ТЕНЗОРНЫЙ АНАЛИЗ

[конспект лекций]

А. А. Владимиров
ЛТФ ОИЯИ
alvladim@theor.jinr.ru

Содержание

ГЛАВА 1. Тензорные поля 2
ГЛАВА 2. Метрический тензор 6
ГЛАВА 3. Дифференциальные формы 8
ГЛАВА 4. Интегрирование форм 11

Аннотация

Данный конспект предназначен для студентов второго курса (третий семестр). В общем и целом он соответствует учебной дисциплине “Векторный и тензорный анализ”, и может также рассматриваться как непосредственное продолжение моего пособия для первокурсников “Математика для физиков”. Предполагается, что самые начальные сведения о тензорах у студентов уже имеются (например, в объеме соответствующих глав вышеупомянутого пособия). В отличие от большинства учебников, в данном конспекте я уделяю много внимания дифференциальным формам как естественному математическому языку для описания кратного интегрирования.

ГЛАВА 1

Тензорные поля

Наиболее известным примером тензорного поля является *векторное поле* (например, электрическое или магнитное), заданное в обычном трехмерном пространстве. То есть, в каждой точке p трехмерного пространства M задан некий вектор $\mathbf{A}(p)$. Аналогично вводится и тензорное поле (например, с одним верхним и одним нижним индексом): *тензорное поле* $B_i^j(p)$ – это функция на пространстве M, принимающая тензорные значения. При этом, переходя от обычных тензоров (векторов, линейных операторов и других подобных объектов в линейных пространствах) к тензорным полям, мы заодно переходим от линейной алгебры к *дифференциальной геометрии*, поскольку теперь все величины будут дополнительно зависеть от точек пространства M, и по координатам этих точек их можно будет дифференцировать. В рамках данного курса будет изучаться лишь небольшая (вступительная) часть этой достаточно обширной и сложной науки, а именно, дифференциальная геометрия в двумерном и трехмерном пространстве. Точнее говоря, мы будем стремиться везде, где это не ведет к ненужным усложнениям, выписывать формулы для общего N-мерного случая, но читатель ничего не потеряет, представляя себе для наглядности пространства размерности 2 или 3.

Здесь требуется сделать уточнение по поводу употребления слова 'пространство' применительно к M. В примерах, с которых мы начали, под M подразумевалось обычное евклидово (а значит – линейное) пространство, снабженное прямоугольной декартовой системой координат. Но мы недаром называли элементы этого пространства *точками*, а не векторами. В дифференциальной геометрии исходное пространство M, как правило, вообще *не является линейным* пространством. Его можно представлять в виде некой искривленной поверхности, а еще лучше – в виде непрерывного множества точек (двумерного, трехмерного и т.д.), снабженного (вообще говоря, криволинейной) координатной сеткой. По этой причине математики называют M не пространством, а *многообразием* (по-английски: manifold). Мы же будем продолжать называть M пространством, не считая его при этом линейным. Наглядной трехмерной моделью для M может, например, служить обычное трехмерное евклидово пространство в каких-нибудь *криволинейных* координатах. Двумерное пространство M можно представлять себе либо с помощью криволинейных координат на плоскости, либо в виде искривленной двумерной поверхности (например, сферы).

Последний пример позволяет легче понять еще один аспект проблемы. Попробуем уточнить математический смысл определения векторного поля, заданного на двумерном пространстве M. Неожиданно это приводит к довольно громоздкой конструкции: каждой точке $p \in M$ должно быть сопоставлено (свое персональное) двумерное линейное *касательное пространство* V_p, которому и принадлежит вектор $\mathbf{A}(p)$. Пространства V_p по определению различны для разных p (в модели сферы это очевидно, ибо там V_p есть плоскость, касательная к сфере в точке p), и ни одно из них, конечно же, не тождественно исходному пространству M, которое в данном примере и линейным-то не является. Важно понимать (это относится к любым размерностям M), что все V_p считаются различными и не совпадающими с M даже если M по каким-то (например, физическим) причинам реально представляет собой евклидово пространство – даже в этом случае мы не должны относиться к нему как к линейному пространству, и тем более пользоваться его линейными свойствами.

Подведем итоги. Тензорные поля задаются на пространстве (многообразии) M размерности N, точки которого параметризуются набором вещественных координат $\{x^i\}$, где $i = 1, \ldots, N$. Любая точка $p \in M$ однозначно определяется своими координатами x^i. Это означает, в частности, что мы можем использовать аргумент x (понимая под ним совокупность координат x^i) вместо p. Например, тензорное поле $B_i^j(x)$ – это функция на пространстве M, значение которой в точке $p = p(x)$ есть тензор линейного пространства V_p с одним верхним и одним нижним индексом.

Важнейшим свойством (по сути – определением) тензоров в линейных пространствах является их закон преобразования при замене базиса. Напомним его. Пусть в линейном пространстве V введен новый базис $\{\tilde{\mathbf{e}}_i\}$, связанный с исходным базисом $\{\mathbf{e}_i\}$ линейным преобразованием $\tilde{\mathbf{e}}_i = T_i^j \mathbf{e}_j$, где матрица T обязана быть обратимой. Тогда, например, компоненты тензора D_k^{ij} при переходе к новому базису примут вид

$$\tilde{D}_k^{ij} \;=\; T_k^l \, (T^{-1})_m^i \, (T^{-1})_n^j \, D_l^{mn} \,. \tag{1}$$

Это пример достаточен для усвоения универсального правила: нижние индексы тензора преобразуются матрицей T, а верхние – матрицей T^{-1}.

