы должны подсчитать число степеней импульса в подынтегральном выражении: каждая внутренняя петля привносит интегрирование d^4p, что дает 4 степени импульса ; каждая производная в вершине дает импульс в p-пространстве, т.е. 1; каждая внутренняя линия дает пропагатор, который ведет себя как p^{r_l}/p^2, т.е. $r_l - 2$ - степени импульса, где $r_l = 0, 1, 2$ для различных полей. Собирая все эти степени вместе, мы получаем величину, называемую **индексом диаграммы** (УФ)

$$\omega(G) = 4L + \sum_{vertex} \delta_v + \sum_{internal\ lines} (r_l - 2), \tag{5.6}$$

где L есть число петель, а δ_v есть число производных в вершине v.

Отсутствие ультрафиолетовых расходимостей означает, что $\omega(G) < 0$. Однако, следует быть осторожным. Могут существовать подрасходимости типа показанных на Рис. 17.

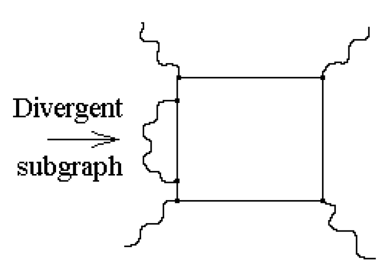


Рис. 17:

Поэтому необходимое условие конечности есть

$$\omega(\gamma_i) < 0, \quad \forall \gamma_i \subset G,$$

где γ_i суть все возможные подграфы графа G включая сам граф G.

Однако, существует гораздо более простой способ ответа на тот же вопрос без необходимости анализировать все диаграммы. Он может быть получен прямо из вида лагранжиана.

Введем величину, называемую **индексом вершины** (УФ)

$$\omega_v = \delta_v + b_v + \frac{3}{2} f_v - 4, \tag{5.7}$$

где δ_v, b_v и f_v - числа производных, внутренних бозонных и фермионных линий, соответственно. Тогда индекс диаграммы (5.6) может быть записан как

$$\omega(G) = \sum_{vertex} \omega_v + 4, \tag{5.8}$$

где мы использовали тот факт, что обычно $r_l(boson) = 0$ и $r_l(fermion) = 1$.

Уравнение (5.8) говорит нам о том, что конечность ($\omega(G) < 0$) может иметь место, если $\omega_v < 0$. Перед тем как сформулировать общее утверждение, когда это происходит, давайте рассмотрим несколько примеров.

5.2.3 Пример: $\mathcal{L}_i = -\lambda\varphi^4$.

В этом случае $\delta_v = 0, f_v = 0, \omega_v = b_v - 4$. Ситуация иллюстрируется на Рис. 18. Здесь

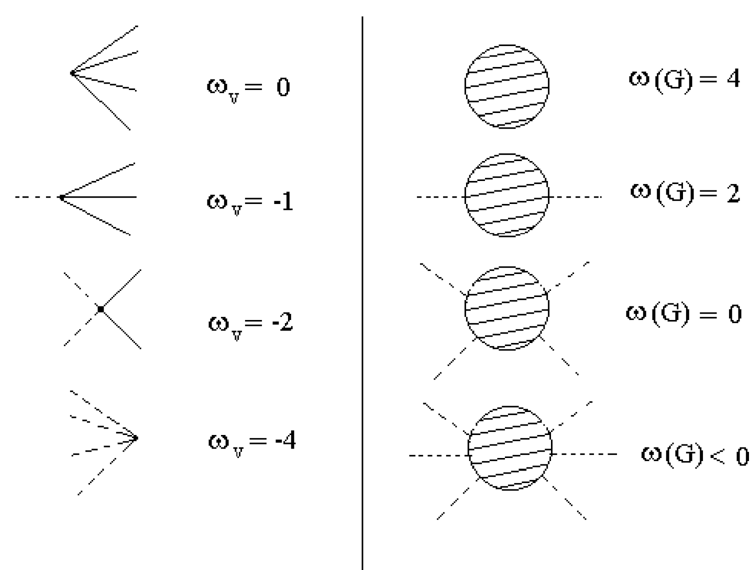


Рис. 18:

сплошная (штрихованная) линия обозначает внутреннюю (внешнюю) частицу, соответственно. Мы видим, что существует ограниченное число расходящихся структур в теории φ^4. Это вакуумные графы, двух- и четырех-точечные функции. Все остальные диаграммы, имеющие более чем 4 ноги сходятся.

