Graduate Math: Notes and Comments

МИНИМУМ ПО МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ АСПИРАНТОВ

1. ЧИСЛА. ВЕЩЕСТВЕННАЯ ПРЯМАЯ. МЕТРИЧЕСКОЕ ПРОСТРАНСТВО.

Целые числа. Натуральные $(1, 2, 3, \ldots)$ и целые числа не нуждаются в аксиоматическом определении – они однозначно задаются своей цифровой записью. Важнейшее новое понятие, возникающее здесь – *бесконечность* множества чисел, проистекающая из *неограниченности* натурального ряда.

Задача. Доказать бесконечность множества простых чисел.

Указание. Число $(n_1 n_2 \ldots n_N) + 1$ не делится ни на одно из n_i.

Утверждение. Любое натуральное число единственным образом разлагается на простые множители.

Доказательство. Предположим, что существуют натуральные числа, разложимые на простые множители не единственным способом. Минимальное из таких чисел обозначим N. Пусть

$$N = n_1 \ldots n_p = m_1 \ldots m_q\,, \qquad n_i \neq m_j\,, \tag{1}$$

где все n_i и m_j простые. Выберем из этих простых множителей наименьший; пусть это будет n_1. Тогда $n_1 < m_j$, а значит $m_1 = k\,n_1 + l$, $0 < l < n_1$, $k \geqslant 1$. Следовательно,

$$n_1(n_2 \ldots n_p - k\,m_2 \ldots m_q) = l m_2 \ldots m_q < N\,.$$

Простой сомножитель n_1 имеется только в левой части. Мы получаем два различных разложения числа, меньшего N, на простые множители, т. е. противоречие.

Вот некоторые нерешенные задачи о простых числах. Верно ли, что каждое чётное число, большее 2, представимо в виде суммы двух простых чисел? Бесконечно ли множество пар простых чисел, разность между которыми равна 2 (таких как 5 и 7, 11 и 13, 17 и 19, и т. д.)?

Счетные и несчетные множества. *Счетным* называется бесконечное множество, все элементы которого можно пронумеровать натуральными числами. Объединение счетного числа счетных множеств (а тем более счетного числа конечных или конечного числа счетных) тоже счетно. Пример – счетное множество рациональных чисел, или пар целых чисел. Счетным оказывается и число N-мерных векторов (или узлов N-мерной решетки) с целочисленными координатами, поскольку справедливо следующее ключевое

Утверждение. Множество столбцов из N натуральных чисел счетно.

Доказательство проводится индукцией по N, либо следующим рассуждением. Каждому конкретному значению суммы элементов столбца отвечает лишь *конечное* число различных столбцов. Значит, множество всех столбцов (высоты N) счетно, как объединение счетного числа конечных множеств.

Следствие. Множество *всех конечных* наборов натуральных чисел счетно.

Но число всех узлов *бесконечномерной* решетки (или множество *бесконечных* последовательностей, элементами которых являются натуральные числа) будет уже несчетным. Действительно, справедливо даже следующее

Утверждение. Бесконечные последовательности, элементами которых являются 0 и 1, составляют несчетное множество.

`Доказательство`. Метод доказательства называется *диагональ Кантора*. Допустим, что все такие последовательности пронумерованы натуральными числами и записаны в виде бесконечно длинных строк, одна под другой, в порядке нумерации. Сейчас мы построим последовательность, которая, тем не менее, в этом списке отсутствует. Первым ее элементом сделаем число (0 или 1), отличающееся от первого элемента первой (по номеру) последовательности: если там стоял 0, то напишем 1, и наоборот. Второй элемент нашей последовательности должен отличаться от второго элемента второй последовательности исходного списка, и т. д. В итоге, наша последовательность обязательно будет хоть одним элементом отличаться от каждой из списка: значит, ее и нет в этом списке. Противоречие.

Мы показали несчетность множества бесконечных двоичных (а значит и десятичных) дробей, то есть множества вещественных (действительных) чисел. Заодно продемонстрирована несчетность множества *всех подмножеств* счетного множества (например, натурального ряда), ибо каждому такому подмножеству можно взаимно однозначно сопоставить некоторую последовательность из нулей и единиц. В итоге, нужные нам результаты о счетных и несчетных множествах укладываются в следующую схему: если функция, заданная на конечном множестве, может принимать счетное число значений, то число таких функций счетно (так, счетным является множество точек, или векторов, с рациональными координатами в конечномерном пространстве); если же область определения бесконечна, то множество функций несчетно, даже если допустимых значений всего два.

Комбинаторика и вероятность. Число возможностей расположить n предметов в разном порядке равно $n(n-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1 = n!$; число вариантов выбора m из n предметов ($m \leqslant n$) обозначается $\binom{n}{m}$ и равно

$$\binom{n}{m} \;=\; \frac{n!}{m!(n-m)!} \;=\; \binom{n}{n-m}\,. \tag{2}$$

При доказательстве этой формулы удобно сначала условно считать *разными* вариантами выбор одних и тех же m предметов в разном порядке (тогда число вариантов было бы равным $n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1) = n!/(n-m)!$), а потом отказаться от этого соглашения, уменьшив тем самым ответ в $m!$ раз.

`Задача`. Шары различных цветов появляются по одному; всего возможных цветов n; появление любого цвета равновероятно. Какова вероятность того, что первые k шаров ($k \leqslant n$) окажутся разных цветов? `Ответ`:

$$(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\ldots(1-\frac{k-1}{n}) = \frac{n!}{(n-k)!\,n^k}\,.$$

`Указание`. Левая часть равенства – результат вычисления ‘в лоб’. Но возможен и другой, комбинаторный подход: искомая вероятность есть число вариантов выбора k разных цветов из n возможных (причем в данном случае появление одних и тех же цветов в разном порядке – это разные варианты!), деленное на число всех вообще вариантов появления k шаров (n^k). Так получаем правую часть равенства.

Бином Ньютона. Нетрудно понять появление величин $\binom{n}{m}$ в качестве *биномиальных коэффициентов* в формуле *бинома Ньютона*

$$(a+b)^n = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} a^m\, b^{n-m} \qquad \text{или} \qquad (1+x)^n = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} x^m\,. \tag{3}$$

Например, числовой коэффициент при x^m равен числу вариантов выбора m штук символов x из n скобок вида $(1+x)$. Первое равенство (3) можно переписать в виде

$$\frac{(a+b)^n}{n!} = \sum_{k+m=n} \frac{a^m\, b^k}{m!\, k!} \qquad (k, m, n \geqslant 0)\,. \tag{4}$$

Такая форма записи легко обобщается на случай трех и более слагаемых, например,

$$\frac{(a+b+c)^n}{n!} = \sum_{l+k+m=n} \frac{a^m\, b^k\, c^l}{m!\, k!\, l!} \qquad (l, k, m, n \geqslant 0)\,. \tag{5}$$

Очевидна связь этих соотношений с разложениями в ряд экспонент e^{a+b} и e^{a+b+c}.

Рациональные и вещественные (действительные) числа.

Пример. Число $\sqrt{3}$ иррационально, так как равенство $p^2 = 3q^2$ с целыми p и q противоречило бы однозначности разложения на простые множители.

Грани и сечения. Число M *ограничивает сверху* некоторое множество чисел (точек), если выше M элементов этого множества нет. Минимальное (если таковое существует) из чисел, ограничивающих данное множество сверху, называется *верхней гранью* этого множества. Если множество имеет максимальный элемент, то он и будет его верхней гранью. Если число, ограничивающее множество сверху, само принадлежит этому множеству, то оно является его максимальным элементом (и верхней гранью). *Альтернативное определение* верхней грани: число, ограничивающее некоторое множество сверху, называется его верхней гранью, если в любой окрестности этого числа найдется хотя бы одна точка из данного множества.

Предельные точки. В учебниках математики принято вводить понятия открытости и замкнутости, а также непрерывности и компактности, в рамках топологических пространств. Ради наглядности мы будем рассматривать эти понятия только в метрических пространствах. Базовой системой окрестностей объявим открытые шары вокруг точек пространства (но не вокруг пустых мест!). Определение открытых множеств не изменится, а при определении замкнутых можно будет теперь обойтись без упоминания точек прикосновения: их роль возьмут на себя предельные точки. Действительно, только *изолированные* точки данного множества (те, в окрестности которых нет других точек этого множества) являются его точками прикосновения, не являясь предельными. Все другие точки прикосновения, независимо от того, принадлежат ли они самому множеству, обязательно будут и предельными. Поэтому замкнутое подмножество метрического пространства можно определить как содержащее *все* свои *предельные* точки (а замыкание – как присоединение *всех предельных* точек, не входивших в данное подмножество).

Компактность. В метрическом пространстве становятся эквивалентными стандартное определение компакта (через возможность выбора конечного подпокрытия) и его характерное свойство – наличие предельной точки у бесконечного множества точек, поэтому *в метрических пространствах* это свойство можно использовать и как определение: подмножество метрического пространства компактно, если любое бесконечное множество точек этого подмножества имеет на нем предельную точку.