Наша задача теперь – найти соответствующий закон преобразования для тензорных полей. Рассмотрим для конкретности случай $B_i^j(p)$. Из (1) следует

$$\tilde{B}_i^j(p) \;=\; (T_p)_i^m \, (T_p^{-1})_n^j \, B_m^n(p) \,, \tag{2}$$

где T_p – обратимая матрица, преобразующая базис в линейном пространстве V_p. Формула (2) в принципе решает поставленную задачу. Однако она нуждается в некоторой доработке. Во-первых, нас не радует перспектива следить за преобразованиями базисов в *каждой* точке. Во-вторых, хотелось бы вообще перейти от точек p к их координатам x и, в частности, получить закон преобразования тензорных полей при замене координат.

Чтобы продвинуться в нужном направлении, рассмотрим тензор вообще без индексов, то есть *скалярную* функцию $f(p) = f(p(x)) = F(x)$ на пространстве M. Как формальная функция точки p она, естественно, *никак* не должна меняться при заменах базисов в пространствах V_p: $\tilde{f}(p) = f(p)$. Однако как функция координат x она *обязана* изменяться при их замене: $F(x) = F(x(\tilde{x})) \doteq \tilde{F}(\tilde{x})$. Именно замена *формы* данной скалярной функции (F на $\tilde{F}$) гарантирует неизменность *значения* этой функции в данной 'физической' точке p, несмотря на замену координат. Рассуждая аналогично, приходим к улучшенному варианту формулы (2):

$$\tilde{B}_i^j(\tilde{x}) \;=\; (T_x)_i^m \, (T_x^{-1})_n^j \, B_m^n(x) \,, \tag{3}$$

где T_x есть просто $T_{p(x)}$. Мы избавились от p, осталось разобраться с матрицами T.

Воспользуемся следующим приемом: для *каждой* системы координат $\{x^i\}$ зафиксируем в *каждой* точке p один-единственный (и при этом весьма натуральный) базис касательного пространства V_p. При заменах координат эти базисы будут изменяться контролируемым образом. Тем самым мы сведем проблему изменения базиса к замене координат, и одновременно получим явный рецепт нахождения матриц T. Искомый локальный базис выглядит так:

$$\mathbf{e}_i(p) \;=\; \partial_i p \;\equiv\; \frac{\partial p}{\partial x^i} \,. \tag{4}$$

Сразу возникают вопросы: являются ли определяемые формулой (4) объекты векторами? И вообще, можно ли дифференцировать p, раз мы договорились не считать M линейным пространством?

Отложив ненадолго эти вполне законные вопросы по поводу смысла формулы (4), попробуем все-таки ею воспользоваться и завершить вывод закона преобразования тензорных полей. Как изменится локальный базис при переходе к другим координатам? По правилу дифференцирования сложной функции получаем

$$\tilde{\mathbf{e}}_i(p) \;=\; \frac{\partial p}{\partial \tilde{x}^i} \;=\; \frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^i}\,\frac{\partial p}{\partial x^j} \;=\; \frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^i}\;\mathbf{e}_j(p) \;=\; (T_x)^j_i\;\mathbf{e}_j(p)\;. \tag{5}$$

Итак, мы нашли явную формулу для матрицы T_x, а заодно и для обратной к ней,

$$(T_x)^j_i \;=\; \frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^i}\;, \qquad (T_x^{-1})^j_i \;=\; \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^i}\,, \tag{6}$$

поскольку

$$\frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^i}\,\frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^k} = \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial \tilde{x}^k} \;=\; \delta^j_k\,. \tag{7}$$

Мы предполагаем, конечно, что замены координат $\tilde{x}(x)$ и $x(\tilde{x})$ взаимно обратимы и дифференцируемы в любой точке. В итоге получаем:

$$\tilde{B}^j_i(\tilde{x}) \;=\; \frac{\partial x^m}{\partial \tilde{x}^i}\;\frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^n}\;B^n_m(x)\,. \tag{8}$$

Это и есть окончательная формула преобразования тензорных полей при заменах координат. Её обобщение на случай любого числа и типа индексов очевидно.

Вернемся теперь к вопросу о смысле и корректности определения (4). Примем как почти очевидный факт, что наше исходное (нелинейное) пространство M можно считать *вложенным* в другое, но уже линейное объемлющее пространство, возможно, большей размерности. Так, двумерная искривленная поверхность лежит в трехмерном евклидовом пространстве, а обычное трехмерное пространство с криволинейными координатами можно рассматривать как вложенное в трехмерное же, но с декартовой системой координат и всеми свойствами линейности. Тогда любая точка p из M может одновременно трактоваться как *вектор* $\mathbf{p}$ в этом объемлющем линейном пространстве. Величины $\mathbf{e}_i(p)$, задаваемые формулой (4), тоже будут в нем векторами, причем (по геометрическому смыслу производной) касательными к M. А именно, вектор $\mathbf{e}_i = \partial_i p$ касается той линии координатной сетки, которая отвечает i-ой координате. Тем самым, $\{\mathbf{e}_i(p)\}$ вполне годится на роль базиса касательного пространства V_p. Математики часто записывают базис (4) в виде $\{\partial_i\}$, вообще не упоминая p. Каков смысл столь нетривиальной записи (операторы дифференцирования вместо векторов), мы поймем чуть позже. Пока лишь отметим, что на вывод основной формулы (8) такое изменение определения (4) никак не повлияет – надо просто стереть p в выкладке (5).