Полезно ввести определение максимального индекса вершины, когда все линии являются внутренними. Тогда все теории могут быть классифицированы согласно значению $\omega_v^{\max}$:

$$\omega_v^{\max} = \begin{cases} < 0 & \text{Суперперенормируемые} & \text{Нет расходящихся структур} \\ \;\; 0 & \text{Перенормируемые} & \text{Конечное число расходящихся структур} \\ > 0 & \text{Неперенормируемые} & \text{Бесконечное число расходящихся структур} \end{cases}$$

Только для первых двух типов теорий мы можем справиться с ультрафиолетовыми расходимостями в теории возмущений. Справедлива следующая теорема:

Теорема: *В любой перенормируемой теории все ультрафиолетовые расходимости могут быть поглощены в переопределение (перенормировку) конечного числа параметров: константа связи g_i, полей φ_j и масс m_j.*

Игнорируя возможные смешивания, эти перенормировки описываются следующими формулами

$$\begin{aligned} g_i^{Bare} &= Z_{g_i}(g,m,...)g_i, \\ \varphi_j^{Bare} &= Z_{\varphi_j}(g,m,...)\varphi_j, \\ m_j^{Bare} &= Z_{m_j}(g,m,...)m_j. \end{aligned} \tag{5.9}$$

Ур.(5.9) называется условиями **мультипликативной перенормировки**, а константы Z - константами перенормировки. Они зависят от способа регуляризации расходимостей и стремятся к бесконечности при снятии регуляризации ($\Lambda \to \infty$).

Таким образом, для того, чтобы теория была перенормируемой, необходимо чтобы $\omega_v^{\max} \leq 0$. Это требование может быть переформулировано в терминах размерностей.

Рассмотрим произвольный член лагранжиана взаимодействия, который есть произведение полевых операторов и их производных

$$\mathcal{L}_I(x) = g\prod_{i,j}\varphi_i(x)\partial\varphi_j(x). \tag{5.10}$$

Действие есть четырех-мерный интеграл

$$A = \int d^4x\mathcal{L}(x). \tag{5.11}$$

Давайте подсчитаем размерность параметров в ур.(5.10), (5.11). Поскольку действие безразмерно (мы используем естественные единицы $\hbar = c = 1$)

$$[A] = 0,$$

то размерность константы связи выражается формулой $[g] = -\omega_v^{\max}$ (в единицах массы). Тогда условие перенормируемости может быть записано как

$$\text{Перенормируемость :} \qquad [g] \geq 0. \tag{5.12}$$

Посмотрим, когда это условие выполняется.

5.2.4 Иллюстрация

$$\begin{array}{ll} \mathcal{L}_{\varphi^4} = -\lambda\varphi^4, \quad [\varphi] = 1 \Rightarrow [\lambda] = 0, & R \\ \mathcal{L}_{QED} = e\overline{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi, [A_\mu] = 1, \quad [\psi] = 3/2 \Rightarrow [e] = 0, & R \\ \mathcal{L}_{gauge} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 = \frac{1}{4}\left[\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf^{abc}A_\mu^b A_\nu^c\right]^2, [A_\mu] = 1 \Rightarrow [g] = 0, & R \\ \mathcal{L}_{Yukawa} = y\overline{\psi}\varphi\psi, \quad [\varphi] = 1, \quad [\psi] = 3/2 \Rightarrow [y] = 0. & R \end{array}$$

Итак, все эти модели перенормируемы.

$$\begin{array}{ll}
\mathcal{L} = -h\varphi^6, \quad [\varphi] = 1 \Rightarrow [h] = -2, & NR \\
\mathcal{L} = G\overline{\psi}\psi\overline{\psi}\psi, \quad [\psi] = 3/2 \Rightarrow [G] = -2, & NR \\
\mathcal{L} = \kappa\overline{\psi}\partial_\mu V_\mu \psi, \quad [\psi] = 3/2, \quad [V_\mu] = 1 \Rightarrow [\kappa] = -1, & NR \\
\mathcal{L} = \gamma\overline{\psi}\partial_\mu \varphi\gamma^\mu\psi, \quad [\varphi] = 1, \quad [\psi] = 3/2 \Rightarrow [\gamma] = -1. & NR
\end{array}$$

Все эти модели, напротив, неперенормируемы. Отметим, что они включают четырехфермионное или ток на ток взаимодействие.