Задача. Доказать упомянутую эквивалентность: от покрытий к предельной точке – для любого метрического пространства, а в обратном направлении – для отрезка вещественной прямой (методом деления его пополам), так как для произвольного метрического пространства доказательство заметно усложняется.

2. НЕПРЕРЫВНОСТЬ. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ. РЯД ТЕЙЛОРА. ИНТЕГРИРОВАНИЕ.

Частные производные. Применим технику частных производных к задаче о нахождении *условного* экстремума функции $F(x,y)$ при дополнительном ограничении $f(x,y)=0$, наложенном на ее аргументы. `Первый способ`. Трактуя условие на $f(x,y)$ как неявное задание зависимости $y(x)$, находим $y'(x)=-f'_x/f'_y$. Теперь задача сводится к поиску экстремума функции $F(x,y(x))$:

$$\frac{d}{dx}F(x,y(x))=F'_x+F'_y\,y'(x)=F'_x-F'_y\,\frac{f'_x}{f'_y}=0\,,\qquad f(x,y)=0\,. \tag{6}$$

Два последних равенства и позволяют, в принципе, найти точки экстремума.

`Второй способ` (*метод множителей Лагранжа*). Ищем (безусловный) экстремум функции $\Phi(x,y,\lambda)=F(x,y)+\lambda f(x,y)$ по всем трем аргументам:

$$\Phi'_\lambda=f(x,y)=0\,,\qquad \Phi'_x=F'_x+\lambda f'_x=0\,,\qquad \Phi'_y=F'_y+\lambda f'_y=0\,.$$

Разрешая относительно λ и приравнивая результаты, $\lambda=-F'_x/f'_x=-F'_y/f'_y$, приходим к (6), обосновывая тем самым метод Лагранжа.

3. КОМПЛЕКСНЫЙ АНАЛИЗ. РЯД ЛОРАНА. КОНТУРНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ. РИМАНОВЫ ПОВЕРХНОСТИ.

Дифференцирование по комплексному аргументу. Взаимно-сопряженные комплексные переменные $z=x+iy$ и $\bar z=x-iy$ удобно иногда рассматривать как независимые аргументы функций (конечно, лишь в *вещественном* смысле, как две различные линейные комбинации независимых вещественных переменных x,y. Впрочем, *функции* $z(z)$ и $\bar z(z)$ в любом смысле независимы). Тогда естественно ввести соответствующие дифференциалы и производные,

$$dz\;=\;dx+i\,dy\,,\quad d\bar z\;=\;dx-i\,dy\,,\quad \partial_z\;\doteq\;\frac{1}{2}(\partial_x-i\partial_y)\,,\quad \partial_{\bar z}\;\doteq\;\frac{1}{2}(\partial_x+i\partial_y)\,, \tag{7}$$

позволяющие записать

$$dF\;=\;\partial_x F\,dx+\partial_y F\,dy\;=\;\partial_z F\,dz+\partial_{\bar z}F\,d\bar z\,. \tag{8}$$

Условия *голоморфности* (Коши-Римана) для функции $f=u+iv$ теперь примут вид

$$\partial_x u\;=\;\partial_y v\,,\quad \partial_y u\;=\;-\partial_x v\quad\Longleftrightarrow\quad \partial_{\bar z}f\;=\;0\quad\Longleftrightarrow\quad df\;=\;\partial_z f\,dz\,, \tag{9}$$

и будут означать независимость голоморфной функции f от $\bar z$ (в том смысле, что после замены аргументов x,y функции $f(x,y)$ на $z,\bar z$ аргумент $\bar z$ должен выпасть). Формула Грина тоже обретает альтернативную запись:

$$\int_{\partial\Gamma}(P\,dx+Q\,dy)\;=\int_\Gamma dx\,dy\,(\partial_x Q-\partial_y P)\quad\Longrightarrow\quad\int_{\partial\Gamma}F\,dz\;=\;2i\int_\Gamma dx\,dy\,\partial_{\bar z}F\,. \tag{10}$$

Для голоморфной F это означает равенство нулю интеграла по границе области. Справедлива также сопряженная формула $\int_{\partial\Gamma}F\,d\bar z=-2i\int_\Gamma dx\,dy\,\partial_z F$.

4. ВЕКТОРЫ. ЛИНЕЙНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ. ДУАЛЬНОСТЬ. ТЕНЗОРЫ.

Бесконечномерные пространства. В конечномерных линейных пространствах, пока там не введена *норма*, вообще не имеет смысла рассматривать бесконечные суммы векторов. Интересно, что это, как правило, недопустимо и в *бесконечномерных* векторных пространствах, где число линейно независимых векторов не ограничено (а следовательно, число базисных – бесконечно). Возьмем в качестве базового примера пространство $\mathbb{K}[x]$ полиномов от одной (формальной) переменной x, состоящее из всех *конечных* сумм вида $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ с натуральными n и коэффициентами a_i, принадлежащими какому-то числовому полю. Сложение двух (и любого *конечного* числа) полиномов хорошо определено, суммирование же *бесконечного* их числа вообще не рассматривается. Естественным базисом в $\mathbb{K}[x]$ служит (счетный) набор мономов $\{1, x, x^2, x^3, \ldots\}$.

Для сравнения рассмотрим пространство $\mathbb{K}[[x]]$ формальных бесконечных рядов вида $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots$. Сумма конечного числа таких рядов по-прежнему корректно определена, но вот полный запрет на использование *бесконечных* сумм элементов $\mathbb{K}[[x]]$ был бы здесь нелогичным, поскольку идея (формального) бесконечного суммирования лежит в основе всей конструкции. Запретив бесконечные суммы векторов из $\mathbb{K}[[x]]$ (то есть рядов), мы не могли бы трактовать совокупность мономов $\{x^n\}$ в качестве базиса данного пространства (да и вообще не смогли бы обойтись счетным базисом). С другой стороны, суммирование бесконечного числа элементов $\mathbb{K}[[x]]$ в некоторых случаях явно не имеет смысла, поскольку приводит к расходящимся бесконечным числовым суммам. Выход из данной ситуации напрашивается следующий: разрешить только такие бесконечные суммы векторов пространства $\mathbb{K}[[x]]$, в которых при каждой степени переменной x лишь конечное число коэффициентов отлично от нуля. Тогда счетный набор $\{x^n\}$ годится на роль базиса.

Корневые подпространства. Каждому собственному значению λ_i из спектра оператора A, действующего в комплексном конечномерном пространстве V, отвечает (как минимум, одномерное) собственное подпространство $\mathrm{Ker}(A - \lambda_i)$. Векторы из разных собственных подпространств (взятые по одному из каждого) линейно независимы. Этот факт легко проверить для двух векторов, а далее – по индукции. Прямая сумма всех собственных подпространств данного оператора либо совпадает с исходным пространством V (тогда оператор диагонализуем: у него есть собственный базис), либо оказывается подпространством меньшей размерности. В последнем случае V все-таки можно представить в виде прямой суммы, но уже не собственных, а *корневых* подпространств, $V = \sum_i^{\oplus} \mathrm{Ker}(A - \lambda_i)^{m_i}$, где целые числа m_i задают вид *минимального аннулирующего полинома* $\prod_i (A-\lambda_i)^{m_i} = 0$ для оператора A. В диагонализуемом случае все m_i равны единице; в общем случае $1 \leqslant m_i \leqslant n_i$, где n_i – кратность i-го корня в уравнении на собственные значения $\det(A-\lambda) = \prod_i (\lambda_i - \lambda)^{n_i} = 0$. И корневые, и собственные подпространства инвариантны относительно действия оператора A . Каждое корневое подпространство включает соответствующее собственное, и вообще является, можно сказать, максимальным подпространством, отвечающим данному собственному значению:

$$\mathrm{Ker}(A - \lambda_i) \subset \ldots \subset \mathrm{Ker}(A - \lambda_i)^{m_i - 1} \subset \mathrm{Ker}(A - \lambda_i)^{m_i} = \mathrm{Ker}(A - \lambda_i)^{m_i + 1} = \ldots \ . \quad (11)$$

Задача. Вывести отсюда, что $V = \mathrm{Ker}(A - \lambda_i)^{m_i} \oplus \mathrm{Im}(A - \lambda_i)^{m_i}$ для каждого i .

5. ГИЛЬБЕРТОВО ПРОСТРАНСТВО. РЯДЫ ФУРЬЕ. САМОСОПРЯЖЕННЫЕ ОПЕРАТОРЫ.

Сопряженный оператор. В пространстве со скалярным произведением оператор A^+ называется *эрмитово сопряженным* оператору A, если для любых векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ имеет место $(A^+\mathbf{x},\mathbf{y}) = (\mathbf{x}, A\mathbf{y})$. В любом орто-базисе матрица оператора A^+ получается из матрицы A транспонированием и комплексным сопряжением.

