ВЫЧИСЛЕНИЕ ПОЛЯРИЗАЦИИ ВАКУУМА В РАЗМЕРНОЙ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ

Размерная Регуляризация

Техника размерной регуляризации состоит в аналитическом продолжении от целых к нецелым размерностям пространства. Обычно мы переходим от размерности D к размерности $D-2\epsilon$, где $\epsilon \to 0$. В частности нас будет интересовать переход от 4 к $4-2\epsilon$ измерениям. В этом случае все ультрафиолетовые и инфракрасные расходимости проявляются в виде полюсов по ϵ. Для аналитического продолжения в нецелое число измерений необходимо определить все основные объекты, такие как метрика, мера интегрирования, γ матрицы, пропагаторы, и т.д. И хотя это продолжение не единственно, можно определить самосогласованный набор правил, который позволяет проводить вычисления.

Метрика: $g_4^{\mu\nu} \to g_{4-2\epsilon}^{\mu\nu}$. Хотя это достаточно затруднительно определить метрику в нецелом числе измерений, на практике обычно достаточно одного соотношения, а именно $g^{\mu\nu}g_{\mu\nu} = \delta_\mu^\mu = D = 4-2\epsilon$.

Мера: $d^4q \to (\mu^2)^\epsilon d^{4-2\epsilon}q$, где μ есть параметр размерной регуляризации размерности массы. Интегрирование с такой мерой определяется аналитическим продолжением из целого числа измерений.

γ матрицы : Обычное антикоммутационное соотношение $\{\gamma^\mu,\gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$ по-прежнему выполняется, однако соотношения включающие размерность модифицируются:

$$\gamma^\mu\gamma_\mu = D = 4-2\epsilon; \quad Tr\gamma^\mu\gamma^\nu = g^{\mu\nu}Tr1 = g^{\mu\nu}\left\{ \begin{array}{c} 2^{[D/2]} \\ 4 \end{array} \right. .$$

Обычно выбирают $Tr1 = 4$. Тогда алгебра γ-матриц имеет вид:

$$Tr\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma = Tr1[g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} + g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho} - g^{\nu\rho}g^{\mu\sigma}],$$

$$\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\mu = -\gamma^\mu\gamma^\mu\gamma^\nu + 2g^{\mu\nu}\gamma^\mu = -(4-2\epsilon)\gamma^\nu + 2\gamma^\nu = -(2-2\epsilon)\gamma^\nu, \quad \text{etc.}$$

Что не является хорошо определённым, так это γ^5-матрица, поскольку $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ и она не может быть продолжена на произвольное число измерений. Это создаёт проблему для размерной регуляризации, поскольку нет самосогласованного определения γ^5.

Пропагатор: В импульсном пространстве продолжение не составляет труда

$$\frac{1}{p^2-m^2} \to \frac{1}{p^2-m^2}.$$

Однако, в координатном пространстве имеем: (положим $m=0$ для простоты)

$$\int \frac{d^4p}{p^2}e^{ipx} \sim \frac{1}{x^2} \Rightarrow \int \frac{d^{4-2\epsilon}p}{p^2}e^{ipx} \sim \frac{1}{[x^2]^{1-\epsilon}}.$$

Основные интегралы: Удобно использовать фейнмановскую параметризацию для произведения пропагаторов

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{A_1^{\alpha_1} A_2^{\alpha_2} \cdots A_n^{\alpha_n}} &= \frac{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n)}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)\cdots\Gamma(\alpha_n)} \int_0^1 dx_1 dx_2 \cdots dx_n \\
&\cdot \frac{\delta(1-x_1-x_2-\cdots-x_n) x_1^{\alpha_1-1} x_2^{\alpha_2-1} \cdots x_n^{\alpha_n-1}}{[A_1x_1+A_2x_2+\cdots A_nx_n]^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}}.
\end{aligned} \tag{1}
$$

Здесь Γ есть Γ-функция Эйлера, которая обладает следующими свойствами

$$
\Gamma(1)=1, \quad \Gamma(n+1)=n!, \quad x\Gamma(x)=\Gamma(x+1), \quad \Gamma(1+x)=exp\left[-x\gamma+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-)^n x^n}{n}\zeta(n)\right],
$$

где γ есть константа Эйлера, а ζ есть дзета-функция Римана. Γ-функция имеет простые полюса при отрицательных целых значениях аргумента и в нуле.