Вывод следующий: Единственными перенормируемыми взаимодействиями являются:

i) φ^4 взаимодействие;

ii) юкавское взаимодействие;

iii) калибровочное взаимодействие

iv) теория φ^3 суперперенормируема.

Если обратить внимание на спин частиц, участвующих во взаимодействии, то он также сильно ограничен. Перенормируемые взаимодействия содержат только поля спина 0, 1/2 и 1. Все модели со спином 3/2, 2 и т.д. — неперенормируемы. Последним включают также и гравитацию. Т.е. квантовая гравитация – неперенормируема.

Поскольку мы не знаем, как обращаться с неперенормируемыми взаимодействиями из-за того, что ультрафиолетовые расходимости не поддаются контролю, остаются лишь три типа взаимодействий, из которых можно построить Стандартную Модель, а именно φ^4, Юкавское и калибровочные взаимодействия со скалярными, спинорными и векторными частицами.

Следует сделать замечание относительно векторных полей с $M \neq 0$. Вспомним вид пропагатора массивного векторного поля

$$\overline{V_\mu V_\nu} = i\frac{g_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu/M^2}{M^2 - k^2 - i\epsilon}.$$

Он дает $r_l = 2$, , что ведет к неперенормируемости. Единственный известный способ избежать этой трудности есть спонтанное нарушение симметрии. В этом случае

$$\overline{V_\mu V_\nu} = i\frac{g_{\mu\nu} - (1-d_l)k_\mu k_\nu/k^2}{M^2 - k^2 - i\epsilon}.$$

Поэтому $r_l = 0$ и теория оказывается перенормируемой. Этот механизм используется в Стандартной Модели для придания масс промежуточным векторным бозонам без нарушения перенормируемости.

5.3 Построение Моделей

Мы имеем теперь в своем распоряжении все необходимое для построения Стандартной Модели фундаментальных взаимодействий. Четыре фундаментальных силы в природе описываются в терминах лагранжевой квантовой теории поля (см. Таблицу 2).

Квантовая гравитация не построена в настоящий момент. Известные версии теории неперенормируемы. Существуют новые идеи, связанные с суперсимметрией, теории супергравитации, которые улучшают УФ свойства теории. Однако, этого оказалось недостаточно для достижения перенормируемости. Проблема УФ расходимостей в теории гравитации не решена в рамках локальной квантовой теории поля.

Силы	Модель	Симметрия	Спектр	Перенорм.
Сильные	Квантовая Хромо-Динамика (КХД)	SU(3) калибр. ненарушенная	массивные, спин 1/2 кварки безмассовые, спин 1 глюоны	Да
Слабые и Электро-Магнитные	Глэшоу-Вайнберг-Салам (ГВС)	U(1) калибр. ненарушенная SU(2) калибр. спонтанно нарушенная	массивные, спин 1/2 кварки и лептоны массивные, спин 0 хиггсовские бозоны массивные, спин 1 фотон массивные, спин 1 промежут. бозоны	Да
Гравитация	Общая теория относит.	SL(2,C) калибр.	безмассовые, спин 2 гравитон все частицы	Нет

Таблица 1: Стандартная Модель фундаментальных взаимодействий

5.3.1 Конечные теории

Любопытно, возможно ли построить квантовую теорию поля без ультрафиолетовых расходимостей, т.е. конечную теорию поля без расходимостей, без перенормировок и т.д.?

Удивительно, но ответ положителен. Направляющая идея связана с калибровочными полями. Вспомним эффект поляризации вакуума. Оказывается, что в то время как поля материи приводят к экранировке голого заряда, калибровочные поля приводят к антиэкранировке, т.е. производят противоположный эффект. Рассмотрим радиационные поправки к пропагатору спинорного поля. Однопетлевые диаграммы показаны на Рис. 19. Первая диаграмма содержит виртуальное калибровочное поле, в то время

Рис. 19:

как вторая - виртуальное скалярное поле. Каждая из диаграмм расходится, однако их сумма конечна. Сокращение расходимостей происходит, если константы связи равны.