Задача. Показать, что размерности $\mathrm{Ker}A$ и $\mathrm{Ker}A^+$ одинаковы.

Указание. $\mathrm{Ker}A^+ = (\mathrm{Im}A)^\perp$.

Коммутирующие операторы. Если оператор B коммутирует с A, то любое собственное подпространство оператора A будет инвариантным подпространством для B, в котором, следовательно, у B найдется собственный вектор. Это значит, что коммутирующие операторы имеют *общий* собственный вектор в каждом собственном подпространстве одного из них. А если оба этих оператора диагонализуемы (например, если они самосопряженные), то у них будет и общий собственный базис. В частности, если оператор коммутирует со своим сопряженным, $[A, A^+] = 0$, то он диагонализуем, так как может быть записан в виде $A = A_1 + iA_2$, где $A_1 = (A + A^+)/2$ и $A_2 = (A - A^+)/2i$ образуют пару коммутирующих самосопряженных операторов.

Резольвента. Оператор $A - \lambda$ необратим только при $\lambda = \lambda_i$, поскольку только в этих случаях он зануляет (собственные) векторы. При всех остальных значениях λ существует оператор $\mathscr{R}_\lambda = (A-\lambda)^{-1}$, который называют *резольвентой* оператора A. Для любого полинома P справедливо представление $P(A) - P(\lambda) = (A-\lambda)\,P'(A,\lambda)$, откуда $(P(A) - P(\lambda))\mathscr{R}_\lambda = P'(A,\lambda)$, где P' – тоже полином. Взяв в качестве P минимальный аннулирующий полином оператора A,

$$\mathscr{P}(\lambda) \;=\; \prod_i (\lambda - \lambda_i)^{m_i}\,, \qquad \mathscr{P}(A) \;=\; 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \mathscr{R}_\lambda \;=\; -\frac{\mathscr{P}'(A,\lambda)}{\mathscr{P}(\lambda)}\,, \qquad (12)$$

приходим к выводу, что резольвента является (операторнозначной) рациональной функцией от λ, имеющей в точках спектра λ_i полюса кратности m_i.

Пример.

$$A \;=\; \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}\,, \qquad \mathscr{P}(\lambda) \;=\; (\lambda-\alpha)^2\,, \qquad \mathscr{R}_\lambda \;=\; \frac{-A - \lambda + 2\alpha}{(\lambda-\alpha)^2}\,.$$

Эквивалентность конечномерных норм. В конечномерном пространстве норму можно ввести разными способами, но все они оказываются в определенном смысле эквивалентными: одна норма может превосходить другую (на всем пространстве) лишь в ограниченное число раз. Важнейшим следствием этого будет независимость факта стремления к пределу от выбранной нормы. Чтобы обосновать сделанное утверждение, зафиксируем базис и введем норму $||\mathbf{x}||_0 = \max_i |x^i|$ $(\mathbf{x} = x^i\mathbf{e}_i)$. Любая другая норма $||\mathbf{x}||$ задает отображение поверхности N-мерного куба $||\mathbf{x}||_0 = 1$ (это компакт!) в положительную полупрямую. Непрерывность отображения, вытекающая из $||x^i\mathbf{e}_i|| \leqslant \sum_i |x^i|\,||\mathbf{e}_i|| \leqslant ||\mathbf{x}||_0 \sum_i ||\mathbf{e}_i||$, означает компактность образа и, в частности, его ограниченность снизу и сверху положительными числами α и β. Отсюда прямо следует заявленная эквивалентность норм: $\alpha||\mathbf{x}||_0 \leqslant ||\mathbf{x}|| \leqslant \beta||\mathbf{x}||_0$.

6. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПРОСТРАНСТВА. ЛИНЕЙНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЫ. ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ.

Дельта-функция и ее производные.

Задача. Проверить, что $1/(x \pm i0) = \mathcal{P}/x \mp i\pi\delta(x)$.

Определение (двумерной) δ-функции для комплексной плоскости вполне стандартно, $\int dx\,dy\,\delta(z)\,\varphi(z) = \varphi(0)$, где $\varphi(z)$ – аналитические основные функции. Интересно, что $\partial_{\bar z}(1/z) = \partial_z(1/\bar z) = \pi\delta(z)$. Действительно, по формуле Грина (10) имеем

$$\int_\Gamma dxdy\,\varphi(z)\,\partial_{\bar z}\frac{1}{z} \;=\; \int_\Gamma dxdy\,\partial_{\bar z}\frac{\varphi(z)}{z} \;=\; -\frac{i}{2}\int_{\partial\Gamma} dz\,\frac{\varphi(z)}{z} \;=\; \pi\varphi(0)\,.$$

Сходимость в обобщенном смысле. Сумма $\sum_n e^{inx}$ по всем целым n расходится при любом x, то есть в обычном смысле не существует. Покажем, однако, что эта сумма корректно определена как обобщенная функция из $\mathcal{S}'$ и представима в виде так называемой *периодической* δ-функции,

$$\frac{1}{2\pi}\sum_n e^{inx} \;=\; \sum_n \delta(x+2\pi n) \;\doteq\; \delta_{2\pi}(x)\,, \tag{13}$$

заменяющей обычную δ при ограничении на отрезки длины 2π. Надо проверить (13) на функциях $\varphi \in \mathcal{S}$. Правая часть $<\delta_{2\pi}(x-y)\,,\varphi>=\sum_n \varphi(y-2\pi n) = \Phi(y)$ есть гладкая периодическая функция (сумма сходится из-за быстрого убывания φ), которую можно разложить в ряд Фурье:

$$\Phi(y) \;=\; \frac{1}{2\pi}\sum_n \int_{-\pi}^{\pi} dx\,e^{in(x-y)}\Phi(x) \;=\; \frac{1}{2\pi}\sum_{n,m}\int_{-\pi}^{\pi} dx\,e^{in(x-y)}\varphi(x-2\pi m) \;=$$

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{n,m}\int_{(2m-1)\pi}^{(2m+1)\pi} dx\,e^{in(x-y)}\varphi(x) = \frac{1}{2\pi}\sum_n\int_{-\infty}^{\infty} dx\,e^{in(x-y)}\varphi(x) = <\frac{1}{2\pi}\sum_n e^{in(x-y)}\,,\varphi>\,,$$

что и требовалось. Для обобщенных функций на отрезке $[-\pi,\pi]$ с периодическими гладкими φ доказательство было бы еще проще:

$$<\delta_{2\pi}(x-y)\,,\varphi> \;=\; \varphi(y) \;=\; \frac{1}{2\pi}\sum_n\int_{-\pi}^{\pi} dx\,e^{in(x-y)}\varphi(x) \;=<\frac{1}{2\pi}\sum_n e^{in(x-y)}\,,\varphi>\;.$$

7. ИНТЕГРАЛ ФУРЬЕ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ И ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ. ФУНКЦИЯ ГРИНА.

Интеграл Фурье. Интегрируя левое равенство (13) с весом $f(x)$, получим нетривиальную связь значений функции и ее фурье-образа, $\sum_n \tilde f(n) = \sum_n f(2\pi n)$. Это соотношение часто называют *формулой суммирования Пуассона*.

Фурье-преобразование обобщенных функций.

Задача. Найти фурье-образ $\tilde\delta_y$ для $\delta_y(x) \equiv \delta(x-y)$.

Указание. Ответ $\tilde\delta_y(k) = e^{-iky}/2\pi$ получается разными способами:
либо из честного определения $<\tilde\delta_y\,,\varphi>=<\delta_y\,,\tilde\varphi>=\tilde\varphi(y)$;
либо из привычной формулы $\tilde\delta_y(k) = 1/2\pi\int dx\,e^{-ikx}\delta_y(x)$;
либо из фурье-представления $\delta(x-y) = 1/2\pi\int dk\,e^{ik(x-y)}$.

Компактные (вполне непрерывные) операторы.

В нормированном пространстве определения непрерывного и ограниченного линейного оператора полностью аналогичны случаю линейных функционалов, например, $||A|| = \sup ||A\mathbf{x}||/||\mathbf{x}||$; непрерывность по-прежнему равносильна ограниченности. Условие $||A|| < 1$ часто открывает возможность итеративного решения уравнений типа $\varphi = A\varphi + f$ посредством разложения $(1-A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n$. Однако в бесконечномерных пространствах есть своя специфика: из $\mathrm{Ker}A = \mathbf{0}$ может не следовать существования A^{-1} (ввиду, например, $\mathrm{Im}A \neq V$), и т. п. Так, в гильбертовом пространстве даже самосопряженный оператор может не иметь собственного базиса – наличие такового гарантировано лишь для самосопряженных *компактных* (точнее говоря, компактифицирующих), или *вполне непрерывных* операторов, которые выделены тем, что переводят каждую слабо сходящуюся последовательность в сильно сходящуюся (в частности, переводят орто-базис в стремящуюся к нулю последовательность: $A\mathbf{e}_n \to \mathbf{0}$). Компактные операторы (и их свойства) лежат в основе теории интегральных уравнений, поскольку любой интегральный оператор $\int_a^b dy K(x,y) f(y)$ с непрерывным или квадратично интегрируемым ядром $K(x,y)$ компактен.