В частном случае ур.(1) имеет вид:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{[p^2-m^2][(p-q)^2-m^2]} &= \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(1)\Gamma(1)} \int_0^1 \frac{dx_1 x_2 \delta(1-x_1-x_2)}{[[p^2-m^2]x_1+[(p-q)^2-m^2]x_2]^2} \\
&= \int_0^1 \frac{dx}{[p^2-2pqx+q^2x-m^2]^2}.
\end{aligned} \tag{2}
$$

Теперь мы можем выписать некоторые основные интегралы, необходимые для однопетлевых вычислений. Они получаются аналитическим продолжением из целых значений D.

$$
\begin{aligned}
\int \frac{d^D p}{[p^2-2kp+m^2]^\alpha} &= i\frac{\Gamma(\alpha-D/2)}{\Gamma(\alpha)}\frac{(-\pi)^{D/2}}{[m^2-k^2]^{\alpha-D/2}}, \\
\int \frac{d^{4-2\epsilon} p}{[p^2-2kp+m^2]^2} &= i\frac{\Gamma(\epsilon)}{\Gamma(2)}\frac{\pi^{2-\epsilon}}{[m^2-k^2]^{\epsilon}}, \qquad \Gamma(\epsilon)\sim\frac{1}{\epsilon}\to\infty, \\
\int \frac{d^{4-2\epsilon} p \;\; p_\mu}{[p^2-2kp+m^2]^2} &= i\frac{\Gamma(\epsilon)}{\Gamma(2)}\frac{\pi^{2-\epsilon}k_\mu}{[m^2-k^2]^{\epsilon}}, \\
\int \frac{d^{4-2\epsilon} p \;\; p_\mu p_\nu}{[p^2-2kp+m^2]^2} &= i\pi^{2-\epsilon}\left[\frac{\Gamma(\epsilon)}{\Gamma(2)}\frac{k_\mu k_\nu}{[m^2-k^2]^{\epsilon}}+\frac{g^{\mu\nu}}{2}\frac{\Gamma(\epsilon-1)}{\Gamma(2)}\frac{1}{[m^2-k^2]^{\epsilon-1}}\right].
\end{aligned} \tag{3}
$$

Поляризация Вакуума в КЭД

Мы можем вычислить теперь диаграмму поляризации вакуума. В КЭД это есть единственная диаграмма представленная на Рис.1. Соответствующее выражение имеет вид:

$$
\Pi_{\mu\nu}(p) = (-)\frac{e^2}{(2\pi)^4}\int d^4q \frac{Tr[\gamma^\mu(m+\hat{q})\gamma^\nu(m+\hat{q}-\hat{p})]}{[m^2-q^2][m^2-(q-p)^2]}, \tag{4}
$$

где знаке "-" идёт из фермионной петли, а $\hat{q}\equiv\gamma^\mu q_\mu$. Перейдём вначале к размерности $4-2\epsilon$. Интеграл (4) становится

$$
\Pi^{Dim}_{\mu\nu}(p) = (-)\frac{e^2(\mu^2)^\epsilon}{(2\pi)^{4-2\epsilon}}\int d^{4-2\epsilon}q \frac{Tr[\gamma^\mu(m+\hat{q})\gamma^\nu(m+\hat{q}-\hat{p})]}{[m^2-q^2][m^2-(q-p)^2]}, \tag{5}
$$

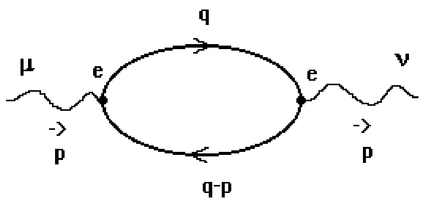


Figure 1: Диаграмма поляризации вакуума в КЭД

Положим $m = 0$ для простоты вычислений. Это позволит нам получить простой ответ в самом конце. Вычислим теперь след:

$$Tr\gamma^\mu \hat{q}\gamma^\nu(\hat{q}-\hat{p}) = Tr(\gamma^\mu\gamma^\rho\gamma^\nu\gamma^\sigma)q^\rho(q-p)^\sigma = 4q^\rho(q-p)^\sigma[g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}+g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho}-g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma}].$$

Итак, интеграл примет вид

$$I^{Dim}_{\rho\sigma}(p) = (-)\frac{(\mu^2)^\epsilon}{(2\pi)^{4-2\epsilon}}\int \frac{d^{4-2\epsilon}q q^\rho(q-p)^\sigma}{q^2(q-p)^2}.$$

Используя фейнмановскую параметризацию и производя интегрирования согласно приведённым выше формулам, имеем

$$\begin{aligned} I^{Dim}_{\rho\sigma}(p) &= (-)\frac{(\mu^2)^\epsilon}{(2\pi)^{4-2\epsilon}}\int_0^1 dx\int\frac{d^{4-2\epsilon}q q^\rho(q-p)^\sigma}{[q^2-2pqx+p^2x]^2} \qquad (6)\\ &= (-)i\frac{(\mu^2)^\epsilon\pi^{2-\epsilon}}{(2\pi)^{4-2\epsilon}}\left\{-\Gamma(\epsilon)\int_0^1\frac{dxp^\rho p^\sigma x(1-x)}{[p^2x(1-x)]^\epsilon}+\Gamma(\epsilon-1)\frac{g^{\rho\sigma}}{2}\int_0^1\frac{dx}{[p^2x(1-x)]^{\epsilon-1}}\right\}. \end{aligned}$$

