1980 г. январь—февраль *т. 35, вып. 1 (211)*
УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ СУПЕРМНОГООБРАЗИЙ

Д. А. Лейтес

СОДЕРЖАНИЕ

Введение 3
Глава I. Линейная алгебра в суперпространствах 5
§ 1. Линейные суперпространства 5
§ 2. Модули над суперaлгебрами 6
§ 3. Матричная алгебра 8
§ 4. Свободные модули 10
§ 5. Билинейные формы 13
§ 6. Суперслед 14
§ 7. Березиниан (функция Березина) 15
§ 8. Тензорные алгебры 18
§ 9. Супералгебры Ли, дифференцирования супералгебр 20
Глава II. Анализ на суперпространствах и суперобластях 21
§ 1. Определение суперпространств и суперобластей 21
§ 2. Векторные поля и ряд Тейлора 28
§ 3. Теоремы об обратной и о неявной функциях 32
§ 4. Интегрирование на суперобластях 38
Глава III. Супермногообразия 43
§ 1. Определение супермногообразий 43
§ 2. Подсупермногообразия 46
§ 3. Семейства 49
Замечания 55
Литература 56

Введение

В последнее время очень бурно развивается новая область математики. Работы, относящиеся к этой области, легко узнать, ибо почти все употребляемые в них термины снабжены приставкой «супер». Некоторые понятия, объединенные «суперматематикой» по отдельности встречались математикам уже довольно давно, однако, у математиков не было стимулов изучать их в деталях и лишь недавно стало ясно, что эти понятия — части одного целого.

Интерес к суперматематике вызван в основном их приложениями в физике. По-видимому, именно на языке супермногообразий удастся построить единую теорию сильного, слабого, электромагнитного и гравитационного взаимодействий. Об этих перспективах и о чудесных свойствах суперсимметрий, которые уже реализованы, можно прочесть в обзорах В. И. Огиевецкого и Л. Мезинческу [19], Д. Фридмана и П ван Нийвенхейзена [26], где имеются ссылки на сотни физических работ, из которых отметим Ф. А. Березина и М. С. Маринова [23] и В. И. Огиевецкого и Э. Сокачева [20].

Представления о пространстве-времени менялись с развитием науки, и вот сейчас физики мучительно принимают следующее фундаментальное предположение.

Мы живем в (4,4)-*мерном супермногообразии, подстилающим многообразием которого является обычное* 4-*мерное пространство-время. Группой преобразований этого супермногообразия является супергруппа Ли, точки которой составляют группу Пуанкаре* [1]).

Это фундаментальное предположение по своему философскому значению выходит, по-видимому, за рамки чистой физики.

Первым математиком, который осознал, что стоит на пороге новой области — «суперматематики», несомненно, является Ф. А. Березин.

Занимаясь вопросами вторичного квантования, он заметил, что возможно параллельное описание бозонных и фермионных полей и еще в 60-х годах пришел к выводу, что существует нетривиальный аналог анализа, в котором роль функций выполняют элементы алгебры Грассмана.

Лет семь длился инкубационный период, а затем стали появляться работы, в которых излагались различные вопросы суперматематики. В этих работах были определены понятия супермногообразия и супергруппы Ли, построен аналог теории Ли для супергрупп Ли и супералгебр Ли, описаны простые супералгебры Ли, построена теория интегрирования на супермногообразиях, начата теория представлений супералгебр Ли и супергрупп Ли и т. д.

Пора, наверное, уже сказать, что приставку «супер» ввели темпераментные физики, которые определили сначала такие замечательные (одним словом — супер!) группы, которые перетасовывают частицы различных статистик. Затем физики же реализовали действия этих супергрупп на «суперпространствах», а дальше эта терминология распространилась уже на всю область. Заметим, что в некоторых современных работах и во всех работах, написанных до 1974 г., супералгебры Ли называются градуированными алгебрами Ли. Название супералгебра Ли мне больше нравится. Оно, во-первых, правильнее, так как название «градуированная алгебра Ли» противоречиво (супералгебры Ли не являются алгебрами Ли), а, во-вторых, название «супералгебра Ли» красиво и динамично.

После всего сказанного о физике не удивительно, что «супер» точка зрения полезна и в математике см. [8], [16], [27], [29].

При большом количестве имеющихся работ по суперматематике или использующих ее результаты, почти нет работ, в которых излагались бы элементарные понятия, лежащие в основе теории. Эта работа призвана восполнить имеющийся пробел.

В тексте мы придерживаемся следующей терминологии.

Высказывание мы называем *утверждением*, если оно очевидно или доказано с помощью ссылки; *замечанием*, если это сведение не для первого чтения; *леммой*, если оно носит вспомогательный характер; *предложением*, если это важное высказывание; *теоремой*, если это очень важное высказывание.

При работе с суперобъектами особенную роль играет последовательность в выборе знаков. Чтобы не ошибиться, нужно помнить следующее правило (Куиллен [32]): *когда что-то четности* p *движется мимо чего-то четности* q, *то выскакивает знак* $(-1)^{pq}$.

Эта статья, охватывающая простейшие понятия теории супермногообразий, является вводной частью общего обзора, написанного И. Н. Берн-

---

[1]) Подробно эта модель будет обсуждаться в статье, описывающей представления супергрупп Ли. Первые работы, в которых группа Пуанкаре расширялась до супергруппы Ли, а пространство Минковского — до суперпространства, все более подходящего для построения супергравитации, принадлежат Ю. А. Гольфанду и Е. П. Лихтману, Д. В. Волкову и В. А. Акулову, Вессу и Зумино, см. [19], [34].

штейном и мной, и содержащего также теорию интегрирования на супермногообразиях, элементы теории представлений супергрупп Ли и супералгебр Ли и элементы дифференциальной геометрии на супермногообразиях, см. [6], [7], [9], [25], [33].

Мы пытались придать нашему изложению супермногообразий бóльшую геометрическую наглядность. Этим оно отличается от более ранних работ, где все понятия (по инерции от работы [5]) выражаются в терминах алгебры функций на супермногообразии.

Я глубоко благодарен Ф. А. Березину за то, что он заинтересовал меня в 1971 г., как тогда казалось, довольно безумной задачей «построения анализа на алгебре Грассмана». Ему и А. Л. Онищику я благодарен за большую помощь. Я благодарен также Б. М. Зупнику, А. Н. Рудакову и Б. Л. Фейгину за многочисленные плодотворные обсуждения, а Ю. И. Манину, В. В. Молоткову, А. Б. Сосинскому, Д. Б. Фуксу и В. Н. Шандеру за полезные замечания. И. А. Акчурина я благодарю за психологическую подготовку к решению задачи Березина и совет (данный еще в 1968 г.) читать лекции Ю. И. Манина [17].

ГЛАВА I
ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА В СУПЕРПРОСТРАНСТВАХ

Все пространства и алгебры рассматриваются над полем $k = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ (однако, все, о чем говорится в этой главе, справедливо для любого поля k такого, что $\operatorname{char} k \neq 2$).

Цель этой главы — перенесение основных понятий линейной алгебры (университетский курс) на «супер» случай.

§ 1. Линейные суперпространства

1.1.1. Пусть $\mathbb{Z}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$ — поле вычетов по модулю 2. Линейное пространство M называется *суперпространством*, если оно наделено разложением

$$M = M_{\bar{0}} \oplus M_{\bar{1}}.$$

Элементы пространств $M_{\bar{0}}$ и $M_{\bar{1}}$ называются *однородными* (соответственно *четными* и *нечетными*) элементами суперпространства M; если $v \in M_i$, где $i \in \mathbb{Z}_2$, то мы пишем $p(v) = i$ и называем $p(v)$ *четностью* элемента v. *Подсуперпространство* — такое подпространство $N \subset M$, что

$$N = (N \cap M_{\bar{0}}) \oplus (N \cap M_{\bar{1}}).$$

Пусть M и N — суперпространства. Введем структуру суперпространства в пространствах $M \oplus N$, $M \otimes N$ и $\operatorname{Hom}(M, N)$, положив

$$(M \oplus N)_i = M_i \oplus N_i, \quad (M \otimes N)_i = \bigoplus_{m+n=i} M_m \otimes N_n,$$

$\operatorname{Hom}(M, N)_i = \{F \in \operatorname{Hom}(M, N) \mid FM_m \subset N_{m+i}\}$, где $m, n, i \in \mathbb{Z}_2$.

Морфизмы из M в N — это элементы из $\operatorname{Hom}(M, N)_{\bar{0}}$.

1.1.2. Суперпространство A называется *супералгеброй*, если A — ассоциативная алгебра с единицей, а умножение $A \times A \to A$ есть четное билинейное отображение.

Супералгебра A называется *коммутативной*, если $ab = (-1)^{p(a)p(b)} ba$ для однородных $a, b \in A$.

Здесь и далее $(-1)^{\bar{0}} = 1$, $(-1)^{\bar{1}} = -1$. В дальнейшем мы полагаем, что соотношение, определенное только на однородных элементах, выполняется на произвольных элементах, если ему удовлетворяют однородные составляющие этих элементов.

1.1.3. В а ж н ы й п р и м е р. Обозначим через $\Lambda(n)$ или $\Lambda[\xi]$ или через $k(\xi)$, $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ внешнюю алгебру (алгебру Грассмана) от n переменных. Это алгебра с образующими $\xi_1, \ldots, \xi_n$ и соотношениями

$$\xi_i\xi_j = -\xi_j\xi_i \quad (i \neq j = 1, 2, \ldots, n).$$

~~В частности~~, $\xi_i^2 = 0$. $i=\overline{1,n}$.

Произвольный элемент $f \in \Lambda(n)$ однозначно записывается в виде суммы

$$f = \sum f_\nu \xi^\nu, \qquad f_\nu \in k,$$

где ν пробегает всевозможные наборы $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$, $\nu = 0$ или 1, а $\xi^\nu = \xi_1^{\nu_1} \ldots \xi_n^{\nu_n}$. Это выражение можно записать и в другом виде:

$$f = \sum_{0 \leqslant j \leqslant n} \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_j \leqslant n} f_{i_1 \ldots i_j} \xi_{i_1} \ldots \xi_{i_j}, \qquad f_{i_1 \ldots i_j} \in k.$$

Введем на $\Lambda(n)$ структуру супералгебры, положив $p(\xi_i) = \bar{1}$.

1.1.4. *Тензорным произведением* супералгебр A и B называется суперпространство $A \otimes B$ вместе со структурой супералгебры, заданной формулой

$$(x \otimes y)(z \otimes t) = (-1)^{p(y)p(z)} xz \otimes yt,$$

где $x, z \in A$, $y, t \in B$.

Утверждение. 1) *Если A и B — ассоциативные супералгебры, то и супералгебра $A \otimes B$ ассоциативна.*

2) *Тензорное произведение коммутативных супералгебр является коммутативной супералгеброй.*

Например,

$$\Lambda(n) \otimes \Lambda(m) = \Lambda(n + m).$$

1.1.5. С каждой супералгеброй A связана *каноническая проекция*

$$\pi\colon A \to A/(A_{\bar{1}}) = A_{\bar{0}}/((A_{\bar{1}})^2).$$

Здесь под (x) подразумевается идеал, порожденный множеством x.

Мы будем часто пользоваться следующим утверждением.

Лемма. *Пусть A — коммутативная супералгебра. Тогда элемент $a \in A$ обратим в том и только том случае, когда обратим* $\pi(a)$ (см. предложение 1.7.2).

§ 2. Модули над супералгебрами

1.2.1. Пусть A — ассоциативная супералгебра с 1.

Левым модулем над A (или левым *A-модулем*) называется суперпространство M вместе с левым действием A на M, т. е. с отображением $A \times M \to M$, удовлетворяющим условиям:

а) $a(bm) = (ab)m$, $a, b \in A$, $m \in M$,

б) $(a + b)m = am + bm$, $a(m + m') = am + am'$,

в) $1 \cdot m = m$,

г) если определены $p(a)$ и $p(m)$, то $p(am) = p(a) + p(m)$.

Аналогично определяется понятие *правого* A-модуля.

1.2.2. В дальнейшем в этой главе все супералгебры предполагаются коммутативными, если не оговорено противное.

Если A — коммутативная супералгебра, то каждый левый A-модуль можно превратить в правый (и наоборот), положив

$$(*) \qquad ma = (-1)^{p(m)p(a)} am, \qquad a \in A, \qquad m \in M.$$

Структуры левого и правого модулей над A согласованы:

$$a(mb) = (am)b, \qquad a, b \in A, \qquad m \in M,$$

т. е. любой модуль над коммутативной супералгеброй двусторонний.

В дальнейшем, как и в коммутативном «четном» случае, мы будем называть модулем над коммутативной супералгеброй двусторонний модуль, где переход от левой структуры к правой осуществляется по формуле (∗).

1.2.3. Пусть M, N суть A-модули. Назовем *A-гомоморфизмом* или (*линейным*) *оператором* из M в N такое линейное отображение $F\colon M \to N$, что

$$F(ma) = (F(m))a \quad \text{для всех } a \in A,\ m \in M.$$

Суперпространство A-гомоморфизмов из M в N обозначим $\mathrm{Hom}_A(M, N)$.

В суперпространстве $\mathrm{Hom}_A(M, N)$ вводится структура A-модуля по формуле

$$(*) \qquad (aF)(m) = a(F(m)), \qquad (Fa)(m) = F(am).$$

Из формул (∗) этого и предыдущего пунктов следует, что

$$aF = (-1)^{p(a)p(F)}\,Fa.$$

Пусть заданы операторы $F\colon M \to N$ и $G\colon N \to L$. Их композиция $G \circ F\colon M \to L$ — тоже A-линейный оператор, причем

$$(aG) \circ F = a(G \circ F), \qquad (Ga) \circ F = G \circ (aF), \qquad G \circ (Fa) = (G \circ F)a.$$

1.2.4. Пусть A — коммутативная супералгебра. Суперalгебра C называется *A-алгеброй*, если C такой A-модуль, что

$$(ac_1)c_2 = a(c_1c_2), \qquad (c_1a)c_2 = c_1(ac_2), \qquad c_1(c_2a) = (c_1c_2)a,$$

где $a \in A$, c_1, $c_2 \in C$.

Примеры. 1) Пусть $\mathrm{End}_A(M) = \mathrm{Hom}_A(M, M)$. Тогда $\mathrm{End}_A(M)$ — ассоциативная A-алгебра с единицей.

2) Пусть C — ассоциативная супералгебра. Назовем множество

$$Z(C) = \{z \in C \mid cz - (-1)^{p(c)p(z)}zc = 0 \text{ для всех } c \in C\}$$

центром супералгебры C. Очевидно, C есть $Z(C)$ — алгебра. Структура A-алгебры на C задается гомоморфизмом $A \to Z(C)$.

1.2.5. A-модуль $M^* = \mathrm{Hom}_A(M, A)$ называется *сопряженным* или *дуальным* к модулю M. Спаривание модулей M^* и M будем обозначать (,), т. е. (m^*, m) — образ элемента $m \in M$ под действием оператора $m^* \in M^*$. Из определений следует, что

$$(m^*a, m) = (m^*, am), \qquad (am^*, m) = a(m^*, m),$$
$$(m^*, ma) = (m^*, m)\,a, \qquad a \in A, \quad m \in M, \qquad m^* \in M^*.$$

Для любого A-модуля M определен канонический гомоморфизм $I_M\colon M \to M^{**} = (M^*)^*$; он задается формулой

$$(I_M(m), m^*) = (-1)^{p(m)p(m^*)}(m^*, m).$$

1.2.6. Каждому оператору $F \in \mathrm{Hom}_A(M, N)$ соответствует *сопряженный оператор* $F^* \in \mathrm{Hom}_A(N^*, M^*)$, определенный формулой

$$(*) \qquad (F^*n^*, m) = (-1)^{p(F)p(n^*)}(n^*, Fm).$$

Из формулы (∗) вытекает следующее утверждение.

Утверждение. 1) $p(F) = p(F^*)$.

2) *Если* $F\colon M \to N$ *и* $G\colon N \to L$ — *гомоморфизмы A-модулей, то* $(GF)^* = (-1)^{p(F)p(G)}F^*G^*$.

3) $$I_N \circ F = F^{**} \circ I_M.$$

1.2.7. *Тензорным произведением A-модулей M и N* называется суперпространство $M \otimes_A N$, являющееся фактором суперпространства $M \otimes N$ (тензорное произведение над k) по соотношениям $ma \otimes n - m \otimes an = 0$, где $m \in M$, $n \in N$, $a \in A$.

Структура A-модуля на суперпространстве $M \otimes_A N$ вводится формулами

$$a(m \otimes_A n) = am \otimes_A n, \quad (m \otimes_A n)a = m \otimes_A na.$$

Между модулями $M \otimes_A N$ и $N \otimes_A M$ имеется *канонический изоморфизм* T

$$T\colon\ m \otimes_A m \mapsto (-1)^{p(m)p(n)} n \otimes_A m.$$

1.2.8. Через $P(M)$ обозначим A-модуль, пространство которого состоит из элементов $P(m)$, где $m \in M$; действие супералгебры A и четность в $P(M)$ задаются формулами

$$p(P(m)) = \bar{1} - p(m), \qquad P(m)\,a = P(ma), \qquad aP(m) = (-1)^{p(a)} P(am).$$

(Заметим, что последняя формула следует из двух предыдущих.)

Отображение $m \mapsto P(m)$, $m \in M$, определяет канонический нечетный гомоморфизм $P\colon M \to P(M)$.

По каждому гомоморфизму $F\colon M \to N$, где M и N суть A-модули, определим гомоморфизм $P(F)\colon P(M) \to P(N)$, полагая

$$P(F)(P(m)) = P(Fm).$$

Мы будем отождествлять M и $P(P(M))$, полагая $m = P(P(m))$. Очевидно, при этом $F = P(P(F))$ для любого гомоморфизма F.

§ 3. Матричная алгебра

Для изучения координатной записи векторов в свободных модулях и матричной записи операторов нам понадобится матричное исчисление. Поскольку в суперслучае оно несколько отличается от обычного, мы приведем в этом параграфе необходимые определения. Мотивировки этих определений будут ясны из § 4.

1.3.1. *Матричной структурой* назовем прямоугольную таблицу. Клеточка такой таблицы нумеруется парой, состоящей из номера строки и номера столбца.

Суперматричной структурой назовем матричную структуру с приписанной каждой строке и столбцу четностью. (Четность i-й строки обозначим $p_{\mathrm{row}}(i)$, четность j-го столбца — $p_{\mathrm{col}}(j)$).

Обычно суперматричная структура будет выбираться так, чтобы все четные строки и столбцы шли сначала, а нечетные — потом. Тогда суперматричную структуру удобно записывать в блочном виде

$$X = \begin{pmatrix} R & S \\ T & U \end{pmatrix},$$

где R, S, T, U — матричные структуры в соответствии с делением на четные и нечетные строки и столбцы.

Если суперматричная структура содержит p четных и q нечетных строк, r четных и s нечетных столбцов, то скажем, что размер этой структуры равен $(p, q) \times (r, s)$. Порядком структуры размера $(p, q) \times (p, q)$ называется пара (p, q).

1.3.2. Пусть задана суперматричная структура X. *Матрицей* с элементами из супералгебры A называется множество $\{X_{ij} \mid X_{ij} \in A\}$, соответствующее клеткам суперматричной структуры X.

Четность в пространстве матриц с элементами из A определяется следующим образом:

$$p(X) = \bar{0}, \text{ если } p(X_{ij}) + p_{\mathrm{row}}(i) + p_{\mathrm{col}}(j) = \bar{0} \text{ для всех } i, j,$$
$$p(X) = \bar{1}, \text{ если } p(X_{ij}) + p_{\mathrm{row}}(i) + p_{\mathrm{col}}(j) = \bar{1} \text{ для всех } i, j.$$

Если записывать матрицы в блочном виде

$$X=\begin{pmatrix} R & S \\ T & U \end{pmatrix}$$

в соответствии с разбиением по четности строк и столбцов, то определение четности матрицы переписывается в виде

$$p(X)=\bar{0}, \text{ если } p(R_{ij})=p(U_{ij})=\bar{0},\ p(S_{ij})=p(T_{ij})=\bar{1},$$

$$p(X)=\bar{1}, \text{ если } p(R_{ij})=p(U_{ij})=\bar{1},\ p(S_{ij})=p(T_{ij})=\bar{0}.$$

1.3.3. Пусть X, Y — две матрицы. Их произведение вычисляется обычным образом

$$(XY)_{ij}=\sum_k X_{ik}Y_{kj}.$$

Однако в суперслучае мы считаем, что такое произведение определено только тогда, когда столбцы матрицы X имеют ту же четность, что и соответствующие им строки матрицы Y. В частности, матрицы размера $(p, q)\times(m, n)$ разрешается умножать справа только на матрицы размера $(m, n)\times(r, s)$. При указанных условиях имеет место равенство $p(XY)=p(X)+p(Y)$.

1.3.4. Пример. Обозначим через $\mathrm{Mat}_{p,q}(A)$ пространство матриц порядка (p, q) с элементами из суперались A. Относительно введенных четности и умножения это пространство образует ассоциативную супералгебру.

1.3.5. На суперпространстве матриц размера $(p, q)\times(m, n)$ с элементами из коммутативной супералгебры A введем структуру A-модуля, полагая (см. 4.4) $(Xa)_{ij}=(-1)^{p(a)p_{\mathrm{col}^{(j)}}}X_{ij}a, \quad (aX_{ij})=(-1)^{p(a)p_{\mathrm{row}^{(i)}}}aX_{ij}$.

Можно определить эту структуру по-другому. А именно, для каждой пары (r, s) определим гомоморфизм супералгебр $A\to\mathrm{Mat}_{r,s}(A)$, сопоставляя элементу $a\in A$ диагональную матрицу $\mathrm{scalar}_{r,s}(a)=(a_{ij})$, где $a_{ij}=0$ при $i\neq j$ и $a_{ii}=(-1)^{p_{\mathrm{row}^{(i)}}p(a)}a$. Если, как обычно, первые r-строк и столбцов четные, остальные — нечетные, то

$$\mathrm{scalar}_{r,s}(a)=\mathrm{diag}(\underbrace{a,\ldots,a}_{r},\ \underbrace{(-1)^{p(a)}a,\ldots,(-1)^{p(a)}a}_{s}).$$

Для матрицы X размера $(p, q)\times(m, n)$ имеем

$$aX=\mathrm{scalar}_{p,q}(a)\cdot X,\quad Xa=X\cdot\mathrm{scalar}_{m,n}(a),$$

где $\mathrm{scalar}_{p,q}(a)$ и $\mathrm{scalar}_{m,n}(a)$ — матрицы порядка (p, q) и (m, n), отвечающие элементу $a\in A$.

В частности, из ассоциативности матричного умножения получаем

$$(aX)Y=a(XY),\quad (Xa)Y=X(aY),\quad X(Ya)=(XY)a.$$

Упражнение. Определить центр супералгебры $\mathrm{Mat}_{p,q}(A)$.

1.3.6. Мы будем называть *вектором-строкой* матрицу с одной строкой, имеющей четность $\bar{0}$. Аналогично вектором-столбцом назовем матрицу с одним столбцом, имеющим четность $\bar{0}$ (см. п. 1.4.4).

1.3.7. Определим теперь транспонирование в пространстве матриц над коммутативной супералгеброй A. Оно отличается от обычного транспонирования наличием некоторых знаков. Поэтому, в отличие от обычного транспонирования, которое обозначается символом t, *супертранспонирование* мы будем обозначать символом st.

Пусть $X=(X_{ij})$ — матрица размера $(p, q)\times(m, n)$ с элементами из A. *Транспонированной* к ней назовем матрицу X^{st} размера $(m, n)\times(p, q)$, элементы которой имеют следующий вид (см. 1.3.8 и 1.4.7).

$$(X^{\mathrm{st}})_{ij} = (-1)^{(p_{\mathrm{row}}(i)+p_{\mathrm{col}}(j))(p(X)+p_{\mathrm{row}}(i))}X_{ji} = (-1)^{(p_{\mathrm{row}}(i)+p_{\mathrm{col}}(j))(p(X_{ij})+p_{\mathrm{col}}(j))}X_{ji}$$

здесь четности $p_{\mathrm{row}}(i)$, $p_{\mathrm{col}}(j)$ берутся относительно матрицы X^{st}. В блочной записи

$$X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

это означает, что

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{\mathrm{st}} = \begin{pmatrix} A^t & C^t \\ -B^t & D^t \end{pmatrix}, \quad \text{если } p(X) = \bar{0},$$

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{\mathrm{st}} = \begin{pmatrix} A^t & -C^t \\ B^t & D^t \end{pmatrix}, \quad \text{если } p(X) = \bar{1}.$$

Заметим, что дважды транспонированная матрица имеет вид

$$\left(\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{\mathrm{st}}\right)^{\mathrm{st}} = \begin{pmatrix} A & -B \\ -C & D \end{pmatrix}.$$

Очевидно, супертранспонирование удовлетворяет тождеству $(\mathrm{st})^4 = \mathrm{id}$.

П р и м е р. Если X — вектор-столбец с координатами

$$(x_1, \ldots, x_{m+1}, \ldots, x_{m+n}),$$

первые m строк четные, остальные — нечетные, то вектор-строка X^{st} имеет координаты

$$(x_1, \ldots, x_m, -(-1)^{p(x_{m+1})}x_{m+1}, \ldots, -(-1)^{p(x_{m+n})}x_{m+n}).$$

Если $Y = (y_1, \ldots, y_{m+n})$ — вектор-строка, первые m столбцов четные, остальные — нечетные, то Y^{st} — вектор-столбец с координатами

$$(y_1, \ldots, y_m, (-1)^{p(y_{m+1})}y_{m+1}, \ldots, (-1)^{p(y_{m+n})}y_{m+n}).$$

1.3.8. У т в е р ж д е н и е. Для транспонирования произведения верна формула

$$(XY)^{\mathrm{st}} = (-1)^{p(X)p(Y)}Y^{\mathrm{st}}X^{\mathrm{st}}.$$

В частности,

$$(aX)^{\mathrm{st}} = (-1)^{p(a)p(X)}X^{\mathrm{st}}a = aX^{\mathrm{st}}.$$

§ 4. Свободные модули

Модули над супералгебрами (даже коммутативными) устроены довольно сложно. В этом параграфе мы выделим класс модулей попроще, по своим свойствам сходных с линейными пространствами над полем.

Все модули рассматриваются над коммутативной супералгеброй A.

1.4.1. Пусть I — множество, представленное в виде объединения непересекающихся подмножеств $I_{\bar{0}}$ и $I_{\bar{1}}$.

Базисом A-модуля M называется такой набор однородных элементов m_i, $i \in I$, что $p(m_i) = \bar{0}$ при $i \in I_{\bar{0}}$, $p(m_i) = \bar{1}$ при $i \in I_{\bar{1}}$, и каждый элемент $m \in M$ однозначно записывается в виде суммы $\Sigma \mu_i m_i$, $\mu_i \in A$, где все μ_i, кроме конечного числа, равны 0.

A-модуль M называется *свободным*, если в нем можно выбрать базис с некоторым множеством индексов $I = I_{\bar{0}} \cup I_{\bar{1}}$. *Размерностью* свободного модуля называется элемент $p + q\varepsilon$ кольца $\mathbb{Z}[\varepsilon]/(\varepsilon^2 - 1)$, где $p = |I_{\bar{0}}|$, $q = |I_{\bar{1}}|$. Обычно коротко пишут $\dim M = (p, q)$.

Если не оговорено противное, мы будем считать модуль конечномерным, т. е. предполагать, что $\dim M = (p, q)$, где $p, q < \infty$. Обычно элементы базиса в свободном модуле мы будем нумеровать так, чтобы сначала шли четные элементы, а затем нечетные.

Лемма. *Размерность свободного модуля не зависит от выбора базиса.*

Доказательство. Рассмотрим гомоморфизм кольца

$$A/(A_{\bar 1}) = A_{\bar 0}/((A_{\bar 1})^2)$$

в какое-нибудь поле k. Тогда $M \otimes_A k$ будет суперпространством над полем k размерности (p, q). Поэтому инвариантность чисел p и q вытекает из инвариантности размерности линейных пространств над полем.

1.4.2. Мы видим, что свободные A-модули с одной образующей бывают двух типов:

а) с четной образующей — такой модуль канонически изоморфен A;

б) с нечетной образующей — такой модуль совпадает с $P(A)$. Очевидно, $P(M) = P(A) \otimes_A M$ для каждого A-модуля M (см. 1.2.8). Очевидно, если $\dim M = (p, q)$, то

$$\dim P(M) = (q, p).$$

1.4.3. Пусть $\{m_i\}$ — базис A-модуля M. По определению, каждый элемент $m \in M$ однозначно записывается в виде

$$m = \sum \mu_i^l m_i, \qquad \mu_i^l \in A.$$

Элементы $\mu_i^l \in A$ мы будем называть *левыми координатами* элемента m (относительно данного базиса); мы считаем, что эти координаты образуют вектор-строку $\langle \mu_i^l |$, причем, по определению, $p_{\mathrm{col}}(j) = p(m_j)$ (см. § 3). Ясно, что элемент m можно однозначно записать в виде

$$m = \sum m_i \mu_i^r, \qquad \mu_i^r \in A.$$

Элементы μ_i^r мы будем называть *правыми координатами* элемента m; мы считаем, что они образуют вектор-столбец, причем, по определению, $p_{\mathrm{row}}(i) = p(m_i)$.

Легко проверить, что вектор-строка левых координат получается из вектор-столбца правых координат супертранспонированием

$$\langle \mu_i^l | = (| \mu_i^r \rangle)^{st} \quad (\text{см. § 3}).$$

1.4.4. Пусть m_j — базис A-модуля M, n_i — базис A-модуля N. Каждому оператору $F \in \mathrm{Hom}_A(M, N)$ сопоставим матрицу $\bar F = (F_{ij})$, где

$$(*) \qquad Fm_j = \sum n_i F_{ij}.$$

Положим $p_{\mathrm{row}}(i) = p(n_i)$, $p_{\mathrm{col}}(j) = p(m_j)$; матрица $\bar F$ имеет размер $(\dim N) \times (\dim M)$.

Обратно, каждой такой матрице отвечает оператор, задаваемый формулой (*).

Каждому однородному оператору соответствует матрица той же четности. Произведению (композиции) операторов соответствует произведение матриц. Соответствие $F \to \bar F$ сохраняет структуру A-модулей.

Если $M = N$ и $m_i = n_i$, то отображение $F \to \bar F$ задает изоморфизм супералгебр

$$\mathrm{End}_A M \to \mathrm{Mat}_{p,q}(A), \quad \text{где } (p, q) = \dim M.$$

При этом элемент $a \in A \subset \mathrm{End}_A M$ переходит в матрицу $\mathrm{scalar}\,(a)$.

Если $M = A$, $m_1 = 1$, то $\mathrm{Hom}_A(A, N)$ естественно отождествляется с N. При этом каждому оператору $F\colon A \to N$ соответствует вектор-столбец, который *совпадает с вектор-столбцом правых координат вектора* $F(1) \in N$.

1.4.5. Рассмотрим, как меняется координатная запись векторов и операторов при замене базиса.

