Теория φ^4: Вычисление констант перенормировки в двухпетлевом приближении

Используется размерная регуляризация и схема минимальных вычитаний ($\overline{MS}$). При этом константы перенормировки определяются формулой

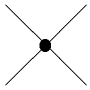
$$Z = 1 - \mathcal{K}\ \mathcal{R}', \tag{1}$$

где $\mathcal{K}$ обозначает сингулярную часть, а $\mathcal{R}'$ - неполную $\mathcal{R}$ операцию без последнего вычитания.

• Лагранжиан:

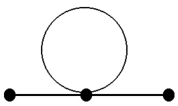
$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)^2 - \frac{\lambda}{4!}\varphi^4 \tag{2}$$

• Правила Фейнмана:

 $= \ -i\lambda$

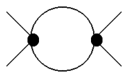
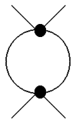
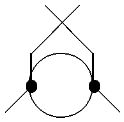
 $= \ \frac{i}{p^2}$

1 петля

• Пропагатор:  $= J_1 = 0$

в силу правил размерной регуляризации для безмассовых диаграмм. Соответственно, константа перенормировки пропагатора равна

$$Z_2^{-1} = 1. \tag{3}$$

• Вершина:  $+$  $+$  $= I_1(s) + I_1(t) + I_1(u)$,

$s = (p_1+p_2)^2 = (p_3+p_4)^2, t = (p_1-p_3)^2 = (p_2-p_4)^2, u = (p_1-p_4)^2 = (p_2-p_3)^2.$

$$I_1(s) = \frac{(-i\lambda)^2}{2}\frac{(\mu^2)^\varepsilon}{(2\pi)^4}i^2\int\frac{d^{4-2\varepsilon}k}{k^2(p-k)^2} = \frac{\lambda^2}{2}\frac{i\pi^2}{(2\pi)^4}\left(\frac{\mu^2}{-s}\right)^\varepsilon\frac{\Gamma(1-\varepsilon)\Gamma(1-\varepsilon)\Gamma(\varepsilon)}{\Gamma(1)\Gamma(1)\Gamma(2-2\varepsilon)} =$$

(1/2 - комбинаторный коэффициент)

$$= \frac{i}{2}\frac{\lambda^2}{16\pi^2}\left(\frac{\mu^2}{-s}\right)^\varepsilon\frac{1}{\varepsilon(1-2\varepsilon)} = \frac{i}{2}\frac{\lambda^2}{16\pi^2}(\frac{1}{\varepsilon} + 2 + \ln\frac{\mu^2}{-s})$$

Четверная вершина равна:

$$\Gamma_4 = -i\lambda\left\{1 - \frac{\lambda}{16\pi^2}\left(\frac{3}{2\varepsilon} + 3 + \frac{1}{2}\ln\frac{\mu^2}{-s} + \frac{1}{2}\ln\frac{\mu^2}{-t} + \frac{1}{2}\ln\frac{\mu^2}{-u}\right)\right\}.$$

Константа перенормировки четверной вершины в $\overline{MS}$ схеме равна сингулярной части с обратным знаком

$$Z_4 = 1 + \frac{3}{2\varepsilon}\frac{\lambda}{16\pi^2}. \tag{4}$$

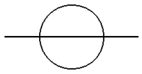
"Голый" и ренормированный заряды связаны соотношением:

$$\lambda_{Bare} = \mu^{2\varepsilon}\lambda Z_\lambda, \tag{5}$$

где константа перенормировки заряда λ равна:

$$Z_\lambda = Z_4 Z_2^{-2} = 1 + \frac{3}{2\varepsilon}\frac{\lambda}{16\pi^2}. \tag{6}$$

<u>2 петли</u>

• Пропагатор:  $= J_2(p^2)$.

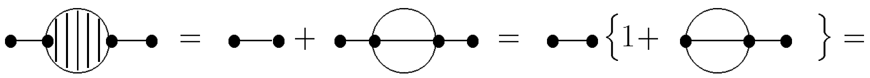
$$J_2(p^2) = \frac{(-i\lambda)^2}{3!}\frac{i^3(\mu^2)^{2\varepsilon}}{(2\pi)^8}\int\frac{d^{4-2\varepsilon}k d^{4-2\varepsilon}q}{q^2(k-q)^2(p-k)^2} =$$

(1/3! - комбинаторный коэффициент)

$$= \frac{i\lambda^2}{6}\frac{(i\pi^2)^2}{(2\pi)^8}p^2\left(\frac{\mu^2}{-p^2}\right)^{2\varepsilon}\frac{\Gamma(1-\varepsilon)\Gamma(1-\varepsilon)\Gamma(1-\varepsilon)\Gamma(-1+2\varepsilon)}{\Gamma(1)\Gamma(1)\Gamma(1)\Gamma(3-3\varepsilon)} =$$

$$= \frac{i}{6}\frac{\lambda^2}{(16\pi^2)^2}\left(\frac{\mu^2}{-p^2}\right)^{2\varepsilon}\frac{p^2}{(2-3\varepsilon)(1-3\varepsilon)(1-2\varepsilon)2\varepsilon} = \frac{i}{24}\frac{\lambda^2}{(16\pi^2)^2}p^2\left(\frac{1}{\varepsilon}+\frac{13}{2}+2\ln\frac{\mu^2}{-p^2}\right)$$