Чтобы завершить обсуждение формулы (8) – одной из важнейших в дифференциальной геометрии – рассмотрим более детально понятие касательного вектора. Назовем вещественный параметр t *временем*, а зависимость $p(t)$ – *траекторией* точки в пространстве M, предполагая достаточную гладкость координат этой точки $x^i(t)$ как функций времени. *Касательным вектором* к данной траектории в точке $p(t)$ естественно назвать следующий объект:

$$\mathbf{A}(p) \;=\; \frac{d}{dt}\,\mathbf{p}(t) \;=\; \frac{dx^i}{dt}\,\partial_i\mathbf{p} \;=\; \frac{dx^i}{dt}\,\mathbf{e}_i(p) \;=\; A^i(x)\,\mathbf{e}_i(p)\,, \tag{9}$$

где $A^i(x) = dx^i/dt$ – компоненты вектора $\mathbf{A}(p)$ в локальном базисе (4). Отметим, что хотя формула (9) определяет $\mathbf{A}(p)$ как вектор объемлющего пространства, для

определения величин $A^i(x)$ нужно знать только траекторию $p(t)$ в пространстве M. Поэтому мы, в принципе, могли задать касательный вектор просто как совокупность компонент $A^i(x)$, без всякой апелляции к объемлющему пространству.

Легко проверить, что векторное поле $A^i(x)$ преобразуется в согласии с общим рецептом (8):

$$\tilde{A}^i(\tilde{x}) \;=\; \frac{d\tilde{x}^i}{dt} \;=\; \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j}\,\frac{dx^j}{dt} \;=\; \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j}\,A^j(x)\,. \tag{10}$$

Рассмотрим также тензорное поле с одним нижним индексом (его часто называют *ковекторным*). В качестве такового возьмем, например, $f_i(x) = \partial_i f(x)$ для какой-нибудь скалярной функции $f(x)$. Легко видеть, что

$$\tilde{f}_i(\tilde{x}) \;=\; \frac{\partial \tilde{f}(\tilde{x})}{\partial \tilde{x}^i} \;=\; \frac{\partial f(x)}{\partial \tilde{x}^i} \;=\; \frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^i}\,\partial_j f(x) \;=\; \frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^i}\,f_j(x)\,, \tag{11}$$

тоже в полном согласии с (8). Соотношения (10), (11) дают дополнительное обоснование общей формулы (8) без какого-либо обращения к объемлющему пространству.

Ковекторное поле с компонентами $\partial_i f$ называется *градиентом* скалярной функции f. Изучим теперь одну весьма полезную конструкцию, включающую векторные поля и градиенты. Пусть имеется векторное поле A и задана такая траектория $x(t)$, что в каждой ее точке соответствующий вектор этого поля к ней касателен. Пусть задана также скалярная функция f. На данной траектории её можно трактовать как функцию $f(x(t))$ одной переменной t и продифференцировать по ней:

$$\frac{d}{dt}\,f(x(t)) \;=\; \frac{dx^i}{dt}\,\partial_i f \;=\; A^i\,\partial_i f \;\equiv\; Af\,. \tag{12}$$

Смысл этой величины вполне прозрачен – это скорость изменения значений функции f при движении вдоль траектории, касательной к векторному полю A (или короче: скорость роста f вдоль поля A). Вычисленная в одной конкретной точке, она есть, конечно, просто число. Но вычисленная *во всех* точках пространства M (предполагая, что везде подобраны соответствующие траектории), величина Af становится функцией на M. Теперь мы можем усмотреть в формуле (12) и другой, дополнительный смысл: векторное поле $A(x)$ *действует* на $f(x)$, превращая её в новую функцию $(Af)(x) = A^i(x)\,\partial_i f(x)$. Причем, как видно из (12), действует оно как *дифференциальный оператор*: $A = A^i\,\partial_i$. В свете этого факта и формулы (9), казавшийся странным способ записи локального базиса в виде $\{\partial_i\}$ находит свое объяснение.

В заключение данной главы проясним затронутый выше вопрос, всегда ли найдутся траектории, которых касается наперед заданное векторное поле. Для одного вектора, привязанного к конкретной точке, конечно, существует много траекторий, проходящих через эту точку, которых он касается. Если же ставить вопрос обо всем пространстве M или хотя бы о некоторой области в нем, то задача сводится к поиску решений $x(t)$ дифференциальных уравнений вида $dx^i/dt = A^i(x)$ для заданного векторного поля $A(x)$, проходящих через произвольную точку. Для гладких (то есть бесконечно дифференцируемых по координатам) полей A такое решение, как следует из теории обыкновенных дифференциальных уравнений, всегда существует и единственно. Следовательно, любому гладкому векторному полю A на пространстве M единственным образом сопоставляется заполняющий всё пространство набор траекторий, которым в любой точке касателен соответствующий вектор этого поля.

ГЛАВА 2

Метрический тензор

В линейной алгебре *метрический тензор* g_{ij} вводится для корректного определения скалярного произведения векторов: $\mathbf{AB} = g_{ij}\, A^i\, B^j$. При этом от матрицы g_{ij} требуется симметричность по индексам и невырожденность, то есть существование обратной матрицы g^{ij}. Метрический тензор служит для нахождения длин векторов, а также для подъема и опускания тензорных индексов. В дифференциальной геометрии аналогичную роль играет метрическое тензорное поле $g_{ij}(x)$ (сокращенно – *метрика*), симметричное по ij и невырожденное (как числовая матрица) в каждой точке x. Его закон преобразования вытекает из общей формулы (8):

$$\tilde{g}_{ij}(\tilde{x}) \;=\; \frac{\partial x^m}{\partial \tilde{x}^i}\;\frac{\partial x^n}{\partial \tilde{x}^j}\; g_{mn}(x)\,. \tag{13}$$