Для вычисления оставшегося интеграла, используем следующие соотношения

$$\int_0^1 dx x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} = B(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}, \text{ in particular } \int_0^1 dx x^{1-\epsilon}(1-x)^{1-\epsilon} = \frac{\Gamma(2-\epsilon)\Gamma(2-\epsilon)}{\Gamma(4-2\epsilon)}.$$

Теперь интеграл (6) принимает вид

$$I^{Dim}_{\rho\sigma}(p) = \frac{i}{16\pi^2}(4\pi)^\epsilon\left(\frac{\mu^2}{p^2}\right)^\epsilon\frac{\Gamma^2(2-\epsilon)\Gamma(\epsilon)}{\Gamma(4-2\epsilon)}\left[p^\rho p^\sigma+\frac{1}{2}\frac{g^{\rho\sigma}p^2}{1-\epsilon}\right], \qquad (7)$$

где мы воспользовались тем, что $\Gamma(-1+\epsilon) = -\frac{\Gamma(\epsilon)}{1-\epsilon}$. Умножая получившееся выражение (7) на след

$$[g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}+g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho}-g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma}]p^\rho p^\sigma = p^\mu p^\nu + p^\nu p^\mu - g^{\mu\nu}p^2 = 2p^\mu p^\nu - g^{\mu\nu}p^2,$$

$$[g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}+g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho}-g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma}]g^{\rho\sigma}p^2 = g^{\mu\nu}p^2+g^{\mu\nu}p^2-g^{\mu\nu}(4-2\epsilon)p^2 = -(2-2\epsilon)p^2g^{\mu\nu},$$

находим

$$\begin{aligned} \Pi^{Dim}_{\mu\nu}(p) &= i\frac{4e^2}{16\pi^2}(4\pi)^\epsilon\left(\frac{\mu^2}{p^2}\right)^\epsilon\frac{\Gamma^2(2-\epsilon)\Gamma(\epsilon)}{\Gamma(4-2\epsilon)}\left[2p^\mu p^\nu-g^{\mu\nu}p^2-g^{\mu\nu}p^2\right]\\ &= -i\frac{8e^2}{16\pi^2}(4\pi)^\epsilon\left(\frac{\mu^2}{p^2}\right)^\epsilon(g^{\mu\nu}p^2-p^\mu p^\nu)\frac{\Gamma^2(2-\epsilon)\Gamma(\epsilon)}{\Gamma(4-2\epsilon)}. \qquad (8) \end{aligned}$$

Разлагая далее в ряд по ϵ с помощью соотношений

$$\Gamma(\epsilon) = \frac{1}{\epsilon}\Gamma(1+\epsilon), \quad \Gamma(2-\epsilon) = (1-\epsilon)\Gamma(1-\epsilon), \quad \Gamma(4-2\epsilon) = (3-2\epsilon)(2-2\epsilon)(1-2\epsilon)\Gamma(1-2\epsilon),$$

окончательно получим

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu}^{Dim}(p) &= -i\frac{e^2}{16\pi^2}(4\pi)^\epsilon \left(\frac{\mu^2}{p^2}\right)^\epsilon (g^{\mu\nu}p^2 - p^\mu p^\nu)\frac{4(1+5/3\epsilon)}{3\epsilon}e^{-\gamma\epsilon} \\ &= -ie^2\frac{g^{\mu\nu}p^2 - p^\mu p^\nu}{16\pi^2}\frac{4}{3}\left[\frac{1}{\epsilon} + \log 4\pi - \gamma + \log\frac{\mu^2}{p^2} + \frac{5}{3}\right], \qquad (9) \\ &= i(g^{\mu\nu}p^2 - p^\mu p^\nu)\Pi^{Dim}(p^2). \end{aligned}$$

Вычитания и перенормировки

Имея выражение для поляризации вакуума, можно построить фотонный пропагатор, как показано на Рис.2. Имеем

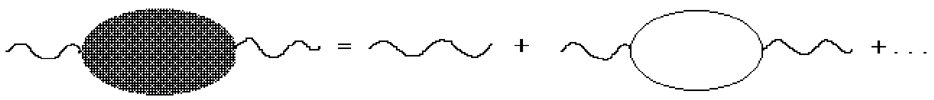


Figure 2: Фотонный пропагатор в КЭД

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu}(p) &= \frac{-i}{p^2}g^{\mu\nu} + \frac{-i}{p^2}g^{\mu\rho}\Pi_{\rho\sigma}\frac{-i}{p^2}g^{\sigma\nu} + \cdots \\ &= \frac{-i}{p^2}g^{\mu\nu} - \frac{\Pi^{\mu\nu}}{p^4} + \cdots = \frac{-i}{p^2}g^{\mu\nu} - \frac{i(g^{\mu\nu} - p^\mu p^\nu/p^2)}{p^2}\Pi(p^2) + \cdots \\ &= \frac{-i}{p^2}(g^{\mu\nu} - \frac{p^\mu p^\nu}{p^2})(1 + \Pi(p^2) + \cdots) - \frac{i}{p^2}\frac{p^\mu p^\nu}{p^2}, \end{aligned}$$

