МАТЕМАТИКА ДЛЯ ФИЗИКОВ

[конспект лекций]

А. А. Владимиров
ЛТФ ОИЯИ
alvladim@theor.jinr.ru

Содержание

ГЛАВА 1. Дифференциальные уравнения и классическая механика 2
ГЛАВА 2. Линейные операторы и квантовая механика 5
ГЛАВА 3. Тензоры и теория относительности 13
ГЛАВА 4. Антисимметричные тензоры и уравнения Максвелла 20
ГЛАВА 5. δ-функция и квантовые поля 23

Аннотация

В данном пособии, предназначенном для студентов первого курса, специализирующихся по физике и смежным дисциплинам, вводятся и подробно разъясняются некоторые ключевые математические понятия – линейные операторы, тензоры и ряд других – на которых основан формализм современной физики.

ГЛАВА 1

Дифференциальные уравнения и классическая механика

Основным уравнением классической механики является второй закон Ньютона $ma = F$. Силу F часто удается выразить в виде производной от потенциальной энергии $U(x)$. Тогда получившееся уравнение

$$m\ddot{x} = -U'(x) \tag{1}$$

описывает движение материальной точки с массой m в потенциале $U(x)$. Координата x считается функцией времени t, причем $\dot{x} = dx/dt$, $U'(x) = dU/dx$. Потенциал $U(x)$ обычно задан, и надо найти зависимость $x(t)$ из дифференциального уравнения (1). Хотя данная задача может быть решена (интегрированием) при любом $U(x)$, мы, тем не менее, еще ее упростим, считая, что потенциал $U(x)$ имеет минимум в точке $x = 0$ ("потенциальная яма"), а наша материальная точка находится вблизи дна этой ямы, не имея достаточной энергии, чтобы выбраться оттуда. Тогда можно воспользоваться разложением функции $U(x)$ вблизи ее минимума,

$$U(x) = U(0) + \frac{k}{2}\,x^2 + \mathcal{O}(x^3)\,, \tag{2}$$

где k – некоторое число. Величину $U(0)$ удобно полагать равной нулю, так как она все равно не войдет в уравнение движения (1). Тем самым, при малых x, уравнение (1) приобретает вид уравнения *малых колебаний* или *гармонического осциллятора*:

$$m\ddot{x} = -kx \qquad \text{или} \qquad \ddot{x} = -\omega^2 x \qquad (\,\omega = \sqrt{k/m}\,)\,. \tag{3}$$

Это простое линейное дифференциальное уравнение играет (не только в механике, но и в физике вообще) чрезвычайно важную роль. Действительно, оно описывает малые колебания вблизи минимума *любого* механического потенциала и, как мы увидим далее, сходным образом проявляется и в других областях физики.

Двукратным дифференцированием по t проверяется, что уравнению (3) удовлетворяет функция $ze^{i\omega t}$. Произвольную комплексную константу z запишем в виде $z = Ae^{i\varphi}$, где A и φ действительны. По смыслу, функция $x(t)$ также должна быть действительной, так что надо взять от полученного решения его действительную либо мнимую часть (они тоже удовлетворяют уравнению (3) в силу его линейности), перейдя от экспоненты к косинусу (либо синусу) по формуле Эйлера. Для конкретности, примем

$$x(t) = A\sin(\omega t + \varphi)\,. \tag{4}$$

Величину ω называют *частотой*, A – *амплитудой*, а φ – *фазой* найденного решения. Фиксировать амплитуду и фазу можно выбором начальных условий, задавая положение точки и ее скорость в момент $t = 0$. Например, условию $x(0) = 0$ отвечает $\varphi = 0$, $\dot{x}(0) = A\omega$.

Несколько переформулируем теперь решенную нами задачу (3), введя не одну, а две неизвестные функции, $x(t)$ и $y(t)$, удовлетворяющие системе из двух уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = y\,, \\ \dot{y} = -\omega^2\,x\,. \end{cases} \tag{5}$$

Ясно, что уравнения (3) и (5) абсолютно эквивалентны. Мы формально объявили скорость точки $\dot{x}$ новой неизвестной функцией $y(t)$, добавив зато ее явное определение в качестве дополнительного уравнения. Решение системы (5)

$$\begin{cases} x(t) = A\sin(\omega t + \varphi)\,, \\ y(t) = A\,\omega\cos(\omega t + \varphi) \end{cases} \tag{6}$$

тоже полностью соответствует (4). Смысл всех этих переобозначений состоит во введении двумерного пространства с координатами $\{x, y\}$, называемого *фазовым пространством*. Разные точки фазового пространства соответствуют различным возможным состояниям нашей физической системы, а информация, заключенная в каждой точке (значения координаты и скорости), будучи принята за начальную, отвечающую моменту $t = 0$, оказывается достаточной для полного описания движения системы и во все другие моменты времени. Действительно, мы всегда можем подобрать амплитуду и фазу так, чтобы при $t = 0$ решение (6) выдавало наперед заданную точку $\{x, y\}$, и затем рассматривать временну́ю зависимость (6) как движение по некоторой траектории в фазовом пространстве (ясно, что через каждую точку этого пространства проходит ровно одно решение). В силу равенства

$$\omega^2\, x^2(t) + y^2(t) = A^2\omega^2\,, \tag{7}$$

следующего из (6), все траектории являются эллипсами, вложенными друг в друга (эллипс, отвечающий решению с меньшей амплитудой, лежит внутри эллипса с большей). При этом, задавая амплитуду, мы фиксируем саму траекторию (конкретный эллипс), а задавая фазу – стартовую точку на этом эллипсе. Решение с $A = 0$ является вырожденным: материальная точка лежит на дне потенциальной ямы и никуда не движется (соответствующий эллипс стягивается в начало координат). Удобство фазового пространства состоит, в частности, в том, что в нем одновременно видны *все* возможные решения (нарисованы сразу все возможные траектории).

Вычислим полную энергию (сумму кинетической и потенциальной) решения (6):

$$E = \frac{m}{2}\,\dot{x}^2 + \frac{k}{2}\,x^2 = \frac{m}{2}\,y^2(t) + \frac{k}{2}\,x^2(t) = \frac{m\,\omega^2}{2}\,A^2\,. \tag{8}$$

Мы видим, что энергия зависит от амплитуды и не зависит от фазы решения: каждой траектории (эллипсу) соответствует свое значение полной энергии, которое в процессе движения не меняется. Отметим, что сохранение полной энергии $m\dot{x}^2/2 + U(x)$ имеет место и в более общей ситуации (1):

$$\dot{E} = m\dot{x}\ddot{x} + \dot{x}U'(x) = \dot{x}(m\ddot{x} + U'(x)) = 0\,. \tag{9}$$

В случае более сложной механической системы, состоящей из нескольких материальных точек, когда фазовое пространство их координат и скоростей имеет бóльшую размерность, структура основных уравнений по-прежнему аналогична (5):

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(\mathbf{x})\,, \tag{10}$$

где многомерный вектор $\mathbf{x}$ задает точку в фазовом пространстве (обобщение пары $\{x, y\}$), а *векторное поле* $\mathbf{v}(\mathbf{x})$, определенное на всем фазовом пространстве – аналог правой части в (5) – задает скорости изменения его координат со временем. Обычно решение системы дифференциальных уравнений вида (10) существует и единственно,

так что через каждую точку фазового пространства проходит ровно одна динамическая траектория (поэтому, задав начальные значения координат и скоростей всех частиц, мы однозначно восстановим эволюцию физической системы). Векторы $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ в каждой точке $\mathbf{x}$, по определению, касательны к траектории, проходящей через эту точку. Иначе говоря, *сформулировать* дифференциальное уравнение (10) – значит задать векторное поле в фазовом пространстве, а *решить* это уравнение – значит провести в этом пространстве траектории так, чтобы все векторы из данного поля были к ним касательны.

В заключение – несколько слов о так называемом *гамильтоновом формализме*, играющем центральную роль не только в механике, но и во всей физике, особенно квантовой. Вспоминая определение *импульса* $p = mv = m\dot{x}$, перепишем (5) в виде

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{p}{m}\,, \\ \dot{p} = -kx \end{cases} \qquad \text{или} \qquad \begin{cases} \dot{x} = \dfrac{\partial}{\partial p}\,H(p,x)\,, \\ \dot{p} = -\dfrac{\partial}{\partial x}\,H(p,x)\,. \end{cases} \tag{11}$$

Здесь введена функция $H(p,x)$ (*гамильтониан*), представляющая собой выражение для полной энергии в переменных p и x:

$$H(p,x) \;\doteq\; \frac{p^2}{2m} + U(x) \;=\; \frac{p^2}{2m} + \frac{kx^2}{2} \;=\; \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\,x^2\,. \tag{12}$$

В более общем случае нескольких координат и импульсов (нумеруемых индексом i) *уравнения Гамильтона* примут вид

$$\begin{cases} \dot{x}_i = \dfrac{\partial}{\partial p_i} H(p,x)\,, \\ \dot{p}_i = -\dfrac{\partial}{\partial x_i} H(p,x)\,, \end{cases} \qquad H(p,x) = \frac{1}{2m}\sum_i p_i^2 + U(\{x_i\})\,. \tag{13}$$

Не углубляясь в обсуждение гамильтоновой механики, отметим лишь ее симметрийный аспект. Речь идет не столько об элегантной симметричной форме гамильтоновых уравнений (13), сколько о глубокой связи между симметриями гамильтониана и сохраняющимися (т. е. неизменными во времени) физическими величинами. Рассмотрим простейший пример такой связи. Пусть, например, потенциальная энергия U в (13) не зависит от координаты x_1. Тогда и весь гамильтониан от нее не зависит, и из уравнений Гамильтона следует, что $\dot{p}_1 = -\partial H/\partial x_1 = 0$, т. е. импульс p_1 сохраняется (не зависит от времени). Мы получили важный физический результат – *закон сохранения* $p_1 = \mathrm{const}$ – как следствие определенной *симметрии* гамильтониана системы (в данном случае – его независимости от координаты x_1). Связь между свойствами симметрии гамильтониана и законами сохранения распространяется на все физические теории. В частности, отмеченное выше сохранение полной энергии имеет своей причиной независимость гамильтониана H от времени t.

ГЛАВА 2

Линейные операторы и квантовая механика

В классической механике, основанной, как мы видели, на дифференциальных уравнениях, физические величины (амплитуда колебаний, энергия и т. п.) могут принимать (в разумных пределах) любое численное значение, *непрерывно* зависящее от начальных условий. Ситуация в квантовой физике принципиально иная – экспериментально установлено, что многие физические характеристики квантовых систем (например, атомов) принимают значения лишь из некоторого *дискретного* набора. Неудивительно, что для построения новой, квантовой теории понадобились и новые математические средства, до этого в физике почти не применявшиеся. В частности, характерным отличием квантовомеханического формализма от классического является представление многих физических величин в форме некоммутирующих (неперестановочных) объектов – линейных операторов. Начнем с изложения основных фактов, касающихся линейных пространств и операторов, необходимых для формулировки базовых положений квантовой механики.