Нам вскоре понадобится величина $g \doteq \det g_{ij}$, поэтому выясним сразу, как она преобразуется. Записав правую часть (13) в виде произведения трех матриц,

$$\tilde{g}(\tilde{x}) \;=\; \left(\frac{\partial x}{\partial \tilde{x}}\right)^t g(x) \left(\frac{\partial x}{\partial \tilde{x}}\right)\,, \tag{14}$$

и взяв детерминанты от обеих частей, получим

$$\det \tilde{g}(\tilde{x}) \;=\; \left(\det \frac{\partial x}{\partial \tilde{x}}\right)^2 \det g(x) \qquad \text{или} \qquad \sqrt{\tilde{g}} \;=\; \sqrt{g}\, \det \frac{\partial x}{\partial \tilde{x}}\,, \tag{15}$$

где $\det(\partial x/\partial \tilde{x})$, в силу (7), есть величина, обратная якобиану $\det(\partial \tilde{x}/\partial x)$ нашей замены координат.

Прежде чем мы попытаемся применить заданную метрику для нахождения длин, площадей и объемов криволинейных объектов, попробуем сначала выяснить, чем определяется явный вид самого́ метрического тензора $g_{ij}(x)$ в конкретном пространстве. Рассмотрим следующую ситуацию: пусть в наше пространство M с координатами x^i и метрикой $g_{ij}(x)$ вложено другое пространство M' той же или меньшей размерности с координатами σ^α. Ясно, что правила вычисления длин, площадей и т.п. в пространстве M' диктуются соответствующими правилами, действующими в объемлющем пространстве M. А это значит, что метрический тензор $g_{ij}(x)$ пространства M должен порождать, или *индуцировать*, однозначно определенную метрику $g_{\alpha\beta}(\sigma)$ в пространстве M'. Найдем её явный вид. Пусть вложение M' в M задается координатными зависимостями $x^i(\sigma)$. Возьмем вектор $\mathbf{A}$, касательный к некоторой траектории $\sigma(t)$ в M'. Зная метрику $g_{\alpha\beta}(\sigma)$, мы могли бы записать его скалярный квадрат в виде $g_{\alpha\beta} A^\alpha A^\beta$. Пока мы, однако, знаем только $g_{ij}(x)$. Но этого достаточно, чтобы выписать тот же скалярный квадрат, только в терминах пространства M. Итак,

$$g_{\alpha\beta}(\sigma)\,\frac{d\sigma^\alpha}{dt}\,\frac{d\sigma^\beta}{dt} \;=\; g_{\alpha\beta}\, A^\alpha\, A^\beta \;=\; \mathbf{AA} \;=\; g_{ij}\,\frac{dx^i}{dt}\,\frac{dx^j}{dt} \;=\; g_{ij}(x)\,\frac{\partial x^i}{\partial \sigma^\alpha}\,\frac{\partial x^j}{\partial \sigma^\beta}\,\frac{d\sigma^\alpha}{dt}\,\frac{d\sigma^\beta}{dt}\,, \tag{16}$$

откуда выводим искомую формулу для индуцированной метрики:

$$g_{\alpha\beta}(\sigma) \;=\; g_{ij}(x)\,\frac{\partial x^i}{\partial \sigma^\alpha}\,\frac{\partial x^j}{\partial \sigma^\beta} \;=\; \frac{\partial x^i}{\partial \sigma^\alpha}\,\frac{\partial x_i}{\partial \sigma^\beta}\,. \tag{17}$$

Найденное соотношение поможет нам получить формулу для элемента площади двумерной поверхности в пространстве с заданной метрикой. Воспользуемся моделью, рассмотренной в первой главе: пусть M – двумерное *евклидово* пространство с *криволинейными* координатами x^i. Тогда в этом же пространстве существуют и декартовы координаты y^i. Выразим теперь бесконечно малый элемент площади, который в декартовых координатах есть просто $dy^1\,dy^2$, через координаты x^i:

$$dS \;=\; dy^1\,dy^2 \;=\; \det\frac{\partial y}{\partial x}\;dx^1\,dx^2 \;=\; \sqrt{g}\;dx^1\,dx^2\,. \tag{18}$$

Понятно, что якобиан $\det(\partial y/\partial x)$ связан с заменой переменных $y(x)$, но откуда здесь детерминант метрики? Ответ следующий: считаем, что метрика $g_{ij}(x)$ пространства M индуцирована евклидовой метрикой декартова пространства (равной δ_{ij} при любом y) и следовательно, по формуле (17) равна

$$g_{ij}(x) \;=\; \frac{\partial y^k}{\partial x^i}\,\frac{\partial y^k}{\partial x^j} \quad\Longrightarrow\quad g(x) \;=\; \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^t\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) \quad\Longrightarrow\quad \sqrt{g} \;=\; \det\frac{\partial y}{\partial x} \tag{19}$$

(в формулах $(14), (15), (19)$ $g(x)$ – это матрица, а g – её детерминант, т.е. число).