где $\Pi(p^2)$ даётся ур.(9). Отметим, что радиационные поправки всегда пропорциональны поперечному тензору $P_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - p_\mu p_\nu/p^2$. Это есть следствие калибровочной инвариантности и следует из тождеств Уорда.

Для вычитания ультрафиолетовой расходимости, проявляющейся в виде полюсного члена $1/\epsilon$ в $\Pi(p^2)$, можно использовать различные схемы вычитаний. Наиболее популярными являются следующие:

MS-*схема* (Вычитание только полюсов - минимальное вычитание)

$$\Pi^{MS}(p^2) = -\frac{e^2}{16\pi^2}\frac{4}{3}\left[\log 4\pi - \gamma + \log\frac{\mu^2}{p^2} + \frac{5}{3}\right];$$

$\overline{MS}$-*схема* (Вычитание полюсов включая сопутствующие члены $\log 4\pi$ и γ - модифицированное минимальное вычитание)

$$\Pi^{\overline{MS}}(p^2) = -\frac{e^2}{16\pi^2}\frac{4}{3}\left[+\log\frac{\mu^2}{p^2} + \frac{5}{3}\right];$$

MOM*-схема* (Вычитание при некотором фиксированном значении импульса $p^2 = \lambda^2$)

$$\Pi^{MOM}(p^2) = -\frac{e^2}{16\pi^2}\frac{4}{3}\left[+\log\frac{\lambda^2}{p^2}\right].$$

Различные способы вычитания ультрафиолетовых расходимостей соответствуют различным константам перенормировки волновой функции фотона Z_3. В MS-схеме константы перенормировки даются полюсными членами соответствующих выражений с противоположным знаком. В случае пропагатора это есть обратная константа перенормировки фотонного поля. Из выражения (9) для $\Pi^{Dim}(p^2)$ имеем

$$Z_3^{-1} = 1 + \frac{e^2}{16\pi^2}\frac{4}{3}\frac{1}{\epsilon}. \tag{10}$$

Имея константу перенормировки волновой функции фотона Z_3, можно посчитать перенормировку заряда. Действительно, голый и перенормированный заряды связаны соотношением

$$\alpha_B = Z_\alpha \alpha_R = Z_1^2 Z_2^{-2} Z_3^{-1}\alpha_R, \quad \alpha \equiv \frac{e^2}{4\pi},$$

гдее Z_2 есть константа перенормировки волновой функции электрона, а Z_1 есть константа перенормировки тройной вершины. Однако, благодаря тождеству Уорда а КЭД, $Z_1 = Z_2$ и перенормировка заряда определяется только лишь константой Z_3.

Это позволяет вычислить β-функцию, которая определяет поведение бегущей константы связи в уравнении ренормгруппы. В MS- или $\overline{MS}$-схеме бета-функция даётся полюсными членами в константах перенормировки, в то время как в MOM-схеме она следует из логарифмического члена. Однако в однопетлевом приближении они совпадают. Ур.(10) даёт

$$\beta_{QED}(\alpha) = \frac{4}{3}\frac{\alpha^2}{4\pi}n_f, \tag{11}$$

где n_f усть число фермионных пар в петле.

Коеффициент $\frac{4}{3}$ в ур.(11) как раз и есть полюсной член в диаграмме поляризации вакуума, что мы вычислили выше.

Поляризация вакуума в КХД

В случае КХД, помимо диаграммы на Рис.1, мы имеем дополнительные вклады в поляризацию вакуума от диаграмм, изображённых на Рис.3. Первая - есть самодействие глюонов, а вторая - вклад духов Фаддеева-Попова. Эти диаграммы зависят от выбора калибровки, и для их вычисления мы должны фиксировать калибровку. В дальнейшем мы выберем калибровку Фейнмана или диагональную калибровку для глюонного поля.