Дискретный и непрерывный спектр в гильбертовом пространстве.

В бесконечномерном гильбертовом пространстве к двум стандартным ситуациям с собственными значениями: 1) λ принадлежит (дискретному) спектру, $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, оператор $A - \lambda$ необратим; и 2) λ не принадлежит спектру, существует *ограниченный* оператор $(A-\lambda)^{-1}$ – добавляется еще одна возможность: 3) $\mathrm{Ker}(A-\lambda) = \mathbf{0}$ (то есть λ не собственное значение), но $(A-\lambda)^{-1}$ не существует (например, не ограничен). В этом случае говорят, что λ лежит в *непрерывном* спектре. А поскольку неограниченность $(A-\lambda)^{-1}$ означает появление сколь угодно малых значений отношения $||(A-\lambda)\mathbf{y}||/||\mathbf{y}||$, то непрерывный спектр можно трактовать в смысле наличия у оператора A приближенных собственных значений. Дискретный спектр может и вообще отсутствовать (в конечномерном комплексном пространстве это было невозможно).

Пример. Ограниченный оператор $A(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (0, x_1, x_2, \ldots)$, действующий в l_2, не имеет собственных векторов.

Собственные векторы в квантовой физике. В квантовой механике оператор координаты $\hat{x}$ имеет чисто непрерывный спектр: оператор $1/(x-\lambda)$ не ограничен, а собственных функций, удовлетворяющих $(x-\lambda)f(x) = 0$, в гильбертовом пространстве нет. Можно, однако, пополнить это пространство *обобщенными* собственными векторами (функциями из $\mathcal{S}'$) типа $\delta(x-\lambda)$ (для оператора $\hat{x}$) или $e^{i\lambda x}$ (для оператора импульса $-i\partial_x$), что в математическом плане означало бы переход к *оснащенному* гильбертову пространству.

Дифференциальные операторы и уравнения. При всей их простоте и привычности, дифференциальные операторы (в отличие от интегральных) с точки зрения функционального анализа не слишком удобны: они редко бывают ограниченными и т. п. Поэтому в теории дифференциальных уравнений часто пользуются обратными к дифференциальным (то есть как раз интегральными) операторами. Так, набор решений $x(t)$ уравнения $\partial_t x = v(x,t)$ можно записать в виде неопределенного интеграла, $x(t) = \partial_t^{-1} v = \int^t dy\, v(x(y), y)$, где ∂_t^{-1} символически обозначает $\int^t dy \ldots = \int dy\, \theta(t-y) \ldots$. Задание начальных условий устраняет произвол:

$$\partial_t x = v(x,t) \quad \longrightarrow \quad x(t) \;=\; x(0) + \int_0^t dy\, v(x(y), y)\,. \tag{14}$$

Сжимающие отображения. Вопросы существования и единственности решений дифференциальных уравнений удобно исследовать на языке интегральных

представлений типа (14), привлекая *принцип сжимающих отображений*: отображение A полного метрического пространства в себя, для которого выполнено условие $\rho(Ax,Ay) < \lambda\rho(x,y)$ с $0<\lambda<1$, имеет ровно одну неподвижную точку, $Ax_0 = x_0$. Действительно, для любой начальной точки x последовательность $\{x, Ax, A^2x, \ldots\}$ сходится в себе (а значит, имеет пределом некую точку x_0, которая и будет искомой), так как $\rho(A^nx, A^{n+m}x) < \rho(x,Ax)\lambda^n(1-\lambda^m)/(1-\lambda) \to 0$. При надлежащем поведении функции $v(x,t)$ удается трактовать представление (14) как сжимающее отображение и сделать тем самым вывод о единственности решения соответствующего дифференциального уравнения.

Линейные дифференциальные уравнения. Линейное дифференциальное уравнение $\partial_t \mathbf{x} = A(t)\,\mathbf{x}$ для N-мерной векторной функции $\mathbf{x}(t)$ (расширением списка переменных $\{x_1 = y,\ x_2 = \partial_t y, \ldots\}$ к этому виду приводятся и уравнения с высшими степенями производной) имеет ровно N линейно независимых решений $\mathbf{x}_i(t)$, поскольку возможны только N независимых начальных условий $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$, а при каждом из них решение единственно. При $A=0$ это совсем очевидно: размерность пространства $\operatorname{Ker}\partial_t$ равна числу независимых константных векторов, а это и есть N.

Оператор эволюции. Из решений $\mathbf{x}_i(t)$, используя их как столбцы и подобрав коэффициенты, можно соорудить *фундаментальную матрицу решений* или *оператор эволюции* U_{ts} со следующими свойствами:

$$(\partial_t - A(t))U_{ts} = 0\,, \qquad U_{ss} = \mathbf{1}\,, \qquad U_{ts}\,\mathbf{x}(s) = \mathbf{x}(t)\,, \qquad U_{ts}\,U_{sz} = U_{tz}\,, \qquad U_{ts} = U_{st}^{-1}\,. \tag{15}$$

Ввиду неперестановочности матриц $A(t)$ при разных t, для явной записи оператора U потребуется *упорядоченная экспонента* $U_{ts} = T\exp\int_s^t dz\,A(z)$, в тейлоровском разложении которой матрицы A стоят в порядке убывания аргумента слева направо (что проверяется сравнением этого разложения с итеративным решением интегрального уравнения, отвечающего левой части (15): $U_{ts} = \mathbf{1} + \int_s^t dy\,A(y)\,U_{ys}$).

Зная матрицу U для уравнения $(\partial_t - A)\,\mathbf{x} = 0$, можно построить также решение *неоднородного* уравнения $(\partial_t - A(t))\mathbf{y}(t) = \mathbf{f}(t)$. Обозначим $U_{t0} = U_t$ и будем искать решение в виде $\mathbf{y}(t) = U_t\,\mathbf{c}(t)$. Мы фактически разлагаем искомое решение по полной системе $\mathbf{x}_i(t)$ в каждый момент времени, используя зависимые от t коэффициенты, откуда и происходит название метода: *вариация постоянной*. Подстановка анзаца в уравнение дает $U_t\partial_t\mathbf{c}(t) = \mathbf{f}(t)$. Следовательно,

$$\mathbf{y}(t) = U_t\,\partial_t^{-1}U_t^{-1}\mathbf{f} = U_t\int^t dz\,U_z^{-1}\mathbf{f}(z) = \int^t dz\,U_{tz}\,\mathbf{f}(z) = \int dz\,\theta(t-z)\,U_{tz}\,\mathbf{f}(z)\,. \tag{16}$$

С учетом начальных условий, получаем: $\mathbf{y}(t) = U_t\,\mathbf{y}(0) + \int_0^t dz\,U_{tz}\mathbf{f}(z)$.

Функция Грина. Широко применяется и другой способ решения неоднородных уравнений, основанный на явном обращении дифференциального оператора. Введем матричнозначную *функцию Грина* $G(t,z)$ оператора $\partial - A$ как решение уравнения $(\partial_t - A(t))\,G(t,z) = \delta(t-z)$, определив ее, таким образом, лишь с точностью до решений однородной задачи. Тогда

$$\mathbf{y}(t) = (\partial - A)^{-1}\,\mathbf{f}(t) = G\,\mathbf{f}(t) = \int dz\,G(t,z)\,\mathbf{f}(z)\,. \tag{17}$$

Сопоставляя ответ с результатами предыдущего метода, находим простую связь функции Грина с оператором эволюции: $G(t,z) = (\theta(t-z) + \text{const})\,U_{tz}$.

В более общем контексте, функцией Грина линейного дифференциального оператора L называют оператор G, удовлетворяющий уравнению $LG = \mathbf{1}$. Если решений много, то выбор нужного диктуется начальными либо граничными условиями.

8. ТЕНЗОРНЫЕ ПОЛЯ. МЕТРИЧЕСКИЙ ТЕНЗОР. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ФОРМЫ.

Ротор, дивергенция и уравнения Максвелла. В трехмерном пространстве любая 3-форма имеет вид

$$\Omega \;=\; \Omega(x)\,\epsilon_{ijk}(x)\,dx^i\,dx^j\,dx^k \;\;=\; 6\,\Omega(x)\,\sqrt{g}\,dx^1\,dx^2\,dx^3\,, \tag{18}$$

где $\Omega(x)$ – скалярная функция. Для дифференциала от 2-формы имеем

$$dF \;=\; \partial_k F_{ij}\;dx^k\,dx^i\,dx^j \;=\; \partial_k F_{ij}\;\epsilon^{ijk}\,dx^1\,dx^2\,dx^3 \;=\; \partial_k F_{ij}\;\epsilon^{ijk}(x)\,\sqrt{g}\,dx^1\,dx^2\,dx^3\,.$$

Вводя векторное поле $\Phi^k = \epsilon^{kij}(x) F_{ij}$, мы можем преобразовать скалярную функцию

$$\epsilon^{kij}(x)\,\partial_k F_{ij} \;=\; \frac{1}{\sqrt{g}}\,\partial_k(\epsilon^{kij}\,F_{ij}) \;=\; \frac{1}{\sqrt{g}}\,\partial_k(\sqrt{g}\,\Phi^k) \tag{19}$$

в выражение для дивергенции в криволинейных координатах.