Пусть в A-модуле M заданы два базиса $\{m_i\}$ и $\{m'_i\}$. Тогда матрица $C=(c_{ij})$, определенная формулой

$$m'_j=\sum m_i c_{ij},$$

называется *матрицей замены координат*. Ясно, что C — четная обратимая матрица.

Правые координаты $|\,\mu_i^r\rangle$ и $|\,\mu_i'^r\rangle$ некоторого вектора $m\in M$ в базисах $\{m_i\}$ и $\{m'_i\}$, связаны формулой

$$|\,\mu_i^r\rangle=C_{\mathrm{t}}|\,\mu_i'^r\rangle,\qquad \text{или}\qquad \mu_i^r=\sum c_{ij}\mu_j'^r.$$

Отсюда для левых координат получаем

$$\langle\mu_i^l\,|=\langle\mu_i'^l\,|\,C^{\mathrm{st}}\qquad (\text{ибо } p(C)=\bar{0}).$$

Пусть теперь в A-модуле N заданы два базиса $\{n_i\}$ и $\{n'_i\}$. Оператор $F\colon M\to N$ записывается в базисах $\{m'_i\}$, $\{n_i\}$ матрицей $\bar{F}$, а в базисах $\{m'_i\}$, $\{n'_i\}$ матрицей $\bar{F}'$. Легко проверить, что эти матрицы связаны соотношением

$$\bar{F}=D\bar{F}'C^{-1},$$

где C и D — матрицы замен координат в модулях M и N соответственно. Если $M=N$, $m_i=n_i$, $m'_i=n'_i$, то мы получаем формулу, описывающую переход к другому базису в координатной записи оператора $F\in\operatorname{End}_A M$:

$$\bar{F}=C\bar{F}'C^{-1}.$$

1.4.6. Пусть M — конечномерный свободный A-модуль, $\{m_i\}$ — базис в M. Тогда, как легко проверить, элементы $m_i^*\in M^*$, заданные формулой

$$(m_i^*,\ m_j)=\delta_{ij},$$

образуют базис в M^*. Базисы $\{m_i^*\}$ и $\{m_i\}$ называются *двойственными*, $\{m_i^*\}$ — *двойственный слева* к $\{m_i\}$, а $\{m_i\}$ — *двойственный справа* к $\{m_i^*\}$.

Очевидно, $p(m_i^*)=p(m_i)$, в частности, $\dim M^*=\dim M$.

Пусть $\{m_i^{**}\}$ — базис в M^{**}, двойственный слева к $\{m_i^*\}$. Ясно, что $I_M(m_i)=(-1)^{p(m_i)}m_i^{**}$, откуда следует, что $I_M\colon M\to M^{**}$ — изоморфизм. Мы будем отождествлять свободные A-модули M и M^{**} с помощью этого изоморфизма; в частности, мы будем рассматривать как $(m^*,\ m)$, так и

$$(m,\ m^*)=(-1)^{p(m)p(m^*)}(m^*,\ m).$$

Если $\{m_i^*\}$ — базис модуля M^*, то двойственные к нему слева и справа базисы $\{m'_i\}$ и $\{m_i\}$ модуля M связаны соотношением $m'_i=(-1)^{p(m_i)}m_i$.

Если $m^*\in M$, то вектор-строка $\langle a_i\,|$, где $a_i=(m^*,\ m)$, совпадает с вектором левых координат вектора m^* в базисе $\{m_i^*\}$. В частности, для вектора m с правыми координатами $|\,\mu_i\rangle$ имеем

$$(m^*,\ m)=\sum a_i\mu_i.$$

Вектор-строка $\langle a_i\,|$ совпадает с матрицей оператора $m^*\in M^*$ в базисе $\{m_i\}$, $\{1\}$.

1.4.7. Пусть в A-модулях M и N заданы базисы $\{m_i\}$, $\{n_i\}$ и оператор $F\colon M\to N$ записывается относительно этих базисов матрицей $\bar{F}$. Тогда сопряженный оператор F^* относительно двойственных слева базисов $\{m_i^*\}$, $\{n_j^*\}$ в M^* и N^* записывается матрицей $\bar{F}^*=(\bar{F})^{\mathrm{st}}$. Это легко вытекает из определений.

1.4.8. Пусть $F \in \mathrm{Hom}_A(M, N)$. Если мы упорядочиваем базисы так, чтобы сначала шли четные элементы, а затем — нечетные, и оператору F соответствует в базисах $\{m_i\}$, $\{n_j\}$ матрица

$$\overline{F} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

то в базисах $\{P(m_i)\}$, $\{P(n_i)\}$ пространств $P(M)$ и $P(N)$ оператору $P(F)$ (см. 1.2.8) соответствует матрица

$$\overline{P(F)} = \begin{pmatrix} D & C \\ B & A \end{pmatrix}.$$

§ 5. Билинейные формы

1.5.1. Пусть M и N — модули над коммутативной супералгеброй A. Отображение B: $M \times N \to A$ назовем *билинейной формой*, если оно аддитивно по каждому аргументу и $B(ma, n) = B(m, an)$, $B(m, na) = B(m, n)a$, где $m \in M$, $n \in N$, $a \in A$.

Пример. Если $M = N^*$, то отображение $B(n^*, n) = (n^*, n)$ является билинейной формой.

Легко проверить, что каждая билинейная форма B задает морфизм A-модулей $\hat{B}$: $M \otimes_A N \to A$, где $\hat{B}(m \otimes n) = B(m, n)$. Таким образом, пространство билинейных форм $\mathrm{Bil}_A(M, N)$ отождествляется с пространством $(M \otimes {}_A N)^*$. Поэтому на этом пространстве имеется естественная структура A-модуля. Ясно, что

$$p(B(m, n)) = p(B) + p(m) + p(n),$$
$$(aB)(m, n) = a \cdot B(m, n) = (-1)^{p(a)p(B)} B(am, n).$$

1.5.2. Каждая билинейная форма $B \in \mathrm{Bil}_A(M, N)$ задает томоморфизм B_{M, N^*}: $M \to N^*$ по правилу

$$(B_{M,N^*}(m), n) = B(m, n).$$

Соответствие $B \mapsto B_{M, N^*}$ задает изоморфизм A-модулей $\mathrm{Bil}_A(M, N)$ и $\mathrm{Hom}_A(M, N^*)$.

Аналогично можно определить изоморфизм $\mathrm{Bil}_A(M, N)$ с $\mathrm{Hom}_A(N, M^*)$, ставя в соответствие форме B оператор B_{N, M^*}, заданный формулой

$$(m, B_{N, M^*}(n)) = (-1)^{p(B)p(m)} B(m, n).$$

Билинейная форма $B \in \mathrm{Bil}_A(M, N)$ называется неособой, если гомоморфизмы B_{M, N^*} и B_{N, M^*} являются изоморфизмами.

1.5.3. Пусть M, N — конечномерные A-модули, $\{m_i\}$ — базис в M, $\{n_i\}$ — базис в N. Поставим в соответствие каждой форме $B \in \mathrm{Bil}_A(M, N)$ матрицу $\overline{B} = B_{ij}$, где

$$B_{ij} = (-1)^{p(m_i)p(B)} B(m_i, n_j).$$

Эту матрицу мы будем называть *матрицей билинейной формы*. Легко видеть, что $\overline{B}$ — это матрица, соответствующая оператору B_{N, M^*}: $N \to M^*$ относительно базисов $\{n_j\}$ и $\{m_i^*\}$ ($\{m_i^*\}$ — базис в M^*, двойственный слева к $\{m_j\}$).

Отображение $B \to \overline{B}$ задает изоморфизм A-модуля $\mathrm{Bil}_A(M, N)$ на A-модуль матриц с соответствующей суперструктурой.

Если μ^l — вектор-строка левых координат вектора $m \in M$, ν^r — вектор-столбец правых координат вектора $n \in N$, то легко проверить, что

$$B(m, n) = (-1)^{p(B)p(m)} \langle \mu^l | \overline{B} | \nu^r \rangle.$$

1.5.4. Пусть M и N суть A-модули и пусть C и D — матрицы замены координат в пространствах M и N. Тогда матрица $\overline{B}'$ формы B в новом базисе связана с матрицей $\overline{B}$ формулой

$$B' = C^{st}\overline{B}D.$$

В частности, если $M = N$, $m_i = n_i$, $m'_i = n'_i$, то $\overline{B}' = C^{st}\overline{B}C$.

1.5.5. По каждой форме $B \in \mathrm{Bil}_A(M, N)$ определим форму $B^t \in \mathrm{Bil}_A(N, M)$ формулой

$$B^t(n, m) = (-1)^{p(n)p(m)} B(m, n).$$

Легко проверить, что B^t действительно билинейная форма.

Соответствие $B \to B^t$ задает изоморфизм A-модулей $\mathrm{Bil}_A(M, N) \to \mathrm{Bil}_A(N, M)$. Кроме того, $(B^t)^t = B$ для всех $B \in \mathrm{Bil}_A(M, N)$.

Если $\{m_i\}$ и $\{n_j\}$ — базисы в M и N и $\overline{B}$ — матрица формы B в этих базисах, то матрица $\overline{B^t}$ формы B^t имеет вид

$$(\overline{B^t})_{ij} = (\overline{B}^{st})_{ij}(-1)^{p_{\mathrm{row}}(i)}.$$

В блочной записи

$$\overline{B} = \begin{pmatrix} R & S \\ T & U \end{pmatrix} \mapsto \overline{B}^t, \qquad \overline{B}^t = \begin{cases} \begin{pmatrix} R^t & T^t \\ S^t & -U^t \end{pmatrix}, & p(B) = 0, \\ \begin{pmatrix} R^t & -T^t \\ -S^t & -U^t \end{pmatrix}, & p(B) = \bar{1}. \end{cases}$$

1.5.6. Разберем теперь случай, когда $M = N$. Пространство форм $\mathrm{Bil}_A(M, M)$ мы будем обозначать через $\mathrm{Bil}_A(M)$.

Назовем форму $B \in \mathrm{Bil}_A(M)$ *симметрической*, если $B^t = B$, и *антисимметрической*, если $B^t = -B$. Ясно, что пространства симметрических и антисимметрических форм являются A-подмодулями в $\mathrm{Bil}_A(M)$. Каждая билинейная форма B однозначно представима в виде суммы симметрической и антисимметрической форм: $B = \frac{B + B^t}{2} + \frac{B - B^t}{2}$.

Пусть $\{m_i\}$ — базис в M. Тогда симметрическим формам отвечают матрицы, имеющие в блочной записи вид

$$\overline{B} = \begin{pmatrix} R & S \\ T & U \end{pmatrix}, \quad \text{где } R^t = R, \quad U^t = -U, \quad S^t = (-1)^{p(B)} T.$$

Антисимметрическим формам отвечают матрицы

$$\overline{B} = \begin{pmatrix} R & S \\ T & U \end{pmatrix}, \quad \text{где } R^t = -R, \ U^t = U, \ S^t = -(-1)^{p(B)} T.$$

§ 6. Суперслед

1.6.1. Пусть A — коммутативная супералгебра. На супералгебре $\mathrm{Mat}_{p,q}(A)$ определим *суперслед* str, формулой

$$\mathrm{str}\, X = \sum (-1)^{(p(X)+1)p_{\mathrm{row}}(i)} X_{ii} = \sum (-1)^{(p(X_{ii})+1)p_{\mathrm{row}}(i)} X_{ii}.$$

Иначе говоря,

$$\mathrm{str}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \mathrm{tr}\, A - \mathrm{tr}\, D \quad \text{для четных матриц,}$$

$$\mathrm{str}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \mathrm{tr}\, A + \mathrm{tr}\, D \quad \text{для нечетных матриц.}$$

Перечислим основные свойства суперследа.

Утверждение. а) $\operatorname{str}(X+Y)=\operatorname{str}X+\operatorname{str}Y$.

б) *Пусть Z — матрица размера $(p, q)\times(r, s)$ и W — матрица размера $(r, s)\times(p, q)$. Тогда*

$$\operatorname{str}(ZW)=(-1)^{p(Z)p(W)}\quad\operatorname{str}(WZ).$$

В частности, если $X\in\operatorname{Mat}_{p,q}(A)$ и C — четная обратимая матрица, то $\operatorname{str}(CXC^{-1})=\operatorname{str}X$, *ибо* $X=(XC^{-1})C$, *а* $CXC^{-1}=C(XC^{-1})$.

в) $\operatorname{str}(aX)=a\operatorname{str}X$, $\operatorname{str}(Xa)=(\operatorname{str}X)a$.

г) $\operatorname{str}(X^{st})=\operatorname{str}X$.

д) $\operatorname{str}(P(X))=-(-1)^{p(X)}\operatorname{str}X$.

1.6.2. Пусть M — конечномерный свободный A-модуль. Определим функцию str на $\operatorname{End}_A(M)$, полагая $\operatorname{str}X=\operatorname{str}\overline{X}$ для $X\in\operatorname{End}_A M$, где $\overline{X}$ — матрица, отвечающая оператору X в некотором базисе. При замене базиса матрица $\overline{X}$ переходит в $C\overline{X}C^{-1}$, так что ее суперслед не меняется. Утверждения а) — д), очевидно, обобщаются на операторы.

§ 7. Березиниан (функция Березина)

1.7.1. Пусть $\mathcal{A}$ — коммутативная супералгебра. Обозначим через $\operatorname{GL}_{p,q}(\mathcal{A})$ группу по умножению четных обратимых элементов из $\operatorname{Mat}_{p,q}(\mathcal{A})$. Эта группа является аналогом полной матричной группы в обычной линейной алгебре. Мы хотим определить гомоморфизм $\operatorname{GL}_{p,q}(\mathcal{A})\to\operatorname{GL}_{1,0}(\mathcal{A})=\mathcal{A}_{\bar 0}^*$ (здесь $\mathcal{A}_{\bar 0}^*$ — группа обратимых элементов в $\mathcal{A}_{\bar 0}$), который является аналогом обычного определителя.

1.7.2. Пусть

$$X=\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}\in(\operatorname{Mat}_{p,q}(\mathcal{A}))_{\bar 0}.$$

Лемма. *Матрица X обратима тогда и только тогда, когда обратимы матрицы A и D.*

Эта лемма сразу вытекает из следующего общего предложения.

Предложение. *Пусть $\mathcal{A}$ — коммутативная супералгебра, $\pi\colon\mathcal{A}\to\widetilde{\mathcal{A}}=\mathcal{A}/(\mathcal{A}_{\bar 1})$ — естественный гомоморфизм и*

$$\pi\colon\operatorname{Mat}_n(\mathcal{A})\to\operatorname{Mat}_n(\widetilde{\mathcal{A}})$$

соответствующий гомоморфизм матричных алгебр, рассматриваемые без суперструктур). Тогда матрица $X\in\operatorname{Mat}_n(\mathcal{A})$ обратима в том и только том случае, когда обратима матрица $\pi(X)$.

Доказательство. Ясно, что если X — обратимая матрица, то и $\pi(X)$ обратима.

Наоборот, пусть $\pi(X)$ обратима. Поскольку $\pi\colon\operatorname{Mat}_n(\mathcal{A})\to\operatorname{Mat}_n(\mathcal{A})$ — отображение на, то найдется такая матрица $Y\in\operatorname{Mat}_n(\mathcal{A})$, что $\pi(X)\pi(Y)=\pi(Y)\pi(X)=1$, т. е. $\pi(XY)=\pi(YX)=1$. Нам достаточно, что обратимы матрицы XY и YX. Докажем это для матрицы XY; для матрицы YX рассуждение аналогично.

Матрица XY имеет вид $1-Z$, где $\pi(Z)=0$. Мы покажем, что Z — нильпотентная матрица, т. е. $Z^{r+1}=0$, для некоторого r; отсюда вытекает, что матрица $1+Z+Z^2+\ldots+Z^r$ является обратной для матрицы $1-Z=XY$. Все элементы матрицы Z лежат в идеале, порожденном $\mathcal{A}_{\bar 1}$; значит, найдутся такие элементы $\xi_1,\ldots,\xi_r\in\mathcal{A}_{\bar 1}$, что каждый элемент матрицы Z представляется в виде суммы произведений ξ_i. Тогда каждый элемент матрицы Z^{r+1} также представляется в виде суммы таких произведений, причем в каждое произведение входит не менее $r+1$ сомножителя. Поскольку все эти произведения равны 0, то $Z^{r+1}=0$.

1.7.3. Пусть $X=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D\end{pmatrix}\in \mathrm{GL}_{p,q}(\mathcal{A})$. *Положим*

$$\mathrm{Ber}\, X = \det(A - BD^{-1}C)(\det D)^{-1}.$$

Заметим, что матрица D обратима в силу леммы п. 1.7.2. Элементы матриц D и $A - BD^{-1}C$ лежат в коммутативной алгебре $\mathcal{A}_{\bar 0}$, так что определители имеют смысл и $\mathrm{Ber}\, X \in \mathcal{A}_{\bar 0}$.

Легко проверить, что элемент $\mathrm{Ber}\, X$ обратим в $\mathcal{A}_{\bar 0}$.

Функцию Ber мы назовем *березинианом* в честь Ф. А. Березина. Она является аналогом определителя для обычных матриц, как показывает следующая теорема.

Т е о р е м а. *Пусть* $X,\ Y \in \mathrm{GL}_{p,q}(\mathcal{A})$. *Тогда*

$$\mathrm{Ber}(XY) = \mathrm{Ber}(X)\cdot \mathrm{Ber}(Y).$$

1.7.4. Доказательство теоремы мы проведем в несколько шагов.

а) Рассмотрим в $\mathrm{GL}_{p,q}(A)$ подгруппы G_+, G_0 и G_-, где

$$G_+=\left\{\begin{pmatrix} 1 & B \\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\},\qquad G_0=\left\{\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D\end{pmatrix}\right\},\qquad G_-=\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ C & 1\end{pmatrix}\right\}.$$

Каждая матрица $X\in \mathrm{GL}_{p,q}(\mathcal{A})$ представима в виде $X=X_+X_0X_-$, где $X_+\in G_+$, $X_0\in G_0$, $X_-\in G_-$. Действительно, если $X=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D\end{pmatrix}$, то

$$X=\begin{pmatrix} 1 & BD^{-1} \\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} A-BD^{-1}C & 0 \\ C & D\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & BD^{-1} \\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} A-BD^{-1}C & 0 \\ 0 & D\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ D^{-1}C & 1\end{pmatrix}.$$

Из формулы

$$\begin{pmatrix} 1 & B \\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & B' \\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & B+B' \\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

вытекает, что каждая матрица X_+ представима в виде произведения элементарных матриц, т. е. таких матриц вида $\begin{pmatrix} 1 & E \\ 0 & 1\end{pmatrix}$, что у E только один элемент отличен от 0.

б) Равенство $\mathrm{Ber}(XY) = \mathrm{Ber}\, X\cdot \mathrm{Ber}\, Y$ выполняется, если $X \in G_+$ или $X \in G_0$. Аналогично, оно выполняется, если $Y \in G_0$ или $Y \in G_-$.

Действительно, проверим, например, случай

$$X=\begin{pmatrix} 1 & F \\ 0 & 1\end{pmatrix}\in G_+,\quad Y=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D\end{pmatrix},$$

$$\mathrm{Ber}\,(XY)=\mathrm{Ber}\begin{pmatrix} A+FC & B+FD \\ C & D\end{pmatrix}=\det(A+FC-(B+FD)\,D^{-1}C)\det D^{-1}=$$

$$=\det(A-BD^{-1}C)\det D^{-1}=\mathrm{Ber}\, Y=\mathrm{Ber}\, X\cdot \mathrm{Ber}\, Y.$$

Остальные случаи разбираются аналогично.

в) Докажем, что равенство $\mathrm{Ber}(XY) = \mathrm{Ber}\, X\cdot \mathrm{Ber}\, Y$ выполнено для любой элементарной матрицы

$$Y=\begin{pmatrix} 1 & E \\ 0 & 1\end{pmatrix}\in G_+.$$

Представим X в виде $X_+X_0X_-$. Тогда

$$\mathrm{Ber}\, XY = \mathrm{Ber}\, X_+X_0(X_-Y) = \mathrm{Ber}\ X_0\cdot \mathrm{Ber}\ X_-Y,$$

$$\mathrm{Ber}\, X\cdot \mathrm{Ber}\, Y = \mathrm{Ber}\, X_0\cdot \mathrm{Ber}\, X_-\cdot \mathrm{Ber}\, Y.$$

(см. шаг в)). Поэтому достаточно показать, что

$$\operatorname{Ber}(X_-Y)=\operatorname{Ber}X_-\cdot\operatorname{Ber}Y=1.$$

Пусть $X_-=\begin{pmatrix}1&0\\C&1\end{pmatrix}$. Тогда

$$\operatorname{Ber}X_-Y=\operatorname{Ber}\begin{pmatrix}1&E\\C&1+CE\end{pmatrix}=\det(1-E(1+CE)^{-1}C)\det^{-1}(1+CE).$$

Заметим, что в матрице E отличен от нуля всего один элемент и он равен некоторому $\xi\in\mathcal{A}_{\bar 1}$. Отсюда вытекает, что в матрицах E, CE, $E(1+CE)^{-1}C$ все элементы делятся на ξ и, значит, произведение любых двух элементов любых двух из этих матриц равно 0. Поэтому мы можем воспользоваться следующей леммой.

г) Лемма. *Пусть L — квадратная матрица с элементами из коммутативного кольца R. Предположим, что произведение любых двух элементов этой матрицы равно* 0. *Тогда* $(1+L)^{-1}=1-L$ *и* $\det(1+L)=1+\operatorname{tr}L$.

Эта лемма проверяется непосредственно.

д) Закончим теперь вычисления из шага в). Мы имеем $(1+CE)^{-1}=1-CE$; кроме того, $E\cdot CE=0$. Поэтому

$$\operatorname{Ber}X_-Y=\det(1-EC)\det^{-1}(1+CE)=(1-\operatorname{tr}EC)(1+\operatorname{tr}CE)^{-1}.$$

Легко проверить, что $\operatorname{tr}CE=-\operatorname{tr}EC$, ибо элементы матриц E и C лежат в $\mathcal{A}_{\bar 1}$. Поэтому

$$\operatorname{Ber}(X_-Y)=(1+\operatorname{tr}CE)^{-1}(1+\operatorname{tr}CE)=1,$$

что доказывает шаг b).

ж) Пусть G — множество таких матриц $Y\in\mathrm{GL}_{p,\,q}(\mathcal{A})$, что $\operatorname{Ber}(XY)=\operatorname{Ber}X\cdot\operatorname{Ber}Y$ для всех матриц $X\in\mathrm{GL}_{p,\,q}(\mathcal{A})$. Ясно, что G — группа, поскольку если $Y_1Y_2\in G$, то

$$\operatorname{Ber}(X\cdot Y_1Y_2)=\operatorname{Ber}(XY_1)\,Y_2=\operatorname{Ber}(XY_1)\operatorname{Ber}Y_2=$$
$$=\operatorname{Ber}X\operatorname{Ber}Y_1\operatorname{Ber}Y_2=\operatorname{Ber}X\cdot\operatorname{Ber}Y_1Y_2.$$

Как показано в шагах б) и в), G содержит все матрицы из G_- и G_0 и все элементарные матрицы $Y\in G_+$. Поскольку группа $\mathrm{GL}_{p,\,q}(\mathcal{A})$ порождается этими матрицами (см. шаг а)), то $G=\mathrm{GL}_{p,\,q}(\mathcal{A})$, т. е. $\operatorname{Ber}(XY)=\operatorname{Ber}X\cdot\operatorname{Ber}Y$ для всех X, $Y\in\mathrm{GL}_{p,\,q}(\mathcal{A})$.

1.7.5. Пусть $X=\begin{pmatrix}A&B\\C&D\end{pmatrix}\in\mathrm{GL}_{p,\,q}(\mathcal{A})$. В определении $\operatorname{Ber}X$ матрицы A и D участвовали неравноправно. Мы можем определить также функцию

$$\widetilde{\operatorname{Ber}}\,X=\det(D-CA^{-1}B)\cdot\det^{-1}A.$$

Так как

$$X=\begin{pmatrix}1&0\\CA^{-1}&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A&B\\0&D-CA^{-1}B\end{pmatrix},$$

то из теоремы п. 1.7.3 вытекает, что

$$\operatorname{Ber}X=\det(D-CA^{-1}B)^{-1}\det A=(\widetilde{\operatorname{Ber}}\,X)^{-1}.$$

1.7.6. Пусть $X\in\mathrm{GL}_{p,\,q}(\mathcal{A})$. Тогда $\operatorname{Ber}(X^{\mathrm{st}})=\operatorname{Ber}X$.

Действительно, если $X=\begin{pmatrix}A&B\\C&D\end{pmatrix}$, то

$$\operatorname{Ber}(X^{\mathrm{st}})=\operatorname{Ber}\begin{pmatrix}A^t&C^t\\-B^t&D^t\end{pmatrix}=$$
$$=\det(A^t+C^t(D^t)^{-1}B^t)\det^{-1}D^t=\det(A-BD^{-1}C)\det^{-1}D.$$

1.7.7. Пусть M есть $\mathscr{A}$-модуль. Обозначим через $\mathrm{GL}(M) = \mathrm{GL}_A(M)$ группу обратимых четных элементов в $\mathrm{End}_{\mathscr{A}}(M)$. Если M — конечномерный свободный $\mathscr{A}$-модуль, то определим функцию Ber на $\mathrm{GL}(M)$, полагая $\mathrm{Ber}\, X = \mathrm{Ber}\, \overline{X}$ для $X \in \mathrm{GL}_{\mathscr{A}}(M)$, где $\overline{X}$ — матрица оператора X в некотором базисе. Это определение корректно, поскольку при замене базиса матрица $\overline{X}$ преобразуется в матрицу $C\overline{X}C^{-1}$, имеющую тот же березиниан. Ясно, что $\mathrm{Ber}\, XY = \mathrm{Ber}\, X \cdot \mathrm{Ber}\, Y$.

Из 1.7.5 вытекает, что $\mathrm{Ber}\,(P(X)) = (\mathrm{Ber}\, X)^{-1} = \widetilde{\mathrm{Ber}}\, X$.

Если M^* — двойственный модуль, $X \in \mathrm{GL}(M)$ и $X^* \in \mathrm{GL}(M^*)$ — сопряженный оператор, то как вытекает из 1.7.6 и 1.4.7

$$\mathrm{Ber}\, X^* = \mathrm{Ber}\, X.$$

Если M, N — два конечномерных свободных A-модуля $F = \mathrm{GL}(M)$, $H \in \mathrm{GL}(N)$, то

$$\mathrm{Ber}\,(F \oplus H) = \mathrm{Ber}\, F \cdot \mathrm{Ber}\, H.$$

1.7.8. В «четном» случае имеется связь между следом и определителем, которая выражается формулой $\det \exp X = \exp \mathrm{tr}\, X$. Нам потребуется некоторый аналог этой формулы.

Лемма. *Пусть $X \in \mathrm{Mat}_{p,\, q}(\mathscr{A})$ — четная матрица, у которой произведение любых двух элементов равно 0. Тогда*

$$\mathrm{Ber}\,(1 + X) = 1 + \mathrm{str}\, X.$$

Действительно, если $X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, то

$$\mathrm{Ber}\,(1+X) = \det(1 + A - B(1+D)^{-1}C)\det^{-1}(1+D) =$$
$$= \det(1+A)\cdot\det(1+D) = 1 + \mathrm{tr}\, A - \mathrm{tr}\, D,$$

ибо $B(1+D)^{-1}C = 0$, $\mathrm{tr}\, A \cdot \mathrm{tr}\, D = 0$, $(1+D)^{-1} = 1 - D$, $\det(1+D) = 1 - \mathrm{tr}\, D$, $\det(1+A) = 1 + \mathrm{tr}\, A$ в силу леммы 1.7.4г).

§ 8. Тензорные алгебры

1.8.1. Пусть A — коммутативная супералгебра. Если B — коммутативная A-алгебра, то каждому A-модулю M можно сопоставить B-модуль $M_B = B \otimes_A M$: это соответствие мы будем называть *заменой базы*. Легко проверить, что *имеют место канонические изоморфизмы*

$$(M \oplus N)_B = M_B \oplus N_B, \quad (P(M))_B = P(M_B),$$
$$(M \otimes_A N)_B = M_B \otimes_B N_B.$$

1.8.2. В пункте 1.2.7 определено тензорное произведение двух A-модулей. Тензорным произведением A-модулей $M_1, \ldots, M_n$ называется суперпространство $M_1 \otimes_A \ldots \otimes_A M$, *являющееся фактором их тензорного произведения над k* по соотношениям

$$m_1 \otimes \ldots \otimes m_i a \otimes m_{i+1} \otimes \ldots \otimes m_n =$$
$$= m_1 \otimes \ldots \otimes m_i \otimes a m_{i+1} \otimes \ldots \otimes m_n \ (i = 1, 2, \ldots, n-1).$$

1.8.3. *Тензорный алгеброй $T(M)$ A-модуля M* называется суперпространство $\bigoplus_{n \geqslant 0} T^n(M)$, где $T^0(M) = A$, $T^n(M) = M \otimes_A \ldots \otimes_A M$ (n раз), которое наделено структурой алгебры относительно тензорного произведения (над A), *а именно, если $x \in T^n(M)$, $y \in T^k(M)$*, то

$$xy = x \otimes_A y \in T^{n+k}(M).$$

Иначе говоря,

$$(m_1 \otimes m_2 \otimes \ldots \otimes m_n)(m_1' \otimes \ldots \otimes m_k') = \\ = m_1 \oplus \ldots \otimes m_n \otimes m_1' \otimes \ldots \otimes m_k'.$$

Супералгебра $T(M)$ имеет естественную $\mathbb{Z}$-градуировку степенью

$$\deg x = n \Leftrightarrow x \in T^n(M).$$

Алгебра $T(M)$ может быть описана как универсальный объект для отображения в ассоциативные A-алгебры. А именно, пусть $i\colon M \to T(M)$ — естественный гомоморфизм A-модулей; ясно, что i — вложение и алгебра $T(M)$ порождается элементами из M.

Лемма. а) *Пара $(T(M), i)$ обладает следующим свойством универсальности:*

если B — A-алгебра и $\alpha\colon M \to B$ — четный гомоморфизм A-модулей, то существует, причем ровно один, гомоморфизм $T(\alpha)\colon T(M) \to B$ такой, что $T(\alpha) \circ i = \alpha$.

б) *Свойством универсальности пара $(T(M), i)$ определена однозначно с точностью до изоморфизма.*

Доказательство оставляется в качестве упражнения.

1.8.4. Рассмотрим в алгебре $T(M)$ двусторонний идеал $\mathcal{J}_S$, порожденный элементами вида $xy - (-1)^{p(x)p(y)} \cdot yx$, где $x, y \in M = T^1(M)$ — элементы, однородные относительно четности. Через $S(M) = S_A(M)$ обозначим A-алгебру $T(M)/\mathcal{J}_S$; она называется *симметрической алгеброй* модуля M. В алгебре $S(M)$ мы будем рассматривать градуировку $S(M) = \bigoplus_{n \geqslant 0} S^n(M)$, где $S^n(M) = T^n(M) (\mathrm{mod}\ \mathcal{J}_S)$. Поскольку

$$\mathcal{J}_S \subset T^2(M) \oplus T^3(M) \oplus \ldots,$$

то

$$S^1(M) = T^1(M) = M;$$

мы будем обозначать соответствующий гомоморфизм $M \to S(M)$ тем же символом i, что и раньше. Ясно, что элементы модуля $S^1(M)$ порождают $S(M)$ и, поскольку они коммутируют в суперсмысле, то $S(M)$ — коммутативная A-алгебра.

