Свойства массивного нейтрино в условиях замагниченной плазмы

А. А. Добрынина

ЯрГУ им. П. Г. Демидова

Дубна, ОИЯИ
17 июня 2016 г.

Список статей, в которых изложены основные результаты диссертации

- A. A. Dobrynina, N. V. Mikheev, and G. G. Raffelt. Radiative decay of keV-mass sterile neutrinos in a strongly magnetized plasma // Phys. Rev. D 2014. V. 90, No. 11. P. 113015.
- A. A. Dobrynina, N. V. Mikheev, and E. N. Narynskaya. Vertex function of virtual neutrino at small momentum transferred // Int. J. Mod. Phys. A 2012. V. 27, No. 28. P. 1250167.
- А. А. Добрынина, Н. В. Михеев. Собственно-энергетический оператор массивного нейтрино во внешнем магнитном поле // ЖЭТФ 2014. т. 145, №1, с. 65.
- А. А. Добрынина, Н. В. Михеев, Е. Н. Нарынская. Электромагнитные свойства массивного нейтрино // Ядерная физика 2013. т. 76, №10, с. 1311.
- А. А. Добрынина, Н. В. Михеев, Е. Н. Нарынская. Массовый оператор нейтрино и его магнитный момент // Ядерная физика 2013. т. 76, №11, с. 1417.

План

1. Радиационный распад стерильного нейтрино в сильно замагниченной плазме
   - Электронная плазма без магнитного поля
   - Сильно замагниченная плазма
2. Вершинная функция виртуального нейтрино при малом переданном импульсе
   - Собственно-энергетический оператор виртуального нейтрино в линейном по полю приближении в R_ξ-калибровке
   - Электромагнитные свойства массивного нейтрино
3. Собственно-энергетический оператор массивного нейтрино во внешнем магнитном поле
   - Собственно-энергетический оператор массивного нейтрино в магнитном поле
   - Дополнительная энергия нейтрино в магнитном поле
   - Распад массивного нейтрино на W-бозон и заряж. лептон

Радиационный распад стерильного нейтрино
в сильно замагниченной плазме

A. A. Dobrynina, N. V. Mikheev, and G. G. Raffelt
Phys. Rev. 2014. V. D90. No. 11. P. 113015.

- Электронная плазма, находящаяся в сильном магнитном поле (сильно замагниченная плазма) $\Rightarrow$ электроны на основном уровне Ландау
- Условие на хим. потенциал μ_e электронов

$$\mu_e^2 - m_e^2 < 2eB$$

  m_e — масса электрона, e — элементарный заряд, B — напряженность магнитного поля

- Сильное магнитное поле и вырожденная плазма
  $\mu_e - m_e \gg T$, где T — температура плазмы $\Rightarrow$
  фотон — частица с эффективной массой Ω_0
  [H. Pérez Rojas and A. E. Shabad, Ann. Phys. (1979), Ann. Phys. (1982)]

$$\Omega_0^2 = \frac{2\alpha}{\pi} eB \frac{p_F}{\sqrt{p_F^2 + m_e^2}}$$

  α — постоянная тонкой структуры, p_F — импульс Ферми

Плазменная частота

- Концентрация электронов в случае сильного магнитного поля:

$$n_e = \frac{eBp_F}{2\pi^2} \Rightarrow p_F = 2\pi^2 \frac{n_e}{eB}$$

- Для плазменной частоты Ω_0 получаем:

$$\Omega_0 \simeq 37.1 \text{ кэВ} \left[\frac{n_{30}^2 b^2}{b^2 + 1.3\, n_{30}^2} \right]^{1/4}$$

- $b = B/B_e, \quad n_{30} = n_e/\left(10^{30}\text{см}^{-3}\right),$
- критическое магнитное поле электрона

$$B_e = \frac{m_e^2}{e} = 4.41 \times 10^{13} \text{ Гс}$$

- В качестве нормировки выбрана концентрация $n = 10^{30}\text{см}^{-3}$, которая соответствует плотности вещества $\rho \simeq 10^6\text{г/см}^3$
- Вырожденные электроны остаются нерелятивистскими $V_F \ll 1$

Нейтрино

- Стандартные нейтрино с массой $m_\nu \lesssim 1$ эВ

$$\Omega_0 \gg m_\nu \Rightarrow \text{распад } \nu_i \to \nu_j \gamma \text{ закрыт}$$

- Стерильное нейтрино с кэВ-ной массой m_s
  [M. Drewes et al., arXiv:1602.04816]

  Ограничение из космологии:

$$0.4\,\text{кэВ} < m_s < 50\,\text{кэВ}$$

  [A. Boyarsky et al., Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. (2009);
  M. Laine and M. Shaposhnikov, JCAP (2008)]

- Существует область значений n_e и B, где $\Omega_0 < m_s \Rightarrow$

$$\text{распад нейтрино возможен}$$

Ограничение на массу стерильного нейтрино

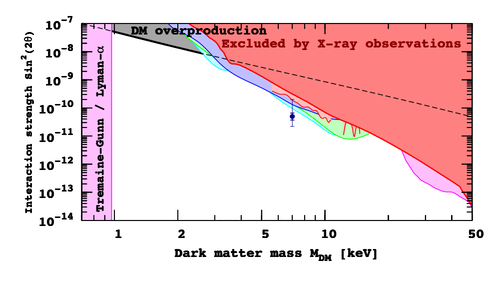
- Ограничение Тремейна-Ганна (ограничение из фазовой плотности) [S. Tremaine and J. E. Gunn, Phys. Rev. Lett. (1979)]

$$m_s \gtrsim 0.4 \text{ кэВ}$$

- Анализ рентгеновских спектров [M. Laine and M. Shaposhnikov, JCAP (2008)]

$$m_s \lesssim 50 \text{ кэВ}$$

- Попытки найти рентгеновскую линию от радиационного распада частицы темной материи — безрезультатны
- Верхний предел на угол смешивания стерильного нейтрино как функции массы нейтрино [M. Drewes, arxiv:1602.04816]



Смешивание

- Стерильное нейтрино смешивается с активным $\Rightarrow$ взаимодействует с веществом
- Массовые состояния нейтрино

$$|\nu_1\rangle = \cos\theta_s|\nu_a\rangle - \sin\theta_s|\nu_s\rangle$$
$$|\nu_2\rangle = \sin\theta_s|\nu_a\rangle + \cos\theta_s|\nu_s\rangle$$

  θ_s — угол смешивания активного и стерильного нейтрино
- Угол смешивания θ_s мал

$$|\nu_1\rangle \simeq |\nu_a\rangle, \qquad |\nu_2\rangle \simeq |\nu_s\rangle$$