Для вычисления этих диаграмм нам потребуются правила фейнмана для калибровочных полей и полей духов. Тогда для первой диаграммы получаем выражение

$$\begin{aligned}\Pi^{ab}_{\mu\nu}(p) &= \frac{g^2 C_2 \delta^{ab}}{2(2\pi)^4}\int\frac{d^4q}{q^2(q-p)^2}[(2p-q)^\rho g^{\mu\lambda} + (2q-p)^\mu g^{\rho\lambda} - (q+p)^\lambda g^{\mu\rho}] \\ &\cdot\quad [(2p-q)^\rho g^{\lambda\nu} - (q+p)^\lambda g^{\nu\rho} + (2q-p)^\nu g^{\rho\lambda}],\end{aligned} \tag{12}$$

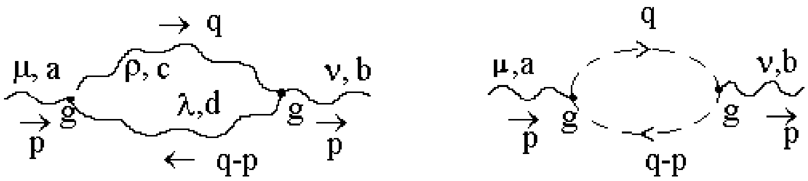


Figure 3: Диаграммы поляризации вакуума в теории Янга-Миллса

где $1/2$ есть комбинаторный фактор, а C_2 есть квадратичный оператор Казимира, для группы SU(N) равный N. Он возникает из свёртки структурных констант группы f^{abc}

$$f^{abc}f^{dbc} = C_2\delta^{ad}.$$

Свёртывая индексы и переходя в $4-2\epsilon$ измерения, получаем

$$\begin{aligned}\Pi^{Dim\ (ab)}_{\mu\nu}(p) &= \delta^{ab}\frac{g^2C_2}{2}\frac{(\mu^2)^\epsilon}{(2\pi)^{4-2\epsilon}}\int\frac{d^{4-2\epsilon}q}{q^2(q-p)^2}\{g^{\mu\nu}[4p^2+q^2+(q-p)^2] \\ &+(3-2\epsilon)(2q-p)^\mu(2q-p)^\nu-(2p-q)^\mu(2p-q)^\nu-(q+p)^\mu(q+p)^\nu\}.\end{aligned} \tag{13}$$

Для вычисления интегралов используем приведённые выше формулы. первый шаг есть параметризация фейнмана (2). Дальнейшее импульсное интегрирование выполняется согласно ур.(3). Заметим, однако, что така как глюоны безмассовые, то интегралы только с одним пропагатором равны нулю, а именно

$$I = \frac{(\mu^2)^\epsilon}{(2\pi)^{4-2\epsilon}}\int\frac{d^{4-2\epsilon}q}{q^2} = \frac{(\mu^2)^\epsilon}{(2\pi)^{4-2\epsilon}}\int\frac{d^{4-2\epsilon}q}{(q-p)^2} = 0,$$

поскольку они равны нулю в некоторой степени, а согласно правилам размерной регуляризации, нуль в любой нецелой степени есть нуль.

Применяя эти правила, получаем для интеграла (13)

$$\Pi^{Dim\ (ab)}_{\mu\nu}(p) = i\frac{g^2C_2\delta^{ab}}{16\pi^2}(4\pi)^\epsilon\left(\frac{\mu^2}{p^2}\right)^\epsilon\frac{\Gamma(\epsilon)\Gamma(1-\epsilon)\Gamma(2-\epsilon)}{\Gamma(4-2\epsilon)}[g^{\mu\nu}p^2(19/2-6\epsilon)-p^\mu p^\nu(11-7\epsilon)]. \tag{14}$$

Вторая диаграмма соответствует интегралу

$$\Pi^{Dim\ (ab)}_{\mu\nu}(p) = (-)C_2\delta^{ab}\frac{g^2(\mu^2)^\epsilon}{(2\pi)^{4-2\epsilon}}\int d^{4-2\epsilon}q\frac{q^\mu(q-p)^\nu}{q^2(q-p)^2}, \tag{15}$$

где знак "-" следует из ферми статистики духовых полей.

Вывычисление теперь не составляет труда и даёт

$$\Pi^{Dim\ (ab)}_{\mu\nu}(p) = i\frac{g^2C_2\delta^{ab}}{16\pi^2}(4\pi)^\epsilon\left(\frac{\mu^2}{p^2}\right)^\epsilon\frac{\Gamma(\epsilon)\Gamma(1-\epsilon)\Gamma(2-\epsilon)}{\Gamma(4-2\epsilon)}[g^{\mu\nu}p^2/2+p^\mu p^\nu(1-\epsilon)]. \tag{16}$$

Складывая два вклада вместе, окончательно получаем

$$\Pi^{Dim\ (ab)}_{\mu\nu}(p) = iC_2\frac{2g^2\delta^{ab}}{16\pi^2}(4\pi)^\epsilon\left(\frac{\mu^2}{p^2}\right)^\epsilon\frac{\Gamma(\epsilon)\Gamma(1-\epsilon)\Gamma(2-\epsilon)}{\Gamma(4-2\epsilon)}(5-3\epsilon)[g^{\mu\nu}p^2-p^\mu p^\nu] \tag{17}$$