1.8.5. Для A-модуля M определим внешнюю алгебру $E(M) = E_A(M)$, положив $E(M) = S(P(M))$. Очевидно, $E(M)$ — коммутативная A-алгебра. Морфизмы A-модулей $P\colon M \to P(M)$ и $i\colon P(M) \to S(P(M))$ задают канонический нечетный морфизм $\iota = i \circ P\colon M \to E(M)$.

Пусть $M = L \oplus N$ — прямая сумма A-модулей. Зададим гомоморфизм A-модулей $\alpha\colon M \to S(L) \otimes S(N)$, полагая $\alpha((l, n)) = l \otimes 1 + 1 \otimes n$, и продолжим его до гомоморфизма супералгебр

$$\hat{\alpha}\colon S(M) \to S(L) \otimes S(N).$$

Лемма. *Гомоморфизм $\hat{\alpha}$ является изоморфизмом.*

Достаточно проверить, что пара $(S(L) \otimes S(N), \alpha)$ удовлетворяет условию леммы 8.4; это делается непосредственно.

Аналогичным образом устанавливается канонический изоморфизм

$$E(M) = E(L) \otimes E(N).$$

Таким образом,

$$S^n(M) = \bigoplus_{i=0}^{n} S^i(L) \otimes S^{n-i}(N),$$

$$E^n(M) = \bigoplus_{i=0}^{n} E^i(L) \otimes E^{n-i}(N)$$

для любого n.

§ 9. Супералгебры Ли, дифференцирования супералгебр

В этом параграфе мы предполагаем, что $\operatorname{char} k \neq 2, 3$, ассоциативность супералгебр и наличие единицы не предполагается.

1.9.1. Супералгебра $\mathscr{L}$ над коммутативной супералгеброй A называется *супералгеброй Ли*, если операция умножения в $\mathscr{L}$ (обозначаемая, как правило, [,] и называющаяся *коммутированием*) удовлетворяет следующим условиям

$$(1)\qquad [x, y] = -(-1)^{p(x)p(y)}[y, x],$$

$$(2)\qquad (-1)^{p(x)p(y)}[x, [y, z]] + (-1)^{p(y)p(x)}[y, [z, x]] + \\ + (-1)^{p(z)p(y)}[z, [x, y]] = 0.$$

В основном мы будем рассматривать супералгебры Ли над k.

Тождество (2) называется *тождеством Якоби*.

1.9.2. Пусть M — суперпространство. Превратим $\operatorname{End}_k(M)$ в супералгебру Ли, положив для $F, G \in \operatorname{End}_k M$

$$(1)\qquad [F, G] = FG - (-1)^{p(F)p(G)}GF.$$

Чтобы подчеркнуть, что мы рассматриваем именно умножение (1), будем писать $(\operatorname{End}_k M)_L$.

Вообще для любой ассоциативной супералгебры A определим супералгебру Ли A_L, положив

$$(2)\qquad [a, b] = ab - (-1)^{p(a)p(b)}ba$$

для $a, b \in A$.

Условия (1) и (2) п. 1.9.1 проверяются непосредственно.

1.9.3. Рассмотрим тождества (1) и (2) п. 1.9.1 подробнее.

Если $x, y, z \in \mathscr{L}_{\bar 0}$, то тождества (1) и (2) показывают, что $\mathscr{L}_{\bar 0}$ — обычная алгебра Ли.

Пусть два элемента из x, y, z — четные, а третий — нечетный. Формула (2) показывает, что операция [,] задает представление алгебры Ли $\mathscr{L}_{\bar 0}$ на $\mathscr{L}_{\bar 1}$.

Если два элемента в формуле (2) нечетные, а третий четный, то мы видим, что билинейное симметрическое отображение $[\ ,\ ]\colon \mathscr{L}_{\bar 1} \times \mathscr{L}_{\bar 1} \to \mathscr{L}_{\bar 0}$ является отображением $\mathscr{L}_{\bar 0}$-модулей. Для доказательства требуется один раз воспользоваться формулой (2).

Таким образом, для задания супералгебры Ли $\mathscr{L}$ необходимо задать:

1) алгебру Ли $\mathscr{L}_{\bar 0}$;

2) $\mathscr{L}_{\bar 0}$-модуль $\mathscr{L}_{\bar 1}$, причем если обозначить действие $\mathscr{L}_{\bar 0}$ на $\mathscr{L}_{\bar 1}$ через [,], то для $x \in \mathscr{L}_{\bar 1}$, $y \in \mathscr{L}_{\bar 0}$ положим

$$[x, y] = -[y, x];$$

3) задание симметрического билинейного отображения $\mathscr{L}_{\bar 1} \times \mathscr{L}_{\bar 1} \to \mathscr{L}_{\bar 0}$ (обозначаемого так же, как операция в $\mathscr{L}_0$, через [,]), являющегося гомоморфизмом $\mathscr{L}_{\bar 0}$-модулей; при этом отображение [,], определенное условиями 2) и 3), должно удовлетворять для любых $x, y, z \in \mathscr{L}_{\bar 1}$ тождеству

$$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0.$$

1.9.4. Легко видеть, что замена базы переводит супералгебры Ли в супералгебры Ли (т. е. если $\mathscr{L}$ — супералгебра Ли над коммутативной супералгеброй A, а B — коммутативная A-алгебра, то $\mathscr{L}_B = B \otimes_A \mathscr{L}$ — супералгебра Ли над B).

Предложение. *Пусть $\mathcal{L}$ — супералгебра (с операцией $[\ ,\ ]$) над коммутативной супералгеброй A. Супералгебра $\mathcal{L}$ есть супералгебра Ли тогда и только тогда, когда при любой замене базы выполняются условия:*

а) *если* $X \in (\mathcal{L}_B)_{\bar{0}}$, *то* $[X, X] = 0$,

б) *если* $X \in (\mathcal{L}_B)_{\bar{1}}$, *то* $[X, [X, X]] = 0$.

Доказательство. Докажем тождество Якоби для $X_1, X_2, X_3 \in \mathcal{L}$. Рассмотрим супералгебру $B = A[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$, где $p(\alpha_i) = p(X_i) + \bar{1}$. Тогда

$$X = \sum \alpha_i X_i \in (\mathcal{L}_B)_{\bar{1}},$$

следовательно, элемент $[X, [X, X]]$ можно выразить в виде

$$\sum \alpha_1^{n_1}\alpha_2^{n_2}\alpha_3^{n_3} X_{n_1n_2n_3}, \text{ где } X_{n_1n_2n_3} \in \mathcal{L}.$$

Нетрудно проверить, что коэффициент X_{111} при $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ равен в точности левой части тождества Якоби. Так как $[X, [X, X]] = 0$, то предложение доказано. Кососимметричность доказывается аналогично.

Замечание. Это предложение относится и к алгебрам Ли, рассматриваемым как супералгебры Ли с нулевой нечетной частью.

1.9.5. Пусть A — произвольная супералгебра (не обязательно ассоциативная или коммутативная). Линейный оператор $D \in \mathrm{End}_k A$ называется *дифференцированием супералгебры* A, если

$$D(ab) = D(a)\cdot b + (-1)^{p(D)p(a)} aD(b).$$

Суперпространство $\mathrm{Der}_k A$ всех дифференцирований супералгебры A есть подсуперaлгебра Ли в $(\mathrm{End}_k A)_L$.

Заметим, что тождество Якоби (2) из п. 1.9.1 можно, с учетом (1), переписать в виде

$$[x, [y, z]] = [[x, y], z] + (-1)^{p(x)p(y)} [y, [x, z]].$$

Таким образом, оператор adx умножения слева на элемент x, $adx(y) = [x, y]$, где $x, y \in \mathcal{L}$, является дифференцированием супералгебры Ли $\mathcal{L}$.

1.9.6. Левым *модулем над супералгеброй Ли* $\mathcal{L}$ называется суперпространство M, вместе с четным отображением $\mathcal{L} \times M \to M$ таким, что для $g_1, g_2 \in \mathcal{L}$ и $m \in M$:

$$[g_1, g_2]m = g_1(g_2m) - (-1)^{p(g_1)p(g_2)} g_2(g_1m).$$

ГЛАВА II
АНАЛИЗ НА СУПЕРПРОСТРАНСТВАХ И СУПЕРОБЛАСТЯХ

Отличие супермногообразий от многообразий состоит в том, что в то время как на многообразиях функции образуют коммутативную алгебру, на супермногообразиях функции образуют коммутативную супералгебру. При изучении супермногообразий невозможно обойтись без пучков и окольцованных пространств. Нам потребуются только самые первые определения и простейшие факты из теории пучков, хорошее введение в которую см. в [17], [21].

Супермногообразия склеены из более простых кусков — суперобластей в суперпространстве. В этой главе мы изучим анализ на суперобластях.

§ 1. Определение суперпространств и суперобластей

Пусть X — топологическое пространство. Пусть каждому открытому подмножеству $U \subset X$ сопоставлено множество $\mathcal{F}(U)$ и для любых открытых подмножеств $U \subset V$ задано отображение ограничения $r_U^V\colon \mathcal{F}(V) \to \mathcal{F}(U)$, причем $r_U^V \circ r_V^W = r_U^W$ для любых открытых подмножеств $U \subset V \subset$

$\subset W$, множество $\mathscr{F}(\varnothing)$ состоит из одного элемента а r_U^U — тождественное отображение.

Вместо $\mathscr{F}(U)$ часто пишут $\Gamma(U, \mathscr{F})$, а вместо $r_U^V(\xi)$ — просто $\xi|_U$, где $\xi \in \mathscr{F}(V)$.

Система $\mathscr{F}$ множеств $\mathscr{F}(U)$ и отображений r_U^V называется *пучком*, если для любого набора открытых множеств $\{U_i\}$ в X и $U = \bigcup U_i$ выполнены следующие условия единственности и склейки:

1) если $\xi, \eta \in \mathscr{F}(U)$ и $\xi|_{U_i} = \eta|_{U_i}$, то $\xi = \eta$,

2) если $\xi_i \in \mathscr{F}(U_i)$ и $\xi_i|_{U_i \cap U_j} = \xi_j|_{U_i \cap U_j}$ для всех i, j, то существует такое $\xi \in \mathscr{F}(U)$, что $\xi|_{U_i} = \xi_i$ для всех i.

Если $\mathscr{F}$ и $\mathscr{G}$ — пучки над X, то *морфизмом* $h: \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ называется такой набор отображений $h_U: \mathscr{F}(U) \to \mathscr{G}(U)$ для любого открытого $U \subset X$, что $r_U^V \cdot h_V = h_U \circ r_U^V$ для любых $U \subset V \subset X$. Если все h_U — вложения, то $\mathscr{F}$ называется *подпучком* в $\mathscr{G}$.

Если все $\mathscr{G}(U)$ — группы, или модули, или супералгебры, ..., а h_U — гомоморфизмы этих структур, то пучок $\mathscr{F}$ называется *пучком групп*, или *модулей*, или *супералгебр*, ...

Ограничение пучка $\mathscr{F}$ над X до пучка над открытым множеством $U \subset X$ определяется очевидным образом и обозначается $\mathscr{F}|_U$.

Окольцованным пространством называется пара $(X, \mathscr{F})$, где X — топологическое пространство, а $\mathscr{F}$ — пучок колец над X. Если $(X, \mathscr{F})$ и $(Y, \mathscr{G})$ — окольцованные пространства, то *морфизмом* $\varphi: (X, \mathscr{F}) \to (Y, \mathscr{G})$ называется набор $(\tilde{\varphi}, \varphi_U^*)$, где $\tilde{\varphi}: X \to Y$ — непрерывное отображение, а $\varphi_U^*: \mathscr{G}(U) \to \mathscr{F}(\tilde{\varphi}^{-1}(U))$ гомоморфизм колец, определенный для любого открытого подмножества $U \subset Y$ и согласованный с отображениями ограничения, т. е. $r_{\tilde{\varphi}^{-1}(U)}^{\tilde{\varphi}^{-1}(V)} \circ \varphi_V^* = \varphi_U^* \circ r_U^V$.

Пример (структурный пучок на многообразии). Пусть $k = \mathbb{R}$ а M — хаусдорфово топологическое пространство со счетной базой, локально гомеоморфное открытому подмножеству в k^m. Пусть для любой точки $p \in M$ найдутся открытая окрестность V, содержащая p, и гомеоморфизм h_V окрестности V на открытое подмножество в k^m такие, что для любого открытого множества $U \subset V$ функция $f: U \to k$ гладкая (т. е. бесконечно дифференцируемая) на $h(U)$.

Пусть $U = \bigcup U_i$, где U_i — открытое подмножество в M. Отображение $f: U \to k$ называется *гладкой функцией*, если $f|_{U_i}$ — гладкая функция для всех i. Окольцованное пространство $(M, \mathcal{O}_M)$ называется *гладким многообразием размерности* m, если $\Gamma(U, \mathcal{O}_M)$ — алгебра гладких функций на M.

2.1.1. Пусть $(k^p, \mathcal{O}_{k^p})$ — окольцованное пространство. *Гладким суперпространством* называется окольцованное пространство

$$\mathscr{K}^{p,q} = (k^p, \mathcal{O}_{\mathscr{K}^{p,q}}), \quad \text{где } \Gamma(U, \mathcal{O}_{\mathscr{K}^{p,q}}) = \Gamma(U, \mathcal{O}_{k^p}) \otimes \Lambda(q).$$

Другими словами, функции на $\mathscr{K}^{p,q}$ — это функции на k^p со значениями в $\Lambda(q)$. Пространство k^p называется *подстилающим пространством* суперпространства $\mathscr{K}^{p,q}$.

Пусть U — область в k^p. *Суперобластью размерности* (p, q) называется окольцованное пространство

$$\mathscr{U}^{p,q} = (U, \mathcal{O}_{\mathscr{K}^{p,q}}|_U).$$

Мы будем обозначать суперобласти рукописными латинскими буквами $\mathscr{U}, \mathscr{V}, \mathscr{W}, \ldots$; указание о размерности часто будет опускаться. Подстилающие области суперобластей $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$, $\mathcal{W}$ будем обозначать соответствующими печатными латинскими буквами U, V, W. Если u — точка подстилающей области U, то мы будем также говорить, что u является точкой суперобласти $\mathcal{U}$ и употреблять обозначение $u \in \mathcal{U}$.

В дальнейшем мы ограничимся изучением гладких вещественных суперобластей и будем писать $\mathcal{O}_{p,q}$ вместо $\mathcal{O}_{\mathcal{R}^{p,q}}$ и $C^\infty(\mathcal{U})$ вместо $\Gamma(U, \mathcal{O}_{p,q})$. Каждая функция f из $C^\infty(\mathcal{U})$ однозначно записывается в виде

$$f(u, \xi) = \sum_{\nu=(\nu_1, \ldots, \nu_q)} f_\nu(u)\, \xi_1^{\nu_1} \ldots \xi_q^{\nu_q} = \sum_\nu f_\nu \xi^\nu,$$

где $\nu_i = 0, 1$, а $f_\nu(u)$ — гладкие функции от координат $u = (u_1, \ldots, u_q)$ на U.

Функции $u_1, \ldots, u_p \in C^\infty(\mathcal{U})_{\bar 0}$, $\xi_1, \ldots, \xi_q \in C^\infty(\mathcal{U})_{\bar 1}$ мы будем называть *координатами на суперобласти* $\mathcal{U}$ (u_i — *четные* координаты, ξ_j — *нечетные* координаты). Набор этих функций будем называть *системой координат* на $\mathcal{U}$. Для удобства обозначений мы будем часто записывать систему координат в виде $x = (x_1, \ldots, x_{p+q})$, где предполагается

$$x_1 = u_1, \ldots, x_p = u_p, \quad x_{p+1} = \xi_1, \ldots, x_{p+q} = \xi_q.$$

2.1.2. *Морфизмом* φ суперобласти $\mathcal{U} = (U^p, \mathcal{O}_{p,q}|_U)$ в суперобласть $\mathcal{V} = (V^m, \mathcal{O}_{m,n}|_V)$ мы будем называть морфизм окольцованных пространств $\varphi\colon \mathcal{U} \to \mathcal{V}$. Если $u \in \mathcal{U}$, то точку $\tilde\varphi(u) \in \mathcal{V}$ мы часто будем обозначать просто через $\varphi(u)$.

Морфизм $\varphi\colon \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ называется *изоморфизмом* (или *диффеоморфизмом*), если существует такой морфизм $\psi\colon \mathcal{V} \to \mathcal{U}$, что $\varphi \circ \psi$ и $\psi \circ \varphi$ — тождественные морфизмы. В этом случае $p = m$, $q = n$. Если $x = (u, \xi)$ — система координат на $\mathcal{U}$, $y = (v, \eta)$ — система координат на $\mathcal{V}$ и $\varphi\colon \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ — изоморфизм, то набор функций

$$\varphi^*(y) = (\varphi^*(v_1), \ldots, \varphi^*(v_p), \varphi^*(\eta_1), \ldots, \varphi^*(\eta_q))$$

мы *также будем называть системой координат на* $\mathcal{U}$, а переход от координат x к координатам $\varphi^*(y)$ будем называть *заменой координат*. Мы обычно будем отождествлять кольца $C^\infty(\mathcal{U})$ и $C^\infty(\mathcal{V})$ с помощью изоморфизма φ^* и не будем различать координаты $\varphi^*(y)$ и координаты y.

2.1.3. Примеры. а) Суперобласть $\mathcal{U}$ размерности $(p, 0)$ — это просто область U в пространстве $\mathbb{R}^p$.

б) Подстилающее пространство суперпространства размерности $(0, q)$ состоит из одной точки. Однако кольцо функций на $\mathcal{R}^{0,q}$ нетривиально (*оно изоморфно* $\Lambda(q)$). *Поэтому у этого суперпространства есть много нетривиальных* автоморфизмов.

в) Пусть $E \to U^p$ расслоение q-мерным слоем, а $\mathcal{L}_{\Lambda E}$ — пучок сечений внешней алгебры ΛE этого расслоения. Тогда $\mathcal{U}^{p,q} = (U^p, \mathcal{L}_{\Lambda E})$ — суперобласть. Пусть $u_1, \ldots, u_p$ — координаты на U^p, а $\xi_1, \ldots, \xi_q$ — базис в слое расслоения E. Морфизм $\varphi\colon \mathcal{U}^{p,q} \to \mathcal{U}^{p,q}$ определяется формулами

$$(*)\qquad \begin{cases} \varphi^*(u_i) = \varphi_0^i(u) + \underline{\sum\limits_{i_1 < \ldots < i_{2r}} \varphi^i_{i_1 \ldots i_{2r}}(u)\, \xi_{i_1} \ldots \xi_{i_{2r}}}, \\ \varphi^*(\xi_j) = \sum\limits_{j_1 < \ldots < j_{2r+1}} \varphi^j_{j_1 \ldots j_{2r+1}}(u)\, \xi_{j_1} \ldots \xi_{j_{2r+1}}. \end{cases}$$

Разницу между расслоением ΛE и суперобластью $\mathcal{U}^{p,q}$ легче всего понять, взглянув на подчеркнутые члены в формулах $(*)$. *В категории супер-*

областей гораздо больше морфизмов, чем в категории расслоений — как раз на те морфизмы, для которых подчеркнутые члены ненулевые.

г) Пусть $\mathcal{U}^{p,q}$ — суперобласть, U — подстилающая область. Канонический гомоморфизм π: $C^\infty(\mathcal{U}) \to C^\infty(U)$ (см. 2.1.1) задает морфизм суперобластей π: $U \to \mathcal{U}$, где U рассматривается как суперобласть размерности $(p, 0)$. Морфизм π мы будем называть *каноническим вложением подстилающей области*. Таким образом, подстилающая область всегда является подсуперобластью. Отметим, что вложение π: $U \to \mathcal{U}$ всегда задает изоморфизм подстилающих областей, но при $q > 0$ не является изоморфизмом суперобластей.

Каноническое вложение π согласовано с морфизмами суперобластей. А именно, каждый морфизм φ: $\mathcal{U} \to \mathcal{V}$ определяет морфизм $\tilde{\varphi}$: $U \to V$ подстилающих областей, рассматриваемых как суперобласти. При этом $\pi \circ \varphi = \tilde{\varphi} \circ \pi$.

Заметим, что мы можем также определить гомоморфизм ρ: $C^\infty(U) \to C^\infty(\mathcal{U})$, полагая $\rho(f) = f$. Это задает нам проекцию ρ: $\mathcal{U} \to U$. Однако, в отличие от π проекция ρ не согласована с заменами координат.

2.1.4. Пусть $\mathcal{U} = (U, \mathcal{O}_{\mathcal{R}^{p,q}}|_U)$ — суперобласть, V — открытое подмножество в U. Тогда ограничение пучка $\mathcal{O}_{\mathcal{R}^{p,q}}$ на V задает на V структуру суперобласти $\mathcal{V} = (V, \mathcal{O}_{\mathcal{R}^{p,q}}|_V)$. В этом случае мы будем называть суперобласть $\mathcal{V}$ *открытой подсуперобластью* в $\mathcal{U}$.

Каноническое вложение φ: $\mathcal{V} \to \mathcal{U}$ индуцирует гомоморфизм φ^*: $C^\infty(\mathcal{U}) \to C^\infty(\mathcal{V})$. Функцию $\varphi^*(f)$ мы будем называть *ограничением функции* $f \in C^\infty(\mathcal{U})$ на подсуперобласть $\mathcal{V}$ и обозначать через $f|_{\mathcal{V}}$.

Если φ: $\mathcal{U} \to \mathcal{W}$ — морфизм суперобластей и $\mathcal{W}'$ — открытая подсуперобласть в $\mathcal{W}$, то через $\varphi^{-1}(\mathcal{W}')$ мы будем обозначать открытую подсуперобласть в $\mathcal{U}$, соответствующую области $U' = \tilde{\varphi}^{-1}(W') \subset U$.

Если $u \in \mathcal{U}$, то *окрестностью* точки u в суперобласти $\mathcal{U}$ будем называть такую открытую подсуперобласть $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$, что $u \in \mathcal{V}$.

Как и в обычном анализе, мы часто будем говорить, что некоторое свойство на суперобласти выполняется «в окрестности точки u». Например, утверждение, что функция $f \in C^\infty(\mathcal{U})$ «обратима в окрестности точки u» означает, что найдется такая окрестность $\mathcal{V}$ точки u в $\mathcal{U}$, что функция $f|_{\mathcal{V}}$ обратима. Утверждение, что морфизм φ: $\mathcal{U} \to \mathcal{W}$ «является диффеоморфизмом в окрестности точки u» означает, что существуют такая окрестность $\mathcal{V}$ точки u в $\mathcal{U}$ и такая окрестность $\mathcal{V}'$ точки $w = \varphi(u)$ в $\mathcal{W}$, что ограничение $\varphi|_{\mathcal{V}}$: $\mathcal{V} \to \mathcal{V}'$ является диффеоморфизмом.

2.1.5. Пусть φ: $\mathcal{U} \to \mathcal{V}$ — морфизм суперобластей. Докажем, что отображение $\tilde{\varphi}$: $U \to V$ подстилающих областей, участвующее в определении морфизма, всегда является гладким.

Лемма. *Пусть* $f \in C^\infty(\mathcal{V})$, $u \in U$. *Тогда* $\varphi^*(f)(u) = \tilde{f}(\tilde{\varphi}(u))$.

В частности, если $y = (v_1, \ldots, v_m, \eta_1, \ldots, \eta_n)$ *— система координат на* $\mathcal{V}$, *то отображение* $\tilde{\varphi}$: $U \to V$ *задается формулой*

$$\tilde{\varphi}(u) = v = (h_1(u), \ldots, h_m(u)), \quad \text{где } h_i = \varphi^*(v_i) \in C^\infty(U),$$

и, значит, является гладким отображением.

Доказательство. Положим $f^* = \varphi^*(f) \in C^\infty(\mathcal{U})$, $v = \tilde{\varphi}(u) \in V$. Предположим, что $\tilde{f}^*(u) \neq \tilde{f}(v)$. Добавив к f константу, мы можем считать, что $\tilde{f}^*(u) = 0$ и $\tilde{f}(v) \neq 0$. Пусть $\mathcal{V}'$ — окрестность точки v, на которой функция $\widetilde{f}$ отлична от нуля и, значит, обратима. Как вытекает из 1.1.5, $\widetilde{f}\,|_{\mathcal{V}'}$ также обратима.

Положим $\mathcal{U}' = \varphi^{-1}(\mathcal{V}')$. Тогда функция $f^*_{\mathcal{U}}\,|_{\mathcal{U}'} = \varphi^*(f\,|_{\mathcal{V}'})$ обратима. Поэтому на области $\mathcal{U}'$ обратима функция $\widetilde{f}^*$, но это противоречит тому, что $u \in \mathcal{U}'$ и $\widetilde{f}^*(u) = 0$.

2.1.6. Суперобласть $\mathcal{U}$ можно полностью восстановить, зная алгебру $C^\infty(\mathcal{U})$ как абстрактную супералгебру.

Поставим в соответствие каждой точке $u \in \mathcal{U}$ гомоморфизм s_u: $C^\infty(\mathcal{U}) \to \mathbb{R}$, заданный формулой $s_u(f) = \widetilde{f}(u)$. Число $s_u(f)$ мы будем называть значением функции f в точке u. Подчеркнем еще раз, что функция $f \in C^\infty(\mathcal{U})$ не определяется своими значениями в точках.

Ясно, что разным точкам u отвечают разные гомоморфизмы s_u.

Лемма. *Произвольный гомоморфизм $\mathbb{R}$-алгебр s: $C^\infty(\mathcal{U}) \to \mathbb{R}$ имеет вид $s = s_u$, где u — некоторая точка из $\mathcal{U}$.*

Эта лемма показывает, что множество U взаимно однозначно соответствует множеству гомоморфизмов $C^\infty(\mathcal{U}) \to \mathbb{R}$, и, значит, восстанавливается по абстрактной супералгебре $C^\infty(\mathcal{U})$. Топология на $\mathcal{U}$ и структура окольцованного пространства $(U, \mathcal{O}_{\mathcal{R}^{p,q}}\,|_{\mathcal{U}})$ также восстанавливаются по этой супералгебре; это вытекает, например, из доказываемой ниже теоремы 2.1.7.

Доказательство. Пусть $x = (u_1, \ldots, u_p, \xi_1, \ldots, \xi_q)$ — система координат на $\mathcal{U}$. Докажем, что точка u с координатами $u = (s(u_1), \ldots, s(u_p))$ лежит в области U и $s = s_u$. Для этого рассмотрим функции $f_i = u_i - s(u_i)$.

Предположим, что $u \notin U$. Рассмотрим функцию $h = f_1^2 + \ldots + f_p^2$. Тогда функция $\widetilde{h} \in C^\infty(U)$ отлична от нуля во всех точках из U и, значит, обратима. В силу 2.1.1 функция $h \in C^\infty(\mathcal{U})$ также обратима. Но это противоречит тому, что $s(h) = 0$. Значит, $u \in U$.

Предположим теперь, что для некоторой функции $f \in C^\infty(\mathcal{U})$ $s(f) \neq s_u(f)$. Рассмотрим функцию

$$h = f_1^2 + \ldots + f_p^2 + (f - s_u(f))^2.$$

Так же, как и раньше, проверяется, что функция h обратима; но это противоречит равенству $s(h) = 0$. Таким образом, $s = s_u$, и лемма доказана.

2.1.7. В классическом анализе важную роль играет «координатная запись» отображений. Если X — область с координатами $(x_1, \ldots, x_p)$, Y — область с координатами $(y_1, \ldots, y_m)$, то морфизм φ: $X \to Y$ можно задавать формулой $y_i = f_i(x)$ $(i = 1, \ldots, m)$. Иначе говоря, морфизм φ однозначно определяется набором функций

$$f_i = \varphi^*(y_i) \in C^\infty(X).$$

Аналогичное утверждение верно и в суперслучае. Оно играет важную роль во всех дальнейших рассмотрениях.

Теорема. *Пусть $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ — суперобласти, $y = (v_1, \ldots, v_m, \eta_1, \ldots, \eta_n)$ — система координат на $\mathcal{V}$.*

а) *Пусть ψ^*: $C^\infty(\mathcal{V}) \to C^\infty(\mathcal{U})$ — произвольный гомоморфизм супералгебр. Рассмотрим набор функций $y_i^*(i = 1, \ldots, m + n)$, где $y_i^* = v_i^* = \psi^*(v_i)$ при $i = 1, \ldots, m$ и $y_{m+j}^* = \eta_j^* = \psi^*(\eta_j)$ при $j = 1, \ldots, n$. Тогда набор функций $y^* = (v^*, \eta^*)$ удовлетворяет следующему условию*

(*) $v_i^* \in (C^\infty(\mathcal{U}))_{\bar{0}}$, $\eta_j^* \in (C^\infty(\mathcal{U}))_{\bar{1}}$; *если $u \in \mathcal{U}$, то точка $v = (\widetilde{v}_1^*, \ldots, \widetilde{v}_m^*(u))$ лежит в V.*

б) *Пусть в супералгебре $C^\infty(\mathcal{U})$ задан произвольный набор функций*

$$y^* = (v_1^*, \ldots, v_m^*, \eta_1^*, \ldots, \eta_n^*),$$

удовлетворяющий условию (*). *Тогда существует, причем ровно один, гомоморфизм супералгебр* $\psi^*\colon C^\infty(\mathcal{V}) \to C^\infty(\mathcal{U})$, *для которого* $\Psi^*(v_i) = v_i^*$, $\Psi^*(\eta_j) = \eta_j^*$.

в) *Каждому гомоморфизму супералгебр* $\psi^*\colon C^\infty(\mathcal{V}) \to C^\infty(\mathcal{U})$ *соответствует, причем ровно один, морфизм суперобластей* $\varphi\colon \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ *такой, что гомоморфизм* $\varphi^*\colon C^\infty(\mathcal{V}) \to C^\infty(\mathcal{U})$ *совпадает с* ψ^*.

Из этой теоремы видно, что морфизмы $\mathcal{U}$ в $\mathcal{V}$ взаимно однозначно соответствуют гомоморфизмам супералгебр $C^\infty(\mathcal{V}) \to C^\infty(\mathcal{U})$. Кроме того, такие морфизмы можно задавать с помощью координатной записи, указывая набор функций $y^* = (v^*, \eta^*)$, удовлетворяющий условию (*). Мы пользовались такой записью морфизмов в примере в) в 2.1.3.

Заметим, что в случае, когда $\mathcal{V}$ — суперпространство, вторая часть условия (*) выполняется автоматически.

Для доказательства теоремы нам понадобятся две технические леммы.