- Ограничение на θ_s: возможные распады темной материи
- Из нейтринного распада $\nu_s \to 3\nu_a$
  [A. D. Dolgov and S. H. Hansen, Astropart. Phys. (2002)]

$$\theta_s^2 < 1.1 \times 10^{-7} \left(\frac{50\ \text{кэВ}}{m_s}\right)^5$$

- Более строгое из радиационного распада $\nu_s \to \nu_a\gamma$
  [A. Boyarsky et al., Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. 59 (2009)]

$$\theta_s^2 \lesssim 1.8 \times 10^{-5} \left(\frac{1\ \text{кэВ}}{m_s}\right)^5$$

- В магнитном поле или плазме активное нейтрино может взаимодействовать с фотоном через реальные электроны плазмы

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} \left[\bar{\Psi}_e \, \gamma^\alpha \left(C_V + C_A \gamma_5\right) \Psi_e\right] j_\alpha$$

- Векторная и аксиальная константы

$$C_V = \pm 1/2 + 2 \sin^2 \theta_W, \qquad C_A = \pm 1/2$$

θ_W — угол Вайнберга $\quad (\sin^2 \theta_W \simeq 0.23)$

- Нейтринный ток, описывающий переход стерильного нейтрино в активное:

$$j_\alpha = j_\alpha^{(s \to a)} = \cos \theta_s \sin \theta_s \left[\bar{\nu}_a \gamma_\alpha \left(1 + \gamma_5\right) \nu_s\right]$$

- Рассматривается активное нейтрино фиксированного аромата — электронное нейтрино
- Изменением законов дисперсии активного и стерильного нейтрино пренебрегается

Электронная плазма в отсутствии магнитного поля

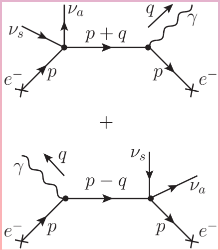
- Лагранжиан взаимодействия

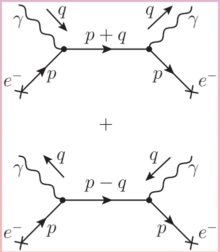
$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} \left[C_V \left(\bar{\Psi}_e \, \gamma^\alpha \Psi_e \right) j_\alpha^{(s\to a)} + C_A \left(\bar{\Psi}_e \, \gamma^\alpha \gamma_5 \Psi_e \right) j_\alpha^{(s\to a)} \right]$$

- Векторная часть $\mathcal{L}_{\text{eff}}$ имеет структуру, сходную со структурой, описывающей взаимодействие фотона с электроном

$$\mathcal{L}_{\text{EM}} = e \left(\bar{\Psi}_e \gamma_\alpha \Psi_e \right) A^\alpha$$

- Распад $\nu_s \to \nu_a + \gamma$ на электронах плазмы можно изобразить диаграммами Фейнмана, которые аналогичны диаграммам комптоновского рассеяния фотонов $\gamma \to \gamma$ с заменой одной из линий фотона на нейтринный ток





- Поляризационный оператор фотона $\Pi_{\alpha\beta}$ определяется через амплитуду процесса $\gamma \to \gamma$

$$M_{\gamma\to\gamma} = -\varepsilon^*_\alpha \, \Pi^{\alpha\beta} \, \varepsilon_\beta$$

- Векторная часть амплитуды распада $\nu_s \to \nu_a + \gamma$

$$M^V_{\rm pl} = \frac{C_V \, G_F}{e\sqrt{2}} \, (j\Pi\varepsilon^*)$$

- Аксиально-векторный вклад в амплитуду пренебрежимо мал
    - нерелятивистской плазме

$$\frac{M^A}{M^V} \sim \frac{C_A}{C_V} \, \frac{m_s}{m_e} \ll 1$$

    - релятивистской плазме

$$\frac{M^A}{M^V} \sim \frac{C_A}{C_V} \, \frac{m_s}{\mu_e} \ll 1$$

- Кинематические условия для $\nu_s \to \nu_a \gamma$

$$\omega_0 < m_s \ll m_e$$

- Нерелятивистская плазма

$$\omega_0^2 = \frac{4\pi\alpha n_e}{m_e}$$

- Для вырожденных электронов $n_e = p_F^3 / 3\pi^2$
- Из кинематики процесса следует ограничение на скорость Ферми

$$V_F^2 < 0.25 \left(\frac{m_s}{10 \text{ кэВ}} \right)^{4/3}$$

- Верхний предел на m_s, при котором приближение нерелятивистской плазмы выполняется

$$V_F^2 \ll 1 \Rightarrow m_s \ll 30 \text{ кэВ}$$

- В плазме у фотона три поляризационных состояния
- Одна продольная мода ε_α^ℓ и две поперечные моды ε_α^t, где $t = 1, 2$
- Собственные значения поляризационного оператора Π_λ $(\lambda = \ell, t)$

$$\Pi_{\alpha\beta}\, \varepsilon_\beta^\lambda = \Pi_\lambda\, \varepsilon_\alpha^\lambda$$

- В нерелятивистской плазме [4-импульс фотона $q^\mu = (\omega, \vec{k})$] [G. Raffelt, Stars as Laboratories for Fundamental Physics (1996)]:

$$\Pi_t \approx \omega_0^2\,, \qquad \Pi_\ell \approx \omega_0^2 \left(1 - \frac{k^2}{\omega^2}\right)$$

- Закон дисперсии фотона

$$q^2 = \omega^2 - k^2 = \Pi_\lambda$$

- Вероятность распада $\nu_s \to \nu_a + \gamma$ в нерелятивистской плазме

$$W^t_{\rm pl} = W_{\rm vac} \frac{16\pi^2}{9\alpha^2}\, x_0^4 (1 - x_0^2)^2$$

$$W^\ell_{\rm pl} = W_{\rm vac} \frac{32\pi^2}{9\alpha^2}\, x_0 (1 - x_0)^2$$

- Здесь $x_0 = \omega_0 / m_s$
- Нормирована на вакуумную вероятность

$$W_{\rm vac} = \frac{9\alpha G_F^2}{2048\pi^4}\, m_s^5 \sin^2(2\theta_s)$$

- Время жизни составляет

$$\tau_{\rm vac} = 1.2 \times 10^{37}\ \text{лет} \left(\frac{10\ \text{кэВ}}{m_s}\right)^5 \left(\frac{10^{-11}}{\theta_s}\right)^2$$

- Время жизни Вселенной

$$\tau_{\rm Univ} = 1.37 \times 10^{10} \quad \text{лет}$$

Сильно замагниченная плазма

- Магнитное поле направлено вдоль третьей оси $\vec{B} = (0, 0, B)$
- Условия на параметры плазмы

$$2eB > \mu_e^2 - m_e^2 \gg T^2$$

- Электроны находятся на основном уровне Ландау
- Квантовое поле электрона Ψ_e является собственной функцией проекционного оператора

$$\Pi_- \Psi_e = \Psi_e \,, \qquad \Pi_\pm = \frac{1}{2}\left(1 \pm i\gamma_1\gamma_2\right)$$