или, разлагая в ряд по ϵ

$$\Pi^{Dim\ (ab)}_{\mu\nu}(p) = iC_2\delta^{ab}g^2\frac{g^{\mu\nu}p^2 - p^\mu p^\nu}{16\pi^2}\frac{5}{3}\left[\frac{1}{\epsilon} + \log 4\pi - \gamma + \log\frac{\mu^2}{p^2} + \frac{31}{15}\right]. \tag{18}$$

Отметим, что окончательный результат для суммы двух диаграмм опять пропорционален поперечному тензору $P_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - p_\mu p_\nu/p^2$. Это не справедливо, однако, отдельно для диаграммы с калибровочными полями, а имеет место только если учесть вклад духовых полей. Заметим также противоположный знак ответа по сравнению с ур.(9). Это есть эффект неабелевой природы калибровочных полей. Он имеет весьма важные следствия.

Действую таким же путём, как в КЭД, можно вычислить вклад в глюонный пропагатор, а вычитая полюсной член - найти константу перенормировки волновой функции глюона

$$Z_3^{-1} = 1 - \frac{g^2}{16\pi^2}\frac{5}{3}C_2\frac{1}{\epsilon}. \tag{19}$$

Однако, этого недостаточно, чтобы определить константу перенормировки заряда. Требуется знать и константу перенормировки вершины. Это может быть любая вершина с калибровочной константой, так как в силу калибровочной инвариантности, они перенормируются одинаково.Поэтому можно выбрать или тройную глюонную вершину с константой перенормировки Z_1, и получить

$$\alpha_B = Z_\alpha\alpha_R = Z_1^2 Z_3^{-3}\alpha_R,$$

или взять дух-дух-гюонную вершинух. В последнем случае имеем

$$\alpha_B = Z_\alpha\alpha_R = \tilde{Z}_1^2\tilde{Z}_2^{-2}Z_3^{-1}\alpha_R, \tag{20}$$

где $\tilde{Z}_2$ и $\tilde{Z}_1$ суть константы перенормировки волновой функции духового поля и вершины, соотвнтственно. Они могут быть вычисленны из диаграмм, показанных на Рис.4 и оказываются более лёгкими для вычисления по сравнению с трёхглюонной вершиной. Первая диаграмма

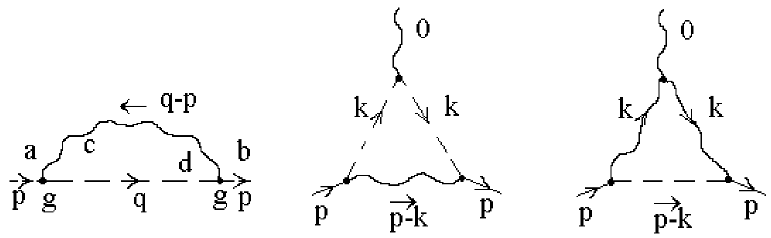


Figure 4: Диаграммы собственной энергии духов и дух-дух-глюонной вершины в КХД

соответствует интегралу

$$\Pi^{Dim\ (ab)}(p) = -C_2\delta^{ab}\frac{g^2(\mu^2)^\epsilon}{(2\pi)^{4-2\epsilon}}\int d^{4-2\epsilon}q\frac{q^\mu p^\mu}{q^2(q-p)^2}, \tag{21}$$

который равен

$$\begin{aligned}\Pi^{Dim\ (ab)}(p) &= -iC_2\delta^{ab}\frac{g^2}{32\pi^2}\left(\frac{\mu^2}{p^2}\right)^\epsilon p^2\frac{\Gamma(\epsilon)\Gamma(1-\epsilon)\Gamma(1-\epsilon)}{\Gamma(2-2\epsilon)} \\ &= -iC_2\delta^{ab}\frac{g^2}{32\pi^2}p^2\left[\frac{1}{\epsilon} + \log 4\pi - \gamma + \log\frac{\mu^2}{p^2} + 2\right]. \end{aligned} \tag{22}$$

Вычисляя теперь пропагатор духов, принимая во внимание, что на древесном уровне он равен $G_{gh}(p) = i/p^2$, и вычитая полюсной член, получаем вклад в константу перенормировки волновой функции духов $\tilde{Z}_2$

$$\tilde{Z}_2^{-1} = 1 - \frac{g^2}{16\pi^2}\frac{C_2}{2}\frac{1}{\epsilon}. \tag{23}$$

Вершинная диаграмма может быть вычислена аналогично и даёт

$$V_{1\rho}^{Dim\ (abc)}(p) = i\frac{C_2}{2}f^{abc}\frac{g^3(\mu^2)^\epsilon}{(2\pi)^{4-2\epsilon}}\int d^{4-2\epsilon}q\frac{q^\mu q^\rho p^\mu}{(q^2)^2(q-p)^2}, \tag{24}$$