В стандартных учебниках линейные пространства обычно вводятся аксиоматически. Мы же изберем конструктивный подход. *Линейное* (или *векторное*) *пространство* V состоит из *векторов* – конечных сумм следующего вида:

$$\mathbf{x} = x^i \mathbf{e}_i \equiv \sum_{i=1}^{N} x^i \mathbf{e}_i \,. \tag{14}$$

(в дальнейшем мы будем опускать знак суммы, всегда подразумевая суммирование по повторяющемуся индексу; при этом буква, обозначающая индекс суммирования, не должна больше использоваться в качестве индекса в том же слагаемом). Числа x^i называются *компонентами* или *координатами* вектора $\mathbf{x}$ относительно *базиса* $\{\mathbf{e}_i\}$; будем считать эти числа вещественными или комплексными (а пространство V называть соответственно *вещественным* или *комплексным*). Координаты самих базисных векторов $\mathbf{e}_i$ записываются через δ-символ:

$$(e_i)^j \;=\; \delta_i^j \;\doteq\; \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \tag{15}$$

Подчеркнем, что формулой (14) заданы *все* элементы пространства V, никаких других векторов в нем нет. При этом различные наборы координат x^i задают *разные* векторы, и наоборот – два вектора равны только в том случае, когда у них попарно равны *все* координаты. Другими словами, векторы из V *однозначно разлагаются по базису*, а сами базисные векторы $\mathbf{e}_i$ *линейно независимы*, т. е. один из них не может быть представлен в виде суммы остальных с какими-то числовыми коэффициентами. Выбор базисных векторов, конечно же, неоднозначен, но все вопросы, связанные с переходом от одного базиса к другому мы отложим до следующей главы.

Над векторами можно производить *линейные операции* – складывать их друг с другом и умножать на числа:

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} \doteq (x^i + y^i)\, \mathbf{e}_i \,, \qquad \lambda\, \mathbf{x} \doteq (\lambda x^i)\, \mathbf{e}_i \,. \tag{16}$$

В частности, вектор $\mathbf{0}$, все координаты которого равны нулю, является единственным нулевым (удовлетворяющим условию $\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x}$) элементом в V. *Подпространством*

линейного пространства V называется любое подмножество его векторов, замкнутое относительно линейных операций. Иначе говоря, сложение векторов, принадлежащих подпространству, и умножение их на числа не должно выводить из подпространства. Вектор $\mathbf{0}$ принадлежит любому подпространству. Число N в (14) называется *размерностью* пространства V. Формально можно положить N и равным нулю: соответствующее (нульмерное) пространство считается состоящим из одного вектора $\mathbf{0}$. Полагая же N (и число базисных векторов) равным бесконечности, мы приходим к понятию *бесконечномерного* линейного пространства.

Множество вещественных чисел $\mathbb{R}$ является одномерным вещественным линейным пространством: в качестве единственного базисного вектора $\mathbf{e}_1$ можно взять число 1, координата $x^1 \in \mathbb{R}$. В то же время, множество комплексных чисел $\mathbb{C}$ (комплексную плоскость) можно трактовать и как *одномерное* комплексное пространство с базисом $\mathbf{e}_1 = 1$ ($x^1 \in \mathbb{C}$), и как *двумерное* вещественное пространство с базисом $\mathbf{e}_1 = 1$, $\mathbf{e}_2 = i$ ($x^1, x^2 \in \mathbb{R}$).

Линейным оператором, действующим в пространстве V, называется отображение $A : V \to V$, удовлетворяющее условию линейности (α и β – числа)

$$A(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) = \alpha A\mathbf{x} + \beta A\mathbf{y}\,. \tag{17}$$

Подчеркнем, что оператор переводит *вектор* $\mathbf{x} \in V$ в *вектор* (того же пространства), в отличие от *функции* на V, которая сопоставляла бы каждому вектору некоторое *число*. *Определить* оператор на V – значит, задать результат его действия на *каждый* вектор из V. Впрочем, из (17) видно, что для задания *линейного* оператора A достаточно знать результат его действия лишь на базисные векторы. Действительно,

$$A\mathbf{x} = A(x^i\mathbf{e}_i) = x^i(A\mathbf{e}_i) = x^i A_i^j \mathbf{e}_j = (A_i^j x^i)\,\mathbf{e}_j\,, \tag{18}$$

где числовые коэффициенты A_i^j выполняют двойную миссию, участвуя в разложении вектора $A\mathbf{e}_i$ по базису и выражая координаты вектора $A\mathbf{x}$ через исходные x^i:

$$A\mathbf{e}_i = A_i^j \mathbf{e}_j\,, \qquad\qquad (A\mathbf{x})^j = A_i^j x^i\,. \tag{19}$$

Эти коэффициенты, полностью характеризующие линейный оператор A, называют его *матричными элементами*: из них составляется квадратная матрица размера $N \times N$; верхний индекс нумерует ее строки, а нижний – столбцы. *Следом* матрицы A называют сумму элементов ее главной диагонали: $\mathrm{tr}A = A_i^i$. Тривиальными (но важными) примерами операторов являются нулевой оператор, переводящий любой вектор в $\mathbf{0}$ (все его матричные элементы равны нулю), и *тождественный* или *единичный* оператор $\mathbb{I}$ – ему соответствует единичная матрица $\mathbf{1}$, элементы которой задаются δ-символом: $\mathbb{I}\mathbf{x} = \mathbf{x}$, $\mathbb{I}_i^j = \mathbf{1}_i^j = \delta_i^j$. Полезно запомнить простые правила работы с этим символом, например,

$$\delta_i^j x^i \;=\; x^j\,, \qquad \delta_i^j A_j^k \;=\; A_i^k\,, \qquad \delta_i^i \;=\; \mathrm{tr}\,\mathbf{1} \;=\; N\,. \tag{20}$$

Для операторов и их матриц естественным образом определяются операции сложения и умножения на число:

$$(A+B)\,\mathbf{x} \doteq A\mathbf{x} + B\mathbf{x}\,, \qquad (A+B)_i^j = A_i^j + B_i^j\,, \qquad (\lambda A)\,\mathbf{x} \doteq \lambda(A\mathbf{x})\,, \qquad (\lambda A)_i^j = \lambda A_i^j$$

(умножение матрицы на число есть умножение *каждого* ее элемента на это число). Иными словами, линейные операторы на пространстве V сами образуют линейное

пространство (размерности N^2). Помимо этого, операторы можно умножать и друг на друга: умножение определяется как их последовательное применение,

$$(AB)\,\mathbf{x} \doteq (A\circ B)\,\mathbf{x} = A(B\mathbf{x})\,. \tag{21}$$

Очевидно выполнение следующих свойств:

$$(A+B)(C+D) = AC + AD + BC + BD\,, \qquad A(\lambda B) = (\lambda A)B = \lambda(AB)\,, \tag{22}$$

$$(AB)C = A(BC)\,, \qquad \mathbb{I}A = A\mathbb{I} = A\,. \tag{23}$$

Мы видим, что умножение операторов ассоциативно и подчиняется привычным правилам раскрытия скобок, а $\mathbb{I}$ играет роль единицы.

Важнейшей особенностью операторов, отличающей их от чисел, является то, что умножение операторов некоммутативно: в общем случае $AB \neq BA$. Действительно, закон умножения операторов можно выразить на языке их матричных элементов. Для этого надо найти $(AB)^j_i$, воспользовавшись определением $(AB)\,\mathbf{e}_i = (AB)^j_i\mathbf{e}_j$:

$$(AB)\,\mathbf{e}_i = A(B^k_i\mathbf{e}_k) = B^k_iA^j_k\mathbf{e}_j = A^j_kB^k_i\mathbf{e}_j \qquad \Longrightarrow \qquad (AB)^j_i = A^j_kB^k_i \tag{24}$$

(матричные элементы, в отличие от самих операторов, являются числами и их можно спокойно переставлять). Формула (24) представляет собой алгебраическую запись известного правила перемножения матриц "строка на столбец". По этому же правилу, согласно второму равенству из (19), устроено и умножение матрицы оператора на столбец, составленный из компонент вектора. Теперь, сравнивая матричные элементы для AB и BA,

$$(AB)^j_i = A^j_kB^k_i \quad\neq\quad (BA)^j_i = B^j_kA^k_i = A^k_iB^j_k\,,$$

мы убеждаемся в том, что это действительно неодинаковые выражения. Конечно, в каких-то случаях два оператора могут оказаться и перестановочными. Но с *любым* оператором коммутирует только $\lambda\mathbb{I}$ – оператор, пропорциональный единичному.

Для работы с неперестановочными объектами (операторами, матрицами и т. д.) удобно ввести понятие *коммутатора* и специальное обозначение для него:

$$[A,B] \;\doteq\; AB - BA \qquad \Longrightarrow \qquad [A,B] \;=\; -[B,A]\,, \qquad [A,A] \;=\; 0\,. \tag{25}$$

Пока мы имели дело только с числами, необходимости в таком понятии не возникало, ибо правая часть первого равенства всегда обращалась в нуль. Приведем наиболее общие свойства коммутаторов, вытекающие непосредственно из определения (25):

$$[A,BC] \;=\; [A,B]C + B[A,C]\,, \qquad [AB,C] \;=\; [A,C]B + A[B,C]\,, \tag{26}$$

$$[A,[B,C]] + [B,[C,A]] + [C,[A,B]] \;=\; 0\,. \tag{27}$$

Равенство (27) называют *тождеством Якоби*. Отметим еще один интересный факт: след коммутатора матриц всегда равен нулю. Действительно,

$$\mathrm{tr}\,[A,B] \;=\; [A,B]^i_i \;=\; (AB)^i_i - (BA)^i_i \;=\; A^i_kB^k_i - B^i_kA^k_i \;=\; 0\,. \tag{28}$$

Отсюда – возможность *циклической перестановки* сомножителей под знаком следа:

$$\mathrm{tr}\,(AB) \;=\; \mathrm{tr}\,(BA) \qquad \Longrightarrow \qquad \mathrm{tr}\,(ABC) \;=\; \mathrm{tr}\,(CAB) \;=\; \mathrm{tr}\,(BCA)\,, \quad \ldots \tag{29}$$

Другим весьма полезным соотношением с участием коммутаторов является

$$e^B A\, e^{-B} \;=\; A + [B,A] + \frac{1}{2}\,[B,[B,A]] + \frac{1}{3!}\,[B,[B,[B,A]]] + \;\ldots\;, \qquad (30)$$

где экспоненту от матрицы следует понимать как формальный ряд. Доказательство равенства (30) (которое мы опустим) может быть проведено по следующей схеме: заменить B на tB, затем продифференцировать по параметру t и представить решение получившегося дифференциального уравнения в виде ряда.

Хотя нашей целью и не является систематическое изложение линейной алгебры, мы все же сформулируем (без доказательств, оставляя их в качестве упражнений) ряд ее ключевых утверждений, имеющих отношение к тематике данного пособия. Итак: любые $N+1$ векторов в N-мерном пространстве линейно зависимы; любой набор из N линейно независимых векторов может служить в качестве базиса; векторы, удовлетворяющие условию $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, образуют подпространство (*ядро* линейного оператора A); векторы вида $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$ тоже образуют подпространство (*образ* линейного оператора A); сумма размерностей этих двух подпространств равна N; оператор A обратим (его матрица имеет обратную) если и только если его ядро нульмерно (состоит из одного вектора $\mathbf{0}$), а образ совпадает с V:

$$\text{ядро}\, A \;=\; \mathbf{0} \quad\Longleftrightarrow\quad \text{образ}\, A \;=\; V \quad\Longleftrightarrow\quad \exists\, A^{-1} \quad\Longleftrightarrow\quad \det A \neq 0\,. \qquad (31)$$

В квантовой механике и других приложениях важную роль играют *собственные векторы* линейных операторов. Собственным вектором оператора A называется любой ненулевой вектор $\mathbf{x}$, удовлетворяющий соотношению $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, где λ – некоторое число (оно может быть и нулем), называемое *собственным значением* оператора A на данном векторе. То есть, действие оператора на собственный вектор сводится к домножению этого вектора на число. Понятно, что если $\mathbf{x}$ – собственный вектор, то и $\alpha\mathbf{x}$ при любом $\alpha \neq 0$ тоже является собственным вектором данного оператора.