2.1.8. Лемма (лемма Адамара). *Пусть $\mathcal{U}$ — суперобласть с координатами*

$$(u_1, \ldots, u_p, \xi_1, \ldots, \xi_q),\ u \in \mathcal{U}.$$

Обозначим через I_u идеал в $C^\infty(\mathcal{U})$, порожденный функциями

$$u_1 - s_u(u_1), \ldots, u_p - s_u(u_p), \xi_1, \ldots, \xi_q.$$

Тогда для любой функции $f \in C^\infty(\mathcal{U})$ и любого целого $k \geqslant 0$ можно подобрать такой полином P_k от координат

$$y = (u_1, \ldots, u_p, \xi_1, \ldots, \xi_q),$$

что

$$f - P_k \in I_u^{k+1}.$$

Доказательство. Из явной записи элементов кольца $C^\infty(\mathcal{V})$, приведенной в 2.1.1, вытекает, что эту лемму достаточно проверять для случая $q = 0$. Но тогда она совпадает с классической леммой Адамара.

2.1.9. Следствие. *Ядро гомоморфизма $s_u\colon C^\infty(\mathcal{U}) \to \mathbb{R}$* (см. 2.1.6) *совпадает с I_u.*

Действительно, ясно, что $I_u \subset \operatorname{Ker} s_u$, а из леммы Адамара вытекает, что $C^\infty(\mathcal{U}) = \mathbb{R} + I_u$.

2.1.10. Лемма. *Пусть $\mathcal{U}^{p,q}$ — суперобласть, $f, f' \in C^\infty(\mathcal{U})$ и k — натуральное число, большее q. Предположим, что $f - f' \in I_u^k$ для каждой точки $u \in \mathcal{U}$. Тогда $f = f'$.*

Эта лемма показывает, что хотя функция $f \in C^\infty(\mathcal{U})$ не восстанавливается по своим значениям в точках суперобласти $\mathcal{U}$, т. е. по своим образам в $C^\infty(\mathcal{U})/I_u = \mathbb{R}$, но она восстанавливается, если знать ее «значения с точностью до малых k-го порядка», где $k > q$», т. е. знать ее образы в $C^\infty(\mathcal{U})/I_u^k$ для всех точек $u \in \mathcal{U}$.

Доказательство леммы. Рассмотрим функцию $f'' = f - f'$. Для каждой точки $u \in \mathcal{U}$ $f'' \in I_u^k$. Отсюда вытекает, что f'' лежит в идеале, порожденном функциями $u_i - s_u(u_i)$ $(i = 1, \ldots, p)$, поскольку произведение любых $q + 1$ нечетных функций равно нулю. Значит, все коэффициенты f_β в разложении $f'' = \sum f_\beta \xi^\beta$ обращаются в нуль в точке u. Поскольку это верно для всех точек u, то $f'' = 0$, так что $f = f'$.

2.1.11. Доказательство теоремы 2.1.7 мы проведем в несколько шагов.

(1) Пусть $\psi^*\colon C^\infty(\mathscr{V}) \to C^\infty(\mathscr{U})$ — гомоморфизм супералгебр, $u \in \mathscr{U}$. Рассмотрим гомоморфизм $s_u\colon C^\infty(\mathscr{U}) \to \mathbb{R}$ (см. 2.1.6) и сквозной гомоморфизм $s = s_u \circ \psi\colon C^\infty(\mathscr{V}) \to \mathbb{R}$. Как показано в 2.1.6, s имеет вид s_v, где v — некоторая точка из $\mathscr{V}$. Рассмотрим идеал $I_u = \operatorname{Ker} s_u \subset C^\infty(\mathscr{U})$ и идеал $I_v = \operatorname{Ker} s_v \subset C^\infty(\mathscr{V})$ (см. 2.1.9). Из определения v вытекает, что $\psi^*(I_v) \subset I_u$. В частности, если $(v_1^0, \ldots, v_m^0)$ — координаты точки v, то для любого i функция $v_i - v_i^0 \in I_v$, так что $\psi^*(v_i - v_i^0) = v_i^* - v_i^0 \in I_u$ и, значит, $v^0 = \widetilde{v}_i^*(u)$. Таким образом, точка с координатами $(\widetilde{v}_1^*(u), \ldots, \widetilde{v}_m^*(u))$ совпадает с v и поэтому лежит в $\mathscr{V}$. Это доказывает утверждение а).

(2) Пусть задан набор функций $y^* = (v^*, \eta^*) \in C^\infty(\mathscr{U})$. Докажем, что гомоморфизм $\psi^*\colon C^\infty(\mathscr{V}) \to C^\infty(\mathscr{U})$, если он существует, однозначно определяется условием $\psi^*(y_i) = y_i^*$.

Пусть $f \in C^\infty(\mathscr{V})$. Покажем, что $\psi^*(f)$ однозначно определяется по набору y^*. В силу леммы 2.1.10 достаточно проверить, что для любой точки $u \in \mathscr{U}$ однозначно определен образ $\psi^*(f)$ в факторалгебре $C^\infty(\mathscr{U})/I_u^{q+1}$.

Прежде всего, как видно из шага (1), по набору y^* однозначно определяется такая точка $v \in \mathscr{V}$, что $\psi^*(I_v) \subset I_u$. Подберем полином $P(y)$ так, чтобы $f - P(y) \in I_v^{q+1}$ (см. 2.1.8). Тогда $\psi^*(f) - P(y^*) \in \psi^*(I_v^{q+1}) \subset I_u^{q+1}$, т. е. образ $\psi^*(f)$ в факторалгебре $C^\infty(\mathscr{U})/I_u^{q+1}$ совпадает с образом $P(y^*)$ и, значит, однозначно определяется по набору y^*. Таким образом, мы доказали единственность ψ^*.

(3) Пусть задан набор функций y^* в $C^\infty(U)$, удовлетворяющий условию $(*)$. Тогда функции $\widetilde{y}_1^*, \ldots, \widetilde{y}_m^*$ определяют некоторое гладкое отображение $\widetilde{\varphi}\colon U \to V$.

Покажем, что существует такой гомоморфизм $\psi^*\colon C^\infty(\mathscr{V}) \to C^\infty(\mathscr{U})$, что $\psi^*(y_i) = y_i^*$; такой гомоморфизм единствен в силу шага (2).

Рассмотрим в кольце $C^\infty(\mathscr{V})$ подкольцо $C^\infty(V)$ функций, зависящих только от v. Поскольку каждый элемент $f \in C^\infty(\mathscr{V})$ однозначно записывается в виде $\sum f_\beta \xi^\beta$, где $f_\beta \in C^\infty(V)$ (см. 2.1.1), нам достаточно построить гомоморфизм $\psi^*\colon C^\infty(V) \to C^\infty(\mathscr{U})$. Значит, можно считать, что $n = 0$.

Запишем каждую функцию y_i^* в виде $y_i^* = y_i' + y_i''$, где $y_i' = \widetilde{y}_i^* \in C^\infty(U) \subset C^\infty(\mathscr{U})$ и $y'' = y_i^* - y_i'$. Ясно, что y_i'' нильпотентны, а именно $(y_i'')^{q+1} = 0$.

Отображение $\widetilde{\varphi}\colon U \to V$ задает гомоморфизм $\widetilde{\varphi}^*\colon C^\infty(V) \to C^\infty(U)$, при котором $\widetilde{\psi}^*(y_i) = y_i'$. Мы хотим подправить $\widetilde{\psi}^*$ до такого гомоморфизма $\psi^*\colon C^\infty(V) \to C^\infty(\mathscr{U})$, что

$$\psi^*(y_i) = y_i^* = y_i' + y_i''.$$

Для каждой функции $f \in C^\infty(V)$ обозначим через $\hat{f}$ ее ряд Тейлора; это значит, что мы рассматриваем функцию

$$f(y_1 + z_1,\ y_2 + z_2,\ \ldots,\ y_m + z_m),$$

где точка $(z_1, \ldots, z_m)$ меняется в маленькой окрестности нуля, и выписываем ее ряд Тейлора по z; $\hat{f} = \sum f_\alpha z^\alpha$, где α пробегает мультииндексы, составленные из неотрицательных целых чисел, $f_\alpha \in C^\infty(V)$. Мы рассматриваем $\hat{f}$ как формальный степенной ряд по z, т. е. не заботимся о сходимости этого ряда. Ясно, что

$$\widehat{(f+h)} = \hat{f} + \hat{h},\quad \widehat{fh} = \hat{f}\,\hat{h},$$

где справа стоят сумма и произведение формальных степенных рядов по z.

Обозначим через $\psi^*(f)$ элемент кольца $C^\infty(\mathcal{U})$, который получается из $\hat{f}$ заменой f_α на $\varphi^*(f_\alpha)$ и z_i на y_i'', $i = 1, \ldots, m$; такая замена имеет смысл, поскольку y_i'' нильпотентны. Ясно, что

$$\psi^*(f+h) = \psi^*(f) + \psi^*(h), \quad \psi^*(fh) = \psi^*(f)\psi^*(h).$$

Кроме того, $\psi^*(y_i) = y_i^*$, так что ψ^* — требуемый гомоморфизм.

(4) Пусть $\varphi\colon \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ — морфизм суперобластей. Докажем, что он однозначно определяется гомоморфизмом супералгебр $\varphi^*\colon C^\infty(\mathcal{V}) \to C^\infty(\mathcal{U})$.

Прежде всего заметим, что, как показано в 2.1.5, по гомоморфизму φ^* однозначно восстанавливается отображение $\tilde{\varphi}\colon U \to V$.

Далее, для каждого открытого подмножества $V' \subset V$ гомоморфизм

$$\varphi_{V'}^*\colon \Gamma(V', \mathcal{O}_{m,n}) \to \Gamma(\tilde{\varphi}^{-1}(V'), \mathcal{O}_{p,q})$$

определяется однозначно, поскольку известно, куда он переводит функции v_i, η_i. Значит, морфизм $\varphi\colon \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ окольцованных пространств определяется гомоморфизмом φ^*.

(5) Пусть задан гомоморфизм $\psi^*\colon C^\infty(\mathcal{V}) \to C^\infty(\mathcal{U})$. Тогда набор функций $\tilde{y}^* = \psi^*(\tilde{y})$ удовлетворяет условию (*) в силу шага (1). Набор функций $\tilde{y}_1^*, \ldots, \tilde{y}_m^* \in C^\infty(U)$ определяет гладкое отображение $\tilde{\varphi}\colon U \to V$. Если V' — открытое подмножество V и $U' = \tilde{\varphi}^{-1}(V')$, то в силу шага (3) набор функций $v_i^*|_{U'}$, $\eta_j^*|_{U'}$ определяет гомоморфизм

$$\varphi_{V'}^*\colon \Gamma(V', \mathcal{O}_{m,n}) \to \Gamma(U', \mathcal{O}_{p,q}).$$

В силу единственности, доказанной в шаге (2), система гомоморфизмов $\varphi_{V'}^*$ согласована с гомоморфизмами ограничения. Поэтому мы получаем морфизм окольцованных пространств $\varphi\colon \mathcal{U} \to \mathcal{V}$, для которого $\varphi^* = \psi^*$. Это доказывает теорему 2.1.7.

2.1.12. Пусть $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ — суперобласти с координатами (u, ξ) и (v, η). Назовем *произведением суперобластей* $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ суперобласть $\mathcal{U} \times \mathcal{V}$ с подстилающей областью $U \times V$ и координатами (u, v, ξ, η). Рассмотрим морфизмы-проекции

$$\mathrm{pr}_{\mathcal{U}}\colon \mathcal{U} \times \mathcal{V} \to \mathcal{U} \quad \text{и} \quad \mathrm{pr}_{\mathcal{V}}\colon \mathcal{U} \times \mathcal{V} \to \mathcal{V},$$

которые в координатной записи задаются формулами

$$\mathrm{pr}_{\mathcal{U}}^*(u_i) = u_i, \quad \mathrm{pr}_{\mathcal{U}}^*(v_i) = 0, \quad \mathrm{pr}_{\mathcal{U}}^*(\xi_i) = \xi_i, \quad \mathrm{pr}_{\mathcal{U}}^*(\eta_i) = 0,$$

$$\mathrm{pr}_{\mathcal{V}}^*(u_i) = 0, \quad \mathrm{pr}_{\mathcal{V}}^*(v_i) = v_i, \quad \mathrm{pr}_{\mathcal{V}}^*(\xi_i) = 0, \quad \mathrm{pr}_{\mathcal{V}}^*(\eta_i) = \eta_i.$$

Лемма. *Если $\mathcal{W}$ — суперобласть, то для любой пары морфизмов $\varphi\colon \mathcal{W} \to \mathcal{U}$ и $\psi\colon \mathcal{W} \to \mathcal{V}$ существует, причем ровно один морфизм $\varphi \times \psi\colon \mathcal{W} \to \mathcal{U} \times \mathcal{V}$ такой, что*

$$\mathrm{pr}_{\mathcal{U}} \circ \varphi \times \psi = \varphi \ \textit{и} \ \mathrm{pr}_{\mathcal{V}} \circ \varphi \times \psi = \psi.$$

Эта лемма сразу вытекает из координатной записи морфизмов.

§ 2. Векторные поля и ряд Тейлора

2.2.1. Пусть $\mathcal{U}^{p,q}$ — суперобласть, $x = (u, \xi)$ — система координат на $\mathcal{U}$. Определим дифференцирования $\dfrac{\partial}{\partial x_i}\colon C^\infty(\mathcal{U}) \to C^\infty(\mathcal{U})$ (*частные производные*), положив

$$\frac{\partial}{\partial u_i}(f\xi_1^{\nu_1} \ldots \xi_q^{\nu_q}) = \frac{\partial f}{\partial u_i}\xi_1^{\nu_1} \ldots \xi_q^{\nu_q},$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi_j}(f\xi_1^{\nu_1} \ldots \xi_q^{\nu_q}) = \nu_j(-1)^{\nu_1 + \ldots + \nu_{j-1}} f\xi_1^{\nu_1} \ldots \xi_j^{\nu_j - 1} \ldots \xi_q^{\nu_q},$$

где $f \in C^\infty(U)$.

Лемма. *Дифференцирования* $\frac{\partial}{\partial u_i}$ — *четные, а* $\frac{\partial}{\partial \xi_j}$ — *нечетные. Они удовлетворяют правилу Лейбница*

$$\frac{\partial}{\partial u_i}(fg)=\frac{\partial f}{\partial u_i}g+f\frac{\partial g}{\partial u_i},$$
$$\frac{\partial}{\partial \xi_j}(fg)=\frac{\partial f}{\partial \xi_j}g+(-1)^{p(f)}f\frac{\partial g}{\partial \xi_j}.$$

Доказательство. В силу линейности можно считать f и g мономами по переменным ξ. Для мономов утверждение проверяется непосредственно.

2.2.2. Обозначим через $\mathrm{Der}\, C^\infty(\mathcal{U})$ супералгебру Ли дифференцирований супералгебры $C^\infty(\mathcal{U})$ (см. 1.9.5). На $\mathrm{Der}\, C^\infty(\mathcal{U})$ имеется структура $C^\infty(\mathcal{U})$-модуля, определенная формулой

$$(fD)(g) = f(D(g)), \text{ где } f,\ g \in C^\infty(\mathcal{U}),\ D \in \mathrm{Der}\, C^\infty(\mathcal{U}).$$

Ясно, что

$$[D_1, fD_2]=D_1(f)\,D_2+(-1)^{p(f)p(D_1)}f\,[D_1, D_2].$$

Пусть $f,\ g \in C^\infty(\mathcal{U})$. Через $\hat{f}$ обозначим оператор $g \mapsto fg$. Тогда $[D, \hat{f}] = \widehat{D(f)}$.

Дифференцирования супералгебры $C^\infty(\mathcal{U})$ мы будем называть по аналогии с классическим анализом *векторными полями* на $\mathcal{U}$.

2.2.3. Лемма. *Супералгебра Ли* $\mathrm{Der}\, C^\infty(\mathcal{U})$ *является свободным* $C^\infty(\mathcal{U})$-*модулем с базисом* $\left\{\frac{\partial}{\partial x_i}\right\}$.

Доказательство. Пусть $D \in \mathrm{Der}\, C^\infty(\mathcal{U})$. Положим $D_i = D(x_i)$ и рассмотрим поле $D' = D - \sum D_i \frac{\partial}{\partial x_i}$. Поскольку $D'(x_i) = 0$ при всех i, то $D'(P) = 0$ для любого многочлена $P \in \mathbb{R}[x]$. В силу леммы 2.1.10 достаточно проверить, что $D'(f) \in I_u^{q+1}$ для любой функции $f \in C^\infty(\mathcal{U})$ и любой точки $u \in U$. Подберем многочлен P такой, что $f - P \in I_u^{q+1}$ (см. 2.1.8). Тогда

$$D'(f) = D'(f) - D'(P) = D'(f - P) \in I_u^{q+1}.$$

Лемма доказана.

2.2.4. Пусть $\varphi\colon \mathcal{U}^{p,q} \to \mathcal{V}^{m,n}$ морфизм суперобластей, $x = (u, \xi)$ и $y = (v, \eta)$ — системы координат на $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ соответственно.

Матрицей производных координат y *по координатам* x *назовем матрицу* I_{xy}

$$(I_{xy})_{ik}=\frac{\partial}{\partial x_i}\varphi^*(y_k).$$

Набор частных производных любой функции $f \in C^\infty(\mathcal{V})$ будем записывать в виде вектора-столбца $\left|\frac{\partial f}{\partial y_i}\right\rangle$ (и аналогично для $g \in C^\infty(\mathcal{U})$).

Теорема (правило дифференцирования сложной функции)

$$(*)\qquad \frac{\partial\varphi^*(f)}{\partial x_i}=\sum_{k=1}^{m+n}\frac{\partial\varphi^*(y_k)}{\partial x_i}\varphi^*\left(\frac{\partial f}{\partial y_k}\right)\qquad (i=1, 2, \ldots, p+q),$$

или в матричном виде

$$(**)\qquad \left|\frac{\partial\varphi^*(f)}{\partial x}\right\rangle=I_{xy}\left|\varphi^*\frac{\partial f}{\partial y}\right\rangle.$$

В частности, если $\psi\colon \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ *— морфизм суперобластей, и* $z = (w, \zeta)$ *— координаты на* $\mathcal{W}$, *то*

$$(***) \qquad I_{xy} \cdot \psi^* (I_{yz}) = I_{xz}.$$

Следствие. *Если x и y — две системы координат на* $\mathcal{U}$, *то*

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \sum \frac{\partial y_k}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial y_k}.$$

В обычном анализе вместо матрицы I_{xy} используют транспонированную к ней матрицу Якоби. Поэтому мы также введем в рассмотрение *матрицу Якоби* J_φ отображения φ, положив $J_\varphi = (I_{xy})^{st}$. Иначе говоря, матрица J_φ размера $(m, n) \times (p, q)$ определяется формулой

$$J_{ki} = (-1)^{(p(y_k)+1)p(x_i)} \frac{\partial}{\partial x_i} \varphi^* (y_k)$$

или, в блочном виде,

$$J_\varphi = \begin{pmatrix} \frac{\partial v}{\partial u} & -\frac{\partial v}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \eta}{\partial u} & \frac{\partial \eta}{\partial \xi} \end{pmatrix}.$$

Из формулы (***) вытекает, что $J_{\psi\circ\varphi} = \varphi^*(J_\psi) \cdot J_\varphi$ (см. 1.3.8); напомним, что $p(J) = \bar{0}$.

2.2.5. Доказательство теоремы 2.2.3. Обозначим через D разность левой и правой частей формулы (*) из 2.2.3. Из 2.2.2 следует, что

$$D(fg) = D(f)\varphi^*(g) + (-1)^{p(D)p(f)} \varphi^*(f)D(g),$$

где $f, g \in C^\infty(\mathcal{V})$, а $D(f), D(g) \in C^\infty(\mathcal{U})$. Кроме того, непосредственно проверяется, что $D(y_r) = 0$ при $r = 1, \ldots, m + n$. Поэтому из правила Лейбница вытекает, что если f — полином от y, то $D(f) = 0$. Доказательство того, что $D(f) = 0$ для всех функций f, проводится так же, как в лемме 2.2.3.

2.2.6. В обычном анализе под рядом Тейлора функции f понимают степенно́й ряд, который асимптотически приближает функцию f в окрестности заданной точки x. Коэффициенты этого ряда выражаются через производные функции f в точке x.

Поскольку в суперслучае значение функции в точке малоинформативно, то мы должны пользоваться рядом Тейлора, зависящим от дополнительных параметров.

Сначала сформулируем лемму Адамара для случая функций, зависящих от параметра.

Пусть $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ — суперобласти с системами координат x и y, $\mathcal{U} \times \mathcal{V}$ — их произведение (см. 2.1.12). Предположим, что точка 0 лежит в $\mathcal{V}$. Обозначим через $I_{\mathcal{U}}$ идеал в $C^\infty(\mathcal{U} \times \mathcal{V})$, порожденный набором функций $y = (v, \eta)$.

Общая лемма Адамара. *Пусть $f \in C^\infty(\mathcal{U} \times \mathcal{V})$. Тогда для любого целого $r \geqslant 0$ можно подобрать такой полином* $P_r = \sum\limits_{|n|+|\nu|=r} P_{n,\nu} v^n \eta^\nu$ *по переменным $y = (v, \eta)$ с коэффициентами $P_{n,\nu} \in C^\infty(\mathcal{U})$, что* $f - P_r \in I_{\mathcal{U}}^{r+1}$.

Мы докажем эту лемму в п. 2.2.11, а пока выведем из нее формулу Тейлора.

2.2.7. Пусть $\mathcal{W}$ — суперобласть с координатами u, v, ξ, η. Рассмотрим в $\mathcal{W}$ подсуперобласть $\mathcal{U}$, выделяемую уравнениями $v = 0$, $\eta = 0$. (Это означает, что мы выделяем в подстилающей области W подобласть U с помощью уравнений $v = 0$ и оставляем на ней из нечетных координат только ξ). Формулы

$$\varphi^*(u) = u, \ \varphi^*(\xi) = \xi, \ \varphi^*(v) = 0, \ \varphi^*(\eta) = 0$$

задают естественное вложение $\varphi: \mathcal{U} \to \mathcal{W}$. Пусть

$$f|_{\mathcal{U}} = f|_{y=0} = \varphi^*(f).$$

Из общей леммы Адамара вытекает, что

$$C^\infty(\mathcal{W}) = C^\infty(\mathcal{U}) \oplus I_{\mathcal{U}}$$

в окрестности точки u, где $C^\infty(\mathcal{U})$ естественным образом вложена в $C^\infty(\mathcal{W})$ ($u \mapsto u$, $\xi \mapsto \xi$), а $I_{\mathcal{U}}$ — идеал в $C^\infty(\mathcal{W})$, порожденный функциями $y = (v, \eta)$.

2.2.8. Формула Тейлора (первая форма). Справедлива

Теорема. *В условиях* п. 2.6 *пусть* $f \in C^\infty(\mathcal{U} \times \mathcal{V})$ *и* $r \geqslant 0$ — *целое число. Тогда существует полином*

$$P_r = \sum_{|n|+|\nu| \leqslant r} P_{n,\nu} v^n \eta^\nu$$

по переменным $y = (v, \eta)$ *степени не выше* r *с коэффициентами* $P_{n,\nu} \in C^\infty(\mathcal{U})$ *такой, что* $f - P_r \in I_{\mathcal{U}}^{r+1}$. *Такой полином определен однозначно; его коэффициенты выражаются через функцию* f *формулой*

$$P_{n\nu} = \frac{N(\nu)}{n!}\left[\left(\frac{\partial}{\partial v}\right)^n \left(\frac{\partial}{\partial \eta}\right)^\nu f\right]\Big|_{\mathcal{U}}.$$

Здесь суперобласть $\mathcal{U}$ вложена в $\mathcal{W}$ как в п. 2.2.7, $n = (n_1, \ldots, n_p)$

$$\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_q), \quad n! = n_1! \ldots n_p!, \quad N(\nu) = (-1)^{|\nu|(|\nu|-1)/2}.$$

Полином P_r, построенный в этой теореме, называется *полиномом Тейлора* степени r функции f по переменным $y = (v, \eta)$. Формальный степенной ряд

$$\hat{f} = \sum P_{n\nu} v^n \eta^\nu$$

называется *рядом Тейлора* функции f по переменным y.

Доказательство теоремы. Существование полинома P_r вытекает из общей леммы Адамара. Далее, применяя к разности $f - P_r$ оператор

$$D^{n\nu} = \left(\frac{\partial}{\partial v}\right)^n \left(\frac{\partial}{\partial \eta}\right)^\nu,$$

где $|n| + |\nu| \leqslant r$, мы получаем функцию из $I_{\mathcal{U}}$. Отсюда следует, что

$$D^{n\nu} f|_{\mathcal{U}} = D^{n\nu} P_r|_{\mathcal{U}}.$$

Но легко видеть, что справа стоит $N(\nu) n! P_{n\nu}$, что доказывает теорему.

2.2.9. Формула Тейлора (вторая форма). Пусть $\mathcal{U}^{p,q}$ — суперобласть с координатами $x = (u, \xi)$, $f \in C^\infty(\mathcal{U})$. Введем дополнительные координаты $\Delta x = (\Delta u, \Delta \xi)$ и рассмотрим функцию $f(x + \Delta x)$. Более подробно, определим на суперобласти $\mathcal{U} \times \mathcal{R}^{p,q}$ с координатами $(u, \Delta u, \xi, \Delta\xi)$ морфизм $s: \mathcal{U} \times \mathcal{R}^{p,q} \to \mathcal{U}$ формулой $s^*(x_i) = x_i + \Delta x_i$ (этот морфизм определен в окрестности точки $u \times \{0\}$). Положим $f^* = s^*(f)$ — это и есть функция от x и Δx, которую принято обозначать $f(x + \Delta x)$.

Применяя формулу Тейлора к переменным Δx, мы получаем вторую форму формулы Тейлора

$$f(x + \Delta x) = \sum_{|n|+|\nu| \leqslant r} P_{n,\nu} (\Delta u)^n (\Delta \xi)^\nu + \omega,$$

где ω — остаточный член, имеющий по Δx нуль порядка не ниже $r + 1$, т. е. лежащий в идеале $I_{\mathcal{U}}^{k+1}$, где $I_{\mathcal{U}}$ порожден переменными Δx.

2.2.10. Из второй формы формулы Тейлора вытекает следующая «геометрическая» интерпретация частных производных, которая отвечает обычному определению классического анализа. Пусть $\mathcal{U}$ — суперобласть с координатами $x = (u, \xi)$, $f \in C^\infty(\mathcal{U})$. Фиксируем индекс i и рассмотрим функцию

$$h(x, t) = f(x_1, \ldots, x_i + t, \ldots, x_{p+q}) - f(x_1, \ldots, x_{p+q}),$$

где t — координата той же четности, что и x_i. Тогда в силу леммы Адамара существует такая функция $g(x, t)$, что $t\, g(x, t) = h(x, t)$ (заметим, что если t — нечетная переменная, то функция $g(x, t)$ определяется этим равенством неоднозначно). По определению, мы полагаем

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = g(x, t)\Big|_{t=0}.$$

Из 2.2.9 следует, что это выражение совпадает с выражением, определенным в 2.2.1 и, в частности, не зависит от произвола в выборе функции $g(x, t)$.

2.2.11. Доказательство общей леммы Адамара из 2.2.6.

(1) Покажем, что общую лемму Адамара достаточно проверить для $r = 0$. Действительно, пусть мы это сделали. Докажем тогда ее индукцией по r. Пусть P_r — такой полином, что $\omega = f - P_r \in I_{\mathcal{U}}^{r+1}$. Это значит, что

$$\omega = \sum_{|n|+|\nu|=r+1} f_{n\nu} v^n \eta^\nu, \quad \text{где } f_{n\nu} \in C^\infty(\mathcal{U} \times \mathcal{V}).$$

Запишем каждый из коэффициентов $f_{n\nu}$ в виде $f_{n\nu} = C_{n\nu} + f'_{n\nu}$, где $C_{n\nu} \in C^\infty(\mathcal{U})$, $f'_{n\nu} \in I_{\mathcal{U}}$ (возможность такой записи вытекает из общей леммы Адамара при $r = 0$). Тогда, положив

$$P_{r+1} = P_r + \sum_{|n|+|\nu|=r+1} C_{n\nu} v^n \eta^\nu,$$

мы получим, что $f - P_{r+1} \in I_{\mathcal{U}}^{r+2}$. Таким образом, исходя из P_r, мы построили P_{r+1}, и по индукции доказали общую лемму Адамара.

(2) Нам осталось проверить случай $r = 0$. Используя явную запись элементов из $C^\infty(\mathcal{U} \times \mathcal{V})$ как полиномов от ξ и η с коэффициентами, зависящими от u и v, мы видим, что доказательство достаточно провести для чисто четного случая. Далее, индукция по размерности позволяет свести все к случаю, когда имеется только одна переменная v. Таким образом, нам нужно показать, что если $f(u_1, \ldots, u_p, v)$ — гладкая функция, то функция

$$g(u_1, \ldots, u_p, v) = \frac{1}{v}[f(u_1, \ldots, u_p, v) - f(u_1, \ldots, u_p, 0)]$$

продолжается до гладкой функции от $(u_1, \ldots, u_p, v)$. Но легко проверить, что g задается явной формулой

$$g(u_1, \ldots, u_p, v) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial v}(u_1, \ldots, u_p, tv)\, dt,$$

в которой правая часть является гладкой функцией от u и v. Это доказывает общую лемму Адамара.

§ 3. Теоремы об обратной и о неявной функциях

2.3.1. Теорема (об обратной функции). *Пусть $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ — суперобласти с системами координат $x = (u, \xi)$ и $y = (v, \eta)$; $\varphi\colon \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ — морфизм суперобластей, а $u_0 \in \mathcal{U}$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

а) *φ — диффеоморфизм в окрестности точки u_0;*

б) *матрица Якоби J_φ морфизма φ обратима в точке u_0.*

Заметим, что функции $\frac{\partial v}{\partial \xi}$ и $\frac{\partial \eta}{\partial u}$ — нечетные, так что их значение в точке u_0 равно нулю. Поэтому условие б) равносильно тому, что в точке u_0 обратимы матрицы $\frac{\partial v}{\partial u}$ и $\frac{\partial \eta}{\partial \xi}$.

2.3.2. Доказательство теоремы 2.3.1 проведем в несколько шагов

(1) а) $\Rightarrow$ б). Перейдя к окрестностям, можно считать, что φ — изоморфизм, т. е. замена переменных. Этот случай разобран в 2.2.5.

(2) Приступим к доказательству импликации б) $\Rightarrow$ а). Обозначим через I_U идеал в $C^\infty(\mathcal{U})$, выделяющий подстилающую область U; это — идеал, порожденный переменными ξ.

Докажем сначала, что можно ограничиться случаем, когда $\widetilde{\varphi}$: $U \to V$ — диффеоморфизм и $v_i^* = u_i (\mathrm{mod}\ I_U)$ (т. е. $\widetilde{v^*} = u$, см. 2.1.3). Действительно, поскольку матрица $\frac{\partial v}{\partial u}$ обратима, то, пользуясь классической теоремой об обратной функции, мы можем заменить U и V на подобласти U', V' так, чтобы отображение $\widetilde{\varphi}$: $U' \to V'$ было диффеоморфизмом. Затем можно заменить на U' координаты u на новые координаты $u' = \widetilde{v^*}$, не трогая при этом координат ξ. Мы получим, что $v^* = u' (\mathrm{mod}\ I_U)$.