В четырехмерном пространстве Минковского тензор напряженности электромагнитного поля $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ задает 2-форму $F = dA$, и первая пара уравнений Максвелла выполняется автоматически: $dF = 0$. Вторая пара, имеющая вид $\partial_\mu F_{\mu\nu} \sim j_\nu$, тоже допускает представление через дифференциальные формы, $dF^* \sim j^*$, где тензор $F^*_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu} F_{\mu\nu}$ задает 2-форму, а $j^*_{\alpha\beta\mu} = \varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}\, j_\nu$ – 3-форму. Уравнение непрерывности $\partial_\nu j_\nu = 0$ превращается при этом в $dj^* = 0$.

9. ПОТОКИ И ГАМИЛЬТОНОВА ДИНАМИКА. КОВАРИАНТНАЯ ПРОИЗВОДНАЯ. КРИВИЗНА.

Коммутатор векторных полей. Векторным полям A и B отвечают динамические уравнения $\partial_t x^i = A^i(x),\ \partial_u x^i = B^i(x)$, порождающие потоки A^t и B^u. Имеем

$$(\partial_t\partial_u - \partial_u\partial_t)x^i = \partial_t B^i - \partial_u A^i = \partial_t x^j\,\partial_j B^i - \partial_u x^j\,\partial_j A^i = A^j\partial_j B^i - B^j\partial_j A^i = [A,B]^i.$$

Коммутация ($[A,B]=0$) векторных полей и соответствующих потоков выражается в перестановочности (а значит, независимости) производных по аргументам t и u.

Понятие связности. Введем криволинейные координаты в эвклидовом пространстве. Тогда векторы локальных базисов в разных точках можно будет сравнивать (например, вычитать) , перенося параллельно (в исходном эвклидовом смысле) один из них к другому. Соответственно, можно будет сравнивать и любые тензорные объекты, причем их вариация при переходе к другой точке будет складываться из вариации их координат относительно локального базиса и вышеуказанной вариации самого базиса. Именно этим обусловлены два типа вкладов в ковариантные производные: первому типу вариаций отвечает обычное дифференцирование по координате, а второй порождает символы Кристоффеля: $\delta\mathbf{e}_j = \Gamma^k_{ij}\,\mathbf{e}_k\,\delta x^i$. Например,

$$\delta\mathbf{A} = \delta(A^j\mathbf{e}_j) = \;\partial_i A^j\,\delta x^i\,\mathbf{e}_j + A^j\,\delta\mathbf{e}_j \;= (\partial_i A^j\,\mathbf{e}_j + A^j\,\Gamma^k_{ij}\,\mathbf{e}_k)\,\delta x^i = (\nabla_i A^j)\,\mathbf{e}_j\,\delta x^i. \tag{20}$$

В данном примере понятие параллельности имелось изначально – поэтому величины $\Gamma^k_{ij}(x)$ могут быть явно найдены из формул замены координат. В общем случае правила параллельного переноса порождаются именно заданием набора символов Кристоффеля (и тем самым вводится *связность* между точками многообразия) .

10. АЛГЕБРЫ И ГРУППЫ ЛИ. ПРЕДСТАВЛЕНИЯ. КОНФОРМНАЯ СИММЕТРИЯ. СУПЕРСИММЕТРИЯ.

Ассоциативная алгебра. *Алгеброй* называется линейное пространство $\mathfrak{a}$, на котором задана операция умножения векторов $\mathbf{xy} \in \mathfrak{a}$. Умножение дистрибутивно (билинейно): $(\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{y})\mathbf{z} = \alpha\mathbf{xz}+\beta\mathbf{yz}$, $\mathbf{z}(\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{y}) = \alpha\mathbf{zx}+\beta\mathbf{zy}$. Оно может также быть *ассоциативным*, $\mathbf{x}(\mathbf{yz}) = (\mathbf{xy})\mathbf{z} \doteq \mathbf{xyz}$, и *коммутативным*, $\mathbf{xy} = \mathbf{yx}$. В конкретном базисе закон умножения задается соотношениями $\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j = C_{ij}^k\,\mathbf{e}_k$ (таблица умножения) с помощью набора *структурных констант* C_{ij}^k.

Прямая сумма линейных пространств превращается (заданием умножения) в *прямую сумму алгебр* если и только если все произведения векторов из разных слагаемых положены равными нулю. Закон умножения элементов *тензорного произведения алгебр* $\mathfrak{a}\otimes\mathfrak{b}$ дается формулой $(\mathbf{x}\otimes\mathbf{y})\,(\mathbf{u}\otimes\mathbf{v}) = \mathbf{xu}\otimes\mathbf{yv}$. Линейное отображение $f:\mathfrak{a}\to\mathfrak{a}'$ называют *гомоморфизмом алгебр*, если оно сохраняет умножение:

$$f(\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{y}) \;=\; \alpha f(\mathbf{x})+\beta f(\mathbf{y})\,, \qquad f(\mathbf{xy}) \;=\; f(\mathbf{x})f(\mathbf{y})\,. \tag{21}$$

В ассоциативных алгебрах, как правило, имеется *единица* – элемент $\mathbf{1}$ со свойствами $\mathbf{1x} = \mathbf{x1} = \mathbf{x}$. Примером ассоциативной, но некоммутативной алгебры является $\mathrm{End}V$ – алгебра операторов линейного пространства V или соответствующих матриц.

Алгебра Ли. В алгебрах этого типа операцию умножения обозначают $[\mathbf{x}\,,\mathbf{y}]$ и называют *коммутатором*. Алгебра Ли *антикоммутативна*,

$$[\mathbf{x},\mathbf{y}] = -[\mathbf{y},\mathbf{x}]\,, \qquad [\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j] = C_{ij}^k\,\mathbf{e}_k\,, \qquad C_{ij}^k = -C_{ji}^k\,, \tag{22}$$

в ней нет единицы, а вместо ассоциативности имеет место *тождество Якоби*:

$$[\mathbf{x},[\mathbf{y},\mathbf{z}]]+[\mathbf{y},[\mathbf{z},\mathbf{x}]]+[\mathbf{z},[\mathbf{x},\mathbf{y}]] = 0 \qquad\Longleftrightarrow\qquad C_{in}^m\,C_{jk}^n + C_{jn}^m\,C_{ki}^n + C_{kn}^m\,C_{ij}^n = 0\,. \tag{23}$$

Алгебра Ли легко строится на базе ассоциативной алгебры: если задать коммутатор привычной формулой $[\mathbf{x},\mathbf{y}] = \mathbf{xy}-\mathbf{yx}$, то антикоммутативность и тождество Якоби будут выполнены автоматически. Практически все алгебры Ли могут быть таким способом реализованы как матричные алгебры.

Универсальная обертывающая алгебра. Существует простой способ построения бесконечномерной ассоциативной алгебры с единицей на основе произвольного набора *образующих* $\{a_i\}$: базисными элементами алгебры объявляются любые мономы, составленные из этих образующих, а также $\mathbf{1}$ (как пустой моном); умножение мономов сводится к последовательной их записи, без пробелов. Полученную алгебру называют *свободной алгеброй* над данными образующими; ее векторами являются конечные линейные комбинации базисных мономов. Более интересен случай, когда образующие связаны какими-то алгебраическими соотношениями. Тогда базис получившейся *свободной алгебры с соотношениями* будет включать уже не все мономы: некоторые из них в силу этих соотношений станут зависимыми, и их придется из базиса исключать. Например, соотношение $a_1a_2 - a_2a_1 = a_2$ делает зависимыми мономы a_2, a_1a_2 и a_2a_1. В отличие от свободной алгебры, где закон умножения был, по сути, тривиален, в алгебре с соотношениями он генерируется этими соотношениями и полностью эквивалентен им.

Универсальной обертывающей алгеброй $U_{\mathfrak{g}}$ называется свободная алгебра с соотношениями (22) над образующими $\mathbf{e}_i$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Базисом в $U_{\mathfrak{g}}$ может служить множество *упорядоченных* мономов $\mathbf{e}_1^m\mathbf{e}_2^n\ldots\,(m,n\geqslant 0)$; остальные мономы сводятся к этим перестановками образующих (теорема Пуанкаре-Биркгофа-Витта).