- Аксиально-векторный ток можно представить в виде:

$$\bar{\Psi}_e \gamma_\alpha \gamma_5 \Psi_e = \bar{\Psi}_e \Pi_- \gamma_\alpha \gamma_5 \Pi_- \Psi_e$$

- Свойства проекционных операторов

$$\Pi_\pm^2 = \Pi_\pm, \quad \Pi_+\Pi_- = 0, \quad \Pi_\pm\gamma_5\Pi_\pm = \gamma_5\Pi_\pm, \quad \Pi_\mp\gamma_5\Pi_\pm = 0$$

$$\Pi_\pm\gamma_{0,3}\Pi_\pm = \gamma_{0,3}\Pi_\pm, \quad \Pi_\mp\gamma_{0,3}\Pi_\pm = 0$$

$$\Pi_\mp\gamma_{1,2}\Pi_\pm = \gamma_{1,2}\Pi_\pm, \quad \Pi_\pm\gamma_{1,2}\Pi_\pm = 0$$

- Удобно воспользоваться ковариантным формализмом

Используемые обозначения

- Магнитное поле направлено вдоль третьей оси $\vec{B} = (0, 0, B)$
- Безразмерные тензор ЭМ поля и дуальный к нему тензор

$$\varphi_{\alpha\beta} = \frac{F_{\alpha\beta}}{B}\,, \qquad \tilde{\varphi}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\,\varepsilon_{\alpha\beta\rho\sigma}\varphi^{\rho\sigma}$$

- Пространство Минковского с внешним магнитным полем разбивается на два подпространства:
  - евклидово подпр-во с метр. тензором $\Lambda_{\mu\nu} = (\varphi\varphi)_{\mu\nu}$
  - псевдоевклидово подпр-во с метр. тензором $\tilde{\Lambda}_{\mu\nu} = (\tilde{\varphi}\tilde{\varphi})_{\mu\nu}$
  - $\tilde{\Lambda}_{\mu\nu} - \Lambda_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$
- 4-вектор $a^\mu = (a_0, a_1, a_2, a_3)$ разбивается на две ортогональные составляющие:

$$a_\mu = \tilde{\Lambda}_{\mu\nu} a^\nu - \Lambda_{\mu\nu} a^\nu = a_{\parallel\mu} - a_{\perp\mu}$$

- Для скалярного произведения векторов справедливо:

$$(ab) = (ab)_\parallel - (ab)_\perp$$

$$(ab)_\parallel = (a\tilde{\Lambda}b) = a^\mu\tilde{\Lambda}_{\mu\nu}b^\nu = a_0 b_0 - a_3 b_3$$

$$(ab)_\perp = (a\Lambda b) = a^\mu\Lambda_{\mu\nu}b^\nu = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

- Лагранжиан взаимодействия электронов с нейтрино

$$\mathcal{L}_{\mathrm{eff}} = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} \left[C_V \left(\bar{\Psi}_e \gamma^\alpha \Psi_e \right) j_\alpha + C_A \left(\bar{\Psi}_e \gamma^\alpha \gamma_5 \Psi_e \right) j_\alpha \right] \Rightarrow$$

- Аксиально-векторный ток

$$\bar{\Psi}_e \gamma_\alpha \gamma_5 \Psi_e = \bar{\Psi}_e \Pi_- \gamma_\alpha \gamma_5 \Pi_- \Psi_e = \bar{\Psi}_e (\tilde{\varphi} \gamma)_\alpha \Psi_e$$

- Лагранжиан сводится к виду:

$$\mathcal{L}_{\mathrm{eff}} = e \left(\bar{\Psi}_e \gamma^\alpha \Psi_e \right) V_\alpha$$

- По форме совпадает с $\mathcal{L}_{\mathrm{EM}} = e \left(\bar{\Psi}_e \gamma^\alpha \Psi_e \right) A_\alpha$
- Фотон заменяется на векторный оператор:

$$V_\alpha = -\frac{G_F}{e\sqrt{2}} \left[C_V \, (\tilde{\Lambda} j)_\alpha - C_A \, (\tilde{\varphi} j)_\alpha \right]$$

- Амплитуда распада $\nu_s \to \nu_a + \gamma$

$$M_{\mathrm{pl+f}} = -\mathcal{E}^*_\alpha \Pi^{\alpha\beta} V_\beta$$

- В сильно замагниченной плазме физическими являются только две моды фотона со следующими векторами поляризации [Д. А. Румянцев и М. В. Чистяков, ЖЭТФ (2008)]

$$\mathcal{E}_\alpha^{(1)} \approx \frac{(q\varphi)_\alpha}{\sqrt{q_\perp^2}}, \qquad \mathcal{E}_\alpha^{(2)} \approx \frac{(q\tilde{\varphi})_\alpha}{\sqrt{q_\parallel^2}}$$

- Собственные значения Π_1 и Π_2 поляризационного оператора для этих мод при $\omega \lesssim m_s \ll m_e$

$$\Pi_1 \approx -\frac{2\alpha}{\pi} \frac{\omega V_F \mu_e \sqrt{q^2}}{\sqrt{q_\parallel^2}}, \quad \Pi_2 \approx \frac{2eB\alpha}{\pi} \frac{q_\parallel^2 V_F}{\omega^2 - V_F^2 k_3^2}$$

- Вклад от Π_2 в амплитуду распада стерильного нейтрино доминирует

$$\left|\frac{\Pi_1}{\Pi_2}\right| \lesssim \frac{m_s}{\mu_e} \ll 1$$

В основном рождаются фотоны моды 2

- Амплитуда радиационного распада стерильного нейтрино в сильно замагниченной плазме

$$M_{\rm pl+f} = \frac{G_F\,\Omega_0^2}{e\sqrt{2}}\,\sqrt{q_\parallel^2}\,\frac{C_V\,(q\tilde{\varphi}j) + C_A\,(q\tilde{\Lambda}j)}{\omega^2 - V_F^2 k_3^2}$$

- Плазменная частота фотона

$$\Omega_0^2 = \frac{2\alpha eB}{\pi}\,V_F$$

- Согласно кинематике процесса $\Omega_0 < m_s$

$$V_F^2 < 0.01\left(\frac{B_e}{B}\right)^2\left(\frac{m_s}{10\text{ кэВ}}\right)^4$$

- Распад стерильного нейтрино с массой 2–20 кэВ в сильно замагниченной плазме возможен в условиях нерелятивистской среды

- Вероятность распада $\nu_s \to \nu_a + \gamma$

$$W_{\mathrm{pl+f}} = \frac{1}{32\pi^2 m_s} \int \frac{d^3 p_a}{E_a} \frac{d^3 k}{\omega} \delta^{(4)}(p_s - p_a - q) \, |M_{\mathrm{pl+f}}|^2$$