Рецепт нахождения собственных значений основан на следующем факте:

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \qquad\Longleftrightarrow\qquad (A - \lambda\mathbb{I})\,\mathbf{x} = \mathbf{0} \qquad\Longleftrightarrow\qquad \det(A - \lambda\mathbb{I}) = 0\,. \qquad (32)$$

Действительно, раз оператор $(A - \lambda\mathbb{I})$ переводит *ненулевой* вектор $\mathbf{x}$ в $\mathbf{0}$, то он необратим, а значит детерминант его матрицы равен нулю. В явном виде условие

$$\det(A - \lambda\mathbb{I}) = \det\begin{pmatrix} A_1^1 - \lambda & A_2^1 & \ldots & A_N^1 \\ A_1^2 & A_2^2 - \lambda & \ldots & A_N^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_1^N & A_2^N & \ldots & A_N^N - \lambda \end{pmatrix} = 0 \qquad (33)$$

является алгебраическим уравнением N-й степени относительно λ. В комплексном случае оно обязательно имеет хотя бы одно решение. Отсюда следует важный вывод: в конечномерном комплексном линейном пространстве у любого линейного оператора имеется (хотя бы один) собственный вектор. В вещественных пространствах это не так: существуют операторы, у которых вообще нет собственных векторов.

Интересен вопрос о возможности сформировать базис данного линейного пространства из собственных векторов некоторого оператора A. Если это возможно, то $A\,\mathbf{e}_i = \lambda_i \mathbf{e}_i$ (суммирования по i нет!), а матрица оператора A *диагональна*: по диагонали у нее стоят числа λ_i (среди которых могут быть и совпадающие), а все ее недиагональные элементы – нули. Такой базис называют *собственным базисом* оператора A. Например, для оператора $\alpha\mathbb{I}$ любой базис – собственный (ибо для этого

оператора любой ненулевой вектор – собственный, с одним и тем же собственным значением α) . Но собственный базис существует не всегда – у оператора может не найтись достаточного количества линейно независимых собственных векторов для формирования базиса. Важным случаем, когда собственный базис заведомо существует, является такой: оператор A имеет ровно N *различных* собственных значений λ_i (это значит, что уравнение (33) имеет N корней) .

На этом заканчивается краткий обзор линейной алгебры, и мы переходим к квантовой механике. Попробуем в упрощенном и крайне схематичном виде сформулировать ее основные принципы. В основе квантового описания физических явлений лежит понятие *состояния* рассматриваемой физической системы, математически изображаемое вектором $|\Psi>$ в некотором (как правило, бесконечномерном) комплексном линейном пространстве. Оригинальное скобочное обозначение для векторов возникло (и широко употребляется) именно в квантовой механике; в его полезности мы еще убедимся. По идее, вектор $|\Psi>$ содержит всю возможную информацию о состоянии системы. Измеряемым физическим величинам (*наблюдаемым*) ставятся в соответствие линейные операторы, действующие в данном пространстве. Каждый такой оператор A должен иметь собственный базис $\{\mathbf{e}_n\}$ (записываемый обычно в виде $\{|n;A>\}$; индекс n может быть как дискретным, так и непрерывным), причем все его собственные значения A_n должны быть вещественными:

$$A\,|n;A> \;=\; A_n\,|n;A>\,, \qquad\qquad A_n^* \;=\; A_n \tag{34}$$

(такие операторы называют *эрмитовыми*) . Постулируется, что результатом измерения физической величины A обязательно окажется одно из ее собственных значений A_n . Причем, если система находилась в состоянии $|\Psi> = \,|n;A>$, то измерение даст именно значение A_n ; если же состояние системы, разложенное по собственному базису оператора A, имело вид

$$|\Psi> \;=\; \sum_n \beta_n\,|n;A>\,, \tag{35}$$

то измерение носит вероятностный характер: его результатом может стать любое из чисел A_n с вероятностью, пропорциональной $|\beta_n|^2$. Иными словами, чем 'ближе' состояние системы к одному из собственных состояний $|n;A>$, тем выше вероятность получить значение A_n в результате измерения величины A. Значение физической величины известно точно (говорят: наблюдаемая принимает определенное значение) только в том случае, если система находится в одном из ее собственных состояний; иначе эта величина может принимать, с некоторой вероятностью, разные значения.

Проиллюстрируем сказанное на примере *квантового осциллятора* . Чтобы сформулировать любую квантовую задачу, надо задать оператор энергии, то есть гамильтониан. В нашем случае он по внешнему виду не отличается от своего классического аналога (12) . Но в квантовой механике координату и импульс следует считать операторами: координата, правда, остается обычной вещественной переменной x, зато роль (оператора) импульса играет соответствующая производная,

$$p \;=\; -i\hbar\,\partial_x \qquad \Longrightarrow \qquad H \;=\; \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\,x^2 \;=\; -\frac{\hbar^2}{2m}\,\partial_x^2 + \frac{m\omega^2}{2}\,x^2 \tag{36}$$

(здесь $\hbar$ – фундаментальная мировая константа, *постоянная Планка*) . Заметим, что квантовомеханические координата и импульс не коммутируют:

$$\partial_x \circ x = x\,\partial_x + 1 \qquad \text{или} \qquad [\partial_x\,,\,x] = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad [p,x] = -i\hbar\,. \tag{37}$$

Исходное равенство в (37) проверяется действием на произвольную функцию:

$$\partial_x(xf(x)) = f(x) + xf'(x) = (1 + x\partial_x)f(x)\,. \tag{38}$$

Из x и p можно построить два оператора,

$$a^+ = \frac{m\omega x - ip}{\sqrt{2m\omega\hbar}}\,, \qquad a = \frac{m\omega x + ip}{\sqrt{2m\omega\hbar}}\,, \tag{39}$$

называемые, соответственно, операторами *рождения* и *уничтожения*. Из (37) следуют перестановочные соотношения для них:

$$aa^+ = a^+a + 1 \qquad \text{или} \qquad [a\,,\,a^+] = 1\,. \tag{40}$$

Используя

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\,(a + a^+)\,, \qquad p = \sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}\,i\,(a^+ - a) \tag{41}$$

и (40), получим

$$H \;=\; \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\,x^2 \;=\; \hbar\omega(a^+a + \frac{1}{2})\,, \tag{42}$$

выразив тем самым наш гамильтониан через операторы a и a^+. Именно в этом заключался смысл перехода от x и p к новым операторам. Хотя сами операторы a и a^+ не соответствуют никаким физическим наблюдаемым величинам (и не являются эрмитовыми), они часто служат удобным средством записи для других величин, как например в (41),(42), предоставляя эффективный способ нахождения их собственных векторов и собственных значений. В нашем случае мы сумеем этим способом найти значения энергии квантового осциллятора.

Построим базис бесконечномерного линейного пространства B, в котором действуют операторы a и a^+; он окажется еще и собственным базисом оператора H. Будем считать, что про операторы рождения и уничтожения мы знаем только одно – их коммутационные соотношения (40). Допустим также, что в пространстве B имеется вектор $|0>$, называемый *вакуумом* (не путать с нулевым вектором $\mathbf{0}$), характеризуемый свойством $a\,|0> = \mathbf{0}$. Смысл этого условия: оператор a, как оператор уничтожения, должен, действуя на любой вектор состояния, что-то в этом состоянии уничтожить; но в вакууме уничтожать уже нечего, поэтому оператор просто его зануляет. Возьмем $|0>$ в качестве первого базисного вектора. Вторым пусть будет $|1> = a^+|0>$ – результат действия оператора рождения на вакуум. Считаем, что при этом родился один (осцилляторный) *квант*. Его можно считать прообразом элементарной частицы: как мы увидим в последней главе, математический формализм операторов рождения и уничтожения почти без изменений переносится в квантовую теорию поля. Действием оператора a этот квант снова уничтожается:

$$a\,|1> = \;a\,a^+|0> = \;(a^+a + 1)\,|0> = \;|0>\;. \tag{43}$$

Язык квантов, или *элементарных возбуждений*, во многих случаях удобен для описания переходов между состояниями квантовых систем, сводя дело к появлению (или исчезновению) минимально возможной порции некоторой физической величины.

Продолжая по аналогии, зададим состояние, содержащее n квантов:

$$|n> \doteq \underbrace{a^+ \ldots a^+}_{n}\,|0>\,, \qquad a\,|0> = \;\mathbf{0}\,. \tag{44}$$

Бесконечный набор векторов $\{|n>\}$ можно взять в качестве базиса пространства B, а вышеприведенную процедуру его построения считать конструктивным определением этого пространства. Теперь нашим операторам есть где действовать:

$$a^+|n> = \ |n+1>\,, \qquad a\,|n> = \ n\,|n-1>\ . \tag{45}$$

Для вывода последнего равенства (и не только) полезны соотношения

$$a(a^+)^n \ = \ (a^+)^n a + n(a^+)^{n-1}\,, \qquad a^n a^+ \ = \ a^+ a^n + n a^{n-1}\,, \tag{46}$$

вытекающие из (40) или (26), например,

$$a\,a^+a^+ = (a^+a+1)\,a^+ = a^+(a^+a+1) + a^+ = a^+a^+a + 2\,a^+. \tag{47}$$

Мы видим, что операторы рождения и уничтожения названы так не зря – действие a^+ *добавляет*, а действие оператора a, наоборот, *убирает* ровно один квант. Наконец, из формулы (42) заключаем, что базисные векторы $|n>$ действительно являются собственными для оператора энергии:

$$H\,|n> = \ H_n\,|n>\,, \qquad H_n = \hbar\omega(n+\frac{1}{2})\,, \qquad n = 0,1,2,\ldots \tag{48}$$

Итак, нами найден *энергетический спектр* (возможные значения энергии) квантового осциллятора. Состояния различаются числом содержащихся в них квантов; добавление одного кванта увеличивает энергию (любого) состояния на величину $\hbar\omega$.

На этом мы завершим наш краткий экскурс в квантовую механику и возвратимся к математике. Уже было сказано, что линейные операторы, действующие в некотором линейном пространстве, можно рассматривать в качестве элементов (векторов) другого линейного пространства. И кроме того, их можно перемножать. Линейное пространство с определенной на нем операцией умножения векторов друг на друга в математике называется *алгеброй*. В частности, линейные операторы образуют *ассоциативную алгебру с единицей*, а закон их умножения дается формулами (21) и (24). Другой популярный способ введения закона умножения (структуры алгебры) на линейном пространстве состоит в явном задании *таблицы умножения* базисных векторов друг на друга и наложении условий (22),

$$\mathbf{e}_i\,\mathbf{e}_j = C_{ij}^k\,\mathbf{e}_k \qquad \Longrightarrow \qquad \mathbf{x}\,\mathbf{y} = C_{ij}^k\,x^i\,y^j\,\mathbf{e}_k\,. \tag{49}$$

Знание числовых *структурных констант* C_{ij}^k позволяет перемножить любые два вектора. Этот рецепт годится и для построения алгебр, не являющихся алгебрами линейных операторов. Например, следующий закон умножения превращает двумерное вещественное пространство в комплексную плоскость $\mathbf{e}_1 = 1\,, \mathbf{e}_2 = i$:

$$\mathbf{e}_1\,\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1\,, \qquad \mathbf{e}_1\,\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_2\,\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2\,, \qquad \mathbf{e}_2\,\mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_1\,. \tag{50}$$

Часто (особенно в бесконечномерном случае) таблицы умножения вида (49) неудобны из-за своей громоздкости. Вместо них иногда удается применить для построения соответствующей алгебры метод, основанный на введении *образующих* (или *генераторов*) и задании для них набора определяющих соотношений. В качестве простого примера такого подхода используем коммутационное соотношение (40), рассматривая его как *единственное* требование, налагаемое на процедуру умножения абстрактных объектов a и a^+, которые мы даже не будем называть операторами, поскольку пока не ставим себе задачи конкретизировать пространство, где они могли

бы действовать. Они пока для нас – абстрактные символы, которые можно складывать, умножать на числа и друг на друга, соблюдая правило (40). Какая же алгебра порождается образующими a и a^+ вкупе с указанным коммутационным соотношением? Для ответа на этот вопрос достаточно предъявить ее базис. Он оказывается бесконечным и может быть выбран в следующем виде:

$$1 \quad a \quad a^+ \quad aa \quad a^+a \quad a^+a^+ \quad aaa \quad a^+aa \quad a^+a^+a \quad a^+a^+a^+ \ \ldots \tag{51}$$

Включив в базис любые произведения образующих, в которых все a^+ стоят *левее* элементов a, мы отвергли все остальные, поскольку они могут быть сведены к комбинации базисных многократным применением формул (46). Правила умножения элементов полученного базиса (и вообще любых элементов алгебры) очевидны – надо выписать сомножители подряд, как единое произведение, а потом, используя (46), перетащить все операторы a слева направо. Так, формула (47) дает пример умножения a на a^+a^+ или $a\,a^+$ на a^+. Искомая алгебра тем самым построена. В данном случае она, естественно, совпадает с алгеброй *операторов* рождения и уничтожения, действующих в пространстве B по правилам (45).