Форма записи $\sqrt{g}\,dx^1dx^2$ из (18) хороша тем, что здесь элемент площади выражен через координаты и метрику только самого пространства M. Пользуясь другой возможной моделью M как двумерной поверхности, вложенной в трехмерное евклидово пространство, мы получили бы тот же результат, поскольку площадь малого участка искривленной поверхности примерно равна площади его проекции на касательную плоскость, на которой уже можно вводить декартовы координаты, тем самым сводя задачу к предыдущей. Более того, доказательство (18), как легко видеть, остается в силе для пространства любой размерности. Мы получаем универсальную формулу, выражающую элемент объема через детерминант метрического тензора:

$$dV \;=\; \sqrt{g}\;dx^1\ldots dx^N\,. \tag{20}$$

Дополнительным достоинством этого определения является его независимость от выбора координат. Действительно, принимая во внимание (15) видим, что

$$\sqrt{\tilde g}\;d\tilde x^1\ldots d\tilde x^N \;=\; \sqrt{g}\,\det\frac{\partial x}{\partial\tilde x}\,\det\frac{\partial\tilde x}{\partial x}\;dx^1\ldots dx^N \;=\; \sqrt{g}\;dx^1\ldots dx^N\,. \tag{21}$$

Формула (20) пригодна и в одномерном случае, для записи элемента длины. Рассмотрим кривую в пространстве M как одномерное пространство, координату вдоль кривой назовем t, а метрику на ней, сводящуюся к единственной компоненте $g_{11}(t)$, (она же – детерминант g) найдем по рецепту (17),

$$g \;=\; g_{11}(t) \;=\; g_{ij}(x)\,\frac{dx^i}{dt}\,\frac{dx^j}{dt}\;, \tag{22}$$

откуда следует известное выражение для элемента длины кривой

$$dl \;=\; \sqrt{g}\;dt \;=\; \sqrt{g_{ij}(x)\,\frac{dx^i}{dt}\,\frac{dx^j}{dt}}\;dt \tag{23}$$

в переменных объемлющего пространства.

ГЛАВА 3

Дифференциальные формы

В данной главе мы будем изучать тензорные поля, несущие только нижние индексы и антисимметричные по этим индексам. Такие поля соответствуют *дифференциальным формам* и представляют интерес как сами по себе, так и в связи с задачами интегрирования. Начнем с ковекторных полей $H_i(x)$ – у них только один индекс, и антисимметрия здесь пока не проявится. Пример такого поля мы уже видели в первой главе – это градиент скалярной функции $\partial_i f(x)$. Рассмотрим теперь произвольные ковекторные поля. В линейной алгебре, ковектор – это линейная функция λ на векторном пространстве V, сопоставляющая каждому вектору $\mathbf{x} \in V$ число $<\lambda\,,\mathbf{x}> = \lambda_i\, x^i$. Ковекторы образуют свое линейное пространство V^*, дуальное к V. Ясно, что ковекторное поле H тоже сопоставляет любому вектору $A(x)$, заданному в точке x, определенное число, равное $H_i(x)A^i(x)$, а всему векторному полю A – скалярную *функцию* $(H_iA^i)(x)$ на пространстве M. Поэтому для ковекторных полей должен существовать аналог формулы $A = A^i(x)\,\partial_i$ разложения векторного поля по локальному базису. Осталось только предъявить базис, дуальный к $\{\partial_i\}$.

Согласно общепринятой договоренности, ковекторное поле самого общего вида записывают так:

$$H \;=\; H_i(x)\,dx^i\,, \qquad\qquad <dx^j\,,\,\partial_i> \;=\; \delta^j_i\,. \tag{24}$$

Это определение, конечно, приводит к нужному равенству $<H\,,A> = H_i\,A^i$, но почему в качестве элементов дуального базиса взяты дифференциалы dx^i? Ответ, как и в случае векторного локального базиса $\{\partial_i\}$, находим в соотношениях (12). Действительно, величина $Af \;=\; A^i\,\partial_i f$, которую мы трактовали как результат действия векторного поля A на скалярную функцию $f(x)$, может рассматриваться также и как значение некоторой *линейной* функции на векторе $A(x)$. Но как назвать эту линейную функцию? Она несет информацию о первых производных от $f(x)$, и только о них – в точности как тот объект, который в анализе называют дифференциалом функции. Поэтому вполне естественной выглядит идея обозначить её df. Итак,

$$<df\,,\,A> \doteq\; A^i\,\partial_i f \;\doteq\; Af \qquad\Longrightarrow\qquad <dx^i\,,\,A> =\; A^i(x)\,, \tag{25}$$

что прекрасно согласуется и с (24), и с известным правилом анализа $df(x) = \partial_i f\,dx^i$. Теперь становится понятно, почему ковекторное поле (24) принято называть также *дифференциальной формой* первого порядка, или просто *1-формой*. Отметим, что замена координат под знаком дифференциала, $d\tilde{x}^i = (\partial\tilde{x}^i/\partial x^j)\,dx^j$, в точности следует рецепту (8). Вообще, формула (25) впервые дает нам корректное определение дифференциала, заменяя собой то (не вполне удовлетворительное) его определение, которое мы знаем из курса математического анализа.

Рассмотрим теперь дифференциальные формы второго и третьего порядков,

$$F \;=\; F_{ij}(x)\;dx^i\,dx^j\,, \qquad\qquad \Omega \;=\; \Omega_{ijk}(x)\;dx^i\,dx^j\,dx^k\,. \tag{26}$$

Тензорные поля $F_{ij}(x)$ и $\Omega_{ijk}(x)$ предполагаются полностью антисимметричными по всем своим индексам. Следствием этого является неожиданный факт: дифференциалы dx^i, а значит и дифференциалы любых функций, должны *антикоммутировать* между собой,

$$dx^i\,dx^j \;=\; -\,dx^j\,dx^i \qquad\Longrightarrow\qquad df(x)\;dg(x) \;=\; -\,dg(x)\;df(x) \tag{27}$$