(3) Можно считать, что матрица $\left(\frac{\partial \eta}{\partial \xi}\right)$ обратима всюду на U, иначе мы заменим U такой окрестностью точки u_0, где она обратима. Не трогая координат u, сделаем в координатах ξ линейную замену

$$\xi_j' = \sum_k f_{jk}\xi_k, \quad \text{где} \quad (f_{jk}) = \widetilde{\left(\frac{\partial \eta_j}{\partial \xi_k}\right)}.$$

Заметим, что это — замена координат, поскольку существует обратная замена

$$\xi_k = \sum g_{kj}\xi_j',$$

где функции $g_{kj} \in C^\infty(U)$ находятся из системы уравнений

$$\sum g_{kj} f_{ji} = \delta_{ki},$$

разрешимой в силу обратимости матрицы (f_{jk}).

В новых координатах

$$v_i^* = u_i (\mathrm{mod}\ I_U), \quad \eta_i^* = \xi_i' (\mathrm{mod}\ I_U^2)$$

можно считать, что это верно уже для исходных координат $x = (u, \xi)$.

(4) Построим морфизм ψ: $\mathcal{V} \to \mathcal{U}$, обратный к φ.

Определим морфизмы ψ_k^*: $\mathcal{V} \to \mathcal{U}$, положив

$$\psi_0^*(x_i) = y_i,$$
$$\psi_{k+1}^*(x_i) = \psi_k^*(x_i) + \psi_0^*(x_i - \varphi^*\psi_k^*(x_i)).$$

Докажем, что ψ_k^* — искомый морфизм при $k > q$. Для этого рассмотрим отображения

$$\Delta_k: C^\infty(\mathcal{U}) \to C^\infty(\mathcal{U}), \quad \Delta_k(f) = \varphi^*\psi_k^*(f) - f$$

(это не гомоморфизмы). По построению $\Delta_{k+1}(x_i) = \Delta_0(\Delta_k(x_i))$. Поскольку гомоморфизм $\varphi^*\psi_0^*$: $C^\infty(\mathcal{U}) \to C^\infty(\mathcal{U})$ удовлетворяет условию

$$\varphi^*\psi_0^*(u_i) = u_i (\mathrm{mod}\ I_U), \quad \varphi^*\psi_0^*(\xi_j) = \xi_j (\mathrm{mod}\ I_U^2),$$

то $\Delta_0(I_U^k) \subset I_U^{k+1}$. Отсюда вытекает, что $\Delta_k(f) \subset I_U^k$ при всех $f \in C^\infty(\mathcal{U})$. В частности, $\Delta_k(f) = 0$ при $k > q$, т. е. гомоморфизм $\varphi^*\psi_k^*$ тождествен.

(5) Итак, мы построили такой морфизм ψ: $\mathscr{V} \to \mathscr{U}$, что $\psi\varphi$ — тождествен, т. е. показали, что φ имеет обратный слева. Если $v_0 = \varphi(u_0)$, то в точке v_0 — матрица Якоби J_ψ морфизма ψ обратима, ибо $J_\psi(v_0)J_\varphi(u_0) = 1$. Поэтому, по доказанному, существует такой морфизм φ': $\mathscr{U} \to \mathscr{V}$, что $\varphi'\psi$ тождествен. Но ясно, что тогда $\varphi' = \varphi'\psi\varphi = \varphi$, т. е. ψ — двусторонне обратный морфизм для φ.

2.3.3. Следствие. *Пусть φ: $\mathscr{U} \to \mathscr{V}$ — такой морфизм суперобластей, что отображение $\tilde{\varphi}$: $U \to V$ подстилающих областей взаимно однозначно и матрица Якоби J_φ обратима во всех точках $u \in \mathscr{U}$. Тогда φ — диффеоморфизм.*

Доказательство. Построим морфизм ψ: $\mathscr{V} \to \mathscr{U}$, обратный к φ. Положим $\tilde{\psi} = \tilde{\varphi}^{-1}$ (морфизм $\tilde{\psi}$ корректно определен в силу взаимной однозначности). Если $v \in V$ и $u = \tilde{\varphi}^{-1}(v)$, то в силу теоремы об обратной функции φ изоморфно отображает некоторую окрестность $\mathscr{U}'$ точки u на некоторую окрестность $\mathscr{V}'$ точки v. Значит, в окрестности $\mathscr{V}'$ определен морфизм ψ': $\mathscr{V}' \to \mathscr{U}'$, обратный к φ. Ясно, что $\tilde{\psi}' = \tilde{\psi}$, так что $\tilde{\psi}$ непрерывен в окрестности точки v; тем самым $\tilde{\psi}$: $V \to U$ — непрерывное отображение. Мы отождествим топологические пространства U и V с помощью гомеоморфизмов $\tilde{\varphi}$ и $\tilde{\psi}$.

Пусть $\mathcal{O}_{\mathscr{U}}$ и $\mathcal{O}_{\mathscr{V}}$ — структурные пучки на U и V.

Тогда φ задает морфизм пучков φ^*: $\mathcal{O}_{\mathscr{V}} \to \mathcal{O}_{\mathscr{U}}$, который в силу теоремы об обратной функции локально в окрестности каждой точки $u \in \mathscr{U}$, имеет обратный ψ_u^*: $\mathcal{O}_{\mathscr{U}} \to \mathcal{O}_{\mathscr{V}}$. Ясно, что такой обратный морфизм единствен, так что морфизмы ψ_u^*, заданные на разных окрестностях, согласованы на пересечениях. Поэтому они задают глобальный обратный морфизм пучков ψ^*: $\mathcal{O}_{\mathscr{U}} \to \mathcal{O}_{\mathscr{V}}$, т. е. задают обратный к φ морфизм окольцованных пространств ψ: $\mathscr{V} \to \mathscr{U}$.

2.3.4. Следствие. *Пусть φ: $\mathscr{U} \to \mathscr{V}$ — морфизм суперобластей. Предположим, что матрица Якоби J_φ обратима во всех точках $u \in U$ и что морфизм φ не склеивает точек, т. е. $\tilde{\varphi}(u) \neq \tilde{\varphi}(u')$ для разных точек u, $u' \in \mathscr{U}$. Тогда найдется такая открытая подобласть $\mathscr{V}' \subset \mathscr{V}$, что $\varphi(\mathscr{U}) \subset \mathscr{V}'$ и φ: $\mathscr{U} \to \mathscr{V}'$ — изоморфизм.*

Доказательство. Положим $V' = \tilde{\varphi}(U)$. Если $v \in V'$ и $u = \tilde{\varphi}^{-1}(v)$, то в силу теоремы об обратной функции найдутся такие окрестности U'' точки u и V'' точки v, что $\tilde{\varphi}$: $U'' \to V''$ — диффеоморфизм. В частности, V' — открытое подмножество V. Обозначим через $\mathscr{V}'$ соответствующую подобласть в $\mathscr{V}$. Тогда, применяя к морфизму φ: $\mathscr{U} \to \mathscr{V}'$ следствие 2.3.3, мы получаем, что φ: $\mathscr{U} \to \mathscr{V}'$ — изоморфизм.

2.3.5. Следствие. *Пусть $\mathscr{U}^{p,q}$ — суперобласть, $x = (u, \xi)$ — система координат на $\mathscr{U}$ и $y = (v_1, \ldots, v_p, \eta_1, \ldots, \eta_q)$ — система функций удовлетворяющая следующим условиям:*

a) $v_i \in (C^\infty(\mathscr{U}))_{\bar 0}$, $\eta_j \in C^\infty(\mathscr{U}))_{\bar 1}$.

b) *Матрицы частных производных $A = (\partial v/\partial u)$ и $D = (\partial\eta/\partial\xi)$ обратимы в любой точке $u \in \mathscr{U}$.*

c) *Функции $\tilde{v}_i$ разделяют точки, т. е. если u, $u' \in \mathscr{U}$ и $u \neq u'$, то $\tilde{v}_i(u) \neq \tilde{v}_i(u')$ для некоторого i.*

Тогда $y = (v, \xi)$ — система координат на $\mathscr{U}$.

Для доказательства достаточно применить следствие 3.4 к морфизму φ: $\mathscr{U} \to \mathscr{R}^{p,q}$, заданному координатной записью $\varphi^*(v_i') = v_i$, $\varphi^*(\eta_j') = \eta_j$, где $y' = (v', \eta')$ — система координат на $\mathscr{R}^{p,q}$.

2.3.6. Теорема (о неявной функции). *Пусть $\mathscr{U}$, $\mathscr{V}$, $\mathscr{W}$ — суперобласти с системами координат x, y и z, φ: $\mathscr{U} \times \mathscr{V} \to \mathscr{W}$ — морфизм* *суперобластей, u_0 и v_0 — точки из U и V и $w_0 = \tilde{\varphi}(u_0, v_0)$. Предположим, что в точке $(u_0, v_0) \in U \times V$ обратима матрица Якоби $J_{\varphi|u} = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$.*

Тогда существует, причем ровно один, морфизм $\psi\colon \mathscr{W} \times \mathscr{V} \to \mathscr{U}$, определенный в окрестности точки $w_0 \times v_0$ такой, что $\tilde{\psi}(w_0 \times v_0) = u_0$ и композиция

$$\mathscr{W} \times \mathscr{V} \xrightarrow{\psi \times \mathrm{pr}_{\mathscr{V}}} \mathscr{U} \times \mathscr{V} \xrightarrow{\varphi} \mathscr{W}$$

совпадает с проекцией $\mathrm{pr}_{\mathscr{W}}\colon \mathscr{W} \times \mathscr{V} \to \mathscr{W}$.

В классическом случае это условие записывается на языке точек в виде

$$\varphi(\psi(w, v), v) = w \text{ для всех } v \in V,\ w \in W.$$

Доказательство. Рассмотрим морфизм $\varphi' = \varphi \times \mathrm{pr}_{\mathscr{V}}\colon \mathscr{U} \times \mathscr{V} \to \mathscr{W} \times \mathscr{V}$. Из условия теоремы легко вытекает, что его матрица Якоби $J_{\varphi'}$ обратима в точке (u_0, v_0). Поэтому в силу теоремы об обратной функции в некоторой окрестности точки (w_0, v_0) существует обратный морфизм $\psi'\colon \mathscr{W} \times \mathscr{V} \to \mathscr{U} \times \mathscr{V}$. Ясно, что морфизм $\psi = \mathrm{pr}_{\mathscr{U}} \circ \psi'$ удовлетворяет условиям теоремы. Единственность ψ вытекает из того, что морфизм $\psi \times \mathrm{pr}_{\mathscr{V}}\colon \mathscr{W} \times \mathscr{V} \to \mathscr{U} \times \mathscr{V}$ является обратным для φ' и, значит, однозначно определен.

2.3.7. Пусть $\mathscr{U}$ — суперобласть, $J = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ — четная матрица функций на $\mathscr{U}$. *Рангом матрицы* J в точке $u \in \mathscr{U}$ назовем пару чисел

$$\mathrm{rk}\, J(u) = (\mathrm{rk}(A(u)),\ \mathrm{rk}\, D(u)).$$

Пусть $\varphi\colon \mathscr{U} \to \mathscr{V}$ — морфизм суперобластей,

$$x = (u_1, \ldots, u_p, \xi_1, \ldots, \xi_q) \text{ и } y = (v_1, \ldots, v_m, \eta_1, \ldots, \eta_n)$$

— системы координат на $\mathscr{U}$ и $\mathscr{V}$ и J_φ — матрица Якоби морфизма φ.

Назовем морфизм φ *иммерсией* в точке $u \in \mathscr{U}$, если $\mathrm{rk}\, J_\varphi(u) = (p, q)$.

Назовем морфизм φ *субмерсией* в точке $u \in \mathscr{U}$, если $\mathrm{rk}\, J_\varphi(u) = (m, n)$.

Теорема. а) *Морфизм φ является иммерсией в точке u_0 тогда и только тогда, когда в некоторой окрестности точки u_0 он является вложением подсупермногообразия, т. е. можно представить $\mathscr{V}$ в виде $\mathscr{U} \times \mathscr{W}$, а φ в виде*

$$\varphi\colon \mathscr{U} = \mathscr{U} \times \{pt\} \xrightarrow{\mathrm{id} \times \iota} \mathscr{V} = \mathscr{U} \times \mathscr{W},$$

где $\iota\colon \{pt\} \to \mathscr{W}$ — вложение точки.

б) *Морфизм φ является субмерсией в точке u_0 тогда и только тогда, когда в некоторой окрестности точки u_0 он совпадает с проекцией, т. е. можно представить $\mathscr{U}$ в виде $\mathscr{V} \times \mathscr{W}$, а φ в виде*

$$\varphi\colon \mathscr{U} = \mathscr{V} \times \mathscr{W} \xrightarrow{\mathrm{pr}_{\mathscr{V}}} \mathscr{V}.$$

Иначе говоря, если φ — иммерсия, то в окрестности точки $\varphi(u_0) \in \mathscr{V}$ можно выбрать такую систему координат $y' = (v', \eta')$, что $\varphi^*(v_i') = u_i$, $\varphi^*(\eta_j') = \xi_j$, при $1 \leqslant i \leqslant p$, $1 \leqslant j \leqslant q$ и $\varphi^*(v_i') = \varphi^*(\eta_j') = 0$ при $i > p$, $j > q$. Если же φ — субмерсия, то в окрестности точки $u_0 \in \mathscr{U}$ можно выбрать такую систему координат $x' = (u', \xi')$, что $\varphi^*(v_i) = u_i'$, $\varphi^*(\xi_j) = \eta_j$ при $1 \leqslant i \leqslant m$.

Доказательство. а) Изменив нумерацию координат y, мы можем считать, что матрицы

$$\left(\frac{\partial}{\partial u_k} \varphi^*(v_i)\right),\ 1 \leqslant i,\ k \leqslant p \quad \text{и} \quad \left(\frac{\partial}{\partial \xi_l} \varphi^*(\eta_j)\right),\ 1 \leqslant j,\ l \leqslant q$$

— обратимы. Рассмотрим суперпространство $\mathscr{R}^{m-p,\, n-q}$ с координатами $u_{p+1}, \ldots, u_m, \xi_{q+1}, \ldots, \xi_n$ и пусть $\mathscr{W} = \mathscr{U} \times \mathscr{R}^{m-p,\, n-q}$. Зададим морфизм $\psi\colon \mathscr{W} \to \mathscr{V}$ формулой

$$\psi^*(y_i) = \varphi^*(y_i) \text{ при } 1 \leqslant i \leqslant p,\ m+1 \leqslant i \leqslant m+q,$$
$$\psi^*(y_i) = \varphi^*(y_i) + z_i \text{ при } p < i \leqslant m,\ m+q < i \leqslant m+n.$$

Легко проверить, что в точке $w_0 = u_0 \times (0) \in \mathscr{W}$ матрица J_ψ обратима; значит, в силу теоремы об обратной функции ψ — локальный диффеоморфизм в окрестности этой точки. Поэтому мы можем заменить $\mathscr{V}$ на $\mathscr{W}$, а φ — на естественное вложение

$$\mathscr{U} = \mathscr{U} \times \{0\} \to \mathscr{W} = \mathscr{U} \times \mathscr{R}^{m-p,\, n-q}.$$

Обратное утверждение, что вложение подсупермногообразия является иммерсией, легко вытекает из того, что свойство быть иммерсией в точке u_0 не зависит от выбора систем координат.

Пункт б) теоремы доказывается аналогично.

2.3.8. В обычном анализе важную роль играет теорема об отображениях постоянного ранга, которая обобщает пункты а) и б) теоремы 2.3.7. Она утверждает, что если ранг матрицы Якоби J_φ постоянен в окрестности точки $u \in U$, то локально морфизм φ представим в виде

$$\varphi\colon \mathscr{U} \xrightarrow{\varphi_1} \mathscr{W} \xrightarrow{\varphi_2} \mathscr{V},$$

где φ_1 — проекция (субмерсия), а φ_2 — вложение подмногообразия (иммерсия). Мы докажем аналог этого утверждения в суперслучае.

Сначала дадим определение матрицы функций постоянного ранга. Пусть J — четная матрица функций на суперобласти $\mathscr{U}$ размера $(p, q) \times (m, n)$.

Матрица J называется *матрицей постоянного ранга* (k, l), если с помощью преобразований

$$(*) \qquad J \mapsto g_1 J g_2, \qquad g_1 \in \mathrm{GL}_{p,\,q}(C^\infty(\mathscr{U})), \quad g_2 \in \mathrm{GL}_{m,\,n}(C^\infty(\mathscr{U}))$$

ее можно привести к виду

$$J = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}, \qquad \text{где } A = \begin{pmatrix} 1_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1_l & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ясно, что если J — матрица постоянного ранга (k, l), то $\operatorname{rk} J(u) = (k, l)$ во всех точках $u \in \mathscr{U}$. Однако из равенства рангов матрицы J во всех точках $\mathscr{U}$ не следует, что $\mathscr{U}$ — матрица постоянного ранга; например, если $\mathscr{U} = \mathscr{R}^{0,1}$, $J = \begin{pmatrix} 0 & \xi \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, то $\operatorname{rk} J(0) = (0,0)$ в единственной имеющейся точке 0, но J не является матрицей постоянного ранга $(0, 0)$.

Лемма. *Пусть J — четная матрица функций на $\mathscr{U}$, $u_0 \in \mathscr{U}$ и $\operatorname{rk} J(u_0) = (k, l)$. Тогда*

а) *в некоторой окрестности точки u_0 с помощью преобразований $(*)$ матрицу J можно привести к виду $J' = 1_{k,\,l} \oplus X$, где X — такая матрица размера $(p-k,\ q-l) \times (m-k,\ n-l)$, что $X(u_0) = 0$;*

б) *для того чтобы матрица J была матрицей постоянного ранга (в окрестности u_0), необходимо и достаточно, чтобы для некоторой матрицы $\gamma \in \mathrm{GL}_{p,\,q}(C^\infty(\mathscr{U}))$ в матрице γJ только $k + l$ строк было отлично от 0. Аналогичное утверждение верно и для столбцов;*

в) *предположим, что в матрице J выделено несколько строк так, что получившаяся матрица I имеет постоянный ранг (k, l). Кроме того, предположим, что матрица J имеет постоянный ранг в окрестности точки u. Тогда в окрестности u каждая строка J_i матрицы J представима в виде*

$$J_i = \sum f_{ik} I_k, \text{ где } I_k \text{ — строка матрицы } I, \text{ а } f_{ik} \in C^\infty(\mathscr{U}).$$

Аналогичное утверждение верно для столбцов.

Доказательство. а) Умножая на матрицы с постоянными коэффициентами, мы можем привести $J(u_0)$ к виду $J(u_0) = 1_{k,\,l} \oplus 0$. Значит матрицу J можно разбить на блоки $J = \begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix}$, так что $P(u_0) = 1_{k,\,l}$, $Q(u_0) = R(u_0) = S(u_0) = 0$. В силу 1.6.2 матрица P обратима в окрестности точки u_0; поэтому, домножив на обратную матрицу, мы можем считать что $P \equiv 1_{k,\,l}$. Ясно, что элементарные преобразования матрицы J являются $(*)$-преобразованиями. Используя их, мы можем добиться, чтобы матрицы Q и R обратились в 0. Это доказывает пункт а).

б) Если $\gamma_1 J \gamma_2 = 1_{k,\,l} \oplus 0$, то в матрице $\gamma_1 J$ не более $(k+l)$ строк отличны от 0. Обратно, предположим, что с помощью $(*)$-преобразований мы добились, чтобы у матрицы J только $k+l$ строк были отличны от 0, пусть I — матрица, образованная этими строками. Делая $(*)$-преобразования с матрицей I, мы можем привести ее к виду $I = 1_{k,\,l} \oplus X$ (см. п. а)). Но, поскольку у матрицы I только $(k+l)$ строк, то, значит, $X = 0$. Отсюда вытекает пункт б).

в) Сделав замену J на $J\gamma$ для некоторой матрицы $\gamma \in \mathrm{GL}_{m,\,n}(C^\infty(\mathcal{U}))$, мы можем считать, что в матрице J только $(k+l)$ столбцов отлично от 0 (см. п. в.)); отбросив эти столбцы можно считать, что $m = k$, $n = l$. Из пункта б) вытекает, что I — матрица постоянного ранга. Значит, с помощью $(*)$-преобразований можно привести ее к виду $1_{k,\,l} \oplus 0$; эти преобразования можно продолжить на матрицу J. Поэтому можно считать, что матрица I с самого начала имеет такой вид. Но, поскольку в матрице I всего $k+l$ столбцов, утверждение в) в этом случае становится очевидным.

2.3.9. Теорема (о морфизмах постоянного ранга). *Пусть $\varphi\colon \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ — морфизм суперобластей, $u_0 \in \mathcal{U}$. Тогда, для того чтобы морфизм φ в окрестности точки u_0 раскладывался в композицию $\mathcal{U} \xrightarrow{\varphi_1} \mathcal{W} \xrightarrow{\varphi_2} \mathcal{V}$, где φ_1 — проекция (субмерсия в точке u_0), а φ_2 — вложение подсупермногообразия (иммерсия в точке $w_0 = \varphi_1(u_0)$), необходимо и достаточно, чтобы матрица Якоби J_φ была матрицей постоянного ранга в окрестности точки u_0.*

Доказательство. Необходимость этого условия очевидна; проверим достаточность. Пусть $x = (u, \xi)$ — координаты на $\mathcal{U}$, $y = (v, \eta)$ — координаты на $\mathcal{V}$, причем $x_i(u_0) = y_i(\varphi(u_0)) = 0$.

Мы будем вместо матрицы Якоби использовать матрицу I_{xy}. Пусть $\mathrm{rk}\, I_{xy}(u) = (k, l)$. Тогда можно выбрать среди y-ов множество Ξ из $(k+l)$ координат так, чтобы отвечающая ему подматрица I имела в точке u_0 ранг (k, l). Можно считать, что Ξ — это множество четных координат с номерами $1, \ldots, k$ и нечетных координат с номерами $1, \ldots, l$.

Рассмотрим суперпространство $\mathcal{W} = \mathcal{R}^{k,\,l}$ с координатами $z = (w_1, \ldots, w_k, \zeta_1, \ldots, \zeta_l)$, т. е. у $\mathcal{W}$ все координаты входят в Ξ. Зададим морфизм $\varphi_1\colon \mathcal{U} \to \mathcal{W}$, полагая

$$\varphi_1^*(w_i) = \varphi^*(v_i), \quad \varphi_1^*(\zeta_j) = \varphi^*(\eta_j), \quad i,\ j \in \Xi.$$

При этом матрица I_{xz} совпадает с матрицей I так, что морфизм φ_1 является субмерсией в точке u_0. Поэтому, используя теорему 2.3.7, мы можем так изменить систему координат на $\mathcal{U}$, чтобы выполнялись равенства

$$\varphi_1^*(w_i) = u_i = \varphi^*(v_i), \quad \varphi_1^*(\zeta_j) = \xi_j = \varphi^*(\eta_j), \text{ где } i,\ j \in \Xi.$$

Зададим морфизм-вложение $\psi\colon \mathcal{W} \to \mathcal{U}$, полагая $\psi^*(u_i) = w_i$ и $\psi^*(\xi_j) = \zeta_j$ при $i,\ j \in \Xi$ и $\psi^*(u_i) = \psi^*(\xi_j) = 0$ при $i,\ j \notin \Xi$. Положим $\varphi_2 = \varphi \circ \psi\colon \mathcal{W} \to \mathcal{V}$. Мы имеем $\varphi_2^*(v_i) = w_i$ и $\varphi_2^*(\eta_j) = \zeta_j$ при $i, j \in \Xi$. Значит, φ_2 — иммерсия и мы можем так изменить координаты y, не входящие в Ξ, не трогая координат из Ξ, чтобы $\varphi_2^*(v_i) = \varphi_2^*(\eta_j) = 0$ для $i,\ j \notin \Xi$.

Докажем теперь, что морфизм φ совпадает с морфизмом $\varphi' = \varphi_2 \circ \varphi_1$. Для этого рассмотрим матрицу I_{xy}. Она имеет вид

$$\left(\begin{array}{c|c} 1_{k,l} & S \\ \hline 0 & T \end{array}\right),$$

где разбиение на блоки дано в соответствии с разбиением y- в на Ξ и все остальные. Поскольку по условию I_{xy} — матрица постоянного ранга, то все ее столбцы линейно выражаются через первые $(k+l)$ столбцов (см. 2.2.8.в)), так что $T \equiv 0$. Это означает, что для любой координаты y мы имеем

$$\frac{\partial\varphi^*(y)}{\partial u_i} = \frac{\partial\varphi^*(y)}{\partial\xi_j} = 0 \quad [\text{при } i,\ j \notin \Xi.$$

Ясно, что то же равенство выполняется, если заменить $\varphi^*(y)$ на $\varphi'^*(y)$. Кроме того,

$$\varphi^*(y)|_{\mathscr{W}} = \varphi'^*(y)|_{\mathscr{W}}$$

по построению. Поэтому теорема 2.3.9 вытекает из следующей леммы.

2.3.10. Лемма. *Пусть на суперобласти с координатами* (u, v, ξ, η) *заданы две функции* f_1 *и* f_2 *такие, что*

$$\frac{\partial f_\nu}{\partial\eta_i} = \frac{\partial f_\nu}{\partial\eta_j} \equiv 0 \ (\nu = 1,\ 2)$$

для любых i *и* j *и, кроме того,*

$$f_1|_{\mathscr{W}} = f_2|_{\mathscr{W}},$$

где $\mathscr{W}$ — *подсуперобласть, выделяемая уравнениями* $v = 0$, $\eta = 0$ (см. 2.2.7). *Тогда* $f_1 \equiv f_2$ *в некоторой окрестности* $\mathscr{W}$.

Доказательство. Положим $f = f_1 - f_2$ и запишем

$$f = \sum f_{\alpha\beta}\xi^\alpha\eta^\beta.$$

Из уравнений вытекает, что $f_{\alpha\beta} = 0$, если $\beta \neq 0$. Далее, из условия следует, что

$$\frac{\partial f_{\alpha,0}}{\partial v_j} = 0 \quad \text{для всех } j.$$

Поскольку $f_{\alpha 0}|_W = 0$, то отсюда вытекает, что $f_{\alpha 0} = 0$ в окрестности W, т. е. $f \equiv 0$.

§ 4. Интегрирование на суперобластях

2.4.1. Мы хотим, по аналогии с классическим анализом, определить понятие интегрирования по суперобласти, не зависящее от выбора системы координат. Эта задача разбивается на три этапа:

а) Надо определить объект интегрирования — форму объема. В классическом анализе формой объема называется выражение $f(y)dy$, которое при замене координат преобразуется в $f(y(x))\det(I_{yx})dx$, где I_{yx} — матрица производных координат y по координатам x;

б) надо определить понятие интеграла от формы объема в заданной системе координат;

в) надо показать, что при замене координат интеграл от формы не меняется. Впрочем, это верно не для всех замен координат, а только для ориентированных. Поэтому надо предварительно ввести понятие ориентации на области.

2.4.2. Пусть $\mathscr{U}^{m,n}$ суперобласть, x, y — две системы координат на $\mathscr{U}$. *Якобианом перехода* от координат x к координатам y называется функция

$\operatorname{Ber} I_{xy}$. Этот якобиан мы будем обозначать через $\frac{D(y)}{D(x)}$. Заметим, что $\frac{D(y)}{D(x)} = \operatorname{Ber} J$, где J — матрица Якоби замены координат x на y.

Формой объема на суперобласти $\mathcal{U}$ называется объект ρ, который в каждой системе координат $x = (u, \xi)$ на $\mathcal{U}$ записывается в виде

$$(*) \qquad \rho = f\Delta_x, \qquad \text{где } f \in C^\infty(\mathcal{U}),$$

причем записи $f\Delta_x$ и $h\Delta_y$ в разных системах координат x, y связаны формулой

$$(**) \qquad h\Delta_y = \left(\frac{D(y)}{D(x)} h\right) \Delta_x = f\Delta_x.$$

Обозначим через $\operatorname{Vol}(\mathcal{U})$ пространство форм объема на суперобласти $\mathcal{U}$. Наделим $\operatorname{Vol}(\mathcal{U})$ структурой $C^\infty(\mathcal{U})$-модуля, полагая

$$p(\Delta_x) = m - n \pmod 2) \text{ и } f(g\Delta_x) = (fg)\Delta_x, \text{ где } f,\ g \in C^\infty(\mathcal{U}).$$

Эта структура согласована с заменами координат, поскольку функция $\frac{D(y)}{D(x)}$ всегда четна.

2.4.3. Пусть $\mathcal{U}$ — суперобласть, $f \in C^\infty(\mathcal{U})$. Рассмотрим множество точек U_f таких, что $f = 0$ в окрестности точки u. Ясно, что U_f открыто. Дополнительное к нему множество $U \setminus U_f$ будем называть *носителем функции* f и обозначать $\operatorname{supp} f$.

Будем называть функцию f *финитной*, если множество $\operatorname{supp} f$ компактно.

2.4.4. Пусть $\mathcal{U}^{m,n}$ суперобласть, $x = (u, \xi)$ — система координат на $\mathcal{U}$, $\rho = f\Delta_x$ — финитная форма объема на $\mathcal{U}$.

Определим *интеграл формы* ρ *в системе координат* x формулой

$$(*) \qquad \int\limits_{(\mathcal{U},x)} \rho = \int\limits_{(\mathcal{U},x)} f\Delta_x = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}+mn} \int\limits_U f_{1\ldots 1}\, du,$$

где $f_{1\ldots 1}$ — коэффициент при мономе максимальной степени $\xi_1 \ldots \xi_n$ в разложении $f = \sum f_\beta \xi^\beta$.

З а м е ч а н и е. Знак появился для того, чтобы выполнялись аналог теоремы Фубини и равенство

$$\int \xi\Delta_\xi = 1.$$

2.4.5. Пусть $\mathcal{U}$ — суперобласть. Назовем *ориентацией на* $\mathcal{U}$ ориентацию на подстилающей области U. Если $x = (u, \xi)$ — система координат на $\mathcal{U}$, то она задает ориентацию на $\mathcal{U}$: это та ориентация на подстилающей области U, которая соответствует системе координат $u = (u_1, \ldots, u_m)$.

Т е о р е м а. *Пусть $x = (u, \xi)$, $y = (v, \eta)$ — две системы координат на $\mathcal{U}$ и ρ — финитная форма объема на $\mathcal{U}$. Тогда*

$$\int\limits_{(\mathcal{U},x)} \rho = \pm \int\limits_{(\mathcal{U},y)} \rho,$$

где знак $+$ стоит, если координаты x и y задают одинаковую ориентацию на $\mathcal{U}$ и знак $-$, если разную.

Заметим, что предположение финитности формы ρ здесь существенно, как показывает следующий пример.

П р и м е р. Пусть $\mathcal{U}^{1,2}$ — суперобласть в $\mathcal{R}^{1,2}$ с подстилающей областью U, которая есть интервал $(0, 1)$ и координатами $x = (u, \xi_1, \xi_2)$. Рассмотрим на $\mathcal{U}$ также другую систему координат $y = (v, \eta_1, \eta_2)$, где $v = u + \xi_1\xi_2$, $\eta_1 = \xi_1$, $\eta_2 = \xi_2$. Пусть $\rho = v\Delta_y$ — форма объема на $\mathcal{U}$. Поскольку $D(y)/D(x) = 1$, то $\rho = v(x)\Delta_x$. Поэтому

$$\int\limits_{(\mathcal{U}, x)} \rho = \int\limits_{(\mathcal{U}, x)} (u + \xi_1\xi_2)\,\Delta_x = -\int\limits_{U} du = -1,$$

$$\int\limits_{(\mathcal{U}, y)} \rho = \int\limits_{(\mathcal{U}, y)} v\Delta_y = 0.$$

2.4.6. Для доказательства теоремы определим действие супералгебры Ли $\mathrm{Der}\, C^\infty(\mathcal{U})$ на суперпространстве $\mathrm{Vol}\,(\mathcal{U})$.