Группа Ли как многообразие. Группа Ли G – это параметрическая группа и одновременно гладкое многообразие, причем операции умножения и нахождения обратного аналитичны по координатам (параметрам) группы. Соответствующую алгебру Ли $\mathfrak{g}$ обычно представляют в виде касательной плоскости T_e в точке e – единице группы. Но что такое коммутатор двух векторов этой плоскости? Заметим, что операция умножения (скажем, слева) на $g \in G$ отображает многообразие G в себя, а касательные векторы из T_e переносит в T_g. Перебирая все g, можно скопировать каждый касательный вектор плоскости T_e во все точки группы, и тогда объявить элементами алгебры Ли $\mathfrak{g}$ построенные таким способом *левоинвариантные векторные поля* на группе G, а коммутаторами в $\mathfrak{g}$ – коммутаторы этих полей.

Генераторы группы. Базисные векторы $\mathbf{e}_i$ алгебры $\mathfrak{g}$ (далее обозначаемые t_i) называются *генераторами* группы G, поскольку задают явный вид элемента $g \in G$:

$$g(\theta) \;=\; e^{\theta_i t_i}\,, \qquad\qquad [t_i, t_j] \;=\; C_{ij}^k\, t_k\,, \tag{24}$$

где θ_i – параметры (координаты) на группе G. Мы будем иметь дело лишь с матричными группами и алгебрами Ли, поэтому экспоненту в формуле (24) надо понимать буквально. В большинстве случаев этой формулой охватываются все элементы группы (точнее, ее связной части, содержащей единицу). Тем самым, группа Ли может быть восстановлена (как минимум, локально) по своей алгебре Ли.

Обратная процедура проблем вообще почти не вызывает: если группа Ли параметрически задана, то ее генераторы и их свойства находятся однозначно. Например, матрицы трехмерных вращений $\mathbf{x}' = g\mathbf{x}$ ортогональны, $g^T = g^{-1}$, поэтому для генераторов имеем $t_i^T = -t_i$. Базис из (трех) антисимметричных матриц 3×3 можно выбрать в виде $(t_k)_{ij} = -\epsilon_{kij}$, что дает известный результат $[t_i, t_j] = \epsilon_{ijk}\, t_k$. Такому выбору генераторов отвечает вариация координаты $\delta x_i = -\epsilon_{ijk}\,\theta_k x_j$ (например, $\delta x_1 = \theta_2 x_3 - \theta_3 x_2$), соответствующая поворотам на угол θ_i вокруг i-ой оси.

Неприводимые представления групп и алгебр Ли. Представлениями групп и алгебр называют их матричные реализации, а точнее – гомоморфные отображения этих объектов в $\mathrm{End}V$, ассоциативную алгебру линейных операторов векторного пространства V. Каждому элементу a исходной алгебры или группы сопоставляется оператор $T_a \in \mathrm{End}V$, причем так, чтобы сумме, произведению или коммутатору элементов отвечали сумма, произведение или коммутатор сопоставляемых операторов (а единице – оператор $\mathbf{1}$). Не всякое представление является *точным* (взаимно однозначным), оно может и огрублять исходную структуру (например, сопоставляя ненулевым элементам алгебры нулевой оператор).

Вопрос. Умножение на некоторый элемент справа (или слева) отображает ассоциативную алгебру в себя. Являются ли оба (правое и левое) умножения представлениями алгебры?

Любое представление алгебры Ли $\mathfrak{g}$ очевидным образом продолжается до представления ассоциативной алгебры $U_{\mathfrak{g}}$. Аналогично, представление алгебры Ли $\mathfrak{g}$ порождает представление ее группы Ли G по формуле $T(\theta) \equiv T_{g(\theta)} = e^{\theta_i T_i}$, $T_i \equiv T_{t_i}$.

У каждой алгебры Ли имеется так называемое *присоединенное* (adjoint) представление $T_{\mathbf{x}}\mathbf{y} = [\mathbf{x}, \mathbf{y}]$. Здесь алгебра Ли действует (операцией коммутирования) на себе как на линейном пространстве. Необходимое требование $T_{[\mathbf{x},\mathbf{y}]} = T_{\mathbf{x}}T_{\mathbf{y}} - T_{\mathbf{y}}T_{\mathbf{x}}$ выполняется в силу тождества Якоби. Матричные элементы генераторов этого представления совпадают со структурными константами данной алгебры Ли, $(T_i)_j^k = C_{ij}^k$.

Задача. Проверить, что соответствующее *присоединенное представление группы Ли* дается формулой $T_g\,\mathbf{y} = g\,\mathbf{y}\,g^{-1}$, понимая правую часть как умножение матриц.

Указание. Полагая $g = e^{\mathbf{x}}$, использовать соотношение $e^{\mathbf{x}}\,\mathbf{y}\,e^{-\mathbf{x}} = e^{[\mathbf{x},\cdot]}\,\mathbf{y}$.

Наряду с матричными представлениями, для генераторов алгебр Ли известны и реализации дифференциальными операторами. Их следует относить к бесконечномерным представлениям, так как действуют они в функциональных пространствах, которые обычно бесконечномерны. Например, генераторы группы трехмерных вращений представимы в виде $t_k = -\epsilon_{ijk}\, x_i\, \partial_j$. Для вывода этой формулы примем $t_k f(x) = \partial f(x - \delta x)/\partial\theta_k$, где знак минус направляет pullback в нужную сторону.

Представление (алгебры или группы) называется *неприводимым* , если в пространстве V нет подпространств (кроме самого V и нуля) , инвариантных относительно действия *всех* операторов T_a . Если такие подпространства есть, то представление *приводимо* , а если V разложимо в прямую сумму этих подпространств – то *вполне приводимо* . В последнем случае матрицы всех операторов представления одновременно приводятся к блочно-диагональному виду.

Лемма Шура. Пусть имеется неприводимое представление в конечномерном комплексном пространстве V. Если оператор $S \in \mathrm{End}V$ коммутирует с любым оператором T_a этого представления, то S кратен единичному оператору. Действительно, S обязан иметь хотя бы одно собственное значение λ . Но собственное подпространство $\mathrm{Ker}(S-\lambda)$ инвариантно относительно любого T_a , ибо $S\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \;\Rightarrow\; S\,T_a\mathbf{x} = \lambda\,T_a\mathbf{x}$. В силу неприводимости представления, $\mathrm{Ker}(S-\lambda)$ совпадает с V, то есть для *любого* вектора из V справедливо $S\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, что и утверждалось. `Следствие`: комбинация (например, полином) из генераторов алгебры Ли, коммутирующая с любым из них, на неприводимых представлениях этой алгебры принимает вид $\lambda\mathbf{1}$, где число λ зависит от представления. Такую комбинацию называют *оператором Казимира* .

Простые комплексные алгебры Ли и их представления. Алгебра (и соответствующая группа) Ли называется *простой*, если ее присоединенное представление неприводимо, и *полупростой*, если она раскладывается в прямую сумму (прямое произведение) простых. Все конечномерные представления (полу)простых алгебр и групп Ли вполне приводимы. Поэтому имеет смысл в первую очередь изучать неприводимые представления простых комплексных алгебр Ли. Классификация последних на основе базисов Картана-Вейля дает рецепт построения конечномерных неприводимых представлений со старшим вектором.

Рассмотрим эту процедуру на примере простой комплексной алгебры Ли $\mathrm{sl}_2(\mathbb{C})$. Ее базис состоит из трех генераторов $t_0, t_\pm$, удовлетворяющих соотношениям

$$[t_+\,,\,t_-] \;=\; 2\,t_0\,, \qquad [t_0\,,\,t_\pm] \;=\; \pm\,t_\pm\ . \tag{25}$$

Начнем строить базис пространства V со *старшего вектора* $|\mu>$, характеризуемого свойствами $t_+|\mu>=0$, $\;t_0|\mu>=\mu\,|\mu>$, порождая другие базисные векторы действием понижающего оператора t_- : $\;t_-|\mu>\doteq|\mu-1>$, $\;(t_-)^n|\mu>\doteq|\mu-n>$. Результат действия генераторов t_+ и t_0 на новые векторы можно найти с помощью коммутационных соотношений (25) , например,

$$\begin{aligned} t_+|\mu-1> \;=\; t_+t_-|\mu> \;&=\; (t_-t_+ + 2\,t_0)|\mu> \;=\; 2\mu\,|\mu>\,, \\ t_0|\mu-1> \;=\; t_0t_-|\mu> \;&=\; (t_-t_0 - t_-)|\mu> \;=\; (\mu-1)\,|\mu-1>\ . \end{aligned}$$

В общем случае получаем

$$t_+|\mu-n> \;=\; n(2\mu-n+1)\,|\mu-n+1>\,, \qquad t_0|\mu-n> \;=\; (\mu-n)\,|\mu-n>\ . \tag{26}$$

Чтобы построенное представление оказалось конечномерным, надо оборвать процесс генерации новых элементов базиса, наложив условие $t_-|\mu-m>=0$ при некотором

$m \geqslant 0$. Требуется, однако, проверка на самосогласованность:

$$0 = \ t_+ t_- |\mu - m> = (t_- t_+ + 2\, t_0)|\mu - m> = (m+1)(2\mu - m)|\mu - m> \ .$$

Мы видим, что при (полу)целых неотрицательных μ и $m = 2\mu$ можно корректным образом оборвать базис на *младшем векторе* $|-\mu>$, для которого $t_-|-\mu>= 0$. При каждом таком μ представление неприводимо и характеризуется собственным значением оператора Казимира $t^2 \doteq t_- t_+ + t_0^2 + t_0$ (на любом векторе), равным $\mu(\mu+1)$.