(а произведение одинаковых дифференциалов – всегда равняться нулю, например, $dx^1\,dx^1 = 0$). Действительно, в силу антисимметрии F_{ij} имеем

$$F_{ij}\;dx^i\,dx^j \;=\; \frac{1}{2}\,(F_{ij} - F_{ji})\;dx^i\,dx^j \;=\; \frac{1}{2}\,F_{ij}\;(\,dx^i\,dx^j - dx^j\,dx^i)\,, \tag{28}$$

откуда один шаг до правила (27). Дополнительные (и, возможно, главные) аргументы в пользу естественности этого правила мы получим в следующей главе. Еще одним следствием антисимметричности, положенной в основу определения дифференциальных форм (26), оказывается невозможность существования форм порядка $N+1$ в N-мерном пространстве. Например, при $N = 3$ антисимметричный тензор Θ_{ijkl} должен тождественно равняться нулю, ибо какие бы значения (из трех возможных) его индексы ни принимали, хотя бы два из них обязательно совпадут. Поэтому, имея дело с пространствами размерности 2 и 3 (как мы договорились), мы можем ограничиться изучением дифференциальных форм не выше третьего порядка.

Операция d (дифференциал) может применяться не только к функциям, превращая их в 1-формы, но и к самим дифференциальным формам. При этом порядок формы увеличивается на единицу. Определение выглядит абсолютно естественно:

$$d\,\omega \;=\; d[\,\omega_{i\ldots j}(x)\,dx^i\ldots dx^j] \;=\; d\omega_{i\ldots j}(x)\,dx^i\ldots dx^j \;=\; \partial_k\,\omega_{i\ldots j}(x)\;dx^k\,dx^i\ldots dx^j\,, \tag{29}$$

то есть, дифференцируется (по x) только антисимметричное тензорное поле $\omega_{i\ldots j}(x)$ – *коэффициентная функция* дифференциальной формы $\omega = \omega_{i\ldots j}(x)\,dx^i\ldots dx^j$. Но можно ли считать $d\omega$ дифференциальной формой – ведь её коэффициентная функция $\partial_k\,\omega_{i\ldots j}$, казалось бы, не антисимметрична? В реальности, однако, она автоматически антисимметризуется за счет свертки (суммирования) индексов с полностью антисимметричным объектом $dx^k\,dx^i\ldots dx^j$. Посмотрим это на примере:

$$d(H_i\,dx^i) \;=\; \partial_j H_i\;dx^j\,dx^i \;=\; \frac{1}{2}\,(\partial_j H_i - \partial_i H_j)\;dx^j\,dx^i\,. \tag{30}$$

Так что определение (29) вполне корректно. Важнейшим свойством дифференциала является его *нильпотентность*:

$$d\,d \;=\; 0 \qquad \Longleftarrow \qquad d\,d\,\omega \;=\; \partial_l\,\partial_k\,\omega_{i\ldots j}(x)\;dx^l\,dx^k\,dx^i\ldots dx^j \;=\; 0 \tag{31}$$

(свертка симметричного тензор $\partial_l\partial_k$ с антисимметричным $dx^l\,dx^k$ дает нуль).

Теперь мы можем частично ответить на вопрос, зачем вообще понадобилась антисимметрия: оказывается, она помогает тензорному полю и после дифференцирования остаться тензорным полем. В свое время, см. (11), мы убедились, что производная скалярной функции, т. е. градиент, преобразуется как тензорное (ковекторное) поле. Однако посмотрим, например, как преобразуется $\partial_i H_j(x)$:

$$\tilde\partial_i \tilde H_j(\tilde x) \;=\; \frac{\partial}{\partial\tilde x^i}\left(\frac{\partial x^k}{\partial\tilde x^j}\,H_k(x)\right) \;=\; \frac{\partial x^k}{\partial\tilde x^j}\,\frac{\partial x^l}{\partial\tilde x^i}\;\partial_l H_k(x) \;+\; \frac{\partial^2 x^k}{\partial\tilde x^i\,\partial\tilde x^j}\,H_k(x)\,. \tag{32}$$

Второе слагаемое правой части явно нарушает тензорный закон преобразования (8). Иными словами, производная тензорного поля сама тензорным полем, вообще говоря, не является. Но нарушающее слагаемое исчезнет, если его антисимметризовать по индексам ij, а это значит, что поле $\partial_i H_j - \partial_j H_i$ уже будет тензорным. Таким образом, определение дифференциала (29) задает способ дифференцирования антисимметричных полей, согласованный с их тензорными свойствами.

Распишем более подробно действие d на различные формы в трехмерном пространстве. Начнем со скалярных функций (их условно называют 0-формами):

$$df \;=\; \partial_i f(x)\, dx^i \;=\; \frac{\partial f}{\partial x^1}\, dx^1 + \frac{\partial f}{\partial x^2}\, dx^2 + \frac{\partial f}{\partial x^3}\, dx^3 \,. \tag{33}$$

Мы видим, что коэффициентной функцией 1-формы df является градиент f. Далее, применим операцию d к ковектору (т.е. 1-форме) H:

$$\begin{aligned} dH \;&=\; d(H_i\, dx^i) \;=\; \partial_j H_i\; dx^j\, dx^i \\ &=\; (\,\partial_1 H_2 - \partial_2 H_1)\, dx^1\, dx^2 + (\,\partial_2 H_3 - \partial_3 H_2)\, dx^2\, dx^3 + (\,\partial_3 H_1 - \partial_1 H_3)\, dx^3\, dx^1 \,. \end{aligned} \tag{34}$$

Три ненулевых компоненты коэффициентной функции 2-формы dH в точности соответствуют компонентам ротора H. Применяя теперь d к 2-форме F, находим

$$dF \;=\; d(F_{ij}\, dx^i\, dx^j) \;=\; \partial_k F_{ij}\; dx^k\, dx^i\, dx^j \;=\; 2\,(\partial_1 F_{23} + \partial_2 F_{31} + \partial_3 F_{12})\, dx^1\, dx^2\, dx^3 \,. \tag{35}$$