Рассмотренный пример хорошо иллюстрирует общий принцип построения базиса алгебры по данному набору образующих: из полной совокупности их формальных произведений (с любым порядком сомножителей) следует оставить лишь независимые, отбросив те, что сводятся к уже отобранным в силу определяющих соотношений. При таком подходе мы избегаем явного выписывания (трехмерно-бесконечной!) таблицы умножения – ее эффективно заменяют определяющие соотношения, в которых содержится та же информация.

Бесконечномерная алгебра (51) над двумя образующими a и a^+ с определяющим коммутационным соотношением (40) называется *бозонной* алгеброй, так как служит в квантовой физике основой математического описания частиц с целым спином – *бозонов*. Интересно также рассмотреть *фермионную* алгебру – *конечномерную* алгебру над двумя образующими c и c^+ с определяющими *антикоммутационными* соотношениями

$$c\,c^+ + c^+c = 1\,, \qquad c\,c = c^+c^+ = 0\,, \tag{52}$$

применяемую для описания частиц с полуцелым спином – *фермионов*. С формальной стороны, соотношения (52) отличаются от (40) лишь заменой коммутаторов $[A,B] = AB - BA$ на *антикоммутаторы* $[A,B]_+ = AB + BA$: аналогом $[c,c]_+ = 2\,c\,c = 0$ из (52) служит не выписанное явно в (40) тривиальное тождество $[a,a] = a\,a - a\,a = 0$. Последствия этого различия, однако, весьма радикальны – любой фермионный генератор (в нашем случае c либо c^+) зануляется при возведении в квадрат. Физически это означает невозможность рождения более одного фермионного кванта данного типа (*принцип Паули*). Для сравнения: формула (44) показывает, что одинаковых бозонов может родиться сколько угодно. Легко построить базис фермионной алгебры – он состоит всего из четырех элементов,

$$1 \qquad c \qquad c^+ \qquad c^+c\,. \tag{53}$$

Все другие (в том числе более длинные) произведения к ним сводятся, например, $c^+c\,c^+ = c^+(1 - c^+c) = c^+$. Фермионная алгебра, как и бозонная, допускает реализацию в виде алгебры операторов рождения и уничтожения. Соответствующее линейное пространство F двумерно,

$$c\,|0> = \ \mathbf{0}\,, \quad c^+|0> = \ |1>\,, \quad c|1> = \ |0>\,, \quad c^+\,|1> = \ \mathbf{0}\,, \tag{54}$$

поскольку включает в себя, кроме вакуумного, только одночастичное состояние.

ГЛАВА 3

Тензоры и теория относительности

Линейная функция f на линейном пространстве V сопоставляет каждому вектору $\mathbf{x}$ число $f(\mathbf{x}) \equiv <f, \mathbf{x}>$, причем

$$<f,\, \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}> = \ \alpha <f, \mathbf{x}> \ + \beta <f, \mathbf{y}> \ . \tag{55}$$

Линейные функции можно складывать и умножать на числа по правилу

$$<\alpha f + \beta g\,,\, \mathbf{x}> = \ \alpha <f, \mathbf{x}> \ + \beta <g, \mathbf{x}>\,; \tag{56}$$

в силу этого они сами образуют линейное пространство V^*, *дуальное* к V. В качестве базиса пространства V^* удобно взять *координатные* функции e^i, сопоставляющие вектору $\mathbf{x}$ его i-ю координату x^i :

$$<e^i, \mathbf{x}> = \ x^i\,, \qquad <e^i, \mathbf{e}_j> = \ (\mathbf{e}_j)^i \ = \ \delta^i_j \ . \tag{57}$$

Действительно, любая функция $f \in V^*$ разлагается по этому базису,

$$f = f_i\, e^i\,, \qquad f_i = <f, \mathbf{e}_i>\,, \tag{58}$$

поскольку

$$<f, \mathbf{x}> = <f, x^i \mathbf{e}_i> = \ x^i <f, \mathbf{e}_i> = \ f_i\, x^i \ = \ f_i <e^i, \mathbf{x}> = <f_i\, e^i, \mathbf{x}> \ . \tag{59}$$

Функция f однозначно характеризуется набором чисел f_i аналогично тому, как вектор однозначно характеризуется своими координатами. Отметим, что явное числовое выражение $f_i\, x^i$ значения функции f на векторе $\mathbf{x}$ линейно по координатам x^i и *не содержит* свободной части, в отличие от линейных функций вида $f(x) = ax + b$, с которыми мы имеем дело в математическом анализе.

Пространства V и V^* очень похожи друг на друга: их размерности равны, в конечномерном случае они взаимно дуальны, $(V^*)^* = V$. Правда, при переходе к дуальному пространству мы заменяем нижние индексы верхними и наоборот. Оказывается, для этого есть веские основания. Чуть позже мы вернемся к обсуждению этого вопроса, а пока перепишем вышеприведенные формулы, пользуясь скобочной нотацией, взятой из квантовой механики. Векторы, как мы уже привыкли, будем обозначать скобкой, смотрящей вправо, а функции – наоборот, влево:

$$\mathbf{e}_i \ = \ |i>\,, \qquad \mathbf{x} \ = \ |x>\,, \qquad e^i \ = \ <i|\,, \qquad f \ = \ <f|\,. \tag{60}$$

Форма записи (числового) значения функции от вектора почти не изменяется,

$$<f, \mathbf{x}> \ = \ <f\,|\,x> \quad \Longrightarrow \quad x^i \ = <i\,|\,x>\,, \quad f_i \ = <f\,|\,i>\,, \quad <j\,|\,i> = \ \delta^j_i\,. \tag{61}$$

Представим теперь соотношение $\mathbf{x} = x^i \mathbf{e}_i$ в виде $|x>= |i><i\,|\,x>$, поменяв местами числовой коэффициент и базисный вектор (соглашение о суммировании по повторяющемуся индексу сохраняется). Поскольку вектор $|x>$ произволен, мы доказали операторное тождество (легко проверяемое и в прежней записи, приведенной справа)

$$\mathbb{I} \ = \ |i><i\,| \ = \ \mathbf{e}_i\, e^i\,, \tag{62}$$

называемое *соотношением полноты* или *разложением единицы*. Смысл названия в том, что для появления единичного оператора в левой части необходимо, чтобы суммирование в правой шло по *полному* набору базисных векторов взаимно дуальных пространств (т.е. по *всем* значениям индекса i, а не по какой-то их части).

Вот характерные примеры применения этого замечательного тождества: действуя им справа на функцию $<f|$, мы немедленно воспроизводим первое равенство в (58), вставка же его в $<f|x>$ между $<f|$ и $|x>$ выдает соотношение (59):

$$<f| \;=<f|i><i|\,, \qquad <f|x>=<f|i><i|x> \;\;. \tag{63}$$

Аналогично для линейных операторов. По смыслу матричного элемента A_i^j (это j-я компонента вектора $A\mathbf{e}_i$) имеем:

$$A_i^j \;=\; <j|A|i>\,, \qquad A|i> = \;|j><j|A|i>\,, \qquad <j|A|x>=<j|A|i><i|x>\,, \tag{64}$$

воспроизводя оба равенства (19). Наконец, очевидным следствием (62) и, одновременно, его обобщением является операторное тождество

$$A \;=\; |j><j|A|i><i| \;=\; A_i^j\,\mathbf{e}_j\,e^i\,, \tag{65}$$

переходящее в (62) при $A=\mathbb{I}$. Можно констатировать, что в скобочных обозначениях многие формулы выглядят как тривиальные следствия соотношения полноты.

Пришло время заняться вопросом, упомянутым еще в предыдущей главе – о неоднозначности выбора базиса. Необходимым и достаточным условием линейной независимости векторов $\tilde{\mathbf{e}}_i$ нового базиса является обратимость матрицы перехода от старого базиса к новому (обозначим ее T), равносильная требованию $\det T\neq 0$:

$$\tilde{\mathbf{e}}_i = T\mathbf{e}_i = T_i^j\mathbf{e}_j\,, \qquad \exists\, T^{-1}:\; T^{-1}T=T\,T^{-1}=\mathbb{I}\,, \quad (T^{-1})_k^j\,T_i^k=T_k^j(T^{-1})_i^k=\delta_i^j\,. \tag{66}$$

Если надо, легко выписать и обратные преобразования: $\mathbf{e}_i \;=\; (T^{-1})_i^j\,\tilde{\mathbf{e}}_j$. Найдем теперь координаты вектора $\mathbf{x}$ в новом базисе. Исходим из того, что при переходе к другому базису сам вектор $\mathbf{x}$ не меняется, изменяются лишь его координаты:

$$\mathbf{x}=x^j\mathbf{e}_j=\tilde{x}^i\,\tilde{\mathbf{e}}_i=\tilde{x}^i\,T_i^j\mathbf{e}_j \quad\Longrightarrow\quad x^j=\;T_i^j\,\tilde{x}^i \quad\Longrightarrow\quad \tilde{x}^i=(T^{-1})_j^i\,x^j\,. \tag{67}$$

Объекты дуального пространства тоже преобразуются,

$$<\tilde{e}^i,\mathbf{x}>=\;\tilde{x}^i \;=\; (T^{-1})_j^i\,x^j \;=\; (T^{-1})_j^i\,<e^j,\mathbf{x}> \quad\Longrightarrow\quad \tilde{e}^i \;=\; (T^{-1})_j^i\,e^j\,, \tag{68}$$

$$\tilde{f}_i \;=\; <f,\tilde{\mathbf{e}}_i>=\;T_i^j\,<f,\mathbf{e}_j>=\;T_i^j\,f_j\;. \tag{69}$$

Аналогично, привлекая (19) и (66), выводим правило преобразования матричных элементов оператора:

$$A\tilde{\mathbf{e}}_i \;=\; \tilde{A}_i^j\,\tilde{\mathbf{e}}_j \quad\Longrightarrow\quad \tilde{A}_i^j \;=\; T_i^m\,(T^{-1})_k^j\,A_m^k\,. \tag{70}$$

Соотношения (66)–(70) демонстрируют интересную закономерность: при замене базиса величины с нижними индексами преобразуются матрицей T, а с верхними – матрицей T^{-1}. Оказывается, это правило действует и для объектов с любым числом индексов – для так называемых *тензоров*. Чтобы естественным образом ввести понятие тензора, рассмотрим сначала два стандартных способа построения новых линейных пространств на основе существующих. Пусть у нас есть два пространства

V и W с базисами $\{\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_N\}$ и $\{\mathbf{e}'_1,\ldots,\mathbf{e}'_M\}$ соответственно. Тогда их *прямой суммой* $V\oplus W$ называется линейное пространство с базисом $\{\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_N,\mathbf{e}'_1,\ldots,\mathbf{e}'_M\}$, а их *тензорным произведением* $V\otimes W$ – пространство с базисом $\{\mathbf{e}_i\,\mathbf{e}'_j\}$, сформированным из всевозможных упорядоченных пар элементов двух базисов. Выражение $\mathbf{e}_i\,\mathbf{e}'_j$ (иногда пишут $\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}'_j$) надо воспринимать просто как обозначение одного из векторов нового базиса, а не как произведение $\mathbf{e}_i$ на $\mathbf{e}'_j$. Очевидно, размерность $V\oplus W$ равна сумме размерностей исходных пространств $N+M$, а размерность $V\otimes W$ – их произведению NM. Геометрический смысл прямой суммы вполне ясен: прямой суммой двух пересекающихся прямых будет проходящая через них плоскость, и т. п. У тензорного произведения столь наглядного образа, видимо, нет.