Вещественные формы. Если *вещественное* линейное пространство наделить структурой алгебры Ли, используя для этого лишь вещественные структурные константы C_{ij}^k , то получится *вещественная алгебра Ли* . Рассмотрим пример $\mathrm{sl}_2(\mathbb{C})$, где, наряду с (25) , возможен и другой выбор базиса, $t_1, t_2, t_3 : \ [t_i, t_j] = \epsilon_{ijk} t_k$. Генераторы этих базисов связаны линейными соотношениями, $t_\pm = i t_1 \mp t_2$, $t_0 = i t_3$. Структурные константы в обоих случаях чисто вещественные, поэтому над этими двумя базисами можно построить две *вещественные формы* алгебры Ли $\mathrm{sl}_2(\mathbb{C})$, обозначаемые, соответственно, $\mathrm{sl}_2(\mathbb{R})$ и so_3 (или su_2) . Но поскольку невозможно перевести один базис в другой *вещественным* линейным преобразованием (сохраняя значения коммутаторов), то указанные вещественные формы следует считать различными: они не эквивалентны (не изоморфны) друг другу. Интересно, что вещественная алгебра $\mathrm{so}_3 \ \sim \ \mathrm{su}_2$, двумерное представление которой дают матрицы Паули, не допускает реализации двумерными *вещественными* матрицами.

Тензорное произведение представлений. Произведение $V \otimes W$ представлений группы и алгебры Ли тоже является их представлением: группа G действует на нем операторами $T_g \otimes T_g$, а ее алгебра Ли $\mathfrak{g}$ – как $\mathfrak{g} \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \mathfrak{g}$, ввиду экспоненциального характера связи группы Ли с ее алгеброй.

Ряд Клебша-Гордана. Произведение $V \otimes W$ двух неприводимых представлений само не обязательно неприводимо, но (для полупростых групп) может быть разложено в прямую сумму неприводимых, $V \otimes W = Z_1 \oplus \ldots \oplus Z_k$ (*ряд Клебша-Гордана*). Для явной записи базисных векторов пространств Z_i используются *коэффициенты Клебша-Гордана* : $|Z\gamma> = \sum_{\alpha\beta} (V\alpha W\beta|Z\gamma)\, |V\alpha> |W\beta>$.

Схемы Юнга. Типична ситуация, когда любое из конечномерных неприводимых представлений простой группы Ли можно отыскать в ряду Клебша-Гордана для произведения нескольких экземпляров ее *фундаментального* представления: для su_2 – двумерного (спин 1/2), для su_3 – трехмерного (кварки), и т. п. А поскольку на произведение $V \otimes V \otimes \ldots$ действует произведение *одинаковых* матриц $T_g \otimes T_g \otimes \ldots$, то (анти)симметрия относительно перестановок фундаментальных сомножителей при действии группы не нарушается, и подпространства с определенным типом симметрии оказываются инвариантами группового действия. Этот факт служит основой применения *схем Юнга* для описания неприводимых представлений групп Ли.

Алгебры Лоренца и Пуанкаре. Проиллюстрируем процедуру получения перестановочных соотношений между генераторами на примере 4-сдвигов $T(a) = e^{i\varepsilon_\alpha P_\alpha}$ и преобразований Лоренца $T(\Lambda) = e^{i\omega_{\mu\nu} M_{\mu\nu}/2}$. Нетрудно понять, что последовательное выполнение лоренцева поворота Λ , сдвига на a и обратного поворота Λ^{-1} эквивалентно сдвигу на величину $\Lambda^{-1} a$, что означает $e^{-i\omega M/2} e^{i\varepsilon P} e^{i\omega M/2} = e^{i(\varepsilon - \omega\varepsilon)P}$. Собирая слагаемые при $\varepsilon\omega$ в разложении экспонент, приходим к $[M_{\mu\nu}, P_\alpha] = i(g_{\alpha\mu} P_\nu - g_{\alpha\nu} P_\mu)$.

Конформные преобразования в 4-мерном и двумерном пространстве. Конформными преобразованиями в плоском эвклидовом пространстве называются такие преобразования его координат $\tilde{x}_\mu = x_\mu + \varepsilon_\mu(x)$, при которых изменение метри-

ческого тензора $\delta_{\alpha\beta}$ сводится лишь к умножению на некоторый множитель $\sigma(x)$:

$$h_{\mu\nu}(\tilde{x}) \;=\; \frac{\partial x_\alpha}{\partial \tilde{x}_\mu}\frac{\partial x_\beta}{\partial \tilde{x}_\nu}\,\delta_{\alpha\beta} \;=\; \sigma(x)\,\delta_{\mu\nu} \qquad \Longrightarrow \qquad \partial_\mu\varepsilon_\nu + \partial_\nu\varepsilon_\mu = (1-\sigma)\,\delta_{\mu\nu}\,. \tag{27}$$

В пространствах размерности не меньше трех последнее равенство порождает весьма ограничительные условия на $\varepsilon_\mu(x)$. Так, в трехмерном случае оно означает

$$\partial_1\varepsilon_1 = \partial_2\varepsilon_2 = \partial_3\varepsilon_3\,, \quad \partial_1\varepsilon_2 = -\partial_2\varepsilon_1\,, \quad \partial_2\varepsilon_3 = -\partial_3\varepsilon_2\,, \quad \partial_1\varepsilon_3 = -\partial_3\varepsilon_1\,.$$

Оказывается, отсюда вытекает равенство нулю *всех третьих производных* от всех компонент ε_μ. Например,

$$\partial_1\partial_2\partial_3\varepsilon_1 \;=\; -\partial_1\partial_2\partial_1\varepsilon_3 \;=\; \partial_1\partial_3\partial_1\varepsilon_2 \;=\; -\partial_2\partial_3\partial_1\varepsilon_1 \;=\; -\partial_1\partial_2\partial_3\varepsilon_1 \;=\; 0$$

или

$$\partial_1\partial_1\partial_1\varepsilon_1 \;=\; \partial_1\partial_1\partial_2\varepsilon_2 \;=\; -\partial_1\partial_2\partial_2\varepsilon_1 \;=\; -\partial_2\partial_2\partial_2\varepsilon_2 \;=\; \ldots \;=\; \pm\partial_3\partial_3\partial_3\varepsilon_3 \;=\; 0\,.$$

Всё это означает, что в пространствах размерности $d > 2$ функция $\varepsilon_\mu(x)$ не более чем квадратична по аргументу x. Из (27) определяем ее наиболее общий вид:

$$\varepsilon_\mu(x) = a_\mu + \omega_{\mu\nu}x_\nu + b\,x_\mu + c_\mu x^2 - 2(cx)\,x_\mu\,, \qquad \omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}\,. \tag{28}$$

Следовательно, размерность конформной группы для $d > 2$ равна $(d+1)(d+2)/2$.

Для $d = 2$ проведенное рассуждение не проходит (для него нужно не менее трех разных индексов), а набор условий на $\varepsilon_\mu(x)$ сводится к $\partial_1\varepsilon_1 = \partial_2\varepsilon_2$, $\partial_1\varepsilon_2 = -\partial_2\varepsilon_1$. Но это есть не что иное как условия Коши-Римана для функции $\varepsilon = \varepsilon_1 + i\varepsilon_2$. Таким образом, конформные преобразования в двумерном эвклидовом пространстве параметризуются произвольной голоморфной функцией $\varepsilon(z)$ аргумента $z = x_1 + ix_2$. Размерность конформной группы в этом случае бесконечна; ее генераторы могут быть выбраны, например, в виде $L_n = -z^{n+1}\partial_z$, $[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n}$, в согласии с разложением $\varepsilon(z)$ в ряд Лорана по целым степеням z. Центральным расширением алгебры генераторов L_n является *алгебра Вирасоро*

$$[L_m, L_n] \;=\; (m-n)L_{m+n} + \frac{c}{12}(n^3-n)\delta_{n,-m}\,. \tag{29}$$

Грассмановы переменные. Антикоммутирующие (или *нечетные*) переменные θ_i, подчиненные соотношениям $\theta_i\theta_j = -\theta_j\theta_i$ (а значит, квадрат любой из них равен нулю), называют *грассмановыми*. Понятно, что степенные ряды по этим переменным быстро обрываются. Весьма просто задается и интегрирование:

$$\int d\theta \;=\; 0\,, \qquad \int d\theta\;\theta \;=\; 1\,, \qquad \delta(\theta-\xi) \;=\; \theta-\xi\,, \qquad \int d\theta\,\delta(\theta-\xi)f(\theta) \;=\; f(\xi)\,. \tag{30}$$

Для проверки определяющего свойства грассмановой δ-функции (последнее равенство) достаточно взять $f(\theta) = a + b\,\theta$. Отметим, что символ $d\theta$ тоже нечетен.