Коэффициентная функция 3-формы dF равна дивергенции вектора $\Phi^i = \epsilon^{ijk} F_{jk}$, ибо

$$\Phi^1 \;=\; 2F_{23}\,, \quad \Phi^2 \;=\; 2F_{31}\,, \quad \Phi^3 \;=\; 2F_{12}\,, \qquad 2\,(\partial_1 F_{23} + \partial_2 F_{31} + \partial_3 F_{12}) \;=\; \partial_i \Phi^i \,. \tag{36}$$

Наконец, действие d на любую 3-форму Ω (в трехмерном пространстве) дает нуль. Мы рассмотрели все возможные действия операции d на дифференциальные формы трехмерного пространства и установили прямую связь дифференциала d со стандартными операциями векторного анализа – градиентом, ротором и дивергенцией.

В заключение, несколько слов про дифференциальные формы максимально возможного порядка N. Например, в трехмерном пространстве это будет 3-форма

$$\Omega \;=\; \Omega_{ijk}(x)\; dx^i\, dx^j\, dx^k \;=\; \Omega(x)\, \epsilon_{ijk}\; dx^i\, dx^j\, dx^k \;, \tag{37}$$

так как полностью антисимметричный тензор в трехмерном пространстве всегда пропорционален ϵ-символу. Осталось выяснить, как сам тензор ϵ_{ijk} ведет себя при заменах координат. Рассмотрим трехмерное пространство с декартовыми координатами y^i и евклидовой метрикой δ_{ij}, в котором введены также криволинейные координаты x^i и возникла индуцированная метрика $g_{ij}(x)$ по правилу (19). В исходных декартовых координатах ϵ-тензор имеет обычные свойства

$$\epsilon_{123} \;=\; 1\,, \qquad \epsilon_{ijk} \;=\; \epsilon^{ijk}\,, \qquad \epsilon_{lmn}\, M^l_i\, M^m_j\, M^n_k \;=\; \epsilon_{ijk}\, \det M \;. \tag{38}$$

Преобразуя его по стандартному рецепту (8) к координатам x, получим:

$$\epsilon_{ijk}(x) \;=\; \frac{\partial y^l}{\partial x^i}\, \frac{\partial y^m}{\partial x^j}\, \frac{\partial y^n}{\partial x^k}\, \epsilon_{lmn} \;=\; \det \frac{\partial y}{\partial x}\; \epsilon_{ijk} \;=\; \sqrt{g}\; \epsilon_{ijk} \;. \tag{39}$$

Весь эффект криволинейных координат свелся к домножению на корень из детерминанта метрики. Можно считать, что в соотношении (37) этот множитель был включен в определение функции $\Omega(x)$. Приведем также формулы для случая верхних индексов,

$$\epsilon^{ijk}(x) \;=\; \frac{1}{\sqrt{g}}\; \epsilon^{ijk} \;=\; \frac{1}{g}\; \epsilon_{ijk}(x)\,, \tag{40}$$

что, конечно, согласуется с $\epsilon_{ijk}(x) \;=\; g_{il}(x)\, g_{jm}(x)\, g_{kn}(x)\, \epsilon^{lmn}(x) \;=\; \det g(x)\; \epsilon^{ijk}(x)$.

ГЛАВА 4

Интегрирование форм

Главная цель этой главы – обосновать следующее утверждение: *интегрирование всегда есть интегрирование дифференциальных форм*. Точнее говоря, все примеры N-кратных интегралов (в том числе криволинейных, поверхностных и т. п.) из курса математического анализа оказываются интегралами от некоторых N-форм. Единственное, что в этом утверждении может вызвать недоумение – антикоммутативность дифференциалов, ведь при изучении кратных интегралов в анализе мы ничего подобного не отмечали. Однако, если разобраться, мы при этом руководствовались скорее физическими, чем математическими соображениями: мы хотели видеть все длины, площади и объемы заведомо положительными величинами. Этим и объясняется принятое в анализе правило $dx^i dx^j = dx^j dx^i$, а также появление модуля якобиана в формулах замены переменных интегрирования (от чего мы в (18) сознательно отступили). С математической точки зрения, отрицательные значения интегралов от положительных функций, которые неизбежно возникнут, если пользоваться правилом (27), не только вполне допустимы, но и совершенно естественны. Это видно уже на примере одномерного интеграла: $\int_a^b dx$ может быть любого знака, а если мы хотим таким способом найти длину отрезка $[a, b]$, то возьмем модуль (или сначала выясним, что больше – a или b, а потом проинтегрируем от меньшего к большему). Даже сам факт, что в двукратном интеграле может появиться $dx^1 dx^2$ или $dx^2 dx^1$, но *не может* – $dx^1 dx^1$ или $dx^2 dx^2$, – это прямое указание на то, что дифференциалы на самом деле следует считать антикоммутирующими: $dx^2 dx^1 = -dx^1 dx^2$, $dx^1 dx^1 = dx^2 dx^2 = 0$.