В широком смысле, *тензором* можно назвать вектор любого линейного пространства, в том числе тензорного произведения двух или нескольких сомножителей. Нас будет интересовать более узкий класс пространств, включающий лишь тензорные произведения V и V^* (возможно, по нескольку экземпляров каждого). Рассмотрим, например, некоторый элемент D пространства $V\otimes V\otimes V^*$. Вид его разложения по соответствующему базису аналогичен случаю (65):

$$D \;=\; D^{ij}_k\;\mathbf{e}_i\,\mathbf{e}'_j\,e^k \tag{71}$$

(штрих поставлен для различения базисов двух копий пространства V). Числа D^{ij}_k, для нумерации которых понадобилось три индекса, представляют собой координаты тензора D. Закон их преобразования при переходе к новому базису выводится из тех же принципов, что и (67),

$$D=\tilde D^{ij}_k\,\tilde{\mathbf{e}}_i\,\tilde{\mathbf{e}}'_j\,\tilde e^k=\tilde D^{ij}_k\,T^m_i\,T^n_j\,(T^{-1})^k_l\,\mathbf{e}_m\,\mathbf{e}'_n\,e^l \quad\Longrightarrow\quad \tilde D^{ij}_k=T^l_k\,(T^{-1})^i_m\,(T^{-1})^j_n\,D^{mn}_l, \tag{72}$$

и подтверждает сформулированное выше правило о роли матриц T и T^{-1} в преобразованиях нижних и верхних индексов. Часто именно это правило и кладут в основу определения (координат) тензора, именуя так любой набор числовых величин с индексами, преобразующихся при смене базиса по образцу (72). Другое общее правило работы с тензорными объектами, фактически нам уже известное, формулируется так: каждый индекс суммирования встречается в одном слагаемом ровно два раза – один раз вверху и один внизу.

Уже знакомыми нам примерами тензоров являются векторы (элементы V), линейные функции на V (элементы V^*), линейные операторы в V (ввиду (65) их можно интерпретировать как элементы $V\otimes V^*$), а также *скаляры* – числовые величины без индексов (элементы одномерного пространства чисел), которые совсем не преобразуются при замене базиса. Обратим внимание, что тот индекс, по которому ведется суммирование, эффективно вообще не участвует в преобразованиях вида (72), ибо соответствующие матрицы T и T^{-1} компенсируют друг друга. Поэтому, например, след матрицы линейного оператора является скаляром:

$$\tilde A^i_i \;=\; T^j_i\,(T^{-1})^i_k\,A^k_j \;=\; \delta^j_k\,A^k_j \;=\; A^i_i\,. \tag{73}$$

Мы выяснили, как с помощью произвольного обратимого линейного оператора T осуществляется переход к новому базису. Однако бывают ситуации (как в математике, так и в физике), когда нам интересны не любые обратимые, а только некоторые специальные линейные преобразования. Вспомним школьное определение скалярного произведения векторов (например, трехмерных): $\mathbf{xp}=x^1p^1+x^2p^2+x^3p^3=x^ip^i$. С нашей точки зрения это не скаляр: оба индекса i здесь верхние, что повлечет, в

отличие от (73), появление двух матриц T^{-1} в формуле преобразования к другому базису, и как следствие – неинвариантность данного объекта. Проблема порождена тем, что мы нарушили свое же правило: суммирование должно вестись по *верхнему* и *нижнему* индексам. Математически корректное выражение для скалярного произведения имело бы вид

$$\mathbf{xp} \;=\; g_{ij}\; x^i\, p^j\,. \tag{74}$$

Введенный здесь *метрический тензор* g_{ij} должен преобразовываться по общим законам (двумя матрицами T), что и обеспечит инвариантность всего выражения. Школьная формула для скалярного произведения воспроизведется, если зафиксировать $g_{ij} = \delta_{ij} = \delta^i_j$. Итак: если позволены *любые обратимые* преобразования T (как, например, в теории *гравитации*), то неизменность (скалярность) выражения (74) обеспечивается как раз тем, что метрический тензор при этих преобразованиях *изменяется*; если же зафиксировать его в виде δ-символа (15), тем самым запретив изменяться, то такое (школьное) скалярное произведение будет инвариантным не при произвольных преобразованиях базиса, а только при некоторых специальных.

И понятно, при каких именно: когда метрический тензор, взятый равным δ_{ij}, остается таким же и после преобразования. Другими словами, надо потребовать от матрицы T обеспечения следующего равенства:

$$\tilde\delta_{ij} \;=\; T^m_i\, T^n_j\, \delta_{mn} \;=\; T^m_i\, T^m_j \;=\; \delta_{ij} \qquad \Longrightarrow \qquad (T^t)^i_m\, T^m_j \;=\; \delta^i_j\,. \tag{75}$$

Это означает, что транспонированная матрица T^t совпадает с обратной, T^{-1}:

$$(T^{-1})^i_j \;=\; (T^t)^i_j \;=\; T^j_i\,, \qquad T\,T^t \;=\; \mathbb{I}\,. \tag{76}$$

Матрицы с таким свойством называются *ортогональными*; они отвечают поворотам базиса (вращениям системы координат). Итак, скалярное произведение, записанное в школьной форме (без метрического тензора), сохраняет свою величину при вращениях, но меняется, например, при растяжениях и многих других преобразованиях.

При выполнении условий (76) величины с верхними и нижними индексами, как легко видеть, преобразуются одинаково (одной и той же матрицей):

$$\tilde x^i \;=\; (T^{-1})^i_j\, x^j \;=\; T^j_i\, x^j\,, \qquad \tilde f_i \;=\; T^j_i\, f_j\,. \tag{77}$$

Значит, если ограничиться только ортогональными преобразованиями, то можно вообще не различать верхние и нижние индексы, считая, например, x_i и x^i одинаковыми выражениями. Можно, в частности, договориться писать все индексы только внизу. В общем случае ($T^t \neq T^{-1}$) отождествить величины с разным положением индексов, конечно, нельзя (они преобразуются по-разному), но можно *связать* их друг с другом с помощью метрического тензора, сопоставив, например, координатам вектора x^i некий объект с одним нижним индексом $x_i = g_{ij}x^j$ (при $g_{ij} = \delta_{ij}$ было бы просто $x_i = x^i$). На более математическом языке все это можно выразить так: если в пространстве V задано скалярное произведение (74), то любой функции $f \in V^*$ можно однозначно сопоставить вектор $\mathbf{f} \in V$ так, что $< f, \mathbf{x} > = \mathbf{fx}$ для любого вектора $\mathbf{x} \in V$. Тем самым, потребность в дуальном пространстве V^* как бы исчезает: любую линейную функцию f можно реализовать как скалярное произведение в исходном пространстве V, подобрав подходящий вектор $\mathbf{f}$. Явную формулу связи мы, фактически, уже знаем: $f_i = g_{ij} f^j$. В частности, при $g_{ij} = \delta_{ij}$ компоненты f_i функции f и координаты f^i вектора $\mathbf{f}$ становятся просто одинаковыми.

Замечательный пример ситуации, когда использование преобразований специального вида, близких к только что рассмотренным, имеет непосредственный физический смысл, предоставляет теория относительности Эйнштейна, или *релятивистская* теория. Начнем с математического описания *пространства Минковского*, лежащего в ее основе. Это четырехмерное вещественное линейное пространство; индексы в нем принято нумеровать греческими буквами, принимающими значения $0, 1, 2, 3$. Для построения скалярных произведений вводится метрический тензор

$$g_{\mu\nu} \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \;, \tag{78}$$

который симметричен ($g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$) и отличается от δ-символа лишь знаками отдельных элементов: $g_{00} = 1,\; g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1$. Мы собираемся использовать только такие преобразования, которые не меняют вида этого тензора. Это даст нам право отождествлять (с точностью до знака) верхние и нижние индексы:

$$x_\mu \;=\; g_{\mu\nu}x^\nu \qquad \Longrightarrow \qquad x_0 \;=\; x^0\,, \quad x_1 \;=\; -x^1\,, \quad x_2 \;=\; -x^2\,, \quad x_3 \;=\; -x^3\,. \tag{79}$$

В большинстве книг релятивистский формализм излагается именно в таком стиле, с двумя типами индексов (верхних и нижних) и таблицей перевода (79). Мы же предпочтем вообще отказаться от верхних индексов и использовать только нижние,

$$x_\mu \;=\; (x_0,\, x_1,\, x_2,\, x_3) \;=\; (x_0,\, \vec{x}) \tag{80}$$

(стрелкой обозначен вектор обычного трехмерного пространства; нулевой индекс отвечает дополнительному измерению). Для правильного учета знаков нам придется следующим образом модифицировать определение скалярных произведений:

$$xp \;\equiv\; x_\mu p_\mu \;\doteq\; x_0p_0 - x_1p_1 - x_2p_2 - x_3p_3 \;=\; x_0p_0 - \vec{x}\vec{p}\,, \qquad x^2 \equiv x_\mu x_\mu \;=\; x_0^2 - \vec{x}\vec{x}\,. \tag{81}$$

Такое соглашение (вклады нулевых компонент надо брать с плюсом, а остальных – с минусом) принимается для *любого* суммирования по четырехмерным индексам. Как результат, получаем набор соотношений для работы с метрическим тензором:

$$g_{\mu\nu}x_\nu \;=\; g_{\nu\mu}x_\nu \;=\; x_\mu\,, \qquad xp \;=\; g_{\mu\nu}x_\mu p_\nu\,, \qquad g_{\mu\mu} \;=\; g_{00} - g_{11} - g_{22} - g_{33} \;=\; 4\,. \tag{82}$$

Мы видим, что тензор $g_{\mu\nu}$ не только формирует скалярные произведения, но и выполняет в пространстве Минковского роль δ-символа. В этой связи нам нужен еще аналог соотношения $\partial_i x^j \equiv \partial x^j/\partial x^i = \delta_i^j$, ради чего вводится еще одно правило: раскрывать символ производной ∂_μ не по общему рецепту (80), а со сменой знаков,

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} \equiv \partial_\mu \doteq (\partial_0, -\partial_1, -\partial_2, -\partial_3) \;=\; (\partial_0\,, -\vec{\partial}) \;=\; (\frac{\partial}{\partial x_0}\,, -\frac{\partial}{\partial x_1}\,, -\frac{\partial}{\partial x_2}\,, -\frac{\partial}{\partial x_3})\,. \tag{83}$$

Так получается очень простая и удобная техника дифференцирования,

$$\partial_\mu x_\nu \;=\; g_{\mu\nu}\;, \qquad \partial_\mu\,(xp) \;=\; p_\mu\;, \qquad \partial_\mu\, x^2 \;=\; 2\,x_\mu\;, \tag{84}$$

гарантирующая, кроме всего прочего, справедливость равенств типа $\partial_1 x_1 = 1$.