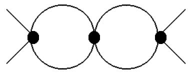
Таким образом пропагатор имеет вид:



$$= \frac{i}{p^2}\left\{1 - \frac{1}{24}\frac{\lambda^2}{(16\pi^2)^2}\left(\frac{1}{\varepsilon}+\frac{13}{2}+2\ln\frac{\mu^2}{-p^2}\right)\right\}.$$

Константа перенормировки пропагатора есть обратная константа перенормировки волновой функции. В $\overline{MS}$ схеме она равна сингулярной части с обратным знаком

$$Z_2^{-1} = 1 + \frac{1}{24\varepsilon}\left(\frac{\lambda}{16\pi^2}\right)^2. \tag{7}$$

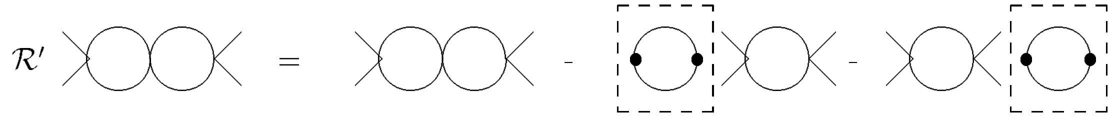
• Вершина:  + перекрёстные члены $= I_2(s) + I_2(t) + I_2(u)$.

$$I_2(s) = \frac{(-i\lambda)^3}{4}\left(\frac{(\mu^2)^\varepsilon}{(2\pi)^4}i^2\int\frac{d^{4-2\varepsilon}k}{k^2(p-k)^2}\right)^2 =$$

(1/4 - комбинаторный коэффициент)

$$= -\frac{i}{4}\frac{\lambda^3}{(16\pi^2)^2}(\frac{1}{\varepsilon} + 2 + \ln\frac{\mu^2}{-s})^2.$$

Вычитание расходящихся подграфов (R-операция без последнего вычитания) выглядит следующим образом:



или

$$\mathcal{R}' I_2(s) = -\frac{i}{4}\frac{\lambda^3}{(16\pi^2)^2}\left\{(\frac{1}{\varepsilon} + 2 + \ln\frac{\mu^2}{-s})^2 - \frac{2}{\varepsilon}(\frac{1}{\varepsilon} + 2 + \ln\frac{\mu^2}{-s})\right\} =$$
$$= -\frac{i}{4}\frac{\lambda^3}{(16\pi^2)^2}\left(-\frac{1}{\varepsilon^2} + 4 + \ln^2\frac{\mu^2}{-s} + 4\ln\frac{\mu^2}{-s}\right).$$

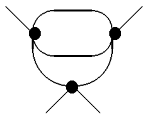
Заметим, что после вычитаний подграфов сингулярная часть имеет локальный характер, т.е. в импульсном пространстве не зависит от $\ln p^2$. Члены первого порядка по $1/\varepsilon$ отсутствуют в силу того, что диаграмма факторизуется на две диаграммы низшегоо порядка.

Вклад в вершинную функцию равен:

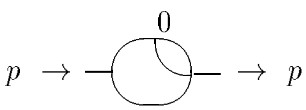
$$\Delta\Gamma_4 = -i\lambda\left\{\frac{1}{4}\frac{\lambda^2}{(16\pi^2)^2}\left(-\frac{3}{\varepsilon^2} + 12 + \ln^2\frac{\mu^2}{-s} + 4\ln\frac{\mu^2}{-s} + \ln^2\frac{\mu^2}{-t} + 4\ln\frac{\mu^2}{-t} + \ln^2\frac{\mu^2}{-u} + 4\ln\frac{\mu^2}{-u}\right)\right\}$$

И соответственно вклад в константу перенормировки четверной вершины в $\overline{MS}$ схеме равен сингулярной части с обратным знаком

$$\Delta Z_4 = +\frac{3}{4\varepsilon^2}\left(\frac{\lambda}{16\pi^2}\right)^2. \tag{8}$$

• Вершина:  + перекрёстные члены (всего 6 вариантов)

Рассмотрим один из них. Поскольку нас интересуют только перенормировки, которые в $\overline{MS}$ схеме не зависят от внешних импульсов, то для простоты вычислений положим один из импульсов равным нулю. Тогда диаграмма приобретёт вид:



Соответствующий интеграл равен:

$$I_2(p^2) = \frac{(-i\lambda)^3}{2}\frac{(\mu^2)^{2\varepsilon}}{(2\pi)^8}i^4\int\frac{d^{4-2\varepsilon}q\,d^{4-2\varepsilon}k}{q^2(k-q)^2k^2(p-k)^2} =$$

(1/2 - комбинаторный коэффициент)