что ведёт к

$$\begin{aligned} V_{1\rho}^{Dim\ (abc)}(p) &= -C_2\frac{1}{4}f^{abc}\frac{g^3}{16\pi^2}\left(\frac{\mu^2}{p^2}\right)^\epsilon p^\rho\frac{\Gamma(\epsilon)\Gamma(2-\epsilon)\Gamma(1-\epsilon)}{\Gamma(3-2\epsilon)} \\ &= -C_2\frac{1}{8}f^{abc}\frac{g^3}{16\pi^2}p^\rho\left[\frac{1}{\epsilon}+\log 4\pi-\gamma+\log\frac{\mu^2}{p^2}+2\right]. \end{aligned} \tag{25}$$

Вторая диаграмма даёт

$$V_{2\rho}^{Dim\ (abc)}(p) = -i\frac{C_2}{2}f^{abc}\frac{g^3(\mu^2)^\epsilon}{(2\pi)^{4-2\epsilon}}\int d^{4-2\epsilon}q\frac{(p-q)^\mu p^\nu[q^\nu g^{\mu\rho}+q^\mu g^{\nu\rho}-2q^\rho g^{\mu\nu}]}{(q^2)^2(q-p)^2}, \tag{26}$$

что равно

$$\begin{aligned} V_{2\rho}^{Dim\ (abc)}(p) &= -C_2\frac{3}{8}f^{abc}\frac{g^3}{16\pi^2}\left(\frac{\mu^2}{p^2}\right)^\epsilon p^\rho\frac{\Gamma(\epsilon)\Gamma(1-\epsilon)\Gamma(1-\epsilon)}{\Gamma(2-2\epsilon)}(1-\frac{8}{3}\epsilon) \\ &= -C_2\frac{3}{8}f^{abc}\frac{g^3}{16\pi^2}p^\rho\left[\frac{1}{\epsilon}+\log 4\pi-\gamma+\log\frac{\mu^2}{p^2}-\frac{2}{3}\right]. \end{aligned} \tag{27}$$

Складывая эти два вклада вместе, находим

$$V_{\rho}^{Dim\ (abc)}(p) = -C_2\frac{1}{2}f^{abc}\frac{g^3}{16\pi^2}p^\rho\left[\frac{1}{\epsilon}+\log 4\pi-\gamma+\log\frac{\mu^2}{p^2}\right]. \tag{28}$$

Имея в виду, что на древесном уровне вершина имеет вид $V_\rho^{tree\ (abc)}(p) = -gf^{abc}p^\rho$ и вычитая полюсной член, получаем константу перенормировки дух-дух-глюонной вершиныt $\tilde{Z}_1$

$$\tilde{Z}_1 = 1 - \frac{g^2}{16\pi^2}\frac{1}{2}C_2\frac{1}{\epsilon}. \tag{29}$$

Комбинируя ур. (19), (23) и (29), получаем согласно ур. eq.(20)

$$Z_\alpha = 1 - \frac{\alpha}{4\pi}\frac{11}{3}C_2\frac{1}{\epsilon}$$

что даёт

$$\beta_{YM}(\alpha) = -\frac{11}{3}C_2\frac{\alpha^2}{4\pi}. \tag{30}$$

Для получения бета-функции в КХД необходимо добавить вклад кварковых полей. он такой же как и в КЭД (ур.(11)за исключением группового фактора, который равен индексу Дынкина для кваркового представления $T(R)$, определённому как

$$TrT^aT^b = \delta^{ab}T(R),$$

где T^a суть генераторы в кварковом представлении. Для фундаментального представления $T(F) = 1/2$ и для группы SU(3) $C_2 = 3$, так что

$$\beta_{QCD}(\alpha) = -(11 - \frac{2}{3}n_f)\frac{\alpha^2}{4\pi}. \tag{31}$$

Поляризация вакуума в суперсимметричных теориях

Суперсимметричная теория отличается от обычной наличием суперпартнйров обыкновенных частиц. Это скварки и слептоны, скалярные суперпартнёры кварков и лептонов, калибрино, спинорные суперпартнёры калибровочных бозонов, и хиггсино, спинорные суперпартнёры скалярных хиггсовских бозонов. Вклад спинорных частиц в поляризацию вакуума отличается от вклада кварков и лептонов только комбинаторным фактором в силу другого представления калибровочной группы. Вклад скалярных частиц, напротив, даётся диаграммами представленными на Рис.5. Он подобен вкладу духов и соответствует интегралу