В пространстве Минковского мы будем рассматривать только преобразования следующего вида (*преобразования Лоренца*):

$$x'_\mu \;=\; \Lambda_{\mu\nu}\, x_\nu\,, \qquad x_\mu \;=\; \Lambda_{\nu\mu}\, x'_\nu\,, \qquad \Lambda_{\alpha\mu}\Lambda_{\alpha\nu} \;=\; \Lambda_{\mu\alpha}\Lambda_{\nu\alpha} \;=\; g_{\mu\nu} \tag{85}$$

(вместо тильды теперь используем штрих). Ограничения (85) на матрицу Λ играют роль, аналогичную условию ортогональности (75),(76): они обеспечивают инвариантность скалярных произведений и самого тензора $g_{\mu\nu}$,

$$x'p' \;=\; x'_\mu p'_\mu \;=\; \Lambda_{\mu\alpha}\,\Lambda_{\mu\beta}\,x_\alpha p_\beta \;=\; g_{\alpha\beta}\,x_\alpha p_\beta \;=\; xp\,, \tag{86}$$

$$g'_{\mu\nu} \;=\; \Lambda_{\mu\alpha}\,\Lambda_{\nu\beta}\,g_{\alpha\beta} \;=\; \Lambda_{\mu\alpha}\Lambda_{\nu\alpha} \;=\; g_{\mu\nu}\,. \tag{87}$$

Из (85) и (84) выводим также рецепт преобразования производной ($\partial'_\mu \equiv \partial/\partial x'_\mu$):

$$x_\nu \;=\; \Lambda_{\mu\nu}\, x'_\mu \quad\Longrightarrow\quad \partial'_\mu\, x_\nu \;=\; \Lambda_{\mu\nu} \quad\Longrightarrow\quad \partial'_\mu \;=\; \Lambda_{\mu\nu}\,\partial_\nu\,. \tag{88}$$

Перейдем к содержанию теории относительности. По сути, это не есть теория каких-то конкретных физических явлений, а скорее общий принцип построения теорий. Согласующиеся с этим принципом теории принято называть *релятивистскими*. В частности, ни классическая (ньютонова), ни квантовая механика к таковым не относятся, а электродинамика Максвелла и квантовая теория поля – относятся. Принципы теории относительности считаются точными законами природы, существование же нерелятивистских физических теорий объясняется тем, что при скоростях, малых по сравнению со скоростью света, они обеспечивают приемлемый уровень точности.

Основные релятивистские принципы можно сформулировать так: физические величины являются тензорами четырехмерного пространства Минковского (скалярами, векторами, либо тензорами высших рангов); допустимые преобразования базиса этого пространства (преобразования Лоренца) физически соответствуют переходу в другую *инерциальную* систему отсчета, равномерно движущуюся относительно исходной; законы физики имеют *релятивистски ковариантный* вид (приравниваются только выражения одинаковой тензорной структуры, которые одинаково же и преобразуются) и поэтому справедливы независимо от системы отсчета.

Чисто физический вопрос состоит в том, какие именно величины следует включить в состав того или иного вектора или тензора; он решается исходя из опыта. Примером является сам исходный четырехмерный вектор, элемент пространства Минковского. Наряду с тремя координатами обычного пространства, в него, в качестве компоненты с нулевым индексом, включается время, помноженное на скорость света:

$$x_\mu \;=\; (ct,\; x,\; y,\; z)\,, \qquad\qquad x'_\mu \;=\; \Lambda_{\mu\nu}\, x_\nu\,. \tag{89}$$

Отсюда сразу вытекают важные физические следствия. Во-первых, при переходе к другой системе отсчета преобразуются не только пространственные координаты, но и время. До Эйнштейна считалось, что во всех системах время течет одинаково. Во-вторых, скалярный квадрат вектора x_μ не зависит от системы отсчета:

$$x'_\mu x'_\mu \;=\; c^2(t')^2 - (x')^2 - (y')^2 - (z')^2 \;=\; x_\mu x_\mu \;=\; c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 \;=\; c^2\tau^2\,. \tag{90}$$

Величина τ называется *собственным временем*: действительно, если мы придадим равномерно движущейся частице собственную систему координат, поместив частицу

в ее начало, то всегда будет $x' = y' = z' = 0$, а t' совпадет с τ. Из (90) видно, что $\tau \leqslant t$ – это значит, что в собственной системе время течет медленней всего.

Можно представить преобразования Лоренца координат четырехмерного *пространства-времени* в более явной форме. Для простоты будем считать координаты y и z неизменными, а преобразующимися – только t и x (движение вдоль оси x). Такие решения соотношений (90) (или условий (85) на матрицу Лоренца Λ) образуют однопараметрическое семейство следующего вида:

$$c\,t' = \frac{c\,t - xv/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\,, \qquad x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\,. \tag{91}$$

Параметр v есть скорость относительного движения старой и новой систем отсчета, ибо координате точки начала отсчета новой системы отвечает $x' = 0$, чему в старой соответствует $x/t = v$. Если отношение v/c мало́, то преобразования Лоренца переходят в нерелятивистские *преобразования Галилея* классической механики,

$$t' \;\approx\; t\,, \qquad x' \;\approx\; x - vt\,, \tag{92}$$

где время абсолютно (едино во всех системах отсчета). Таким образом, релятивистские формулы заметно отличаются от классических лишь при больших скоростях. В то же время, при $v > c$ соотношения (91) теряют смысл, что интерпретируется как принципиальная невозможность движения со сверхсветовой скоростью. Нельзя достичь скорости света и за счет сложения скоростей (например, добавляя к скорости частицы $u = x/t$ скорость системы отсчета v). Действительно, величина

$$\frac{u'}{c} \;=\; \frac{x'}{c\,t'} \;=\; \frac{x - vt}{c\,t - xv/c} \;=\; \frac{u/c - v/c}{1 - uv/c^2}\,, \tag{93}$$

как нетрудно показать, по модулю не превосходит единицы, если $|v| < c$, $|u| < c$.

Другим важнейшим четырехмерным вектором является вектор *энергии-импульса*

$$p_\mu \;=\; (E/c,\, \vec{p}\,)\,, \tag{94}$$

составленный из энергии (деленной на скорость света) и обычного трехмерного импульса. Вектор p_μ, как и любой другой, преобразуется к новой системе отсчета по общему рецепту (89), (91), который нет смысла повторять. Вместо этого приведем явное выражение для энергии-импульса материальной точки (частицы) массы m:

$$p_\mu \;=\; \frac{m}{\tau}\,x_\mu \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^{\,2} \;=\; p^2 \;\equiv\; p_\mu p_\mu \;=\; \frac{m^2}{\tau^2}\,x_\mu x_\mu \;=\; m^2c^2\,. \tag{95}$$

Для частицы, движущейся со скоростью $\vec{v}$, из (90) следует $\tau^2 = t^2(1 - v^2/c^2)$ и

$$E \;=\; \frac{m}{\tau}\,c^2 t \;=\; \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \;=\; mc^2 + \frac{mv^2}{2} + \mathcal{O}(v^4/c^2)\,, \tag{96}$$

$$\vec{p} \;=\; \frac{m}{\tau}\,\vec{x} \;=\; \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \;=\; m\vec{v} + \mathcal{O}(v^2/c^2)\,. \tag{97}$$

Мы видим, что в нерелятивистском пределе воспроизводится обычная формула для импульса, тогда как выражение для E, помимо кинетической энергии, включает еще *энергию покоя*, равную mc^2. Рассмотрим пример применения формулы (96). При распаде частицы a на две другие, $a \to b + c$, в силу сохранения энергии, $E_a = E_b + E_c$. В собственной системе отсчета частицы a (ее *системе покоя*), где $\vec{p}_a = 0$, имеем $E_a = m_a c^2$, $E_b > m_b c^2$, $E_c > m_c c^2$. Значит, такой распад возможен только если масса распадающейся частицы больше суммы масс продуктов распада: $m_a > m_b + m_c$.

ГЛАВА 4

Антисимметричные тензоры и уравнения Максвелла

Классическая электродинамика, основанная на уравнениях Максвелла, служит примером релятивистской теории, описывающей большой и важный класс физических явлений – электромагнетизм. Прежде чем переходить к ее изложению, сначала в традиционной трехмерной, а потом в четырехмерной форме (где станет явной ее релятивистская ковариантность), мы познакомимся с общими свойствами симметричных и антисимметричных тензоров и, в частности, ϵ-символов.

Симметрийные свойства тензоров характеризуют их поведение при взаимных перестановках индексов. При этом можно менять местами либо только верхние, либо только нижние индексы (если, конечно, мы их вообще различаем); свойства симметрии относительно перестановок верхних индексов с нижними не рассматриваются. *Симметричным* (по некоторым индексам) называют тензор, который не меняется при любой перестановке этих индексов. Пример – тензор $g_{\mu\nu}$. *Антисимметричным* (по некоторым индексам) называется тензор, *меняющий знак* при перестановке любой пары из этих индексов, например, $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$. *Полностью антисимметричный* тензор должен менять знак при перестановке *любых двух* индексов. Важно, что при замене базиса свойство (анти)симметрии сохраняется, например:

$$\tilde{F}_{\mu\nu} \;=\; \Lambda_{\mu\alpha}\,\Lambda_{\nu\beta}\,F_{\alpha\beta} \;=\; -\Lambda_{\nu\beta}\,\Lambda_{\mu\alpha}\,F_{\beta\alpha} \;=\; -\tilde{F}_{\nu\mu} \tag{98}$$

(аналогично для симметричных тензоров). Суммирование антисимметричного тензора с симметричным по соответствующим индексам всегда дает нуль, например,

$$F_{\mu\nu}\,a_\mu a_\nu \;=\; \frac{1}{2}\,F_{\mu\nu}(a_\mu a_\nu + a_\nu a_\mu) \;=\; \frac{1}{2}\,(F_{\mu\nu}a_\mu a_\nu - F_{\nu\mu}a_\nu a_\mu) \;=\; 0\,. \tag{99}$$

Любой тензор с двумя индексами (верхними либо нижними) однозначно разбивается на сумму симметричного (первая скобка) и антисимметричного (вторая):

$$T_{ij} \;=\; \frac{1}{2}\,(T_{ij} + T_{ji}) + \frac{1}{2}\,(T_{ij} - T_{ji})\,. \tag{100}$$

Ясно, что у антисимметричного тензора должны равняться нулю и многие из его компонент – все те, которые отвечают одинаковым значениям хотя бы двух индексов ($F_{11} = 0$ и т. д.). Поэтому полностью антисимметричного тензора с числом индексов, превосходящим размерность пространства, существовать не может – все его компоненты равны нулю. Интересен случай, когда число индексов такого тензора *равно* размерности пространства: тогда ненулевыми компонентами у него окажутся лишь те, у которых значения всех индексов различны, а так как при этом будут исчерпаны *все* возможные их значения, то эти ненулевые компоненты будут равны друг другу с точностью до знака, и весь тензор сведется фактически к одному числу. В этом и состоит идея ϵ-символа. Возьмем для определенности трехмерное пространство, и будем впредь пользоваться только нижними индексами. Тогда ϵ_{ijk} – это полностью антисимметричный объект, ненулевыми компонентами которого являются $\epsilon_{123} = \epsilon_{231} = \epsilon_{312} = 1$, $\epsilon_{213} = \epsilon_{132} = \epsilon_{321} = -1$. Прямой проверкой, с учетом свойств антисимметрии детерминанта, доказываются полезные формулы

$$\epsilon_{ijk}\,\epsilon_{ijk} \;=\; 6\,, \qquad \epsilon_{imn}\,\epsilon_{jmn} \;=\; 2\,\delta_{ij}\;, \qquad \epsilon_{ijk}\,\epsilon_{mnk} \;=\; \delta_{im}\,\delta_{jn} - \delta_{in}\,\delta_{jm}\;, \tag{101}$$

$$\epsilon_{ijk}\,\epsilon_{lmn} \;=\; \det\begin{pmatrix}\delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in}\\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn}\\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn}\end{pmatrix}\,, \tag{102}$$