Другим примером сокращения расходимостей служит пропагатор калибровочного поля. Диаграммы показаны на Рис. 20. Однопетлевые радиационные поправки расходятся и пропорциональны

$$\ln \Lambda^2 (\frac{11}{3} N - \frac{2}{3} n_f),$$

где N соответствует калибровочной группе SU(N) и n_f есть число фермионов в фун-

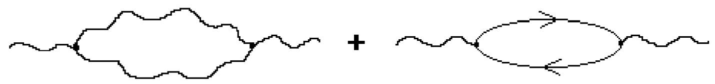


Рис. 20:

даментальном представлении. Сокращение расходимостей имеет место, когда

$$n_f = \frac{11}{2}N, \quad (\frac{33}{2}\text{for SU(3)}).$$

Нецелое число фермионов выглядит нефизическим, однако заметим, что 1 майорановский фермион ($C\psi = \psi$) засчитывается как $1/2$ дираковского фермиона,

$$\frac{11}{2}N \text{ дираковских фермионов} = 11N \text{ майорановских фермионов}.$$

Майорановские фермионы являются необходимым ингредиентом суперсимметрии, симметрии, которая трансформирует фермионы в бозоны и наоборот. Эта симметрия теперь используется для построения обобщения Стандартной Модели.

Первая конечная четырехмерная КТП была построена в рамках суперсимметричных моделей. Это так называемая N=4 расширенная суперсимметричная теория Янга-Миллса. К сожалению, она не может быть использована для построения реалистической модели из-за неудовлетворительного состава полей. Позже были построены N=2 и N=1 суперсимметричные модели также свободные от ультрафиолетовых расходимостей. Последние модели предоставляют нам возможность построить конечную реалистичную теорию Великого Объединения.

Конечные модели не требуют процедуры перенормировок. Они не имеют проблем на малых расстояниях (больших импульсах). Существует очень ограниченное число моделей такого сорта. Они обладают замечательными свойствами: единая константа связи, фиксированное число поколений, фиксированный набор хиггсовских полей.

Однако, и существующие перенормируемые модели вполне пригодны для описания трёх фундаментальных взаимодействий. Теория перенормировок позволяет получать конечные ответы пригодные для сравнения с экспериментом. Достигнутая в настоящий момент точность сравнения предсказаний Стандартной модели с экспериментальными данными убеждает нас в справедливости последней.

5.4 Заключительные замечания

Мы представили здесь сжатое изложение основных принципов квантовой теории поля. Это есть формализм, необходимый для построения Стандартной Модели фундаментальных взаимодействий. Современные попытки выйти за рамки Стандартной Модели также предпринимаются в контексте квантовой теории поля. Это есть теории Великого Объединения, которые объединяют сильные взаимодействия вместе с электрослабыми, суперсимметричные обобщения Стандартной Модели и теорий Великого Объединения, и, наконец, теории супергравитации, нацеленные на включение гравитации в общую универсальную схему. Квантовая теория поля обещает быть наиболее естественным формализмом для дальнейшего развития теории частиц.

В последние годы появились новые идеи. Высшие размерности пространства-времени, идеи Калуцы-Клейна получили новое рождение в рамках супергравитации. Еще более революционным является развитие теории суперструн. В этом подходе локальная КТП выступает в качестве низкоэнергетического (на больших расстояниях) предела фундаментальной нелокальной теории, теории суперструны, претендующей на роль окончательной теории всего сущего. Однако, даже в этом случае КТП остается главным инструментом описания физики ниже планковской шкалы.

* * * * * * * * * * * * * * * * *

Рекомендуемая литература

1. Н.Н. Боголюбов и Д.В. Ширков, *Квантовые поля*, Наука, Москва, 1980;
2. С. Коулмен, *Скрытая симметрия*, в сб. "Квантовая теория калибровочных полей", Мир, Москва, 1977;
3. Т.-П. Ченг и Л.-Ф. Ли, *Калибровочные теории в физике элементарных частиц*, Мир, Москва, 1987.

Подписано к печати		Формат 60x90	1/16
Усл.-печ.л.4,0	Уч.-изд.л.3,0	Тираж 120 экз.	Заказ 01-04

Отпечатано в ИТЭФ, 117218, Москва, ул.Б.Черёмушкинская, 25