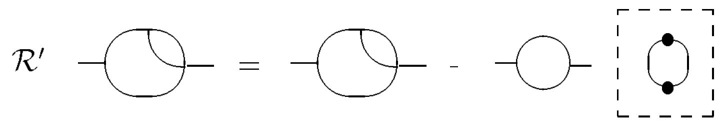
$$= \frac{i\lambda^3}{2}\frac{(\mu^2)^{2\varepsilon}}{(2\pi)^8} i\pi^2 \frac{\Gamma(1-\varepsilon)\Gamma(1-\varepsilon)\Gamma(\varepsilon)}{\Gamma(1)\Gamma(1)\Gamma(2-2\varepsilon)} \int \frac{d^{4-2\varepsilon}k}{(k^2)^{1+\varepsilon}(p-k)^2} =$$

$$= -\frac{i}{2}\frac{\lambda^3}{(16\pi^2)^2}\left(\frac{\mu^2}{-p^2}\right)^{2\varepsilon} \frac{\Gamma(1-\varepsilon)\Gamma(1-\varepsilon)\Gamma(\varepsilon)\Gamma(1-2\varepsilon)\Gamma(1-\varepsilon)\Gamma(2\varepsilon)}{\Gamma(1)\Gamma(1)\Gamma(2-2\varepsilon)\Gamma(1+\varepsilon)\Gamma(1)\Gamma(2-3\varepsilon)} =$$

$$= -\frac{i}{2}\frac{\lambda^3}{(16\pi^2)^2}\left(\frac{\mu^2}{-p^2}\right)^{2\varepsilon} \frac{1}{2\varepsilon^2(1-2\varepsilon)(1-3\varepsilon)} =$$

$$= -\frac{i}{2}\frac{\lambda^3}{(16\pi^2)^2}\left\{\frac{1}{2\varepsilon^2} + \frac{5}{2\varepsilon} + 2 + \frac{\ln(-\mu^2/p^2)}{\varepsilon} + \ln^2\frac{\mu^2}{-p^2} + 5\ln\frac{\mu^2}{-p^2}\right\}.$$

Вычитание расходящихся подграфов (R-операция без последнего вычитания) выглядит следующим образом:



или

$$\mathcal{R}' I_2(s) = -\frac{i}{2}\frac{\lambda^3}{(16\pi^2)^2}\left\{\left(\frac{\mu^2}{-p^2}\right)^{2\varepsilon}\frac{1}{2\varepsilon^2(1-2\varepsilon)(1-3\varepsilon)} - \left(\frac{\mu^2}{-p^2}\right)^{\varepsilon}\frac{1}{\varepsilon^2(1-2\varepsilon)}\right\} =$$

$$= -\frac{i}{2}\frac{\lambda^3}{(16\pi^2)^2}\left\{\left(\frac{1}{2\varepsilon^2} + \frac{5}{2\varepsilon} + 2 + \frac{\ln(-\mu^2/p^2)}{\varepsilon} + \ln^2\frac{\mu^2}{-p^2} + 5\ln\frac{\mu^2}{-p^2}\right) - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{1}{\varepsilon^2} + \frac{2}{\varepsilon} + 4 + \frac{\ln(-\mu^2/p^2)}{\varepsilon} + \frac{1}{2}\ln^2\frac{\mu^2}{-p^2} + 2\ln\frac{\mu^2}{-p^2}\right)\right\} =$$

$$= -\frac{i}{2}\frac{\lambda^3}{(16\pi^2)^2}\left\{-\frac{1}{2\varepsilon^2} + \frac{1}{2\varepsilon} - 2 + \frac{1}{2}\ln^2\frac{\mu^2}{-p^2} + 3\ln\frac{\mu^2}{-p^2}\right\}.$$

Опять после вычитания расходящегося подграфа сингулярная часть имеет локальный характер, т.е. в импульсном пространстве не зависит от $\ln p^2$.

Вклад в вершинную функцию равен:

$$\Delta\Gamma_4 = -i\lambda\left\{\frac{1}{2}\frac{\lambda^2}{(16\pi^2)^2}\left(-\frac{3}{\varepsilon^2} + \frac{3}{\varepsilon} - 12 + \frac{1}{2}\ln^2\frac{\mu^2}{-p^2} + 3\ln\frac{\mu^2}{-p^2} + \dots\right)\right\}$$

и соответственно

$$\Delta Z_4 = (\frac{3}{2\varepsilon^2} - \frac{3}{2\varepsilon})\left(\frac{\lambda}{16\pi^2}\right)^2. \qquad (9)$$

Таким образом, в силу (8) и (9) в двухпетлевом приближении константа перенормировки четверной вершины имеет вид:

$$Z_4 = 1 + \frac{3}{2\varepsilon}\frac{\lambda}{16\pi^2} + \left(\frac{\lambda}{16\pi^2}\right)^2(\frac{9}{4\varepsilon^2} - \frac{3}{2\varepsilon}). \qquad (10)$$

С учётом двухпетлевой перенормировки пропагатора (7) имеем:

$$Z_\lambda = Z_4 Z_2^{-2} = 1 + \frac{3}{2\varepsilon}\frac{\lambda}{16\pi^2} + \left(\frac{\lambda}{16\pi^2}\right)^2(\frac{9}{4\varepsilon^2} - \frac{17}{12\varepsilon}). \qquad (11)$$