- Система покоя распадающегося нейтрино $p_s^\mu = (m_s, \vec{0})$, $p_a^\mu = (E_a, \vec{p}_a)$
- Закон дисперсии фотона в замагниченной плазме

$$q^2 = \Pi_2 \qquad \Rightarrow \qquad \omega^2 = k_3^2 + k_\perp^2 + \Omega_0^2 \, \frac{\omega^2 - k_3^2}{\omega^2 - V_F^2 k_3^2}$$

Нерелятивистская плазма

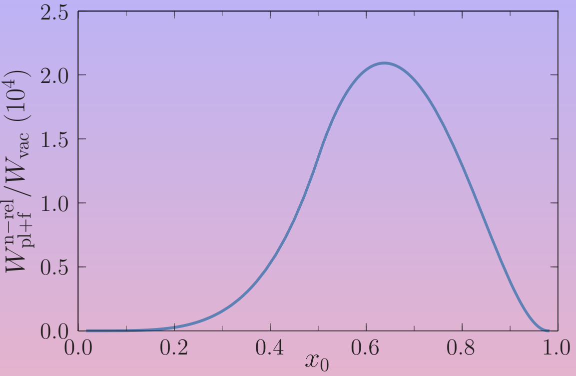
- Реализуется при $m_s = 2 - 20$ кэВ и $B = 1 - 100\, B_e$

$$W_{\rm pl+f}^{\rm n-rel} = W_{\rm vac}\, \frac{32\,\pi^2}{2835\,\alpha^2}\,\left(C_V^2 + C_A^2\right)\Big[\theta(2x_0 - 1)\times$$
$$\times\left(-\frac{11}{x_0} + 129x_0 - 210x_0^2 + 168x_0^3 - 84x_0^4 - 24x_0^6 + 32x_0^8\right)$$
$$+\theta(1 - 2x_0)\, 4x_0^4\,\left(21 + 6x_0^2 - 8x_0^4\right)\Big]$$

- Безразмерная частота плазмона $\quad x_0 = \Omega_0/m_s$
- При $x_0 \ll 1$ и $C_V = C_A = 1$

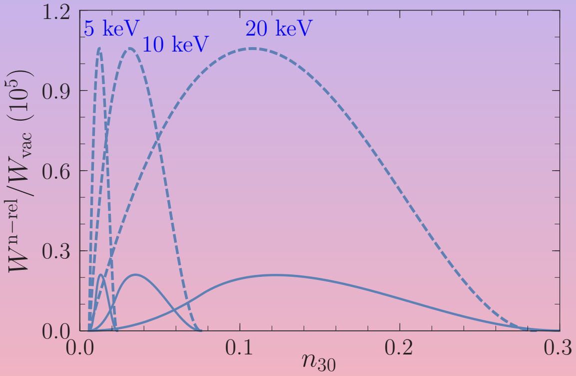
$$\left.\frac{W_{\rm pl+f}^{\rm n-rel}}{W_{vac}}\right|_{x_0 \ll 1} = \frac{256}{135}\,\frac{\pi^2}{\alpha^2}\,x_0^4$$

[A. I. Ternov and P. A. Eminov, Phys. Rev. D87 (2013)]



Вероятность радиационного распада стерильного нейтрино в нерелятивистской сильно замагниченной плазме как функция относительной плазменной частоты $x_0 = \Omega_0/m_s$.

Вероятность радиационного распада стерильного нейтрино для фиксируемых значений массы как функция концентрации электронов плазмы $n_{30} = n_e/(10^{30}\ \text{см}^{-3})$:



Штриховые линии: электронная плазма без магнитного поля.
Сплошные линии: сильно замагниченная плазма $B = B_e = 4.41 \times 10^{13}$ Гс.

Выводы

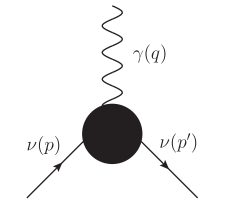
- Рассмотрен распад $\nu_s \to \nu_a + \gamma$ для кэВ-ных значений масс стерильного нейтрино в условиях электронной плазмы без магнитного поля и в сильно замагниченной плазме
- Учитывается изменение дисперсии фотона в замагниченной плазме
- Показано, что в сильно замагниченной плазме аксиально-векторный ток дает вклад в амплитуду процесса, как и векторный ток
- Вероятность радиационного распада стерильного нейтрино в плазме без магнитного поля в 10^5 раз превышает вероятность распада в вакууме
- Сильное магнитного поля ослабляет катализирующее действие плазмы в разы

Вершинная функция виртуального нейтрино при малом переданном импульсе

A. A. Dobrynina, N. V. Mikheev, and E. N. Narynskaya

IJMPA, 2012, Vol. 27, No. 28, P. 1250167

- Форм-факторы вершинной функции $\Lambda_\alpha \Rightarrow$ электромагнитные характеристики μ_ν, d_ν, ...



Общий случай: нейтрино и фотон вне массовой поверхности
Особые случаи

- Реальные нейтрино и виртуальный фотон
  - B. W. Lee and R. E. Shrock, Phys. Rev. D (1977)
  - L. G. Cabral-Rosetti et al, Eur. Phys. J. C (2000)
  - M. Dvornikov and A. Studenikin, Phys. Rev. D (2004)
- Виртуальные нейтрино и реальный фотон

- Магнитное поле постоянное и однородное
- Магнитное поле считаем слабым на масштабе массы W-бозона:

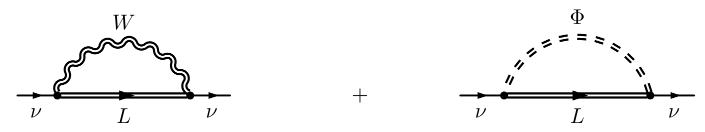
$$eB \ll m_W^2 \quad (B \ll B_W = e/m_W^2)$$

- Пренебрегаем CP-нарушением в лептонном секторе
- Получаем выражение для Λ_β на основе вычисления $\Sigma(p)$

- Собственно-энергетический оператор

$$M_{\nu\to\nu} = -\,\overline{U}(p)\,\Sigma_B(p)\,U(p)$$

- В дополнение к W-бозону учитываем заряженный скалярный бозон Φ (R_ξ-калибровка)



- Лагранжиан взаимодействия фермионов и заряженных бозонов

$$\mathcal{L} = \frac{g}{2\sqrt{2}} (\overline{\psi}_\ell \, \gamma_\alpha \, (1+\gamma_5) \, \psi_\nu) \, W_\alpha \quad + \quad \frac{g}{2\sqrt{2}} (\overline{\psi}_\nu \, \gamma_\alpha \, (1+\gamma_5) \, \psi_\ell) \, W^*_\alpha$$
$$- \frac{g}{\sqrt{2}\, m_W} [(\overline{\psi}_\nu \, K \, \psi_\ell) \, \Phi^* \quad + \quad (\overline{\psi}_\ell \, \overline{K} \, \psi_\nu) \, \Phi]$$