Лемма. *Пусть x — система координат на $\mathcal{U}$. Тогда:* а) *существует единственное действие супералгебры Ли* $\mathrm{Der}\, C^\infty(\mathcal{U})$ *на суперпространстве* $\mathrm{Vol}\,(\mathcal{U})$, *удовлетворяющее следующим условиям:*

(i) $D(f\rho) = D(f)\,\rho + (-1)^{p(D)p(f)} fD(\rho)$,

(ii) $(fD)\,\rho = (-1)^{p(f)p(D)} D(f\rho)$,

(iii) $\dfrac{\partial}{\partial x_i}\Delta_x = 0$ *для любого* i:

б) *действие, определенное в* п. а), *не зависит от выбора системы координат.*

Доказательство. а) Если задано действие, удовлетворяющее условиям (i) — (iii), то

$$(*) \qquad \left(f\frac{\partial}{\partial x_i}\right)(g\Delta_x) = (-1)^{p(x_i)p(f)} \frac{\partial}{\partial x_i}(fg\Delta_x) = \left[(-1)^{p(x_i)p(f)}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) g + f\frac{\partial g}{\partial x_i}\right]\Delta_x,$$

так что это действие определено однозначно. С другой стороны, легко проверить, что формула (*) задает билинейное спаривание $\mathrm{Der}\, C^\infty(\mathcal{U}) \times \mathrm{Vol}(\mathcal{U}) \to \mathrm{Vol}(\mathcal{U})$, удовлетворяющее условиям (i) — (iii). Остается проверить, что формула (*) задает действие супералгебры Ли, т. е.

$$D_1D_2\rho - (-1)^{p(D_2)p(D_1)} D_2D_1\rho = [D_1D_2]\,\rho, \qquad D_1,\ D_2 \in \mathrm{Der}\, C^\infty(\mathcal{U}), \quad \rho \in \mathrm{Vol}\,(U).$$

Условия (i), (ii) позволяют свести проверку к тривиальному случаю

$$D_1 = \frac{\partial}{\partial x_k}, \qquad D_2 = \frac{\partial}{\partial x_l}.$$

б) В следующем пункте мы докажем, что если $A \in \mathrm{GL}_{r,s}(C^\infty(\mathcal{U}))$, $D \in \mathrm{Der}\, C^\infty(\mathcal{U})$, то

$$(**) \qquad D(\mathrm{Ber}\, A)\cdot \mathrm{Ber}\, A^{-1} = \mathrm{str}\,(D(A)\cdot A^{-1}),$$

где $D(A)_{ij} = (-1)^{p(D)p_{\mathrm{row}}(i)} D A_{ij}$.

Пусть x и y — системы координат на $\mathcal{U}$; пусть

$$A_{ij} = \frac{\partial y_j}{\partial x_i}, \qquad B_{kr} = \frac{\partial x_r}{\partial y_k}, \qquad C_{ij}^m = \left[\frac{\partial}{\partial x_m}(A)\right]_{ij}.$$

Ясно, что $AB = 1$,

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \sum A_{ij}\frac{\partial}{\partial y_j}, \qquad \frac{\partial}{\partial y_r} = \sum B_{rk}\frac{\partial}{\partial x_k}.$$

Докажем, что два действия супералгебры Ли $\mathrm{Der}\, C^\infty(\mathcal{U})$ на $\mathrm{Vol}\,\mathcal{U}$, определенные по системам координат x и y, совпадают. В силу (i), (ii) для этого достаточно убедиться в том, что форма $\dfrac{\partial}{\partial x_i}\Lambda_y$ при обеих действиях одна и таже для любого i. Вычислим эту форму. В системе координат x мы имеем

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\Delta_y=\frac{\partial}{\partial x_i}(\mathrm{Ber}\,A\cdot\Delta_x)=\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\mathrm{Ber}\,A\right)\mathrm{Ber}\,A^{-1}\cdot\Delta_y.$$

В системе координат y мы имеем

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\Delta_y=\sum_j A_{ij}\frac{\partial}{\partial y_j}\Delta_y=\sum_j(-1)^{p(y_j)p(A_{ij})}\frac{\partial A_{ij}}{\partial y_j}\Delta_y=$$

$$=\sum_j(-1)^{p(y_j)p(A_{ij})}\sum_k B_{jk}\frac{\partial A_{ij}}{\partial x_k}\Delta_y=\sum_{j,\,k}(-1)^{p(y_j)p(A_{ij})}B_{jk}C^i_{kj}\Delta_y=$$

$$=\sum_j(-1)^{p(y_j)(p(y_i)+p(y_j))}(BC^i)_{jj}\Delta_y=\mathrm{str}\,(BC^i)\,\Delta_y.$$

Из формулы (**) вытекает, что эти формы объема совпадают.

2.4.7. Докажем формулу (**). Записав $D=\sum D_k\frac{\partial}{\partial x_k}$, сведем доказательство к случаю $D=\frac{\partial}{\partial x_k}$. Будем рассуждать так же, как в 2.2.10.

Пусть $\mathscr{R}$ есть (1,0) — или (0, 1) — мерное суперпространство с координатой t той же четности, что и x_k. Рассмотрим в суперобласти $\mathscr{U}\times\mathscr{R}$ окрестность $\mathscr{V}$ подсуперобласти $\mathscr{U}\times\{0\}$ и определим морфизм $\varphi\colon\mathscr{V}\to\mathscr{U}$ формулами $\varphi^*(x_i)=x_i$ при $i\neq k$, $\varphi^*(x_k)=x_k+t$. Используя 2.2.4, мы получаем равенство $\varphi^*(A)\equiv\left[A+t\frac{\partial}{\partial x_k}A\right](\mathrm{mod}\ t^2)$. Отсюда

$$\mathrm{Ber}\,\varphi^*(A)\equiv\mathrm{Ber}\,A\cdot\mathrm{Ber}\left(1+tA^{-1}\frac{\partial}{\partial x_k}A\right)\equiv\mathrm{Ber}\,A\left(1+t\,\mathrm{str}\,A^{-1}\frac{\partial}{\partial x_k}A\right)(\mathrm{mod}\ t^2)$$

(так как $\mathrm{Ber}\,(1+tX)=1+t\,\mathrm{str}\,X$, см. 1.7.8).

Таким образом,

$$\varphi^*(\mathrm{Ber}\,A)\equiv\mathrm{Ber}\,\varphi^*A+t\,\mathrm{Ber}\,A\,\mathrm{str}\,A^{-1}\frac{\partial}{\partial x_k}A\,(\mathrm{mod}\ t^2).$$

Поскольку коэффициент при t совпадает с $\frac{\partial}{\partial x_k}\mathrm{Ber}\,A$, то мы получаем формулу (**).

2.4.8. Лемма. *Пусть $\mathscr{U}$ — суперобласть, ρ — финитная форма объема на $\mathscr{U}$ и D — дифференцирование. Тогда для любой системы координат x на $\mathscr{U}$ имеем*

$$\int_{(\mathscr{U},\,x)}D(\rho)=0.$$

Доказательство. Можно считать, $D=h\frac{\partial}{\partial x_i}$. Тогда в силу 2.4.6 (i)

$$D(\rho)=\pm\frac{\partial}{\partial x_i}(h\rho)$$

и, значит, можно ограничиться случаем $D=\frac{\partial}{\partial x_i}$.

Пусть $\rho=f\Delta_x$, где $f=\sum f_\beta\xi^\beta$. Тогда $D(\rho)=\frac{\partial f}{\partial x_i}\Delta_x$. Если $x_i=\xi_k$ — нечетная координата, то коэффициент $\left(\frac{\partial f}{\partial\xi_k}\right)_{1\ldots1}$ равен нулю, так что $\int D(\rho)=0$. Если $x_i=u_i$ — четная координата, то

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_{1\ldots1}=\frac{\partial}{\partial u_i}f_{1\ldots1}.$$

Поэтому

$$(*)\qquad \int\limits_{(\mathcal{U},\,x)} D(\rho) = \int\limits_{U} \frac{\partial g}{\partial u_i}\, du,$$

где $g = f_{1\ldots 1}$ — финитная функция на области U.

Поскольку функция g финитна, мы можем заменить область U на все пространство $\mathbb{R}^n$. Применяя теорему Фубини и используя то, что на прямой интеграл вида $\int \left(\frac{\partial}{\partial u} g\right) du$ от финитной функции g равен нулю, мы получаем, что в правой части формулы (i) стоит нуль. Значит, $\int D(\rho) = 0$.

2.4.9. Докажем теперь теорему 2.4.5. Пусть $\rho = f\Delta_x$. Разобьем функцию f на два слагаемых $f = f_0 + f_1$, где $f_1 = f_{1\ldots 1}\, \xi_1 \ldots \xi_q$ — старший член в разложении $f = \sum f_\beta \xi^\beta$, а f_0 — сумма остальных членов, и положим $\rho_0 = f_0\Delta_x$, $\rho_1 = f_1\Delta_x$.

Ясно, что функция f_0 имеет вид $f_0 = \sum \frac{\partial}{\partial \xi_i}(f_i')$, где f_i' — какие-то финитные функции. Поэтому

$$\rho_0 = \sum \frac{\partial}{\partial \xi_i}(\rho_i')' = \sum D_i(\rho_i'), \quad \text{где} \quad D_i \in \operatorname{Der} C^\infty(\mathcal{U}),$$

ρ_i' — финитные формы на $\mathcal{U}$. Но тогда в силу леммы 6 интеграл от ρ_0 равен нулю в любой системе координат y. Значит, в дальнейшем можно считать $\rho = \rho_1 = f\Delta_x$, где $f = g(u)\xi_1 \ldots \xi_q$ и $g \in C_c^\infty(U)$.

Перепишем форму ρ в системе координат $y = (v, \eta)$. Пусть $\mathcal{J}_U$ — идеал, выделяющий U (т. е. идеал, порожденный ξ или, эквивалентно, порожденный η). Ясно, что $\rho \in \mathcal{J}_u^q \operatorname{Vol}_c(\mathcal{U})$, так что в системе координат $y = (v, \eta)$ она имеет вид $\rho = (h\eta_1 \ldots \eta_q)\,\Delta_y$. Нам нужно показать, что

$$\int g\, du_1 \ldots du_p = \pm \int h\, dv_1 \ldots dv_p.$$

В силу классической теоремы о замене переменных на области U достаточно проверить, что $g = h\frac{D(v)}{D(u)}$, где $\frac{D(v)}{D(u)}$ — якобиан перехода от координат u к координатам v на подстилающей области U.

Мы имеем

$$\rho = g\xi_1 \ldots \xi_q\Delta_x = h\eta_1 \ldots \eta_q\Delta_y = h\frac{D(y)}{D(x)}\eta_1 \ldots \eta_q.$$

Пусть

$$(I_1)_{ik} = \left(\frac{\partial v_k}{\partial u_i}\right), \qquad (I_2)_{jl} = \left(\frac{\partial \eta_l}{\partial \xi_j}\right).$$

Тогда

$$\frac{D(y)}{D(x)} = \det I_1 \det{}^{-1}(I_2) \pmod{\mathcal{J}_U}, \qquad \eta_l = \sum \xi_i \frac{\partial \eta_l}{\partial \xi_i} \pmod{\mathcal{J}_U^2},$$

так что

$$\eta_1 \ldots \eta_q = \det I_2(\xi_1, \ldots \xi_q) \pmod{\mathcal{J}_U^{q+1}}.$$

Поэтому, сокращая на $\xi_1 \ldots \xi_q$, мы получаем, что

$$g = h \det I_2 \det I_1 \det{}^{-1} I_2 \equiv h \det I_1 \pmod{\mathcal{J}_U}.$$

Но $\det I_1 \pmod{I_U}$, по определению, является обычным якобианом $\frac{D(v)}{D(u)}$, что доказывает теорему.

ГЛАВА III
СУПЕРМНОГООБРАЗИЯ

§ 1. Определение супермногообразий

3.1.1. *Супермногообразием* $\mathcal{M}$ называется такое окольцованное пространство $(M, \mathcal{O}_{\mathcal{M}})$, где $\mathcal{O}_{\mathcal{M}}$ — пучок коммутативных супералгебр на M, что

а) M — хаусдорфово топологическое пространство со счетной базой,

б) у каждой точки $m \in M$ найдется такая окрестность U, что окольцованное пространство $(U, \mathcal{O}_{\mathcal{M}}(U))$ изоморфно некоторой суперобласти $\mathcal{U}$.

Морфизмом супермногообразий называется морфизм соответствующих окольцованных пространств.

Морфизм $\varphi: \mathcal{N} \to \mathcal{M}$ называется *диффеоморфизмом*, если существует обратный морфизм $\psi: \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ (т. е. $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_{\mathcal{M}}$, $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_{\mathcal{N}}$).

3.1.2. Приведем эквивалентное определение супермногообразия, не апеллирующее к понятию пучка.

Пусть задано хаусдорфово топологическое пространство M со счетной базой.

Назовем *картой* на M пару $(\mathcal{U}, c)$, где $\mathcal{U}$ — суперобласть и $c: U \to M$ — гомеоморфизм подстилающей области U с некоторым открытым подмножеством в M. Это подмножество мы будем обычно отождествлять с U.

Пусть $(\mathcal{U}_1, c_1)$, $(\mathcal{U}_2, c_2)$ — две карты, $c_1(U_1)$, $c_2(U_2) \subset M$ и $W = c_1(U_1) \cap \cap c_2(U_2)$. Положим $U_1' = c_1^{-1}(W) \subset U_1$, $U_2' = c_2^{-1}(W) \subset U_2$. Обозначим через $\gamma'_{U_1U_2}: U_1' \to U_2'$ композицию $\gamma'_{U_1U_2} = c_2^{-1} \circ c_1$; ясно, что γ'_{U_2, U_1} — гомеоморфизм.

Согласованием двух карт $(\mathcal{U}_1, c_1)$ и $(\mathcal{U}_2, c_2)$ называется такой изоморфизм суперобластей $\gamma_{\mathcal{U}_1\mathcal{U}_2}: \mathcal{U}_1' \to \mathcal{U}_2'$, что подстилающее отображение $\tilde{\gamma}_{\mathcal{U}_1\mathcal{U}_2}$ совпадает с $\gamma'_{U_1U_2}$.

Атласом называется набор карт $\{(\mathcal{U}_\alpha, c_\alpha)\}$, где α пробегает некоторое множество индексов, и набор согласований $\gamma_{\alpha,\beta} = \gamma_{\mathcal{U}_\alpha, \mathcal{U}_\beta}$ карт $(\mathcal{U}_\alpha, c_\alpha)$ и $(\mathcal{U}_\beta, c_\beta)$ для всех пар индексов α, β такой, что

(i) Множества $c_\alpha(U_\alpha)$ покрывают M.

(ii) Для любых α, β, γ композиция $\gamma_{\alpha\beta} \circ \gamma_{\beta\gamma} \circ \gamma_{\gamma\alpha}$ — тождественное преобразование на той открытой суперобласти в $\mathcal{U}_\alpha$, на которой оно определено.

(iii) $\gamma_{\alpha\alpha}: \mathcal{U}_\alpha \to \mathcal{U}_\alpha$ — тождественный морфизм для любого α. В частности, $\gamma_{\alpha\beta} = \gamma_{\beta\alpha}^{-1}$.

Супермногообразием называется пространство вместе с отмеченным атласом на нем.

Пусть заданы супермногообразия $\mathcal{M} = (M, \{(\mathcal{U}_\alpha, c_\alpha)\})$, $\mathcal{N} = (N, \{(\mathcal{V}_\beta, c_\beta')\})$. *Морфизмом* $\varphi: \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ называется непрерывное отображение $\tilde{\varphi}: M \to N$ и такой набор морфизмов суперобластей $\varphi_{\alpha\beta}: \mathcal{U}_\alpha \to \mathcal{V}_\beta$, что $\varphi_{\alpha\beta}\gamma_{\gamma\alpha} = \gamma_{\delta\beta}\varphi_{\gamma\delta}$ для любых α, β, γ и δ.

Отметим отличие определения супермногообразия от определения многообразия. В определении многообразия не надо задавать согласований $\gamma_{\mathcal{V},\mathcal{U}}$, поскольку морфизм $\gamma_{\mathcal{V},\mathcal{U}}$ полностью определяется по $\gamma'_{V,U}$. Для суперслучая это не так, ибо морфизм суперобластей не определяется отображением точек. Аналогично в случае многообразий условия (ii) и (iii) в определении атласа выполнены автоматически, поскольку они выполнены для отображений γ'.

3.1.3. Для построения супермногообразий полезна следующая лемма.

Лемма. *Пусть M — хаусдорфово пространство со счетной базой $\{U_\alpha\}$ — семейство открытых областей в M, которое покрывает все M и $\mathcal{U}_\alpha = (U_\alpha, \mathcal{O}_{\mathcal{U}_\alpha})$ — суперобласти. Пусть для некоторых пар индексов α, β*

таких, что $U_\alpha \subset U_\beta$, задано вложение $\gamma_{\beta,\alpha}\colon \mathcal{U}_\alpha \to \mathcal{U}_\beta$, согласованное с вложением U_α в U_β. Предположим, что

а) *если определены $\gamma_{\delta\beta}$ и $\gamma_{\beta\alpha}$, то определено $\gamma_{\delta\alpha}$ и $\gamma_{\delta\alpha} = \gamma_{\delta\beta} \circ \gamma_{\beta\alpha}$. Вложение $\gamma_{\alpha\alpha}$ всегда определено и тождественно;*

б) *если точка $m \in M$ содержится в $U_\alpha \cap U_\beta$, то существует такое δ, что $m \in U_\delta$ и определены вложения*

$$\gamma_{\alpha\delta}\colon U_\delta \to \mathcal{U}_\alpha \quad \text{и} \quad \gamma_{\beta\delta}\colon U_\delta \to \mathcal{U}_\beta.$$

Тогда существует супермногообразие $\mathcal{M} = (M, \mathcal{O}_{\mathcal{M}})$ и такой набор морфизмов $c_\alpha\colon \mathcal{U}_\alpha \to \mathcal{M}$, согласованных с вложениями U_α в M, что $c_\beta \circ \gamma_{\beta\alpha} = c_\alpha$, если $\gamma_{\beta\alpha}$ определено. При этом супермногообразие $\mathcal{M}$ и набор морфизмов c_α определены однозначно с точностью до изоморфизма.

3.1.4. Пусть $\mathcal{M} = (M, \mathcal{O}_{\mathcal{M}})$ — супермногообразие. Рассмотрим на M пучок коммутативных алгебр $\mathcal{O}_M$, где $\Gamma(U, \mathcal{O}_M) = \pi\Gamma(U, \mathcal{O}_{\mathcal{M}})$ для любого открытого подмножества $U \in M$ (здесь $\pi : A \to A/(A_{\bar 1})$). Как вытекает из п. 3.1.1, окольцованное пространство $(M, \mathcal{O}_M)$ является обычным гладким многообразием. Мы будем называть его *подстилающим многообразием* супермногообразия $\mathcal{M}$ и обозначать тем же символом M.

Как вытекает из 2.1.7, для любого морфизма $\varphi\colon \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ подстилающее отображение $\tilde\varphi : M \to N$ будет гладким.

Так же как в 2.1.3, можно построить каноническое вложение подстилающего многообразия $\pi\colon M \to \mathcal{M}$, где M рассматривается как супермногообразие. При этом для любого морфизма $\varphi\colon \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ имеем $\tilde\varphi \circ \pi = \pi \circ \varphi$.

Супермногообразие $\mathcal{M}$ назовем *связным*, если связно M, и *компактным*, если компактно M.

3.1.5. *Если $\mathcal{M}$ — супермногообразие, то каждому открытому подмножеству* $M' \subset M$ соответствует супермногообразие $\mathcal{M}' = (M', \mathcal{O}_{\mathcal{M}}|_{M'})$; такое супермногообразие мы будем называть *открытым подсупермногообразием* в $\mathcal{M}$. Естественным образом определены *объединение* и *пересечение открытых подсупермногообразий*, а также *прообраз открытого подсупермногообразия при морфизме*. *Окрестностью* подмножества $X \subset M$ назовем такое открытое подмногообразие $\mathcal{M}'$ в $\mathcal{M}$, что $M' \supset X$.

Морфизм супермногообразий $\varphi : \mathcal{N} \to \mathcal{M}$ назовем *открытым вложением*, если он задает диффеоморфизм $\mathcal{N}$ с некоторым открытым подсупермногообразием $\mathcal{M}' \subset \mathcal{M}$; при этом мы обычно не будем различать $\mathcal{N}$ и $\mathcal{M}'$.

Открытое подсупермногообразие $\mathcal{U}$ в $\mathcal{M}$ назовем *суперобластью*, если оно диффеоморфно некоторой суперобласти.

Очевидно, что если $\mathcal{M}$ — связное супермногообразие, то все его подсуперобласти имеют одинаковую размерность (p, q). Пару (p, q) назовем *размерностью супермногообразия* $\mathcal{M}$.

Локальной системой координат $x = (u, \xi)$ на $\mathcal{M}$ назовем подсуперобла-ласть $\mathcal{U}$ с системой координат $x = (u, \xi)$.

Если $\mathcal{M}'$ — открытое подсупермногообразие в $\mathcal{M}$ и $f \in C^\infty(\mathcal{M})$, то образ f при естественном гомоморфизме $C^\infty(\mathcal{M}) \to C^\infty(\mathcal{M}')$ назовем *ограничением функции* f на $\mathcal{M}'$ и обозначим через $f|_{\mathcal{M}'}$.

Так же как в 2.4.3, для каждой функции $f \in C^\infty(\mathcal{M})$ определяется ее *носитель* $\operatorname{supp} f \subset M$. Пространство финитных функций, т. е. функций с компактным носителем, мы обозначим через $C_c^\infty(\mathcal{M})$. Если $\mathcal{M}'$ — открытое подсупермногообразие в $\mathcal{M}$, то ясно, что супералгебра $C_c^\infty(\mathcal{M}')$ вложена в $C_c^\infty(\mathcal{M})$.

3.1.6. Пусть $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ — супермногообразия. Для подсуперобластей $\mathcal{U} \subset \mathcal{M}$ и $\mathcal{V} \subset \mathcal{N}$ зададим на множестве $U \times V \subset M \times N$ структуру суперобласти $\mathcal{U} \times \mathcal{V}$. Если $\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$ и $\mathcal{V}' \subset \mathcal{V}$, то обозначим через $\gamma_{\mathcal{U}\times\mathcal{V},\, \mathcal{U}'\times\mathcal{V}'}$

естественное вложение $\mathcal{U}' \times \mathcal{V}'' \to \mathcal{U} \times \mathcal{V}'$. Из леммы 1.3 вытекает, что набор суперобластей $\mathcal{U} \times \mathcal{V}'$ и набор вложений $\gamma_{\mathcal{U}\times\mathcal{V}, \mathcal{U}'\times\mathcal{V}'}$ однозначно задает структуру супермногообразия.

Полученное супермногообразие $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$ называется *произведением супермногообразий* $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$. Естественным образом определены морфизмы — проекции $\mathrm{pr}_{\mathcal{M}}: \mathcal{M} \times \mathcal{N} \to \mathcal{M}$ и $\mathrm{pr}_{\mathcal{N}}: \mathcal{M} \times \mathcal{N} \to \mathcal{N}$.

Легко проверить, что лемма 2.1.12. остается справедливой, если в ней заменить суперобласти на супермногообразия. Если заданы морфизмы $\alpha: \mathcal{L} \to \mathcal{M}$ и $\beta: \mathcal{L} \to \mathcal{N}$, то через $\alpha \times \beta$ обозначим морфизм $\alpha \times \beta: \mathcal{L} \to \to \mathcal{M} \times \mathcal{N}$, задаваемый условиями $\mathrm{pr}_{\mathcal{M}} \circ (\alpha \times \beta) = \alpha$, $\mathrm{pr}_{\mathcal{N}} \circ (\alpha \times \beta) = \beta$.

Пусть задано семейство открытых подсупермногообразий $\{U_\alpha\}$ супермногообразия $\mathcal{M}$ (или, что то же самое, семейство открытых подмножеств $\{U_\alpha\}$ в подстилающем многообразии M). Назовем семейство $\{\mathcal{U}_\alpha\}$ (*открытым*) *покрытием*, если объединение множеств U_α совпадает с M. Если $\{\mathcal{U}_\alpha\}$ и и $\{\mathcal{V}_\beta\}$ — два покрытия, то будем говорить, что покрытие $\{\mathcal{U}_\alpha\}$ вписано в $\{\mathcal{V}_\beta\}$, если для каждого индекса α найдется такой индекс β, что $\mathcal{U}_\alpha \subset \mathcal{V}_\beta$. Назовем покрытие $\mathcal{U}_\alpha$ локально конечным, если любой компакт K в M пересекается с конечным числом множества U_α.

3.1.7. Лемма. *Пусть $\{\mathcal{V}_\beta\}$—покрытие супермногообразия $\mathcal{M}$. Тогда существует покрытие $\{\mathcal{U}_\alpha\}$ и семейство функций $\{\varphi_\alpha \in (C_c^\infty(\mathcal{M}))_{\bar{0}}\}$* такие, что

а) *покрытие $\{\mathcal{U}_\alpha\}$ вписано в покрытие $\{\mathcal{V}_\beta\}$*;

б) *покрытие $\{\mathcal{U}_\alpha\}$ локально конечно*;

в) $\mathrm{supp}\ \varphi_\alpha$—*компактное множество, содержащееся в $\mathcal{U}_\alpha$, и функция $\tilde{\varphi}_\alpha \in C^\infty(M)$ неотрицательна*;

г) $\sum \varphi_\alpha = 1$.

(В силу б) и в) на каждом компактном подмножестве $K \subset M$ в этой сумме отлично от нуля только конечное число членов, так что сумма имеет смысл.)

Семейство функций $\{\varphi_\alpha\}$ назовем *разбиением единицы, вписанным в покрытие* $\{\mathcal{V}_\beta\}$.

Доказательство. Как следует из обычной теоремы о разбиении единицы, существует покрытие $\{U_\alpha\}$ и набор функций $\psi_\alpha \in C^\infty(M)$, удовлетворяющие условиям а) — г). Подразбив, если нужно, покрытие $\{U_\alpha\}$, мы можем считать, что каждое множество U_α является подстилающей областью для некоторой суперобласти $\mathcal{U}_\alpha$. Тогда можно выбрать такую функцию $\varphi'_\alpha \in (C^\infty(\mathcal{U}_\alpha))_{\bar{0}}$, что $\tilde{\varphi}'_\alpha = \psi_\alpha$ и $\mathrm{supp}\ \varphi'_\alpha = \mathrm{supp}\ \psi_\alpha$. Этот набор функций будет удовлетворять условиям а), б), в).

Положим $\varphi = \sum \varphi'_\alpha$. Ясно, что $\tilde{\varphi} = \sum \tilde{\varphi}'_\alpha = \sum \psi_\alpha = 1$, так что φ локально обратимая функция, а значит, и глобально обратимая функция. Теперь положим $\varphi_\alpha = \varphi^{-1}\varphi'_\alpha$.

3.1.8. Следствие. (Принцип локализации.) *Пусть X — замкнутое подмножество в M, $\mathcal{U}$ — открытое подсупермногообразие, содержащее X. Пусть $f \in C^\infty(\mathcal{U})$. Тогда найдется такое открытое подсупермногообразие $\mathcal{V}$, содержащееся в $\mathcal{U}$ и содержащее X, и такая функция $h \in C^\infty(\mathcal{M})$, что $f|_{\mathcal{V}} = h|_{\mathcal{V}}$ и $\mathrm{supp}\ h \subset \mathrm{supp}\ f$. При этом, если X — компакт, то $h \in C_c^\infty(\mathcal{U}) \subset C_c^\infty(\mathcal{M})$.*

Доказательство. Пусть $\{\varphi_\alpha\}$ — разбиение единицы, вписанное в покрытие $\{U, M \setminus X\}$. Пусть I_X — множество тех индексов α, для которых $\mathrm{supp}\ \varphi_\alpha$ пересекает X; ясно, что $\mathrm{supp}\ \varphi_\alpha \subset U$ для $\alpha \in I_X$. Положим $h = \sum \varphi_\alpha f$, где $\alpha \in I_X$. Все члены этой суммы содержатся в $C_c^\infty(\mathcal{U}) \subset C_c^\infty(\mathcal{M})$, так что $h \in C^\infty(\mathcal{M})$ и $\mathrm{supp}\ h \subset \mathrm{supp}\ f$. Если X — компакт, то I_X — конечное множество и, значит, $h \in C_c^\infty(\mathcal{U})$.

3.1.9. Покажем на простом примере, как применяется принцип локализации.

Лемма. (Локализация дифференцирования.) *Пусть $\mathcal{M}$ — супермногообразие, D: $C^\infty(\mathcal{M}) \to C^\infty(\mathcal{M})$ — дифференцирование и $\mathcal{U}$ — открытое подсупермногообразие в $\mathcal{M}$. Тогда существует, причем ровно одно, дифференцирование D': $C^\infty(\mathcal{U}) \to C^\infty(\mathcal{U})$ такое, что $Dg|_{\mathcal{U}} = D'(g|_{\mathcal{U}})$ для любой функции $g \in C^\infty(\mathcal{M})$.*

Доказательство. Прежде всего проверим, что если $\mathcal{V}$ — открытое подсупермногообразие в $\mathcal{M}$, то для любой функции $h \in C^\infty(\mathcal{M})$ ограничение $Dh|_{\mathcal{V}}$ определяется по ограничению $h|_{\mathcal{V}}$; иначе говоря, если $h_{\mathcal{V}} = 0$, то $Dh|_{\mathcal{V}} = 0$. Действительно, пусть $v \in \mathcal{V}$. В силу 3.1.8 можно найти функцию $\varphi \in C_0^\infty(\mathcal{M})$ такую, что $\operatorname{supp}\varphi \subset V$ и $\varphi = 1$ в некоторой окрестности $\mathcal{W}$ точки v. Поэтому $\varphi h = 0$, так что $D(\varphi h) = D\varphi \cdot h + \varphi \cdot Dh = 0$. Поскольку $h|_{\mathcal{W}} = 0$, $\varphi|_{\mathcal{W}} = 1$, то $Dh|_{\mathcal{W}} = 0$; так как это верно для любой точки v, то $Dh|_{\mathcal{V}} = 0$.

Пусть теперь $f \in C^\infty(\mathcal{U})$. Для каждой точки $u \in \mathcal{U}$ можно, используя 3.1.8, подобрать функцию $h \in C^\infty(\mathcal{M})$, совпадающую с f в некоторой окрестности $\mathcal{V}$ точки u. При этом, по доказанному выше, функция Dh в этой окрестности не зависит от h, а зависит только от f. Поэтому эти функции, заданные на окрестностях различных точек из $\mathcal{U}$, склеиваются в единую функцию на $\mathcal{U}$, которую мы и обозначим через $D'f$. Таким образом мы построили оператор D', который, как легко проверить, является дифференцированием. Единственность D' легко вытекает из этого доказательства.