Эти простые соображения в пользу следования правилам (27) не только в дифференциальных формах, но и в кратных интегралах, могут быть дополнены еще одним, самым главным: антисимметричная природа кратного интегрирования сразу видна при заменах переменных, ибо возникающий при этом якобиан по определению антисимметричен. Напомним схему вывода формулы замены переменных в кратном интеграле. Сначала доказывается, что площадь параллелограмма (объем параллелепипеда и т. д.) представляет собой детерминант матрицы, составленной из декартовых компонент порождающих его векторов, например,

$$S(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \;=\; \det \begin{pmatrix} A^1 & A^2 \\ B^1 & B^2 \end{pmatrix} \;=\; A^1 B^2 - A^2 B^1 \,. \tag{41}$$

Проще всего такая формула выводится (причем сразу для N-мерного случая) методом ортогонализации. Действительно, на каждом шаге ортогонализации (вида $\mathbf{B} \to \mathbf{B}' = \mathbf{B} + \alpha \mathbf{A}$) ни объем, ни детерминант не меняются, при повороте получившейся ортогональной системы векторов – тоже, а для векторов, направленных вдоль декартовых осей, соотношение (41) очевидно. Конечно, знаки площадей и объемов, найденных по этой формуле, могут изменяться при перестановках векторов. Поэтому обычно фиксируют некий эталонный порядок следования векторов, приводящий к положительным значениям. Следующий шаг – найти (в декартовых координатах y^i) компоненты касательных векторов Δ_1, Δ_2, ..., отвечающих малым смещениям Δx^1, Δx^2, ... криволинейных координат x^i. Из (10) очевидно, что

$$\Delta_1 \;\simeq\; \left(\frac{\partial y^1}{\partial x^1} \Delta x^1 \,,\; \frac{\partial y^2}{\partial x^1} \Delta x^1 \,,\; \ldots \right), \qquad \Delta_2 \;\simeq\; \left(\frac{\partial y^1}{\partial x^2} \Delta x^2 \,,\; \frac{\partial y^2}{\partial x^2} \Delta x^2 \,,\; \ldots \right), \tag{42}$$

откуда в двумерном случае на основе (41) получаем

$$\Delta S \;\simeq\; \Delta x^1\,\Delta x^2\,\det\begin{pmatrix}\partial y^1/\partial x^1 & \partial y^2/\partial x^1\\ \partial y^1/\partial x^2 & \partial y^2/\partial x^2\end{pmatrix} \;\equiv\; \Delta x^1\,\Delta x^2\,\det\frac{\partial y}{\partial x}\;, \tag{43}$$

и окончательно,

$$\int dy^1\,dy^2\,f(y) \;=\; \int dx^1\,dx^2\,\det\frac{\partial y}{\partial x}\,f(y(x))\,. \tag{44}$$

Если же считать символы dy^i не просто частью обозначения интеграла, а антикоммутирующими дифференциалами функций $y^i(x)$, то вывод формулы (44) становится совсем коротким:

$$\begin{aligned} dy^1\,dy^2 \;&=\; (\partial_1 y^1\,dx^1+\partial_2 y^1\,dx^2)\,(\partial_1 y^2\,dx^1+\partial_2 y^2\,dx^2)\\ &=\; (\partial_1 y^1\,\partial_2 y^2-\partial_2 y^1\,\partial_1 y^2)\;dx^1\,dx^2 \;=\; dx^1\,dx^2\,\det\frac{\partial y}{\partial x}\;. \end{aligned} \tag{45}$$

Вернемся к интегрированию дифференциальных форм. Ясно, например, что $\int dx f(x)$ есть интеграл от 1-формы в одномерном пространстве, а $\int dx^1\,dx^2\,dx^3\,\Omega(x)$, в силу (37)– от 3-формы в трехмерном. Интеграл вдоль кривой γ

$$\int_\gamma (\,a(x,y)\,dx+b(x,y)\,dy) \;=\; \int\left(a(x,y(x))+b(x,y(x))\,\frac{dy}{dx}\right)dx \tag{46}$$

от 1-формы в двумерном пространстве становится одномерным интегралом, если кривая задана явно, в виде функции $y(x)$. Примеры можно продолжать. Но сказанного уже достаточно, чтобы перейти к обсуждению одной из самых красивых формул математики – *формулы Стокса*:

$$\int_\Gamma d\omega \;=\; \int_{\partial\Gamma}\omega\;. \tag{47}$$

Посредством $\partial\Gamma$ здесь обозначена граница области Γ. Она может оказаться и пустым множеством (как у сферы) – тогда правую часть просто считаем нулем. Теорема (47) утверждает, что интеграл по некоторой области $(N{+}1)$-мерного пространства от дифференциала N-формы ω равен интегралу от самой формы по (N-мерной) границе этой области. Соотношение (47) обобщает (включая как частные случаи) такие знаменитые теоремы математического анализа, как формулы Ньютона-Лейбница, Грина, Стокса и Остроградского-Гаусса. Первая из них, $\int_a^b dx\,f'(x) = \int_a^b df(x) = f(b)-f(a)$, очевидно, согласуется с (47), поскольку границей отрезка $[a,b]$ является множество, состоящее из точек a и b, причем вклады нижнего и верхнего пределов отличаются знаками. В свою очередь, подставляя

$$d\,(a\,dx+b\,dy) \;=\; \frac{\partial a}{\partial y}\,dy\,dx+\frac{\partial b}{\partial x}\,dx\,dy \;=\; \left(\frac{\partial b}{\partial x}-\frac{\partial a}{\partial y}\right)dx\,dy \tag{48}$$

в (47), приходим к формуле Грина, и так далее. Доказательство самой теоремы (47) проходит по следующей схеме. Согласно (29), к каждому слагаемому левой части (47) применима теорема Ньютона-Лейбница, исключающая одну из переменных интегрирования, причем пределы интегрирования по этой переменной лежат как раз на границе области Γ. Полное доказательство формулы Стокса (47) сводится, таким образом, к аккуратной проверке знаков.