- Здесь $K = m_\ell \, R - m_\nu \, L$, $\overline{K} = \gamma_0 \, K^+ \, \gamma_0$, $L, R = (1 \pm \gamma_5)/2$
- Собственно-энергетический оператор нейтрино

$$\Sigma_B(p) = -\frac{ig^2}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left[(\gamma_\alpha \, L \, S(Q) \, \gamma_\beta \, L) \; G^W_{\beta\alpha}(k) + \frac{1}{m_W^2} (K \, S(Q) \, \bar{K}) \, D^\Phi(k) \right]$$

- k_μ — 4-импульс виртуального бозона
  $Q_\mu = p_\mu + k_\mu$ — 4-импульс виртуального лептона

- Пропагаторы лептона ℓ, W- и Φ-бозонов в линейном по полю приближении в R_ξ-калибровке

$$D^{\Phi}(k) = \frac{i}{k^2 - \xi m_W^2} + \mathcal{O}(F^2)$$

$$S(Q) = i\,\frac{\hat{Q} + m_\ell}{Q^2 - m_\ell^2} - \frac{2e(Q\tilde{F}\gamma)\,\gamma_5 + iem_\ell(\gamma\,F\gamma)}{2(Q^2 - m_\ell^2)^2} + \mathcal{O}(F^2)$$

$$\begin{aligned}
G^W_{\beta\alpha}(k) = &- \frac{i\,g_{\alpha\beta}}{k^2 - m_W^2} + \frac{i}{m_W^2}\left(\frac{1}{k^2 - m_W^2} - \frac{1}{k^2 - \xi m_W^2}\right) k_\beta\, k_\alpha - \\
&- \frac{2eF_{\beta\alpha}}{(k^2 - m_W^2)^2} - \frac{eF_{\beta\alpha}}{2m_W^2}\left(\frac{1}{k^2 - m_W^2} - \frac{1}{k^2 - \xi m_W^2}\right) - \\
&- \frac{e}{m_W^2}\left(\frac{1}{(k^2 - m_W^2)^2} - \frac{1}{(k^2 - \xi m_W^2)^2}\right)[(Fk)_\beta\, k_\alpha - k_\beta (Fk)_\alpha] + \mathcal{O}(F^2)
\end{aligned}$$

- $\Sigma(p)$ для виртуального нейтрино

$$\Sigma_B(p) = \Sigma_0(p) + \frac{i}{4}\left(\hat{p} - m_\nu\right)(\gamma F \gamma)\left\{f_1(p^2) + f_2(p^2)\gamma_5\right\} +$$
$$+ \frac{i m_\nu}{4}(\gamma F \gamma)\, f_3(p^2) + \frac{i}{4}(\gamma F \gamma)\left\{f_1(p^2) - f_2(p^2)\gamma_5\right\}(\hat{p} - m_\nu)$$

  Σ_0 — не зависящая от внешнего поля часть массового оператора, $F_{\alpha\beta}$ — тензор внешнего ЭМ поля

- Функции $f_1(p^2)$, $f_2(p^2)$ и $f_3(p^2)$ можно представить в виде однократных интегралов
- Собственно-энергетический оператор можно представить в виде разложения по полю $F_{\alpha\beta}$

$$\Sigma_B(p) = \Sigma_0 + \frac{\partial \Sigma(p)}{\partial F_{\alpha\beta}} F_{\alpha\beta} + \cdots$$

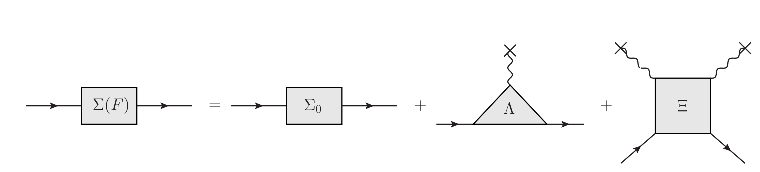
- При рассмотрении медленно изменяющегося поля

$$F_{\alpha\beta} \Rightarrow -i\left(q_\alpha \varepsilon_\beta - q_\beta \varepsilon_\alpha\right)$$

$$\Sigma_B(p) = \Sigma_0(p) + \Lambda_\beta\, \varepsilon^\beta + \cdots$$

  Λ_β — вершинная функция виртуального нейтрино, ε_α — 4-вектор поляризации фотона.

- Связь между собственно-энергетическим оператором $\Sigma(p)$ и вершинной функцией:



- Вершинная функция виртуального нейтрино в пределе относительно малого переданного импульса $q_\mu \ll m_W$

$$\Lambda_\beta = -\frac{m_\nu}{2} f_3(p^2)\,(\sigma q)_\beta - \frac{1}{2}\,(\hat{p} - m_\nu)(\sigma q)_\beta \left[f_1(p^2) + f_2(p^2)\gamma_5 \right] - \\ - \frac{1}{2}\,(\sigma q)_\beta \left[f_1(p^2) - f_2(p^2)\gamma_5 \right] (\hat{p} - m_\nu)$$

- $f_1(p^2)$, $f_2(p^2)$ и $f_3(p^2)$ зависят от калибровочного параметра ξ
- Это же относится к $\Sigma(p)$ и Λ_β

- Рассмотрим случай реального нейтрино $p^2 = m_\nu^2$, $\hat{p} = m_\nu$
- Вершинная функция приводится к виду

$$\Lambda_\beta = 0 \cdot \gamma_\mu + 0 \cdot i\sigma_{\mu\nu}\, q^\nu\, \gamma_5 - \frac{m_\nu\, f_3(m_\nu^2)}{2}(\sigma q)_\beta + \mathcal{O}\left(\frac{q^2}{m_W^2}\right)$$

Отсутствует зависимость от параметра ξ!

- Общее выражение для вершинной функции в пределе малого переданного импульса q_μ

$$\Lambda_\mu = F_Q(0)\,\gamma_\mu + iF_E(0)(\sigma q)_\mu\,\gamma_5 - F_M(0)\,(\sigma q)_\mu + \mathcal{O}\left(\frac{q^2}{m_W^2}\right)$$

- *Сравнение показывает:*
  - электрический заряд $F_Q(0) = Q_\nu = 0$
  - электрический дипольный момент $F_E(0) = d_\nu = 0$
  - магнитный дипольный момент $F_M(0) = \mu_\nu \neq 0$

- Магнитный дипольный момент $F_M(0) = \mu_\nu \neq 0$

$$\mu_\nu = \frac{1}{2} m_\nu\, f_3(p^2)\Big|_{p^2 \to m_\nu^2}$$

$$\mu_\nu = \frac{e\, G_F\, m_\nu}{8\sqrt{2}\,\pi^2}\left[1 + \int\limits_0^1 dx \frac{m_\ell^2 x^2 + m_W^2(1-x)(3-2x)}{m_\ell^2 x + m_W^2(1-x) - m_\nu^2 x(1-x)}\right]$$

Значения параметров разбиваются на три области:

1. $m_\nu < |m_W - m_\ell|$
2. $m_\nu > m_W + m_\ell$
3. $|m_W - m_\ell| < m_\nu < m_W + m_\ell$

$m_\nu < |m_W - m_\ell|$

- $m_\nu^2 \ll m_\ell^2, m_W^2$

$$\mu_\nu = \frac{3eG_F m_\nu}{8\sqrt{2}\pi^2}\left(\frac{2-5\lambda^2+\lambda^4}{2(1-\lambda^2)^2} - \frac{\lambda^4}{(1-\lambda^2)^3}\ln\lambda^2\right), \quad \lambda = \frac{m_\ell}{m_W}$$

  L. G. Cabral-Rosetti, J. Bernab'eu, J. Vidal and A. Zepeda, Eur. Phys. J. (2000)

- В пределе $\lambda \ll 1$

$$\mu_\nu = \frac{3eG_F m_\nu}{8\sqrt{2}\pi^2}$$

  B. W. Lee and R. E. Shrock, Phys. Rev. D (1977)

$m_\nu > m_W + m_\ell \Rightarrow$ нестабильное нейтрино

- Магнитный момент нейтрино μ_ν - комплексный

$$\operatorname{Im}\mu_\nu = -\frac{eG_F}{8\sqrt{2}\pi}\,\frac{m_\nu^2\, m_W^2\left(m_\nu^2 + 7m_\ell^2 - m_W^2\right) + \left(2m_W^2 + m_\ell^2\right) I_3^2}{m_\nu^3\, I_3}$$

$$I_3 = \sqrt{[m_\nu^2 - (m_\ell - m_W)^2]\,[m_\nu^2 - (m_\ell + m_W)^2]}$$

- Мнимая часть магнитного момента нейтрино определяет полевую поправку $\Delta\Gamma^F$ к ширине распада $\nu \to \ell^- \, W^+$ в вакууме $\Gamma^{(0)}$

$$\Gamma = \Gamma^{(0)} + \Delta\Gamma^F$$

- Ширина распада $\nu \to \ell^- \, W^+$ в вакууме

$$\Gamma^{(0)} = \frac{G_F}{8\sqrt{2}\,\pi}\,\frac{I_3}{m_\nu^3}\left[(m_\nu^2 - m_\ell^2)^2 + m_W^2(m_\nu^2 + m_\ell^2 - 2m_W^2)\right]$$

- Полевая поправка $\Delta\Gamma^F$

$$\Delta\Gamma^F = 2\left(\vec{\xi}\,\vec{B}\right)\operatorname{Im}\mu_\nu$$

- $\vec{\xi}$ — вектор удвоенного среднего спина нейтрино

- Введем обозначения $z = m_\nu/(m_W + m_\ell)$, $\quad \lambda = m_\ell/m_W$
- В окрестности порога реакции, $z \to 1$, ширина распада в вакууме упрощается

$$\Gamma^{(0)} \simeq \frac{3G_F\, m_W^3}{2\pi}\, \frac{\lambda^{3/2}}{1+\lambda}\, \sqrt{z-1}$$

- С учетом полевой поправки ширина распада составляет

$$\Gamma \simeq \Gamma^{(0)} \left[1 - (\vec{\xi}\,\vec{b}_w)\frac{4+\lambda}{12\lambda\,(1+\lambda)}\,\frac{1}{z-1}\right]$$

  При $z \to 1$ имеет место усиление полевой поправки
- Напряженность магнитного поля в единицах критического поля W-бозона

$$\vec{b}_w = \frac{e\vec{B}}{m_W^2} = \frac{\vec{B}}{B_W}\,, \qquad B_W \simeq 10^{24}\ \text{Гс}$$

Выводы

- Вычислен собственно-энергетический оператор нейтрино, находящегося вне массовой поверхности
- Получено выражение для вершинной функции виртуального нейтрино при относительно малом переданном импульсе $|q^2| \ll m_W^2$
- Определены значения форм-факторов при $q^2 = 0$

$$F_Q(0) = 0, \quad F_E(0) = 0, \quad F_M(0) = \frac{m_\nu}{2} f_3(p^2)\Big|_{p^2 \to m_\nu^2}$$

- Магнитный момент нейтрино при $m_\nu > m_W + m_\ell$ становится комплексным. Мнимая часть магнитного момента определяет полевую поправку к ширине распада $\nu \to \ell^- W^+$

Собственно-энергетический оператор массивного нейтрино во внешнем магнитном поле

А. А. Добрынина, Н. В. Михеев

ЖЭТФ, 2014, т. 145, №1, с. 65.

- $\Sigma(p)$ стандартного (легкого) нейтрино был исследован в работах
  - *Borisov A. V. et al, Phys. Atom. Nucl. 41 (1985)*
  - *Borisov A. V. et al, Sov. Phys. J. 31 (1988)*
  - *Erdas A. and Feldman G., Nucl. Phys. B343 (1990)*
  - *Kuznetsov A. V. et al, Phys. Rev. D73 (2006)*
  - *Kuznetsov A. V. et al, Phys. Atom. Nucl. 70 (2007)*
  - *Bhattacharya K. et al, Eur. Phys. J. C62 (2009)*
  - *Erdas A., Phys. Rev. D80 (2009)*
  - *Kuznetsov A. V. et al, Phys. Lett. B690 (2010)*
- Внешнее магнитное поле произвольной напряженности B, $B \lesssim B_W$
- Критическое поле W-бозона $B_W = m_W^2/e \simeq 1.09 \times 10^{24}$ Гс
- Вычисления проводим в калибровке Фейнмана $(\xi = 1)$

- Последовательное четвертое поколение фермионов фактически закрыто распадом $H \to \gamma\gamma$
- Если масса легких нейтрино генерируется механизмом «качелей», то должны существовать тяжелые майорановские нейтрино
- ATLAS и CMS коллаборации ведут поиск тяжелых нейтрино как дираковских, так и майорановских

  1. ATLAS Collab.: Eur. Phys. J C72 (2012) 2056
  2. CMS Collab.: Eur. Phys. J C74 (2014) 3149
     Phys. Lett. B748 (2015) 144
     JHEP 2016 (2016) 169

  Нет пока указаний на существование нейтрального лептона

- Рассматривается тяжелое дираковское нейтрино

- Выражение для собственно-энергетического оператора нейтрино

$$\Sigma(p) = -\frac{ig^2}{2}\left[\gamma^\alpha L\, J^W_{\alpha\beta}(p)\,\gamma^\beta L + \frac{1}{m_W^2}\, K\, J^\Phi(p)\,\overline{K}\right]$$

- Введены интегралы

$$J^W_{\alpha\beta}(p) = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4}\, S(p+q)\, G^W_{\beta\alpha}(q)$$

$$J^\Phi(p) = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4}\, S(p+q)\, D^\Phi(q)$$