§ 2. Подсупермногообразия

3.2.1. Пусть $\mathcal{W}$ — суперобласть с координатами (u, v, ξ, η) и $\mathcal{U}$ — подсуперобласть, выделяемая уравнениями $v=0$, $\eta=0$. В этом случае назовем вложение φ: $\mathcal{U} \to \mathcal{W}$ *стандартным вложением*.

3.2.2. Пусть φ: $\mathcal{N} \to \mathcal{M}$ — морфизм супермногообразий. Назовем φ *регулярным замкнутым вложением*, если выполняются следующие условия:

а) множество $N' = \tilde{\varphi}(N) \subset M$ замкнуто и $\tilde{\varphi}: N \to N'$ — гомеоморфизм, если наделить N' индуцированной топологией;

б) для каждой точки $n \in \mathcal{N}$ найдется такая окрестность $\mathcal{U}$ точки n в $\mathcal{N}$ и такая окрестность $\mathcal{V}$ точки $\varphi(n)$ в $\mathcal{M}$, что φ: $\mathcal{U} \to \mathcal{V}$ — стандартное вложение.

Назовем морфизм φ: $\mathcal{N} \to \mathcal{M}$ *регулярным вложением*, если он является регулярным замкнутым вложением в некоторое открытое подсупермногообразие $\mathcal{M}' \subset \mathcal{M}$. Иначе говоря, в условии а) надо требовать, чтобы множество $\tilde{\varphi}(\mathcal{N})$ было локально замкнутым (пересечением открытого и замкнутого множеств).

Как вытекает из 2.3.8, условие б) эквивалентно следующему условию б′).

б′) Морфизм φ является иммерсией в каждой точке $n \in \mathcal{N}$, т. е. ранг матрицы Якоби отображения φ в точке n равен $p+q$, где (p, q) — размерность $\mathcal{N}$ в окрестности точки n.

Здесь матрица Якоби берется относительно некоторых локальных систем координат в окрестности точек n и $\varphi(n)$; ясно, что от выбора этих систем координат ранг матрицы Якоби в точке не зависит.

3.2.3. Лемма. а) *Пусть φ: $\mathcal{N} \to \mathcal{M}$ — регулярное вложение и ψ_1, ψ_2 : $\mathcal{L} \to \mathcal{N}$ — два морфизма. Предположим, что $\varphi \circ \psi_1 = \varphi \circ \psi_2$. Тогда $\psi_1 = \psi_2$.*

б) *Пусть* $\varphi'\colon \mathcal{N}\to\mathcal{L}$ *и* $\varphi''\colon\mathcal{L}\to\mathcal{M}$ — *такие морфизмы, что* $\varphi = \varphi''\circ\varphi'\colon\mathcal{N}\to\mathcal{M}$ — *регулярное вложение. Тогда* φ' — *также регулярное вложение. Тот же факт верен для регулярных замкнутых вложений.*

Доказательство. а) Ясно, что $\widetilde{\psi}_1=\widetilde{\psi}_2$. Поэтому мы можем проверять совпадение ψ_1 и ψ_2 локально, т. е. считать, что $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ — суперобласти, причем $\varphi\colon\mathcal{N}\to\mathcal{M}$ — стандартное вложение подсупермногообразия. Но в этом случае утверждение леммы вытекает из координатной записи отображений. б) Легко видеть, что φ' удовлетворяет условиям а) и б) из 3.2.2.

3.2.4. Назовем два регулярных вложения $\varphi:\mathcal{N}\to\mathcal{M}$ и $\varphi'\colon\mathcal{N}'\to\mathcal{M}$ *эквивалентными*, если существуют такие морфизмы $\psi'\colon\mathcal{N}'\to\mathcal{N}$ и $\psi\colon\mathcal{N}\to\mathcal{N}'$, что $\varphi'\psi=\varphi$ и $\varphi\psi'=\varphi'$. Из 3.2.3 вытекает, что такие ψ и ψ' определены однозначно, причем $\psi\psi'$ и $\psi'\psi$ — тождественны.

Класс эквивалентных регулярных вложений мы назовем *подсупермногообразием.* Класс эквивалентных регулярных замкнутых вложений назовем *замкнутым подсупермногообразием.*

Будем говорить, что подсупермногообразие $\psi:\mathcal{N}'\to\mathcal{M}$ вложено в подсупермногообразие $\varphi\colon\mathcal{N}\to\mathcal{M}$ (обозначение $\mathcal{N}'\subset\mathcal{N}$), если существует такой морфизм $\psi'\colon\mathcal{N}'\to\mathcal{N}$, что $\varphi\circ\psi'=\psi$. Как вытекает из 3.2.3, такой морфизм определен однозначно и является регулярным вложением, т. е. задает подсупермногообразие $\mathcal{N}'$ в $\mathcal{N}$. Более общо, если $(\mathcal{N},\varphi)$ — подсупермногообразие в $\mathcal{M}$ и $\psi\colon\mathcal{W}\to\mathcal{M}$ — морфизм супермногообразий, то запись $\psi(\mathcal{W})\subset\mathcal{N}$ означает, что найдется такой морфизм $\psi'\colon\mathcal{W}\to\mathcal{N}$ (единственный в силу 3.2.3а), что $\varphi\circ\psi'=\psi$.

3.2.5. Пусть $\varphi\colon\mathcal{N}\to\mathcal{M}$ — регулярное замкнутое вложение. Тогда гомоморфизм $\varphi^*\colon C^\infty(\mathcal{M})\to C^\infty(\mathcal{N})$ является эпиморфизмом. Действительно, если $f\in C^\infty(\mathcal{N})$, то из определения регулярного замкнутого вложения легко вытекает, что у каждой точки $m\in\mathcal{M}$ найдется такая окрестность $\mathcal{V}_m$ и такая функция $f_m\in C^\infty(\mathcal{V}_m)$, что $f_m|_{\mathcal{N}\cap\mathcal{V}_m}=f|_{\mathcal{N}\cap\mathcal{V}_m}$. Пусть φ_α — разбиение единицы, отвечающее покрытию $\{\mathcal{U}_\alpha\}$, вписанному в $\{\mathcal{V}_m\}$ и f_α — ограничение функции f_m на $\mathcal{U}_\alpha$ (здесь $\mathcal{U}_\alpha\subset\mathcal{V}_m$). Тогда функция $h=\sum\varphi_\alpha\cdot f_\alpha$ лежит в $C^\infty(\mathcal{M})$ и $h|_{\mathcal{N}}=f$.

Можно показать, что верно и обратное утверждение: если $\varphi:\mathcal{N}\to\mathcal{M}$ — такой морфизм супермногообразий, что $\varphi^*:C^\infty(\mathcal{M})\to C^\infty(\mathcal{N})$ — эпиморфизм, то φ — регулярное замкнутое вложение.

3.2.6. Покажем теперь, как задавать подсупермногообразия уравнениями. Пусть $\varphi\colon\mathcal{N}\to\mathcal{M}$ — подсупермногообразие, $f\in C^\infty(\mathcal{M})$. Положим $\mathcal{J}_{\mathcal{N}}=\{f\in C^\infty(\mathcal{M})\mid\varphi^*(f)=0\}$.

Предложение. а) *Пусть* $\mathcal{N}$ — *замкнутое подсупермногообразие в* $\mathcal{M}$. *Тогда идеал* $\mathcal{J}_{\mathcal{N}}$ *удовлетворяет следующим условиям.*

1) *Если точка* $m\in M$ *такова, что* $\mathcal{J}_{\mathcal{N}}\subset\mathcal{J}_m$, *то в* $\mathcal{J}_{\mathcal{N}}$ *найдутся такие однородные (относительно четности) функции* $f_1,\ldots,f_r$, *что* $\mathcal{J}_{\mathcal{N}}$ *порождается ими в некоторой окрестности точки* m *и их дифференциалы линейно независимы в точке* m.

2) *Если функции* $f_1,\ldots,f_n,\ldots$ *лежат в* $\mathcal{J}_{\mathcal{N}}$ *и любой компакт* $K\subset M$ *пересекается с конечным числом множеств* $\operatorname{supp} f_i$, *то функция* $f=\Sigma f_i$ *также лежит в* $\mathcal{J}_{\mathcal{N}}$.

б) *Обратно, если* $\mathcal{J}$ — *идеал в* $C^\infty(\mathcal{M})$, *удовлетворяющий условиям* 1), 2), *то существует единственное замкнутое подсупермногообразие* $\mathcal{N}\subset\mathcal{M}$ *такое, что* $\mathcal{J}=\mathcal{J}_{\mathcal{N}}$.

Заметим, что условие $\mathcal{J}\subset\mathcal{J}_m$ в 1) означает просто, что все функции $f\in\mathcal{J}_{\mathcal{N}}$ обращаются в нуль в точке m.

Если не требовать выполнения условия 2), то утверждение б) становится неверным, например, если $\mathcal{M} = R^{1,0}$, $\mathcal{J} = C_c^\infty(\mathcal{M})$, то $\mathcal{J}$ тривиально удовлетворяет условию 1), но, конечно, не соответствует никакому подмногообразию. По существу, условие2) эквивалентно тому, что идеал $\mathcal{J}$ представляет собой глобальные сечения некоторого пучка идеалов структурного пучка.

Доказательство предложения. а) Легко вытекает из определений и принципа локализации 3.1.8. Докажем б).

Положим $N = \{m \in M;\ f(m) = 0$ для всех $f \in \mathcal{J}\}$. Ясно, что N — замкнутое подмножество M. В силу 2.3.8 для каждой точки $n \in N$ существует такая локальная система координат x в некоторой окрестности $\mathcal{U}_n$ точки n в $\mathcal{M}$, что функции $f_1, \ldots, f_r$ входят в набор координат

$$x = (u_1, \ldots, u_p, \xi_1, \ldots, \xi_q);$$

кроме того, можно считать, что идеал $\mathcal{J}$ в этой окрестности порождается функциями f_i. Тогда оставшиеся координаты задают на $\mathcal{U}_n \cap \mathcal{N}$ структуру суперобласти, стандартно вложенной в $\mathcal{U}_n$. Семейство таких структур для различных точек $n \in N$ задает структуру супермногообразия вместе с регулярным замкнутым вложением $\varphi\colon \mathcal{N} \to \mathcal{M}$. Ясно, что $\mathcal{J} \subset \mathcal{J}_{\mathcal{N}}$.

Докажем, что $\mathcal{J}_{\mathcal{N}} \subset \mathcal{J}$. Пусть $f \in \mathcal{J}_{\mathcal{N}}$. По построению, у каждой точки $\mathcal{J}_{\mathcal{N}}$ найдется такая окрестность $\mathcal{U}_m$, что $f|_{\mathcal{U}_m}$ порождается ограничением идеала $\mathcal{J}$. Рассмотрим разбиение единицы φ_β, вписанное в покрытие $\{\mathcal{U}_m\}$. Тогда ясно, что все функции $\varphi_\beta f$ лежат в $\mathcal{J}$, и в силу условия 2) $f = \Sigma\varphi_\beta f \in \mathcal{J}$.

Единственность подсупермногообразия $\mathcal{N}$ легко вытекает из следующей леммы.

3.2.7. Лемма. *Пусть $\varphi\colon \mathcal{N} \to \mathcal{M}$ — замкнутое подсупермногообразие в $\mathcal{M}$, $\mathcal{J}_{\mathcal{N}} \subset C^\infty(\mathcal{M})$ — соответствующий идеал. Пусть $\psi\colon \mathcal{L} \to \mathcal{M}$ — такой морфизм, что $\psi^*(\mathcal{J}_{\mathcal{N}}) = 0$. Тогда существует единственный морфизм $\psi'\colon \mathcal{L} \to \mathcal{N}$ такой, что $\varphi\psi' = \psi$.*

Доказательство. Единственность доказана в 3.2.3. Докажем существование.

Ясно, что $\tilde{\psi}(L) \subset \tilde{\varphi}(N)$ и, поскольку $\tilde{\varphi}\colon N \to \tilde{\varphi}(N)$ — гомеоморфизм, существует непрерывное отображение $\tilde{\psi}'\colon L \to N$, для которого $\widetilde{\varphi\psi'} = \tilde{\psi}$.

Морфизм ψ' достаточно строить локально, поскольку в силу единственности он будет согласован на пересечениях. Поэтому можно считать, что $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ суперобласти и $\varphi\colon \mathcal{N} \to \mathcal{M}$ стандартное вложение. В этом случае утверждение леммы вытекает из координатной записи отображений.

3.2.8. В этом и следующем пунктах мы приведем два способа построения подсупермногообразий, основанных на предложении из п. 3.2.6.

Пусть $\mathcal{M}$ — супермногообразие, $m \in M$. Определим кокасательное пространство $T_m^*(\mathcal{M})$ как $\mathcal{J}_m/\mathcal{J}_m^2$ и касательное пространство $T_m(\mathcal{M})$ как сопряженное к $T_m^*(\mathcal{M})$. Как вытекает из принципа локализации 3.1.8, касательное пространство не меняется при переходе к окрестности точки m.

Каждый морфизм $\varphi\colon \mathcal{N} \to \mathcal{M}$ задает морфизм касательных пространств $\partial\varphi\colon T_n(\mathcal{N}) \to T_{\varphi(n)}(\mathcal{M})$. Если $\mathcal{N}$ — подсупермногообразие, то $\partial\varphi$ — вложение, и мы будем отождествлять $T_n(\mathcal{N})$ с подсуперпространством $\partial\varphi(T_n(\mathcal{N})) \subset T_{\varphi(n)}(\mathcal{M})$.

Пусть задано подсупермногообразие $\mathcal{N}$ супермногообразия $\mathcal{M}$ и морфизм супермногообразий $\psi\colon \mathcal{L} \to \mathcal{M}$. Назовем морфизм ψ *трансверсальным подсупермногообразию* $\mathcal{N}$, в точке $l \in \mathcal{L}$, если либо $\tilde{\psi}(l) \notin N$, либо образ $\partial\psi(T_l(\mathcal{L}))$ касательного пространства $T_l(\mathcal{L})$ в касательном пространстве $T_m(\mathcal{M})$ в точке $m = \tilde{\psi}(l)$ в сумме с подпространством $T_m(\mathcal{N})$ дает все пространство $T_m(\mathcal{M})$.

Лемма. *Пусть морфизм $\psi\colon \mathscr{L}\to\mathscr{M}$ трансверсален подсупермногообразию $\mathscr{N}$ во всех точках $l\subset\mathscr{L}$. Пусть $\mathcal{J}$ — идеал в $C^\infty(\mathscr{L})$, порожденный $\psi^*(\mathcal{J}_{\mathscr{N}})$. Тогда идеал $\mathcal{J}$ выделяет некоторое подсупермногообразие $\mathscr{L}'$ в $\mathscr{L}$.*

Доказательство. Легко проверяется, что идеал $\mathcal{J}$ удовлетворяет условиям 3.2.6, 1), 2), и значит, выделяет подсупермногообразие.

Мы будем обозначать построенное подсупермногообразие в $\mathscr{L}$ через $\psi^{-1}(\mathscr{N})$. Легко проверить, что его подстилающее многообразие совпадает с $\tilde{\psi}^{-1}(N)$.

3.2.9. Предложение. Пусть $\psi\colon \mathscr{L}\to\mathscr{M}$ — морфизм супермногообразий и $m\in\mathscr{M}$. Предположим, что для любой точки $l\in\mathscr{L}$ такой, что $\psi(l)=m$, морфизм ψ является морфизмом постоянного ранга в окрестности точки l. Пусть $\mathcal{J}$ — идеал в $C^\infty(\mathscr{L})$, порожденный $\psi^*(\mathcal{J}_m)$. Тогда идеал $\mathcal{J}$ выделяет некоторое подсупермногообразие $\mathscr{L}'$ в $\mathscr{L}$.

Доказательство. Используя теорему о морфизмах постоянного ранга и принцип локализации, легко проверить, что идеал $\mathcal{J}$ удовлетворяет условиям 3.2.6 1), 2) и, значит, выделяет подсупермногообразие.

Мы будем обозначать это подсупермногообразие через $\psi^{-1}(m)$; его подстилающее многообразие совпадает с $\tilde{\psi}^{-1}(m)$.

§ 3. Семейства

3.3.1. В классическом анализе очень большую роль играют семейства объектов какого-либо типа, которые гладко зависят от одного или нескольких параметров. Например, это может быть семейство гладких отображений $\varphi_t\colon \mathrm{N}\to\mathrm{M}$, семейство векторных полей X_t на M, семейство систем координат $\{x_i\}_t$, гладко зависящих от t.

Рассмотрим для примера семейство гладких отображений $\varphi_t\colon \mathrm{N}\to\mathrm{M}$. Чтобы задать такое семейство, мы при каждом значении t задаем гладкое отображение $\varphi_t\colon \mathrm{N}\to\mathrm{M}$ и требуем, чтобы отображения φ_t «гладко зависели от t». Последнее условие означает, что если W— многообразие значений параметра t, то возникающее отображение $\psi\colon \mathrm{W}\times\mathrm{N}\to\mathrm{M}$ является гладким.

В суперслучае хотелось бы иметь семейства, зависящие от нечетных параметров t (например, чтобы «многообразие» $\mathscr{W}$ «значений» параметра t совпадало с $\mathscr{R}^{0,q}$).

3.3.2. Пусть $\mathscr{W}$ — супермногообразие, которое мы будем называть супермногообразием параметров. *Гладким семейством морфизмов* $\varphi_{\mathscr{W}}\colon \mathscr{N}\to\mathscr{M}$, *параметризованным супермногообразием* $\mathscr{W}$ (или просто $\mathscr{W}$-*семейством*), мы будем называть произвольный морфизм $\varphi\colon \mathscr{W}\times\mathscr{N}\to\mathscr{M}$. Если w — точка в $\mathscr{W}$ и $i\colon w\to\mathscr{W}$ — морфизм вложения точки, то морфизм $\varphi\circ(i\times\mathrm{id})$ мы будем называть *значением семейства* $\varphi_{\mathscr{W}}$ в точке w. Как и положено в суперслучае, семейство морфизмов никоим образом не определяется набором своих значений во всех точках.

Покажем теперь на этом примере, что такое подстановка параметров. Пусть $\alpha\colon\mathscr{U}\to\mathscr{W}$ — морфизм супермногообразий и $\varphi\colon\mathscr{W}\times\mathscr{N}\to\mathscr{M}$ есть $\mathscr{W}$-семейство морфизмов $\mathscr{N}$ в $\mathscr{M}$. Мы хотим сделать подстановку параметра и определить $\mathscr{U}$-семейство морфизмов $\mathscr{N}$ в $\mathscr{M}$, которое, говоря на классическом языке, получается из семейства φ «с помощью выражения координат $\mathscr{W}$ через координаты $\mathscr{U}$». Это $\mathscr{U}$-семейство, которое мы будем обозначать через φ^α, строится следующим образом:

$$\varphi^\alpha\colon \mathscr{U}\times\mathscr{N}\xrightarrow{(\alpha\circ\mathrm{pr}_{\mathscr{U}})\times\mathrm{pr}_{\mathscr{N}}}\mathscr{W}\times\mathscr{N}\xrightarrow{\varphi}\mathscr{M}.$$

Мы будем говорить, что семейство φ^α получается из семейства φ с помощью замены параметра α.

3.3.3. Мы будем также пользоваться эквивалентным определением $\mathcal{W}$-семейства морфизмов $\mathcal{N}$ в $\mathcal{M}$, когда вместо морфизма $\varphi\colon \mathcal{W}\times\mathcal{N}\to\mathcal{M}$ рассматривается морфизм $\varphi'\colon \mathcal{W}\times\mathcal{N}\to\mathcal{W}\times\mathcal{M}$, который согласован с проекцией на $\mathcal{W}$, т. е. $\mathrm{pr}_1(\mathcal{W}\times\mathcal{N})=\mathrm{pr}_1(\mathcal{W}\times\mathcal{M})\circ\varphi'$. Ясно, что каждому морфизму φ однозначно соответствует морфизм $\varphi=\mathrm{pr}_1\circ\varphi'$ и обратно.

Если заданы $\mathcal{W}$-семейства морфизмов $\varphi_{\mathcal{W}}\colon \mathcal{N}\to\mathcal{M}$ и $\psi_{\mathcal{W}}\colon \mathcal{M}\to\mathcal{L}$, то определим композицию $(\psi\circ\varphi)_{\mathcal{W}}$, полагая

$$\psi\circ\varphi\colon \mathcal{W}\times\mathcal{N}\xrightarrow{\varphi}\mathcal{W}\times\mathcal{M}\xrightarrow{\psi}\mathcal{W}\times\mathcal{L}.$$

Будем называть $\mathcal{W}$-семейство морфизмов $\varphi_{\mathcal{W}}\colon \mathcal{N}\to\mathcal{M}$ *семейством диффеоморфизмов*, если существует такое $\mathcal{W}$-семейство морфизмов $\psi_{\mathcal{W}}\colon \mathcal{M}\to\mathcal{N}$, что $\varphi\circ\psi=\psi\circ\varphi=\mathrm{id}$. Это эквивалентно тому, что морфизм $\varphi\colon \mathcal{W}\times\mathcal{N}\to\mathcal{W}\times\mathcal{M}$ является диффеоморфизмом.

Если $\alpha\colon \mathcal{U}\to\mathcal{W}$ — морфизм (замена параметров), то по $\mathcal{W}$-семейству морфизмов $\varphi\colon \mathcal{W}\times\mathcal{N}\to\mathcal{W}\times\mathcal{M}$ определим $\mathcal{U}$-семейство морфизмов φ^α, положив

$$\varphi^\alpha\colon \mathcal{U}\times\mathcal{N}\xrightarrow{\mathrm{pr}_{\mathcal{U}}\times(\alpha\circ\mathrm{pr}_{\mathcal{U}})\times\mathrm{pr}_{\mathcal{N}}}\mathcal{U}\times\mathcal{W}\times\mathcal{N}\xrightarrow{\mathrm{pr}_{\mathcal{W}}\times(\varphi\circ\mathrm{pr}_{\mathcal{W}\times\mathcal{N}})}$$
$$\to\mathcal{U}\times(\mathcal{W}\times\mathcal{M})\xrightarrow{\mathrm{pr}_{\mathcal{U}\times\mathcal{M}}}\mathcal{U}\times\mathcal{M}.$$

Ясно, что $(\varphi\circ\psi)^\alpha=\varphi^\alpha\circ\psi^\alpha$.

В частности, если задан морфизм $\psi\colon \mathcal{N}\to\mathcal{M}$, то его можно рассматривать как pt - семейство морфизмов, где $\mathrm{pt}=\mathcal{R}^{0,0}$ — многообразие, состоящее из одной точки. Каждому супермногообразию $\mathcal{W}$ тогда отвечает семейство морфизмов ψ^p, где $p\colon \mathcal{W}\to\mathrm{pt}$ — единственное отображение; иначе говоря, $\psi^p_{\mathcal{W}}=\psi\circ\mathrm{pr}_{\mathcal{N}}\colon \mathcal{W}\times\mathcal{N}\to\mathcal{M}$. Такое семейство морфизмов мы назовем *постоянным семейством*.

3.3.4. *$\mathcal{W}$-семейством точек* супермногообразия $\mathcal{M}$ называется произвольный морфизм $\varphi_{\mathcal{W}}\colon \mathcal{W}\to\mathcal{N}$. Часто мы вместо морфизма $\varphi_{\mathcal{W}}$ будем пользоваться соответствующим ему морфизмом $\varphi\colon \mathcal{W}\xrightarrow{\mathrm{id}\times\varphi_{\mathcal{W}}}\mathcal{W}\times\mathcal{M}$, удовлетворяющим условию $\mathrm{pr}_{\mathcal{W}}\circ\varphi=\mathrm{id}$. Если $\alpha\colon \mathcal{U}\to\mathcal{W}$ — морфизм, то семейство точек $\varphi^\alpha_{\mathcal{W}}$, получающееся при замене параметров α, имеет вид

$$\varphi^\alpha_{\mathcal{W}}=\varphi_{\mathcal{W}}\circ\alpha\colon \mathcal{U}\xrightarrow{\alpha}\mathcal{W}\xrightarrow{\varphi_{\mathcal{W}}}\mathcal{M}.$$

Если задан морфизм $\beta\colon \mathcal{M}\to\mathcal{L}$, то по $\mathcal{W}$-семейству точек супермногообразия $\mathcal{M}$ естественным образом строится $\mathcal{W}$-семейство $\psi=\beta\circ\varphi$ точек супермногообразия $\mathcal{L}$.

Ясно, что $\mathcal{W}$-семейство морфизмов pt в $\mathcal{M}$ это то же самое, что $\mathcal{W}$-семейство точек $\mathcal{M}$.

3.3.5. *$\mathcal{W}$-семейством функций* на супермногообразии $\mathcal{M}$ называется функция f на $\mathcal{W}\times\mathcal{M}$. Обозначим эти семейства через $C^\infty(\mathcal{M};\mathcal{W})$.

$\mathcal{W}$-семейством четных функций называется четная функция на $\mathcal{W}\times\mathcal{M}$.

Если $\alpha\colon \mathcal{U}\to\mathcal{W}$ — замена параметров и $f\in C^\infty(\mathcal{M};\mathcal{W})$, то $f^\alpha=\beta^*(f)\in C^\infty(\mathcal{M};\mathcal{U})$, где $\beta=(\alpha\circ\mathrm{pr}_{\mathcal{W}})\times\mathrm{pr}_{\mathcal{M}}\colon \mathcal{U}\times\mathcal{M}\to\mathcal{W}\times\mathcal{M}$.

Заметим, что, как следует из теоремы о координатной записи отображений, $\mathcal{W}$-семейства четных функций на $\mathcal{M}$ однозначно соответствуют $\mathcal{W}$-семействам морфизмов $\mathcal{M}\to\mathcal{R}^{1,0}$.

3.3.6. Пусть задано $\mathscr{W}$-семейство точек супермногообразия $\mathscr{M}$, т. е. морфизм $\varphi\colon \mathscr{W} \to \mathscr{W} \times \mathscr{M}$. Определим, что такое семейство касательных и кокасательных векторов в точках семейства φ. Начнем с кокасательных векторов.

Поскольку морфизм $\mathrm{pr}_{\mathscr{W}} \circ \varphi$ совпадает с тождественным отображением $\mathrm{id}\colon \mathscr{W} \to \mathscr{W}$, то φ — регулярное замкнутое вложение.

Пусть
$$\mathscr{I}_\varphi = \operatorname{Ker} \varphi^* = \{f \in C^\infty(\mathscr{W} \times \mathscr{M}) \mid \varphi^*(f) = 0\}.$$
Ясно, что
$$C^\infty(\mathscr{W} \times \mathscr{M}) = C^\infty(\mathscr{W}) \oplus \mathscr{I}_\varphi,$$
где $C^\infty(\mathscr{W})$ естественным образом вложена в $C^\infty(\mathscr{W} \times \mathscr{M})$ с помощью гомоморфизма $\mathrm{pr}^*_{\mathscr{W}}(\mathscr{W} \times \mathscr{M})$.

Назовем *$\mathscr{W}$-семейством кокасательных векторов* (в точках семейства φ) любой элемент из $\mathscr{I}_\varphi/\mathscr{I}^2_\varphi$.

Такие $\mathscr{W}$-семейства образуют $C^\infty(\mathscr{W})$ - модуль, который мы обозначим через $T^*_\varphi(\mathscr{M})$ и будем называть *модулем кокасательных векторов к семейству* φ. Сопряженный $C^\infty(\mathscr{W})$-модуль $T_\varphi(\mathscr{M}) = \operatorname{Hom}_{C^\infty(\mathscr{W})}(T^*_\varphi(\mathscr{M}), C^\infty(\mathscr{W}))$ назовем *модулем касательных векторов к семейству* φ. Можно отождествить $T_\varphi(\mathscr{M})$ с модулем $C^\infty(\mathscr{W})$-линейных гомоморфизмов $\partial : C^\infty(\mathscr{W} \times \mathscr{M}) \to C^\infty(\mathscr{W})$, удовлетворяющих правилу Лейбница.

Если f есть $\mathscr{W}$-семейство функций на $\mathscr{M}$, т. е. $f \in C^\infty(\mathscr{W} \times \mathscr{M})$, то через δf обозначается $\mathscr{W}$-семейство кокасательных векторов, имеющее вид
$$\delta f = (f - \varphi^*(f)) (\operatorname{mod} \mathscr{I}^2_\varphi).$$
(см. 2.4.2).

Пусть $\psi\colon \mathscr{N} \to \mathscr{M}$ — морфизм супермногообразий. Назовем *ψ-дифференцированием* произвольное $\mathbb{R}$-линейное отображение $X\colon C^\infty(\mathscr{M}) \to C^\infty(\mathscr{N})$, удовлетворяющее правилу Лейбница.

Обозначим через Der_ψ пространство всех ψ-дифференцирований.

Предположим теперь, что задано $\mathscr{W}$-семейство точек супермногообразия $\mathscr{M}$, т. е. морфизм $\varphi\colon \mathscr{W} \to \mathscr{W} \times \mathscr{M}$, и семейство касательных векторов $\partial \in T_\varphi(\mathscr{M})$. Как мы видели, ∂ задает φ-дифференцирование $\partial : C^\infty(\mathscr{W} \times \mathscr{M}) \to C^\infty(\mathscr{W})$ (ясно, что так получаются не все ψ-дифференцирования, а только те, которые обращаются в нуль на $C^\infty(\mathscr{W}) \subset C^\infty(\mathscr{W} \times \mathscr{M})$. Ограничив отображение ∂ на подалгебру $C^\infty(\mathscr{M}) \subset C^\infty(\mathscr{W} \times \mathscr{M})$, мы получаем линейное отображение $X_\partial\colon C^\infty(\mathscr{M}) \to C^\infty(\mathscr{W})$. Легко проверить, что X_∂ является $\varphi_{\mathscr{W}}$-дифференцированием. Таким образом, мы построили канонический гомоморфизм:
$$r\colon T_\varphi(\mathscr{M}) \to \mathrm{Der}_{\varphi_{\mathscr{W}}} (\partial \mapsto X_\partial).$$

Предложение. *Гомоморфизм r является изоморфизмом.*

Иначе говоря, это предложение утверждает, что всякое $\varphi_{\mathscr{W}}$-дифференцирование $X\colon C^\infty(\mathscr{M}) \to C^\infty(\mathscr{W})$ продолжается, причем однозначно, до такого φ-дифференцирования
$$\partial\colon C^\infty(\mathscr{W} \times \mathscr{M}) \to C^\infty(\mathscr{W}), \text{ что } \partial(C^\infty(\mathscr{W})) = 0.$$

3.3.7. Прежде чем доказывать предложение 3.3.6, изучим подробнее, как устроено пространство Der_ψ для заданного морфизма $\psi\colon \mathscr{N} \to \mathscr{M}$.

1) *Пространство* Der_ψ *является $C^\infty(\mathscr{N})$-модулем относительно действия* $(fX)(h) = f(X(h))$, где $f \in C^\infty(\mathscr{N})$, $h \in C^\infty(\mathscr{M})$, $X \in \mathrm{Der}_\psi$.