позволяющие вообще избавиться от ϵ, если их встретилось два в произведении. Добавим сюда соотношения, связывающие детерминант матрицы 3×3 с ϵ-символом:

$$\det M \;=\; \epsilon_{ijk}\,M_{1i}\,M_{2j}\,M_{3k} \;=\; \epsilon_{ijk}\,M_{i1}\,M_{j2}\,M_{k3} \;=\; \frac{1}{6}\,\epsilon_{ijk}\,\epsilon_{lmn}\,M_{il}\,M_{jm}\,M_{kn}\,, \tag{103}$$

$$\epsilon_{ijk}\,\det M \;=\; \epsilon_{lmn}\,M_{il}\,M_{jm}\,M_{kn} \;=\; \epsilon_{lmn}\,M_{li}\,M_{mj}\,M_{nk}\,. \tag{104}$$

Первые два равенства в (103) совпадают с определением детерминанта, а соотношения (104) сводятся к ним при $i=1, j=2, k=3$ (остальное гарантирует антисимметрия). Третье равенство в (103) выводится из (104) и первой формулы (101). С помощью (104) и (103) весьма экономно доказывается хорошо известный результат

$$\begin{aligned}\det(MN) \;&=\; \epsilon_{ijk}\,(MN)_{i1}\,(MN)_{j2}\,(MN)_{k3} \;=\; \epsilon_{ijk}\,M_{il}\,N_{l1}\,M_{jm}\,N_{m2}\,M_{kn}\,N_{n3}\\ &=\; \det M\;\epsilon_{lmn}\,N_{l1}\,N_{m2}\,N_{n3} \;=\; \det M\;\det N\,.\end{aligned} \tag{105}$$

Наконец, формула (103) позволяет записать векторное произведение через ϵ-символ,

$$\vec{a}\times\vec{b} \;=\; \det\begin{pmatrix}\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{pmatrix} \qquad\Longrightarrow\qquad (\vec{a}\times\vec{b})_i \;=\; \epsilon_{ijk}\,a_j\,b_k\,, \tag{106}$$

а формула (104) объясняет, почему мы избегаем называть ϵ-символ тензором – его закон преобразования отличается от тензорного на фактор $\det M$, который может не равняться единице даже для ортогональных матриц (для них $\det M = \pm 1$).

Переходя к уравнениям Максвелла в трехмерной записи, введем сначала три основные операции векторного анализа – градиент, ротор и дивергенцию. *Градиентом* $\operatorname{grad}\varphi \equiv \vec{\partial}\varphi$ скалярной функции $\varphi(x)$ называется вектор, составленный из ее частных производных по всем трем координатам,

$$(\vec{\partial}\varphi)_i \;=\; \partial_i\varphi \;\equiv\; \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\,, \qquad\qquad \vec{\partial}\varphi \;=\; (\partial_1\varphi,\;\partial_2\varphi,\;\partial_3\varphi)\,. \tag{107}$$

Дивергенцией векторной функции $\vec{A}(x)$ называется скалярная функция от x, определяемая как *скалярное произведение* $\vec{\partial}$ на $\vec{A}$:

$$\operatorname{div}\vec{A} \;=\; \vec{\partial}\vec{A} \;=\; \partial_i A_i \;=\; \partial_1 A_1 + \partial_2 A_2 + \partial_3 A_3\,. \tag{108}$$

Ротором векторной функции $\vec{A}(x)$ называется векторная функция от x, определяемая как *векторное произведение* $\vec{\partial}\times\vec{A}$:

$$(\operatorname{rot}\vec{A})_i \;=\; \epsilon_{ijk}\,\partial_j\,A_k\,, \qquad \operatorname{rot}\vec{A} \;=\; (\partial_2 A_3 - \partial_3 A_2,\;\partial_3 A_1 - \partial_1 A_3,\;\partial_1 A_2 - \partial_2 A_1)\,. \tag{109}$$

Тождество $\epsilon_{ijk}\,\partial_j\,\partial_k \;=\; 0$, вытекающее из (99) и перестановочности частных производных, влечет за собой важные следствия: ротор от градиента и дивергенция от ротора всегда равны нулю,

$$(\operatorname{rot}\vec{\partial}\varphi)_i \;=\; \epsilon_{ijk}\,\partial_j\,\partial_k\,\varphi \;=\; 0\,, \qquad \operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{A}) \;=\; \partial_i\,\epsilon_{ijk}\,\partial_j\,A_k \;=0\,. \tag{110}$$

Уравнения Максвелла принято разбивать на две пары:

$$\mathrm{rot}\,\vec{E} \;=\; -\frac{1}{c}\,\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}\,, \qquad\qquad \mathrm{div}\,\vec{H} \;=\; 0\,; \tag{111}$$

$$\mathrm{rot}\,\vec{H} \;=\; \frac{1}{c}\,\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\,\vec{j}\,, \qquad \mathrm{div}\,\vec{E} \;=\; 4\pi\rho\,. \tag{112}$$

Здесь $\vec{E}$ – электрическое поле, $\vec{H}$ – магнитное поле, ρ – плотность электрического заряда, $\vec{j} = \rho\,\vec{v}$ – плотность тока (заряд $\times$ скорость). Непосредственным следствием (112) и (110) является *уравнение непрерывности*, означающее сохранение заряда:

$$\mathrm{div}\,\vec{j} \;=\; -\frac{1}{4\pi}\,\partial_t\,\mathrm{div}\vec{E} \;=\; -\partial_t\rho\,. \tag{113}$$

Структура первой пары уравнений Максвелла (111) позволяет выразить $\vec{E}$ и $\vec{H}$ в терминах так называемых *потенциалов* – векторного $\vec{A}$ и скалярного φ:

$$\vec{E} = -\frac{1}{c}\,\partial_t\vec{A} - \vec{\partial}\varphi \qquad (E_i = -\frac{1}{c}\,\partial_t A_i - \partial_i\varphi)\,, \qquad \vec{H} = \mathrm{rot}\,\vec{A} \qquad (H_i = \epsilon_{ijk}\,\partial_j\,A_k)\,. \tag{114}$$

Поля $\vec{E}$ и $\vec{H}$ в форме (114) автоматически удовлетворяют уравнениям (111).

Теперь обратимся к *четырехмерному* представлению уравнений Максвелла. Объединим скалярный и векторный потенциалы в один четырехмерный, а плотность заряда (помноженную на c) и плотность тока – в четырехмерный вектор тока:

$$A_\mu \;=\; (\varphi,\ \vec{A})\,, \qquad\qquad j_\mu \;=\; (c\rho,\ \vec{j})\,. \tag{115}$$

Компоненты электрического и магнитного поля соберем в антисимметричный тензор

$$F_{\mu\nu} \;=\; \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & -H_3 & H_2 \\ E_2 & H_3 & 0 & -H_1 \\ E_3 & -H_2 & H_1 & 0 \end{pmatrix}\,. \tag{116}$$

Тогда уравнения Максвелла (111),(112) превратятся, соответственно, в

$$\partial_\mu\,F_{\alpha\beta} + \partial_\alpha\,F_{\beta\mu} + \partial_\beta\,F_{\mu\alpha} \;=\; 0\,, \tag{117}$$

$$\partial_\mu\,F_{\mu\nu} \;=\; \frac{4\pi}{c}\,j_\nu\,, \tag{118}$$

а уравнение непрерывности (113) в

$$\partial_\mu j_\mu \;=\; 0\,. \tag{119}$$

Соотношения (114) принимают вид

$$F_{\mu\nu} \;=\; \partial_\mu\,A_\nu - \partial_\nu\,A_\mu\,, \tag{120}$$

благодаря чему уравнение (117) обращается в тождество.

Релятивистская ковариантность соотношений (117)–(119) не вызывает сомнений. Остается проверить, действительно ли правила сопоставления (115),(116) превращают уравнения (111)–(113) в (117)–(119). Из определений (120) и (83) следует $F_{0i} = \partial_0 A_i + \partial_i A_0$, $F_{ij} = -\partial_i A_j + \partial_j A_i$ (здесь и далее индекс, обозначаемый латинской буквой, например i, пробегает значения $1,2,3$). Сравнивая с (114) и привлекая (101), убеждаемся в справедливости представления (116):

$$E_i = F_{i0} = -F_{0i}\,, \qquad H_k = -\frac{1}{2}\,\epsilon_{kij}\,F_{ij}\,, \qquad F_{ij} = -\epsilon_{ijk}\,H_k\,. \tag{121}$$

ГЛАВА 5

δ-функция и квантовые поля

Изучение уравнений электродинамики при равных нулю зарядах и токах имеет ясный физический смысл – этим моделируется ситуация распространения электромагнитных волн в пустоте. В данной главе мы найдем соответствующее решение, введем понятие электромагнитного поля и обобщим его на квантовый случай.

Подставляя (120) в (118) при $j_\mu = 0$, получим уравнение на потенциал A_μ:

$$\partial_\mu F_{\mu\nu} \;=\; \partial_\mu (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \;=\; \partial^2 A_\nu - \partial_\nu (\partial_\mu A_\mu) \;=\; 0\,, \tag{122}$$

где $\partial^2 = \partial_\mu \partial_\mu$. Воспользуемся теперь свойством *калибровочной инвариантности* электродинамики: *калибровочное преобразование* потенциала $A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu \chi$ с любой скалярной функцией $\chi(x)$ не меняет $F_{\mu\nu}$ ввиду определения (120), а следовательно не меняет и полей $\vec{E}$ и $\vec{H}$. В этом смысле электрическое и магнитное поля считаются физическими (калибровочно независимыми), в отличие от нефизического потенциала A_μ, зависящего от выбора функции $\chi(x)$, или, по-другому, от выбора *калибровочного условия*, фиксирующего A_μ. Взяв это условие в виде

$$\partial_\mu A_\mu \;=\; \partial_0 A_0 + \partial_i A_i \;=\; 0\,, \tag{123}$$

получим из (122) окончательно

$$\partial^2 A_\mu(x) \;=\; \big(\frac{1}{c^2}\,\partial_t^2 - \vec{\partial}^{\,2}\big) A_\mu(x) \;=\; 0\,. \tag{124}$$

Легко выписать целое семейство решений данного уравнения,

$$A_\mu(x) \;=\; a_\mu(\vec{p})\, e^{ipx}\,, \qquad p^2 = 0\,, \qquad p\,a = 0\,. \tag{125}$$

Четырехмерный вектор p_μ интерпретируется как вектор энергии-импульса электромагнитной волны. Вся зависимость A_μ от x заключена в показателе экспоненты

$$ipx = i(p_0 x_0 - \vec{p}\,\vec{x}) = i(Et - \vec{p}\,\vec{x}) \qquad \Longrightarrow \qquad \partial_\mu e^{ipx} = ip_\mu e^{ipx}, \quad \partial^2 e^{ipx} = -p^2 e^{ipx}. \tag{126}$$

Отсюда и возникает условие

$$p^2 \;=\; p_0^2 - \vec{p}^{\,2} \;=\; \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^{\,2} \;=\; 0\,, \qquad E \;=\; c\,|\vec{p}\,|\,, \tag{127}$$

выражающее p_0 через трехмерный импульс. Именно поэтому амплитуда a_μ зависит лишь от $\vec{p}$; условие $p\,a = p_0 a_0 - \vec{p}\,\vec{a} = 0$ необходимо для выполнения (123). Решение (125) называют *плоской волной* – оно описывает движение плоского фронта электромагнитной волны вдоль направления импульса $\vec{p}$ со скоростью света c.