- $S(p+q)$, $G^W_{\beta\alpha}(q)$ и $D^\Phi(q)$ — Фурье-образы трансляционно-инвариантных частей пропагаторов заряженного лептона, W-бозона и Φ-бозона

- Используем формализм собственного времени Фока-Швингера
- Трансляционно-инвариантные части пропагаторов в постоянном и однородном магнитном поле [J. S. Schwinger, Phys. Rev. (1951)]

$$S(q) = \int\limits_0^\infty ds_1\, e^{-i\Omega_\ell(s_1)} \left\{ \left[(q\gamma)_\parallel + m_\ell\right] \left[1 - \frac{1}{2}\,(\gamma\varphi\gamma)\ \mathrm{tg}(\beta s_1)\right] - \frac{(q\gamma)_\perp}{\cos^2(\beta s_1)} \right\}$$

$$G^W_{\beta\alpha}(q) = -\int\limits_0^\infty \frac{ds_2}{\cos(\beta s_2)}\, e^{-i\Omega_W(s_2)} \left[(\tilde\varphi\tilde\varphi)_{\beta\alpha} - (\varphi\varphi)_{\beta\alpha}\cos(2\beta s_2) - \varphi_{\beta\alpha}\sin(2\beta s_2)\right]$$

$$D^\Phi(q) = \int\limits_0^\infty ds_2\, e^{-i\Omega_W(s_2)}$$

- Показатель фазовых множителей

$$\Omega_j(s) = s\left(m_j^2 - q_\parallel^2\right) + \frac{\mathrm{tg}(\beta s)}{\beta}\, q_\perp^2\,, \qquad (j = \ell,\ W)$$

- $\beta = eB$, e — элементарный заряд, B — напряженность магнитного поля
- Безразмерный тензор ЭМ поля и дуальный к нему

$$\varphi_{\alpha\beta} = \frac{F_{\alpha\beta}}{B} \qquad \tilde\varphi_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\,\varepsilon_{\alpha\beta\rho\sigma}\varphi^{\rho\sigma}$$

- Обозначения: $(ab)_\parallel = (a\tilde\varphi\tilde\varphi b)\,,\ (ab)_\perp = (a\varphi\varphi b)$

- Для $\Sigma(p)$ справедливо разложение [A. Kuznetsov and N. Mikheev, Electroweak Processes in External Active Media (2013)]

$$\Sigma(p) = \left[\mathcal{A}_L\,(p\gamma) + \mathcal{B}_L\,e^2\left(p\tilde{F}\tilde{F}\gamma\right) + \mathcal{C}_L\,e\left(p\tilde{F}\gamma\right)\right]L +$$
$$+\left[\mathcal{A}_R\,(p\gamma) + \mathcal{B}_R\,e^2\left(p\tilde{F}\tilde{F}\gamma\right) + \mathcal{C}_R\,e\left(p\tilde{F}\gamma\right)\right]R + m_\nu\left[\mathcal{K}_1 + i\mathcal{K}_2\,e\,(\gamma F\gamma)\right]$$

- Коэффициенты могут быть представлены в виде двукратных интегралов по безразмерным параметрам

$$x = m_W^2\,(s_1 + s_2)$$

$$u = s_2/\,(s_1 + s_2)$$

- $\Sigma(p) \;\Rightarrow\;$ дополнительная энергия нейтрино ΔE:

$$\Delta E = \frac{1}{2E}\,\mathrm{Sp}\,[\Sigma(p)\,\rho(p)]$$

- энергия нейтрино в вакууме $\quad E = \sqrt{\vec{p}^{\,2} + m_\nu^2}$
- матрица плотности $\quad \rho(p) = \frac{1}{2}(\hat{p} + m_\nu)(1 + \hat{s}\gamma_5)$
- 4-вектор поляризации нейтрино s^μ
- Для ΔE получаем выражение

$$\Delta E = \frac{1}{2E}\left[m_\nu^2(\bar{\mathcal{A}}_L + \bar{\mathcal{A}}_R + 2\bar{\mathcal{K}}_1) + e^2(p\tilde{F}\tilde{F}p)(\mathcal{B}_L + \mathcal{B}_R)\right] + \\ + \frac{m_\nu}{2E}\,e^2(\mathcal{B}_R - \mathcal{B}_L)(s\tilde{F}\tilde{F}p) - \frac{m_\nu}{2E}\,eB\,[\mathcal{C}_L - \mathcal{C}_R + 4\mathcal{K}_2]\,(p\tilde{F}s)$$

- $\bar{\mathcal{A}}_{L,R} = \mathcal{A}_{L,R}(B) - \mathcal{A}_{L,R}(0)$ и $\bar{\mathcal{K}}_1 = \mathcal{K}_1(B) - \mathcal{K}_1(0)$ содержат чисто полевой вклад
- $E\Delta E$ инвариантно относительно преобразования Лоренца вдоль поля

- 4-вектор поляризации нейтрино

$$s^{\mu} = \left(\frac{(\vec{p}\vec{\xi})}{m_\nu}, \vec{\xi} + \frac{\vec{p}(\vec{p}\vec{\xi})}{m_\nu(E+m_\nu)} \right)$$

- $\vec{\xi}$ — вектор удвоенного среднего спина нейтрино в системе покоя
- Дополнительная энергия нейтрино:

$$\Delta E = \frac{m_\nu^2}{2E}(\bar{\mathcal{A}}_L + \bar{\mathcal{A}}_R + 2\bar{\mathcal{K}}_1) +$$
$$+ \frac{p_\parallel^2}{2E} e^2 B^2 \mathcal{B}_R \left[1 + (\vec{V}\vec{\xi})\right] + \frac{p_\parallel^2}{2E} e^2 B^2 \mathcal{B}_L \left[1 - (\vec{V}\vec{\xi})\right] -$$
$$- \frac{em_\nu}{2} \left[\mathcal{C}_L - \mathcal{C}_R + 4\mathcal{K}_2 + e\,(\mathcal{B}_R - \mathcal{B}_L)\,(\vec{B}\vec{V})\right] \left[(\vec{B}_t\vec{\xi}) + \frac{m_\nu}{E}\,(\vec{B}_l\vec{\xi})\right]$$

- скорость нейтрино $\vec{V} = \vec{p}/E$
- магнитное поле можно разложить на два вектора:

$$\vec{B} = \vec{B}_l + \vec{B}_t, \qquad (\vec{V}\vec{B}_t) = 0$$

Распад $\nu \to \ell^- W^+$ при $m_\nu < m_W + m_\ell$

- распад $\nu \to \ell^- W^+$ при $m_\nu > m_W + m_\ell$ был рассмотрен в предыдущей части доклада
- $m_\nu < m_W + m_\ell$: распад $\nu \to \ell^- W^+$ кинематически запрещен в вакууме
- в присутствии магнитного поля распад возможен: ультрарелятивистское нейтрино в относительно слабом магнитном поле $(eB \ll p_\perp^2)$
- Вычисляем в пределе скрещенного поля: $\chi = eB\, p_\perp / m_W^3 \neq 0$
- $\Delta\Gamma^{(F)} = -2\, \mathrm{Im}\, \Delta E$
- Мнимая часть дополнительной энергии нейтрино ΔE

$$\mathrm{Im}\, \Delta E = \frac{p_\parallel^2}{2E}\, e^2 B^2\, \mathrm{Im}\, \mathcal{B}_L \left[1 - (\vec{V}\vec{\xi}\,)\right] + \frac{p_\parallel^2}{2E}\, e^2 B^2\, \mathrm{Im}\, \mathcal{B}_R \left[1 + (\vec{V}\vec{\xi}\,)\right]$$