2) *Если* $X \in \mathrm{Der}_\psi$, *то* $X(1) = 0$.

3) *Предположим, что* $\mathscr{M}$ *— суперобласть с системой координат* $\{x_i\}$. *Каждому набору функций* $f = \{f_i \in C^\infty(\mathscr{N})\}$ *отвечает отображение* $X_f\colon C^\infty(\mathscr{M}) \to C^\infty(\mathscr{N})$, *заданное формулой* $X_f(h) = \sum f_i \psi^*\left(\frac{\partial h}{\partial x_i}\right)$, *которое является* ψ*-дифференцированием. Так получается любое* ψ*-дифференцирование* X, *причем набор функций* f *однозначно определяется по* X.

Однозначность вытекает из того, что набор f определяется по ψ-дифференцированию X_f, ибо $f_i = X_f(x_i)$. Далее, вычтя ψ-дифференцирование X_f из X, где $f_i = X(x_i)$, мы можем считать, что $X(x_i) = 0$. Докажем, что в этом случае $X = 0$.

Пусть $h \in C^\infty(\mathscr{M})$, $n \in \mathscr{N}$. Нам достаточно показать, что $X(h) \in \mathcal{J}_n^k$ для любого k. Пусть $m = \psi(n)$. Поскольку $\psi^*(\mathcal{J}_m) \subset \mathcal{J}_n$ и $X(x_i) = 0$, то из правила Лейбница вытекает, что $X(\mathcal{J}_m^{k+1}) \subset \mathcal{J}_n^k$ и $X(P(x_i)) = 0$ для любого полинома P. Но в силу 2.2.8 мы можем подобрать такой полином $P(x_i)$, что $h - P(x_i) \in \mathcal{J}_m^{k+1}$. Поэтому $X(h) = X(h - P(x_i)) + X(P(x_i)) = X(h - P(x_i)) \in \mathcal{J}_n^k$, что и требовалось.

4) *Пусть* $\mathscr{M}'$ *— открытое подсупермногообразие* $\mathscr{M}$, *содержащее* $\psi(\mathscr{N})$. *Иначе говоря, задан* $\psi\colon \mathscr{N} \to \mathscr{M}' \xrightarrow{i} \mathscr{M}$, *где* ψ' *— некоторый морфизм, а* i *— открытое вложение. Зададим отображение* $i_*\colon \mathrm{Der}_{\psi'} \to \mathrm{Der}_\psi$, *полагая* $i_*X(h) = X(i^*(h))$, $X \in \mathrm{Der}_{\psi'}$, $h \in C^\infty(\mathscr{M})$. *Тогда* i_* *— изоморфизм. Иначе говоря, пространство* Der_ψ *зависит только от окрестности* $\psi(\mathscr{N})$.

Прежде всего докажем, что если функции $h_1, h_2 \in C^\infty(\mathscr{M})$ совпадают на некоторой подсуперобласти $\mathscr{U} \subset \mathscr{M}$, то функции $X(h_1)$ и $X(h_2)$ совпадают на $\psi^{-1}(\mathscr{U})$. Действительно, пусть $h = h_1 - h_2$, $n \in \mathscr{N}$, такая точка, что $\psi(n) \in \mathscr{U}$. Для доказательства того, что функция $X(h)$ равна нулю в окрестности точки n, воспользуемся принципом локализации 3.1.8 и построим такую функцию $\varphi \in C_0^\infty(\mathscr{M})$, что $\varphi = 1$ в окрестности точки $\psi(n)$ и $\mathrm{supp}_\varphi \in \mathscr{U}$. Тогда $\varphi h = 0$, так что $X(\varphi h) = X(\varphi)\cdot\psi^*(h) + \psi^*(\varphi)\cdot X(h) = 0$. Поскольку $\psi^*(h) = 0$ и $\varphi^*(\varphi) = 1$ в окрестности точки n, то $X(h) = 0$ в окрестности точки n.

Докажем теперь, что если $X \in \mathrm{Der}_{\psi'}$ и $i_*(X) = 0$, то $X = 0$. Пусть $h' \in C^\infty(\mathscr{M}')$, $n \in \mathscr{N}$. Нам нужно убедиться, что $X(h') = 0$ в окрестности точки n. Используя принцип локализации, подберем функцию $h \in C^\infty(\mathscr{M})$ так, чтобы она совпадала с h' в окрестности точки $\psi(n)$. Тогда $X(h') = X(i^*(h)) = i_*(X)(h) = 0$ в окрестности точки n.

Нам осталось показать, что всякое ψ-дифференцирование $Y \in \mathrm{Der}_\psi$ имеет вид $i^*(X)$, $X \in \mathrm{Der}_{\psi'}$. Пусть $h \in C^\infty(\mathscr{M}')$. Выберем покрытие $\{\mathscr{V}_\alpha\}$ супермногообразия $\mathscr{N}$ и набор функций $h_\alpha \in C^\infty(\mathscr{M})$ так, чтобы h_α совпадала с h в окрестности $\psi(\mathscr{V}_\alpha)$; это легко сделать, используя принцип локализации. Рассмотрим теперь на $\mathscr{V}_\alpha$ функцию $f_\alpha = Y(h_\alpha)|_{\mathscr{V}_\alpha}$. По доказанному, функция f_α не зависит от выбора h_α. Поэтому на пересечении $\mathscr{V}_\alpha \cap \mathscr{V}_\beta$ функции f_α и f_β совпадают. Значит, все функции f_α являются ограничениями некоторой функции $f \in C^\infty(\mathscr{N})$. Мы положим $X(h') = f$. Легко проверить, что X есть ψ'-дифференцирование и $i^*(X) = Y$.

5) Пусть $\mathscr{N}'$ — открытое подсупермногообразие в $\mathscr{N}$, $\psi|_{\mathscr{N}'}\colon \mathscr{N}' \to \mathscr{M}$ — соответствующий морфизм. Определим отображение $\mathrm{Der}_\psi \to \mathrm{Der}_{\psi|\mathscr{N}'}$, $X \mapsto X|_{\mathscr{N}'}$, полагая $X|_{\mathscr{N}'}(h) = X(h)|_{\mathscr{N}'}$. Тогда пространства $\mathrm{Der}_{\psi|\mathscr{N}'}$ образуют пучок на $\mathscr{N}$.

Это доказывается так же, как в п. 3.3.5.

3.3.8. Доказательство предложения 3.3.6. Пусть $\mathscr{V}$ — открытое подсупермногообразие в $\mathscr{W}$, $\varphi_{\mathscr{V}} = \mathrm{id} \times \varphi_{\mathscr{W}}|_{\mathscr{V}}\colon \mathscr{V} \to \mathscr{V} \times \mathscr{M}$

и $\psi_{\mathscr{V}}=\varphi|_{\mathscr{V}}\colon \mathscr{V}\to\mathscr{W}\times\mathscr{M}$. Тогда $\mathrm{Der}_{\varphi_{\mathscr{V}}}=\mathrm{Der}_{\psi_{\mathscr{V}}}$ в силу 3.3.7, 4). Отсюда и из 3.3.7, 5) вытекает, что соответствия $\mathscr{V}\mapsto T_{\varphi_{\mathscr{V}}}(\mathscr{M})$ и $\mathscr{V}\to\mathrm{Der}_{\varphi_{\mathscr{W}}|\mathscr{V}}$ являются пучками. Теперь достаточно убедиться, что у каждой точки $w\in\mathscr{W}$ найдется такая окрестность $\mathscr{V}$, что морфизм $r_{\mathscr{V}}\colon T_{\varphi_{\mathscr{V}}}\to\mathrm{Der}_{\varphi_{\mathscr{W}}|\mathscr{V}}$ является изоморфизмом. Можно считать, что $\mathscr{V}$ — суперобласть и $\varphi(\mathscr{V})\subset\mathscr{M}'$, где $\mathscr{M}'$ открытая суперобласть в $\mathscr{M}$. Поскольку при замене $\mathscr{M}$ на $\mathscr{M}'$ пространства $T_{\varphi_{\mathscr{V}}}$ и $\mathrm{Der}_{\varphi_{\mathscr{W}}|\mathscr{V}}$ не меняются (см. 3.3.7, 4)), то мы видим, что предложение 3.3.6 достаточно проверить для случая, когда $\mathscr{W}$ и $\mathscr{M}$ суперобласти. В этом случае оно легко вытекает из 3.3.7, 3).

3.3.9. Перечислим основные свойства семейств касательных и кокасательных векторов в точках семейства $\varphi\colon\mathscr{W}\times\mathscr{M}\to\mathscr{M}$.

а) Пусть $\alpha\colon\mathscr{U}\to\mathscr{W}$ — замена параметров. Если $\omega=\delta f\in T^*_\varphi(\mathscr{M})$, где $f\in C^\infty(\mathscr{M},\mathscr{W})$, то положим $\omega^\alpha=\delta f^\alpha$, где f^α есть $\mathscr{U}$-семейство функций, получающееся из f заменой параметров α. Если $\partial\in T_\varphi(\mathscr{M})$, то определим $\partial^\alpha\in T_{\varphi\alpha}(\mathscr{M})$, полагая $X_{\partial^\alpha}(h)=\alpha^*(X_\partial(h))$ для всех $h\in C^\infty(\mathscr{M})$ (здесь $X_\partial\in\mathrm{Der}_{\varphi_{\mathscr{W}}}$, $X_{\partial^\alpha}\in\mathrm{Der}_{\varphi^\alpha_{\mathscr{W}}}$). Ясно, что

$$\langle\partial^\alpha, f^\alpha\rangle=\alpha^*\langle\partial, f\rangle.$$

б) Пусть $\beta\colon\mathscr{W}\times\mathscr{M}\to\mathscr{W}\times\mathscr{L}$ есть $\mathscr{W}$-семейство морфизмов $\mathscr{M}$ в $\mathscr{L}$, φ есть $\mathscr{W}$-семейство точек $\mathscr{M}$ и $\psi=\beta\circ\varphi$ — соответствующее семейство точек $\mathscr{L}$. Тогда определены гомоморфизмы

$$\beta_*\colon T_\varphi(\mathscr{M})\to T_\psi(\mathscr{L}),$$
$$\beta^*\colon T^*_\psi(\mathscr{L})\to T^*_\varphi(\mathscr{M}),$$

где

$$\beta_*(\partial)\colon C^\infty(\mathscr{W}\times\mathscr{L})\to C^\infty(\mathscr{W}),$$
$$\beta_*(\partial)(h)=\partial(\beta^*(h)),\qquad \partial\in T_\varphi(\mathscr{M}).$$

Ясно, что гомоморфизмы β_* и β^* сопряжены друг другу, т. е.

$$\langle\partial, \beta^*(\omega)\rangle=\langle\beta_*(\partial), \omega\rangle,\qquad \partial\in T_\varphi(\mathscr{M}),\quad \omega\in T^*_\psi(\mathscr{L}).$$

в) Если $\beta\colon\mathscr{M}\to\mathscr{L}$ — вложение открытого подсупермногообразия, то из 3.2.6 и 3.3.7, 4) вытекает, что гомоморфизмы β_* и β^* являются изоморфизмами.

г) Предположим, что $\mathscr{M}$ — суперобласть с системой координат x. Тогда из 3.3.7, 3) легко вытекает, что элементы δx_i образуют базис $C^\infty(\mathscr{W})$ — модуля $T^*_\varphi(\mathscr{M})$. Двойственный базис в $T_\varphi(\mathscr{M})$ состоит из элементов $\partial_i=\partial_{x_i}$, задаваемых формулой

$$X_{\partial_i}(h)=\varphi_0^*\left(\frac{\partial h}{\partial x_i}\right),\qquad h\in C^\infty(\mathscr{M}),\qquad X_{\partial_i}\in\mathrm{Der}\,\varphi_0.$$

3.3.10. Рассмотрим важный случай, когда $\mathscr{W}=\mathscr{M}$ и $\varphi\colon\mathscr{W}\to\mathscr{M}$ — тождественное отображение. В этом случае $\mathscr{W}$-семейство касательных (кокасательных) векторов мы будем называть *векторным* (соответственно *ковекторным*) *полем на* $\mathscr{M}$. Обозначим $C^\infty(\mathscr{M})$-модуль векторных полей через $D_1(\mathscr{M})$, а модуль ковекторных полей — через $D^1(\mathscr{M})$.

Из предложения 3.2.6 следует, что модуль $D_1(\mathscr{M})$ канонически изоморфен модулю $\mathrm{Der}\,C^\infty(\mathscr{M})$. Мы часто не будем делать различия между ними.

Если $\mathscr{U}$ — открытое подсупермногообразие в $\mathscr{M}$, то используя 3.3.7, 4), легко построить отображения $D_1(\mathscr{M})\to D_1(\mathscr{U})$ и $D^1(\mathscr{M})\to D^1(\mathscr{U})$, согласованные с ограничением функций и спариванием $D_1(\mathscr{M})\times D^1(\mathscr{M})\to C^\infty(\mathscr{M})$.

С помощью этих отображений мы можем рассматривать D^1 и D_1 как пучки $\mathcal{O}_{\mathcal{M}}$-модулей, причем

а) Если $f \in C^\infty(\mathcal{M})$, то $\delta f \in D^1(\mathcal{M})$.

б) Если $\partial \in D_1(\mathcal{M})$, $f \in C^\infty(\mathcal{M})$, то $\partial(f) \in C^\infty(\mathcal{M})$.

в) Если $\partial \in D_1(\mathcal{M})$, $\omega \in D^1(\mathcal{M})$, то $\langle\partial, \omega\rangle \in C^\infty(\mathcal{M})$, при этом $\langle\partial, \delta f\rangle = \partial(f)$.

г) Морфизму $\varphi\colon \mathcal{M} \to \mathcal{L}$ отвечает гомоморфизм $\varphi^*\colon D^1(\mathcal{L}) \to D^1(\mathcal{M})$. Он строится следующим образом. Если $\omega \in D^1(\mathcal{L}) = T^*_{\mathrm{id}}(\mathcal{L})$, то с помощью замены параметров $\varphi\colon \mathcal{M} \to \mathcal{L}$ мы получаем $\mathcal{M}$-семейство ω^φ касательных векторов в точках $\mathcal{M}$-семейства φ. Применяя оператор φ^*, мы получаем $\mathcal{M}$-семейство $\varphi^*(\omega^\varphi) \in T_{\mathrm{id}}(\mathcal{M})$, которое мы и обозначаем через $\varphi^*(\omega)$.

Ясно, что для любой функции $f \in C^\infty(\mathcal{M})$

$$\varphi^*(\delta f) = \delta(\varphi^*(f)).$$

Заметим, что в общем случае нельзя определить ни гомоморфизм $\varphi_*\colon D_1(\mathcal{M}) \to D_1(\mathcal{L})$, ни гомоморфизм $\varphi^*\colon D_1(\mathcal{L}) \to D_1(\mathcal{M})$. Однако в случае, когда $\varphi\colon \mathcal{M} \to \mathcal{L}$ — открытое вложение, определен гомоморфизм $\varphi^*\colon D_1(\mathcal{L}) \to D_1(\mathcal{M})$ — это *ограничение векторного поля на подсупермногообразие*. Если φ — диффеоморфизм, то φ^* является изоморфизмом и мы определим гомоморфизм $\varphi_*\colon D_1(\mathcal{M}) \to D_1(\mathcal{L})$, полагая $\varphi_* = (\varphi^*)^{-1}$.

3.3.11. Определим, что такое семейство семейств. Если мы рассматриваем $\mathcal{U}$-семейства объектов типа X, то $\mathcal{W}$-семейством таких $\mathcal{U}$-семейств естественно назвать просто $\mathcal{W} \times \mathcal{U}$-семейство объектов типа X.

В этих терминах легко определить понятие $\mathcal{W}$-семейства векторных полей на $\mathcal{M}$. Для этого рассмотрим морфизм $\varphi = \mathrm{pr}_{\mathcal{M}}\colon \mathcal{W} \times \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ и назовем *$\mathcal{W}$-семейством векторных полей* на $\mathcal{M}$ $\mathcal{W} \times \mathcal{M}$-семейство касательных векторов в точках $\mathcal{W} \times \mathcal{M}$-семейства φ. Если $\alpha\colon \mathcal{U} \to \mathcal{W}$ — замена параметра, то по каждому $\mathcal{W}$-семейству векторных полей ∂ на $\mathcal{M}$ естественно строится $\mathcal{U}$-семейство ∂^α векторных полей на $\mathcal{M}$. Аналогично определяются семейства ковекторных полей. $\mathcal{W}$-семейства векторных (ковекторных) полей на $\mathcal{M}$ мы будем обозначать $D_1(\mathcal{M}; \mathcal{W})$ и $D^1(\mathcal{M}; \mathcal{W})$.

Используя предложение 3.3.6, легко проверить следующие свойства.

а) Пусть ∂ есть $\mathcal{W}$-семейство векторных полей на $\mathcal{M}$. Тогда каждому $\mathcal{W}$-семейству $f \in C^\infty(\mathcal{M}, \mathcal{W})$ отвечает новое $\mathcal{W}$-семейство $\partial(f) \in C^\infty(\mathcal{M}; \mathcal{W})$. Отображение $f \mapsto \delta f$ является дифференцированием алгебры $C^\infty(\mathcal{W} \times \mathcal{M}) = C^\infty(\mathcal{M}; \mathcal{W})$. Разным семействам ∂ отвечают разные дифференцирования.

б) Если f — семейство функций, постоянных на $\mathcal{M}$, то есть $f \in C^\infty(\mathcal{W}) \subset C^\infty(\mathcal{W} \times \mathcal{M})$, то $\partial f = 0$.

в) Всякое дифференцирование алгебры $C^\infty(\mathcal{W} \times \mathcal{M})$, удовлетворяющее условию б), соответствует некоторому однозначно определенному $\mathcal{W}$-семейству векторных полей на $\mathcal{M}$.

Таким образом, $\mathcal{W}$-семейство векторных полей на $\mathcal{M}$ — это просто векторное поле на $\mathcal{W} \times \mathcal{M}$ (неформально говоря, это означает, что оно направлено вдоль слоев проекции $\mathcal{W} \times \mathcal{M} \to \mathcal{W}$).

3.3.12. Пусть $\varphi\colon \mathcal{W} \to \mathcal{W} \times \mathcal{M}$ есть $\mathcal{W}$-семейство точек супермногообразия $\mathcal{M}$. Нам будет полезна геометрическая интерпретация $\mathcal{W}$-семейств касательных векторов в точках семейства φ.

Пусть $\mathcal{R}$ — одномерное суперпространство с координатой t, $\{0\} \in \mathcal{R}$ — точка, выделяемая уравнением $t = 0$. Назовем *$\mathcal{W}$-семейством $p(t)$-кривых* (*с началом в точках семейства* φ) морфизм $C\colon \mathcal{V} \to \mathcal{W} \times \mathcal{M}$, где $\mathcal{V}$ — открытое подсупермногообразие в $\mathcal{W} \times \mathcal{R}$, содержащее $\mathcal{W} = \mathcal{W} \times \{0\}$, такой, что он согласован с проекцией на $\mathscr{W}$ (т. е. $\mathrm{pr}_1(\mathscr{W} \times \mathscr{M}) \circ C|_{\mathscr{W}} = \varphi$). Два таких морфизма C_1 и C_2 назовем *эквивалентными*, если $C_1^*(f) \equiv C_2^*(f) \pmod{\mathscr{I}_{\mathscr{W}}^2}$ для любой функции $f \in C^\infty(\mathscr{W} \times \mathscr{M})$, где $\mathscr{I}_{\mathscr{W}}$ — идеал, порожденный t.

Каждому $\mathscr{W}$-семейству кривых C отвечает семейство касательных векторов $\partial_C \in T_\varphi(\mathscr{M})$, заданное формулой $\partial_C = \delta C(\partial_t)$. Иначе говоря, если $f \in C^\infty(\mathscr{W} \times \mathscr{M})$, то

$$\partial_C(f) = \left(\frac{\partial}{\partial t} C^*(f)\right)\Big|_{\mathscr{W}}.$$

Ясно, что эквивалентным кривым отвечает одно и то же семейство касательных векторов, а неэквивалентным — разные семейства. Можно показать, что любое семейство $\partial \in T_\varphi(\mathscr{M})$ имеет вид $\partial = \partial_C$ для некоторого семейства кривых C. В случае, когда $\mathscr{M}$ — суперобласть, это сразу вытекает из координатной записи отображений.

Рассмотрим случай, когда $\mathscr{W} = \mathscr{M}$ и $\varphi = id_{\mathscr{M}}$ — тождественный морфизм. В этом случае семейство кривых C мы можем задавать как морфизм $C\colon \mathscr{V} \to \mathscr{M}$, где $\mathscr{V} \subset \mathscr{R} \times \mathscr{M}$. Иначе говоря, C можно интерпретировать как семейство «локальных» диффеоморфизмов $\mathscr{M}$, параметризованное параметром t, которое при $t = 0$ является тождественным диффеоморфизмом. Это соответствует обычной интерпретации векторного поля ∂_C, как направляющей к однопараметрическому семейству диффеоморфизмов.

3.3.13. Пусть $\mathscr{M}$ — супермногообразие. Назовем *$\mathscr{W}$-семейством (локальных) систем координат* на $\mathscr{M}$ открытое подсупермногообразие $\mathscr{U} \subset \mathscr{W} \times \mathscr{M}$ и открытое вложение $\varphi\colon \mathscr{U} \to \mathscr{W} \times \mathscr{R}^{p,q}$, согласованное с проекцией на $\mathscr{W}$. Если x — координаты на $\mathscr{R}^{p,q}$, то теми же буквами мы будем обозначать функции $\varphi^*(x_i) \in C^\infty(\mathscr{U})$. Ясно, что эти функции однозначно определяют семейство систем координат φ. Обозначим семейство φ через $\{x_i; \mathscr{W}\}$.

Если задано $\mathscr{W}$-семейство систем координат на $\mathscr{M}$, то на алгебре $C^\infty(\mathscr{U})$ определены дифференцирования $\frac{\partial}{\partial x_i}\colon C^\infty(\mathscr{U}) \to C^\infty(\mathscr{U})$; они однозначно определяются условиями

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(x_k) = \delta_{ik}, \qquad \frac{\partial}{\partial x_i} f = 0,$$

если $f \in C^\infty(\mathscr{W})$ (см. 3.3.7).

Если на одной и той же области $\mathscr{U}$ заданы два $\mathscr{W}$-семейства систем координат $\{x_i; \mathscr{W}\}$ и $\{y_k; \mathscr{W}\}$, то определены матрица замен координат $I_{xy} = (I_{ik})$, и матрица Якоби $J = (I_{xy})^{st}$.

При этом

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \sum_k \frac{\partial}{\partial x_i}(y_k) \frac{\partial f}{\partial y_k},$$

т. е.

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right\rangle = I_{xy}\left|\frac{\partial f}{\partial y_k}\right\rangle$$

(ср. § 2 гл. II).

Замечания

Коммутативные супералгебры впервые появились в работах Грассмана, который определил внешнюю (грассманову) алгебру. Такие алгебры стали привычны для математиков после того, как начали широко изучаться алгебры дифференциальных форм и умножение в когомологиях. Супералгебры Ли открыл, по-видимому Уайтхед, когда определил свое умножение в гомотопических группах.

В дальнейшем коммутативные супералгебры и супералгебры Ли все время появлялись в различных областях топологии (алгебры когомологий, алгебры Хопфа, алгебры Стинрода). Милнор и Мур [31], занимаясь изучением алгебр Хопфа, обнаружили связь между супералгебрами Ли и алгебрами Хопфа. Куиллен [32], занимаясь рациональной теорией гомотопий, уточнил эту связь, введя для супералгебр Ли аналог экспоненциального отображения (гомоморфизм Гуревича).

Ф. А. Березин и Г. И. Кац [5] построили формальные супергруппы Ли и обобщили на них теорию Ли. Самым важным в их работе была четкая формулировка того, что они имеют дело с таким обобщением классического анализа, где наряду с обычными четными переменными на равных правах выступают нечетные переменные. В этой работе Ф. А. Березин и Г. И. Кац поставили задачу определить аналоги группы Ли в целом (а не формальных), у которых вместо алгебр Ли — супералгебры Ли. Они привели несколько примеров, показывающих, что имеется в виду.

Используя предложенную Ф. А. Березиным идею, что при определении этих аналогов может быть полезен язык схем Гротендика, Д. А. Лейтес определил сначала алгебраические [12], а затем — гладкие супермногообразия и супергруппы Ли [13], [14]. Более подробное изложение было опубликовано Ф. А. Березиным и Д. А. Лейтесом в [4].

Еще до того, как было дано определение супермногообразия, Ф. А. Березин определил, что такое интеграл в суперслучае и выписал (в 1971 г. в письме к Г. И. Кацу) формулу для якобиана при замене переменных. В [3] он доказал эту формулу в чисто нечетном случае. В общем случае она была доказана его учеником В. Ф. Пахомовым [18]. Мультипликативность березиана впервые доказал Д. А. Лейтес [15]. Суперслед был определен Д. А. Лейтесом и Б. Л. Фейгиным (1973) и затем использован В. Г. Кацем при классификации простых супералгебр Ли [10]. Независимо суперслед и березиан определили Арновитт, Кольман и Нат; см. [9].

Дифференциальные формы на супермногообразиях, точнее, на суперпространстве, впервые определили Г. И. Кац и А. И. Коронкевич [11]; см. также работу И. Сигала [33], в которой определены пространства, окольцованные некоммутативными супералгебрами —«квантованные супермногообразия».

Все упрощения доказательств теорем (по сравнению с первоначальными) принадлежат И. Н. Бернштейну. Ему же принадлежит изложение функтора точек на языке семейств и правильные формулировки и доказательства теорем об обратной и неявной функциях, определение 1.9.4 и параграфы про ряд Тейлора и подсупермногообразия.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ф. А. Березин. Канонические преобразования в представлении вторичного квантования.— ДАН, 1961, т. 137, № 2, с. 311—314.

[2] Ф. А. Березин. Метод вторичного квантования.— М.: Наука, 1965.

[3] Ф. А. Березин. Автоморфизмы грассмановой алгебры.— Матем. заметки, 1967, т. 1, № 3, с. 269—276.

[4] Ф. А. Березин, Д. А. Лейтес. Супермногообразия.— ДАН, 1975, т. 224, № 3, с. 505—508.

[5] Ф. А. Березин, Г. И. Кац. Группы Ли с коммутирующими и антикоммутирующими параметрами.— Матем. сб., 1970, т. 82, в. 3, с. 349—359.

[6] И. Н. Бернштейн, Д. А. Лейтес. Интегральные формы и формула Стокса на супермногообразиях.— Функц. анализ, 1977, т. 11, № 1, с. 55—56.

[7] И. Н. Бернштейн, Д. А. Лейтес. Как интегрировать дифференциальные формы на супермногообразиях.— Функц. анализ, 1977, т. 11, № 3, с. 70—71.
[8] В. Г. Дринфельд, И. М. Кричевер, Ю. И. Манин, С. П. Новиков. Методы алгебраической геометрии в современной математической физике.— В кн.: Дпаметрические методы в физике. Изд-во Пленум Пресс, 1980.
[9] Б. М. Зупник, Д. А. Лейтес. Структура супергрупп Ли и Ферми — Бозе симметрии.— В кн.: Множественные процессы при высоких энергиях.— Ташкент: ФАН, 1976.
[10] В. Г. Кац. О классификации простых супералгебр Ли.— Функц. анализ, 1975, т. 9, № 3, с. 91—92; Письмо в редакцию, Функц. анализ, 1976, т. 10, № 2, с. 93.
[11] Г. И. Кац, А. И. Коропкевич. Теорема Фробениуса для функций от коммутирующих и антикоммутирующих аргументов.— Функц. анализ, 1971, т. 5, № 1, с. 78—80.
[12] Д. А. Лейтес. Спектры градуированно-коммутативных колец. — УМН, 1974, т. 29, в. 3, с. 209—210.
[13] Д. А. Лейтес. Некоммутативная геометрия.— В кн.: Тезисы докладов на московской городской научной студенческой конференции.— М.: Изд. МГУ, 1975.
[14] Д. А. Лейтес. Супергруппы Ли и супералгебры Ли.— В кн.: Тезисы докладов на XIII Всесоюзной научной студенческой конференции, Новосибирск: НГУ, 1975.
[15] Д. А. Лейтес. Об одном аналоге определителя.— УМН, 1975, т. 30, в. 3, с. 156,
[16] Д. А. Лейтес. Новые супералгебры Ли и механика.— ДАН, 1977, т. 236, № 4, с. 804—807.
[17] Ю. И. Манин. Лекции по алгебраической геометрии.— М.: Изд. МГУ, 1968.
[18] В. Ф. Пахомов. Автоморфизмы тензорного произведения абелевой и грассмановой алгебр.— Матем. заметки, 1974, т. 16, № 1, с. 65—75.
[19] В. И. Огиевецкий, Л. Мезинческу. Симметрии между бозонами и фермионами и суперполя.— УФН, 1975, т. 117, № 4, с. 637—700.
[20] В. И. Огиевецкий, Э. Сокачев. Аксиальное суперполе и группа супергравитации.— Ядерная физика, 1978, т. 26, № 6, с. 1631—1639.
[21] И. Р. Шафаревич. Основы алгебраической геометрии.— М.: Наука, 1970.
[22] F. A. Berezin. Laplace—Kazimir operators on Lie supergroups.—Preprint ITP-66, 75, 76, 77, 78, 1977.
[23] F. A. Berezin, M. S. Marinov. Particle spin dynamics as the Grassmann variant of classical mechanics.— Ann. Phys., 1977, v. 104, № 2, p. 336—362.
[24] L. Corvin, J. Ne'eman, S. Sternberg. Graded Lie algebras in mathematics and physics.— Rev. Mod. Phys., 1975, v. 47, p. 573—604.
[25] B. S. de Witt. New games for relativists: Differential geometry on Z_2-graded algebras. —Bull. Amer. Phys. Soc., 1975, v. 20, № 70.
[26] D. Z. Freedman, Nieuwenhuisen P. van, Supergravity and the unification of the laws of physics.—Sci. Amer., 1978, v. 2, p. 126-143.
[27] M. Gerstenhaber. On the deformations of rings and algebras. I-IV.—Ann. Math., ser. 2, 1974, v. 99, № 2, p. 257—276.
[28] V. G. Kac. Lie superalgebras.—Adv. Math., 1977, v. 26, p. 8—96.
[29] V. G. Kac. Infinite dimensional algebras, Dedekinds function, Classical Modius function and the very strauge formula.—Adv. Math., 1978, v. 30, p. 85—136.
[30] B. Kostant. Graded manifolds, graded Lie theory, and prequantisation.—Lecture Notes in Mathematics, 1977, № 570.
[31] J. W. Milnor, J. C. Moore. On the structure of Hopf algebras.—Ann. Math., 1965, v. 81, № 2, p. 211—264.
[32] D. Quillen. Rational homotopy theory.—Ann. Math., 1968, v. 90, № 2, p. 205—295.
[33] I. Segal. Quantized differential forms.—Topology, 1968, v. 7, № 2, p. 205—250.
[34] B. Zumino. in «Proc. XVII International Conference on High Energy Physics», London, 1974, p. 1—254.

Поступила в редакцию 14 ноября 1978 г.