В плоской волне трехмерные векторы $\vec{E}$, $\vec{H}$ и $\vec{p}$ в любой момент ортогональны друг другу. Это видно из

$$\vec{E} \;=\; -\,\partial_0 \vec{A} - \vec{\partial} A_0 \;=\; -i(p_0 \vec{a} - a_0 \vec{p})\, e^{ipx}\,, \tag{128}$$

$$\vec{H} \;=\; \vec{\partial} \times \vec{A} \;=\; -i(\vec{p} \times \vec{a})\, e^{ipx}\,, \tag{129}$$

$$\vec{p}\,\vec{E} \;=\; -i(\vec{p}\,\vec{a}\,p_0 - \vec{p}^{\,2} a_0)\, e^{ipx} \;=\; -i(a_0 p_0 p_0 - \vec{p}^{\,2} a_0)\, e^{ipx} \;=\; -i a_0 p^2 e^{ipx} \;=\; 0\,. \tag{130}$$

Суперпозицию решений вида (125), т. е. плоских волн со всевозможными направлениями импульса и произвольными (но удовлетворяющими $p\,a = 0$) амплитудами, называют (классическим) *электромагнитным полем*:

$$A_\mu(x) \;=\; \int d\vec{p}\,\left(a_\mu(\vec{p})\,e^{ipx} + a^*_\mu(\vec{p})\,e^{-ipx}\right), \qquad p_0 = |\vec{p}\,|, \qquad p\,a = 0 \tag{131}$$

(мы сделали это поле вещественным, о чем давно пора было позаботиться). Сейчас мы напишем, без всякого вывода, его квантовое обобщение, но прежде обсудим физический смысл условия $p^2 = 0$. Вспомним релятивистские формулы для энергии и импульса частицы, в частности $p^2 = m^2c^2$. Если масса m равна нулю, то формулы (96) неприменимы (точнее, они содержат неопределенность вида $0/0$, обусловленную тем, что безмассовые частицы могут двигаться лишь со скоростью света), однако соотношение $\vec{p}^{\,2} = E^2/c^2$, следующее из $p^2 = 0$, остается в силе, устанавливая связь между энергией и импульсом безмассовой частицы, $E = c|\vec{p}\,|$, совпадающую с (127). Столь явная аналогия не является случайной; она связана с возможностью трактовать электромагнитные волны как частицы с нулевой массой – *фотоны*.

В качестве примера квантового обобщения формулы (131) приведем выражение лишь для простейшего случая *скалярного квантового поля*, отвечающего частице с массой m (и спином, равным нулю). В системе единиц $\hbar = c = 1$ оно имеет вид

$$\varphi(x) \;=\; \int d\vec{p}\,\left(a_{\vec{p}}\,e^{ipx} + a^+_{\vec{p}}\,e^{-ipx}\right), \qquad p^2 = m^2\,, \qquad p_0 = \sqrt{m^2 + \vec{p}^{\,2}} \tag{132}$$

и удовлетворяет *уравнению Клейна-Гордона*

$$(\partial^2 + m^2)\,\varphi(x) \;=\; 0\,. \tag{133}$$

Квантовые поля принципиально отличаются от классических тем, что амплитуды a^+ и a здесь уже *не числовые* (фактически произвольные) функции аргумента $\vec{p}$, а знакомые нам *операторы* рождения и уничтожения. Но в отличие от главы 2, теперь мы должны сопоставить по паре таких операторов *каждому* значению импульса $\vec{p}$. Физически это означает принципиальную возможность рождения частиц с произвольными импульсами, чем, собственно, и объясняется использование квантовых полей типа (132) в теории элементарных частиц. С математической же точки зрения это требует надлежащей модификации перестановочных соотношений (40):

$$[a_{\vec{p}}\,,\,a_{\vec{q}}] \;=\; [a^+_{\vec{p}}\,,\,a^+_{\vec{q}}] \;=\; 0\,, \qquad [a_{\vec{p}}\,,\,a^+_{\vec{q}}] \;=\; \delta(\vec{p} - \vec{q})\,. \tag{134}$$

Появившаяся в последнем равенстве знаменитая *δ-функция*, призванная обобщить символ δ_{ij} на случай непрерывно меняющегося индекса, и будет основным предметом нашего рассмотрения в оставшейся части данной главы.

Начнем с физической мотивировки. Если бы в квантовомеханической задаче типа осциллятора у нас было *несколько* пар операторов рождения и уничтожения $\{a^+_i,\,a_i\}$, то их коммутационные соотношения имели бы вид

$$[a_i,\,a_j] \;=\; [a^+_i,\,a^+_j] \;=\; 0\,, \qquad [a_i,\,a^+_j] \;=\; \delta_{ij}\,, \tag{135}$$

что означает: операторы *разных типов* (с разными индексами) *всегда* перестановочны; коммутатор может быть ненулевым только между операторами рождения и уничтожения *одного и того же* типа. Та же идея, но в непрерывном варианте, присутствует в соотношениях (134) – ненулевой коммутатор должен появляться лишь

при совпадающих импульсах, когда $\vec{p}=\vec{q}$; при $\vec{p}\neq\vec{q}$ функция $\delta(\vec{p}-\vec{q})$ должна обращаться в нуль. Отметим, что в (134) входит δ-функция от трехмерного аргумента. Однако поскольку многомерное обобщение не представляет здесь ни принципиальных, ни технических трудностей, мы ограничимся рассмотрением лишь одномерного случая $\delta(x-y)$ с вещественными числовыми переменными x и y. Соответственно, например, $p\,x$ будет теперь означать не скалярное произведение четырехмерных векторов, а обыкновенное произведение чисел p и x.

За основу построения δ-функции оказывается удобным взять не явное выражение (15) для δ-символа, а определение его компонент δ_{ij} как матричных элементов единичного оператора $\mathbb{I}$: $\delta_{ij}a_j=\mathbb{I}_{ij}a_j=a_i$. Мы хотим определить δ-функцию как их непрерывный аналог. Рассмотрим символическую цепочку обобщений

$$(Kf)_i=K_{ij}f_j \quad\to\quad (Kf)_x=\sum_y K_{xy}f_y \quad\to\quad (Kf)(x)=\int dy\,K(x,y)f(y)\,, \tag{136}$$

иллюстрирующую идею перехода от операторов в обычном пространстве с дискретными индексами к операторам в функциональном пространстве. Задав некоторую функцию $K(x,y)$ от двух аргументов, мы тем самым определяем линейный оператор K, переводящий функцию $f(x)$ в функцию $(Kf)(x)$ согласно (136). Очевидно, простейшим оператором такого рода является тождественный оператор $\mathbb{I}: f\to f$. Соответствующую ему функцию $\mathbb{I}(x,y)$ мы и хотим назвать δ-функцией:

$$\mathbb{I}(x,y)\;\equiv\;\delta(x-y) \quad\Longrightarrow\quad \int dy\,\delta(x-y)f(y)=f(x) \tag{137}$$

(ее естественно представить в виде функции от *разности* аргументов, поскольку интегрирование подразумевается в пределах $\pm\infty$ и переменную можно сдвигать). Проблема, однако, в том, что среди привычных нам функций нет пригодных на эту роль: при всей тривиальности самого оператора $\mathbb{I}$, корректно определить $\mathbb{I}(x,y)$ как обычную функцию от (разности) двух аргументов не удалось. Нам остается, отказавшись от этих попыток, использовать δ-функцию только под знаком интеграла. Иначе говоря, любое выражение, включающее δ-функцию, будет иметь смысл лишь как *подынтегральное* выражение для последующего интегрирования.

Приняв эту точку зрения, можно далее обращаться с δ-функцией почти как с обычной, используя, наряду с определением (137), следующие ее свойства:

$$\delta(x-y)=\delta(y-x)\,,\qquad g(x)\,\delta(x-y)=g(y)\,\delta(x-y)\,,\qquad \int dy\,\delta(y-a)=1\,. \tag{138}$$

Докажем второе равенство, проинтегрировав его с произвольной функцией $f(y)$:

$$\int dy\,g(x)\,\delta(x-y)f(y)\;=\;g(x)f(x)\;=\;\int dy\,g(y)\,\delta(x-y)f(y)\,. \tag{139}$$

Можно δ-функцию и дифференцировать,

$$\delta'(x-y)\;\equiv\;\partial_x\delta(x-y)\;=\;-\delta'(y-x)\,,\qquad \int dy\,\delta'(x-y)f(y)=f'(x) \tag{140}$$

(доказывается интегрированием по частям). Однако работа с δ-функцией требует и определенной осторожности. Надо всегда помнить, что это не обычная, а *обобщенная* функция, не принимающая, вообще говоря, числовых значений при конкретных значениях аргумента. И если представлять $\delta(x)$ равной нулю при $x\neq 0$ еще допустимо,

то $\delta(0)$ заведомо не определено. Более того, ввиду $\delta(x)\delta(x) = \delta(x)\delta(x-0) = \delta(0)\delta(x)$ не определено и произведение двух и более δ-функций при совпадающих аргументах.

Исключительно полезным оказывается следующее представление δ-функции:

$$\delta(x-y) \;=\; \frac{1}{2\pi}\int dp\; e^{ip(x-y)}\,. \tag{141}$$

Понимаемое как равенство подынтегральных выражений, оно, в силу определения (137), означает выполнение соотношения

$$\frac{1}{2\pi}\int dy\, dp\, e^{ip(x-y)}\varphi(y) \;=\; \varphi(x) \tag{142}$$

для произвольной функции φ (из некоторого класса). Справедливость равенства (142), а тем самым и (141), устанавливается в теории *интегралов Фурье*. Можно переписать (142) в виде двух равенств,

$$\varphi_p \;\doteq\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int dx\, e^{-ipx}\varphi(x)\,, \qquad \varphi(x) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int dp\, e^{ipx}\varphi_p\,, \tag{143}$$

задающих, соответственно, прямое и обратное *преобразование Фурье*. Эти преобразования, чрезвычайно популярные в математике и физике, осуществляют переход из *координатного* в *импульсное* представление и обратно.

Последние несколько формул допускают интересную трактовку. А именно, представление (141) есть не что иное как соотношение полноты (62) в функциональном пространстве, базис которого составлен из собственных векторов квантовомеханического оператора импульса $-i\partial_x$ (напомним, что у нас $\hbar = 1$):

$$|p> \;=\; \frac{e^{ipx}}{\sqrt{2\pi}}\,, \qquad -i\partial_x|p> \;=\; p\,|p>\,. \tag{144}$$

Действительно, задавая функции на этом пространстве посредством интегрирования по x и фиксируя соответствующий дуальный базис,

$$|\varphi> \;=\; \varphi(x)\,, \qquad <\chi\,|\varphi> \;=\; \int dx\,\chi(x)\,\varphi(x)\,, \qquad <p\,| \;=\; \frac{e^{-ipx}}{\sqrt{2\pi}}\,, \tag{145}$$

мы выводим из (141), что

$$<p\,|p'> \;=\; \delta(p'-p)\,, \qquad \int dp\;|p><p\,| \;=\; \delta(x-y) \;=\; \mathbb{I}(x,y)\,, \tag{146}$$

а коэффициенты Фурье φ_p оказываются просто координатами вектора $|\varphi>$:

$$\varphi_p \;=<p\,|\varphi>\,, \qquad |\varphi> = \int dp\;\varphi_p\,|p> = \int dp\;|p><p\,|\varphi>\;. \tag{147}$$

Коммутационные соотношения (134) получили, таким образом, математический фундамент. Мы не будем здесь развивать формализм квантовой теории поля – в целом он достаточно сложен, хотя его исходные объекты (132), (134) просты. Наметим лишь общую схему – операторы рождения, действуя на вакуум, формируют физические состояния, содержащие элементарные частицы (типа $a^+_{\vec p}a^+_{\vec q}|0>$), а поля вида (132) в определенных комбинациях применяются для описания их взаимодействий.