- Коэффициенты $\mathcal{B}_L$ и $\mathcal{B}_R$ в приближении скрещенного поля

$$\mathcal{B}_L = \frac{G_F}{12\sqrt{2}\pi^2 m_W^2} \int\limits_0^1 du \, \frac{2u\,(1+u)\,(2+u) + \lambda u\,(1-u)\,(2-u)}{[u + \lambda\,(1-u) - \nu\, u\,(1-u)]^2}\, \rho^2\, \frac{df(\rho)}{d\rho}$$

$$\mathcal{B}_R = \frac{G_F}{12\sqrt{2}\pi^2 m_W^2}\, \nu \int\limits_0^1 du \, \frac{u\,(1-u)\,(2-u)}{[u + \lambda\,(1-u) - \nu\, u\,(1-u)]^2}\, \rho^2\, \frac{df(\rho)}{d\rho}$$

- $\lambda = m_\ell^2/m_W^2$, $\nu = m_\nu^2/m_W^2$
- $f(\rho)$ — функция Харди-Стокса

$$f(\rho) = i \int_0^\infty d\tau \;\exp\left[-i\left(\rho\tau + \frac{\tau^3}{3}\right)\right]$$

с аргументом

$$\rho = \frac{u + \lambda\,(1-u) - \nu\, u\,(1-u)}{[u\,(1-u)\,\chi]^{2/3}}$$

- Мнимая часть функции Харди-Стокса с точностью до коэффициента совпадает с функцией Эйри

$$\mathrm{Ai}(\rho) = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^\infty d\tau \cos\left(\tau\rho + \frac{\tau^3}{3}\right)$$

- Ширина распада нейтрино

$$\Gamma(\nu \to W\,\ell) = -\frac{G_F\, m_W^4}{12\sqrt{2}\pi}\,\frac{\chi^{2/3}}{E}\int\limits_0^1 \frac{u\,du}{[u\,(1-u)]^{4/3}}\,\frac{d\,\mathrm{Ai}(\rho)}{d\rho}\times$$
$$\times\left\{[2\,(1+u)\,(2+u)+\lambda\,(1-u)\,(2-u)]\left[1-(\vec{V}\vec{\xi}\,)\right]+\nu\,(1-u)\,(2-u)\left[1+(\vec{V}\vec{\xi}\,)\right]\right\}$$

- Для стандартного легкого нейтрино $m_\nu \ll m_\ell, m_W$ воспроизводим результат работы *A. V. Kuznetsov et al, Phys. Lett. B690 (2010)*

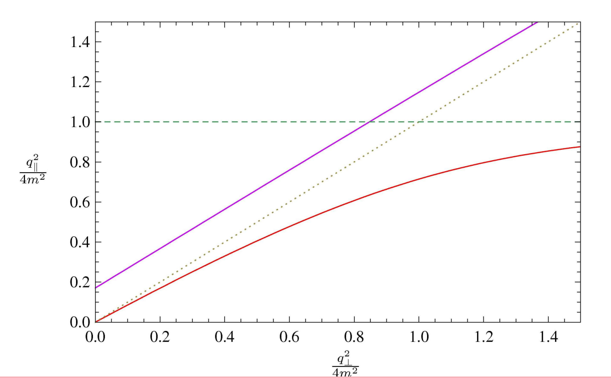
$$\Gamma(\nu \to W\,\ell) = -\frac{\sqrt{2}G_F\, m_W^4}{12\pi}\,\frac{\chi^{2/3}}{E}\int\limits_0^1 \frac{u\,du}{[u\,(1-u)]^{4/3}}\,\frac{d\,\mathrm{Ai}(\rho)}{d\rho}\times$$
$$\times\,[2\,(1+u)\,(2+u)+\lambda\,(1-u)\,(2-u)]$$

Выводы

- Вычислен собственно-энергетический оператор нейтрино $\Sigma(p)$ во внешнем магнитном поле произвольной напряженности $B < B_W$ при произвольном соотношении между массами нейтрино, W-бозона и заряженного лептона
- Получено выражение для дополнительной энергии нейтрино ΔE на основе результата для $\Sigma(p)$
- Продемонстрировано, что при $m_\nu < m_\ell + m_W$ распад $\nu \to \ell + W$, кинематически запрещенный в вакууме, для движущегося нейтрино в присутствии внешнего магнитного поля становится возможным
- В приближении скрещенного поля вычислена ширина данного процесса

Закон дисперсии

Закон дисперсии фотона моды 2 при $k_3 = 0$, $B = 10^{16}$ Гс, отсутствие плазмы — красная кривая, $\rho = 7 \cdot 10^8$ г/см^3 — фиолетовая кривая. Точки — вакуумный закон дисперсии ($q^2 = 0$)



$\nu_s \to \nu_a + \gamma$ в релятивистской сильно замагниченной плазме

- Случай релятивистской сильно замагниченной плазмы

$$V_F \simeq \sqrt{1 - m_e^2/\mu_e^2} \to 1$$

- Плазменная частота

$$\Omega_0 \simeq 34.7 \text{ кэВ} \sqrt{B/B_e}$$

- $m_e/\mu_e \ll x_0 < 1$

$$W^{\mathrm{rel}}_{\mathrm{pl+f}} \simeq \frac{(G_F m_s^2)^2}{64\pi^2\alpha} m_s \sin^2(2\theta_s) \frac{(C_V^2 + C_A^2)\, x_0^4}{1 - e^{-m_s\left(1+x_0^2\right)/(2T)}} \times$$
$$\times \left[\left(1 + x_0^2\right) \ln \frac{1}{x_0} - \frac{1}{8} \left(1 - x_0^2\right) \left(3 + x_0^2\right)\right]$$

- $x_0 \ll m_e/\mu_e$

$$W^{\mathrm{rel}}_{\mathrm{pl+f}} \simeq \frac{(G_F \Omega_0^2)^2}{64\pi^2\alpha} m_s \sin^2(2\theta_s) \left(C_V^2 + C_A^2\right) \frac{\ln(2\mu_e/m_e) - 5/4}{1 - e^{-m_s/(2T)}}$$

- Для вероятности получены аналитические решения; возможность приложения обсуждается