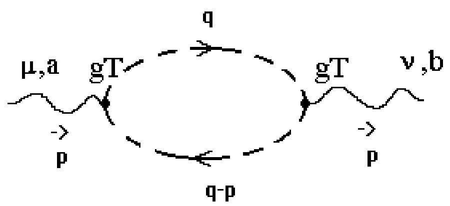


Figure 5: Поляризация вакуума скалярными частицами

$$\Pi_{\mu\nu}^{Dim\ (ab)}(p) = \frac{T(R)}{2}\delta^{ab}\frac{g^2(\mu^2)^\epsilon}{(2\pi)^{4-2\epsilon}}\int d^{4-2\epsilon}q\frac{(2q-p)^\mu(2q-p)^\nu}{q^2(q-p)^2}, \tag{32}$$

где фактор $1/2$ идёт из комбинаторики. Вычисляя этот интеграл, находим

$$\begin{aligned}\Pi_{\mu\nu}^{Dim\ (ab)}(p) &= -i\delta^{ab}\frac{g^2T(R)}{16\pi^2}(4\pi)^\epsilon\left(\frac{\mu^2}{p^2}\right)^\epsilon\frac{\Gamma(\epsilon)\Gamma(1-\epsilon)\Gamma(2-\epsilon)}{\Gamma(4-2\epsilon)}[g^{\mu\nu}p^2 - p^\mu p^\nu] \\ &= -i\delta^{ab}\frac{g^2}{16\pi^2}\frac{T(R)}{6}[g^{\mu\nu}p^2 - p^\mu p^\nu]\left[\frac{1}{\epsilon} + \log 4\pi - \gamma + \log\frac{\mu^2}{p^2} + \frac{2}{3}\right]. \end{aligned} \tag{33}$$

Ур.(33) позволяет найти скалярный вклад в константу перенормировки Z_3

$$Z_3^{-1} = 1 + \frac{g^2}{16\pi^2}\frac{T(R)}{6}\frac{1}{\epsilon}. \tag{34}$$

Так как суперпартнёры не взаимодействуют с духами, их вклад в β-функцию ограничен поляризацией вакуума. Следовательно, зная поляризацию вакуума, вызываемую частицами различного спина, можно вычислть β-функцию для калибровочных зарядов в любой модели. Индивидуальные вклады различных частиц приведены в Таблице.

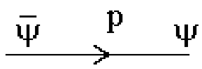
Частица	Вклад в β-функцию
Калибр. + Дух	$-\frac{11}{3}C_2$
Кварки и лептоны	$(\frac{2}{3}\|_L + \frac{2}{3}\|_R)T(F)$
Хиггсовские бозоны	$\frac{1}{3}T(H)$
Калибрино	$\frac{2}{3}C_2$
Скварки и слептоны	$\frac{1}{3}T(F)$
Хиггсино	$\frac{2}{3}T(H)$
СМ	$-\frac{11}{3}C_2 + \frac{4}{3}N_{fam} + \frac{1}{6}(\frac{1}{10})N_{Higgs}$
МССМ	$-3C_2 + 2N_{fam} + \frac{1}{2}(\frac{3}{10})N_{Higgs}$

Table 1: Вклад в однопетлевую β-функцию от индивидуальных частиц

Правила Фейнмана для калибровочных теорий

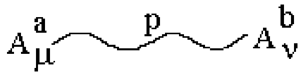
В вычислениях были использованы следующие правила Фейнмана (в калибровке Фейнмана для калибровочных полей)

спинорный пропагатор :



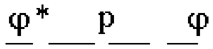
$= \frac{i}{\hat{p} - m}$

векторный пропагатор :



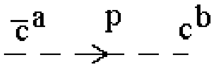
$= \frac{-i\delta^{ab} g^{\mu\nu}}{p^2}$

скалярный прорагатор :



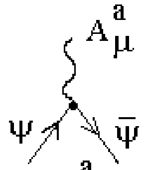
$= \frac{i}{p^2 - m^2}$

духовый пропагатор :



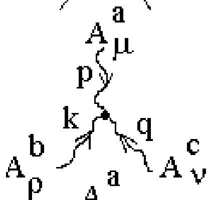
$= \frac{i\delta^{ab}}{p^2}$

спинор-калибровочная вершина :



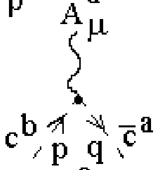
$= -ig\gamma^\mu T^a$

тройная калибровочная вершина :



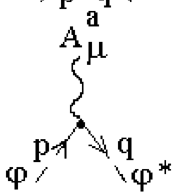
$= -gf^{abc}[(p-q)^\rho g^{\mu\nu} +$
$+(q-k)^\mu g^{\rho\nu} + (k-p)^\nu g^{\mu\rho}]$

дух-калибровочная вершина :



$= -gf^{abc} q^\mu$

скаляр-калибровочная вершина :



$= -igT^a (p+q)^\mu$

****