Для иллюстрации техники обращения с грассмановыми переменными вычислим интеграл $\int d\bar\theta_1 d\bar\theta_2 d\theta_1 d\theta_2 \exp(i\bar\theta_m K_{mn}\theta_n)$, где $\theta_1, \theta_2, \bar\theta_1, \bar\theta_2$ – нечетные переменные, а K_{mn} – обычные (четные) элементы матрицы 2×2. Ненулевой вклад в этот интеграл дадут только те слагаемые из разложения экспоненты, в которые каждая из четырех нечетных переменных входит в первой степени. Таких слагаемых два:

$$\int d\bar\theta_1 d\bar\theta_2 d\theta_1 d\theta_2\, e^{i\bar\theta_m K_{mn}\theta_n} = -\int d\bar\theta_1 d\bar\theta_2 d\theta_1 d\theta_2 (\bar\theta_1 K_{11}\theta_1\,\bar\theta_2 K_{22}\theta_2 + \bar\theta_1 K_{12}\theta_2\,\bar\theta_2 K_{21}\theta_1) = \det K.$$

Суперсимметрия. К данному классу относятся преобразования, перемешивающие бозоны и фермионы (и вообще четные и нечетные переменные). Рассмотрим основные идеи этого подхода на простейшем примере, когда есть только два поля – четное $\varphi(x)$ и нечетное $\psi(x)$. Применительно к данному случаю, преобразования суперсимметрии выглядят так (параметр ε считаем нечетным):

$$\varphi' \;=\; \varphi + \varepsilon\,\psi\,, \qquad \psi' \;=\; \psi - \varepsilon\,\partial_x\varphi\,, \qquad \varepsilon\psi = -\psi\varepsilon\,, \quad \varepsilon^2 = \psi^2 = 0\,. \tag{31}$$

Существует эффективный метод построения суперпреобразований, в том числе и гораздо более сложных чем (31), основанный на концепции *суперполей*. Так называют функции, зависящие как от обычных пространственных, так и от грассмановых координат. Возьмем наиболее общий для нашего случая вид суперполя $\Phi(x,\theta) = \varphi(x) + \theta\psi(x)$. Постулируя преобразования координат *суперпространства*

$$x \to x' = \; x + \varepsilon\theta\,, \qquad \theta \to \theta' = \; \theta + \varepsilon \tag{32}$$

и налагая условие скалярности на суперполе,

$$\Phi(x',\theta') \;=\; \Phi'(x,\theta) \;=\; \varphi'(x) + \theta\psi'(x)\,, \tag{33}$$

воспроизводим, раскрывая $\Phi(x',\theta')$,

$$\Phi(x+\varepsilon\theta,\,\theta+\varepsilon) = \varphi(x+\varepsilon\theta) + (\theta+\varepsilon)\,\psi(x+\varepsilon\theta) = \varphi + \varepsilon\theta\partial_x\varphi + (\theta+\varepsilon)\,\psi(x) = \varphi' + \theta\psi',$$

в точности закон преобразования (31). Нетрудно также убедиться в том, что

$$\Phi' \;=\; (1+\varepsilon Q)\Phi\,, \qquad Q \;=\; \partial_\theta + \theta\partial_x\,, \qquad Q^2 \;=\; \partial_x\,,$$

где грассманнова производная ∂_θ (еще один нечетный объект) действует по правилу $\partial_\theta\theta = 1$, $\partial_\theta^2 = 0$, $\partial_\theta \circ \psi = -\psi \circ \partial_\theta$, и т. д. Обратим внимание, что в нашем случае генератор суперпреобразований, нечетный оператор Q, оказался квадратным корнем от пространственной производной ∂_x.

11. ЛАГРАНЖИАН. ТЕОРЕМА НЁТЕР. КВАНТОВОЕ ПОЛЕ. КОНТИНУАЛЬНЫЙ ИНТЕГРАЛ.

Теорема Нётер. Рассмотрим лагранжеву динамическую систему $L(q_i,\dot q_i)$ и однопараметрическое преобразование переменных $q_i \to q_i + \tau Y_i$, которое предполагается независимым от времени, $\partial_t\partial_\tau = \partial_\tau\partial_t$, благодаря чему $\partial_\tau q_i = Y_i \;\Rightarrow\; \partial_\tau\dot q_i = \dot Y_i$. Если лагранжиан оказывается инвариантным относительно этого преобразования, то

$$\partial_\tau L \;=\; \frac{\partial L}{\partial q_i}\,\partial_\tau q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\,\partial_\tau\dot q_i \;=\; Y_i\,\frac{\partial L}{\partial q_i} + \dot Y_i\,\frac{\partial L}{\partial \dot q_i} \;=\; 0\,.$$

С учетом уравнений движения $\partial L/\partial q_i = d(\partial L/\partial\dot q_i)/dt$ получаем закон сохранения $d(Y_i\,\partial L/\partial\dot q_i)/dt = 0$, являющийся прямым следствием симметрии лагранжиана. Сохраняющийся *нётеровский заряд* $Y_i\,\partial L/\partial\dot q_i$ представляет собой компоненту импульса $p = \partial L/\partial\dot q$ вдоль направления векторного поля Y, отвечающего данному преобразованию. Например, для L, не зависящего от q_1, можно ввести преобразование симметрии $q_1 \to q_1 + \tau, q_2 \to q_2, \ldots$ с $Y_i = \delta_{1i}$ и законом сохранения $\dot p_1 = 0$. При большем числе параметров у преобразования симметрии соответственно возрастет и число независимых законов сохранения.

Матрица плотности. Из очевидного тождества (в бра- и кет-обозначениях)

$$<\psi|A|\psi'> = \mathrm{tr}(\rho A)\,, \qquad \rho = |\psi'><\psi|$$

(из столбца $|\psi'>$, отнесенного налево, и строки $<\psi|$ получается матрица ρ) вытекает возможность записи матричных элементов в виде шпура. Она используется, когда мы не располагаем полной волновой функцией интересующей нас системы: ситуация статистического ансамбля, подсистемы в большой системе, и т. п. Тогда полагают

$$<A> = \sum_\alpha <\psi_\alpha|A|\psi_\alpha> = \mathrm{tr}(\rho A)\,, \qquad \rho = \sum_\alpha |\psi_\alpha><\psi_\alpha|\,,$$

где ρ называется *матрицей плотности* системы. Например, если полное пространство состояний считать тензорным произведением пространства нашей системы (с базисом $|m>$) на всё остальное (с базисом $|\alpha>$), то

$$<A> = <\psi|A|\psi> = \sum_\alpha <\psi_\alpha|A|\psi_\alpha> = \mathrm{tr}(\rho A) = \sum_{mn} \rho_{mn} A_{nm}\,, \qquad (34)$$

где $|\psi> = \sum_\alpha |\alpha>|\psi_\alpha> = \sum_{\alpha m} c_{\alpha m}|\alpha>|m>\,, \quad |\psi_\alpha> = <\alpha|\psi> = \sum_m c_{\alpha m}|m>\,,$ матрица ρ есть результат (частичного) усреднения проектора $|\psi><\psi|$ по внешним состояниям $\{\alpha\}$,

$$\rho = \sum_\alpha <\alpha|\,(|\psi><\psi|)\,|\alpha> = \sum_\alpha |\psi_\alpha><\psi_\alpha| = \sum_{mn\alpha} c_{\alpha m} c^*_{\alpha n}|m><n| = \sum_{mn} \rho_{mn}|m><n|\,,$$

а матричные элементы операторов ρ и A вычисляются в нашей (под)системе:

$$\rho_{mn} = <m|\rho|n> = \sum_\alpha c_{\alpha m} c^*_{\alpha n}\,, \qquad A_{mn} = <m|A|n>\,.$$

Можно сказать, что матрица ρ аккумулирует доступную нам информацию о полной волновой функции $|\psi>$ и служит вместо нее для нахождения средних от операторов в нашей системе. В собственном базисе $|i>$ эрмитова оператора ρ имеем

$$\rho = \sum_i w_i\,|i><i|\,, \qquad <A> = <\psi|A|\psi> = \mathrm{tr}(\rho A) = \sum_i w_i A_{ii}\,.$$

Из $<\psi|\psi> = 1$ следует $\mathrm{tr}\rho = \sum_i w_i = 1$.

В координатном представлении, где $|\psi> = \psi(x,y)$, через y обозначены недоступные переменные, а оператор A действует только на x, формула (34) принимает вид

$$<A> = <\psi|A|\psi> = \int dx\,dx'\,\rho(x,x')A(x',x)\,, \qquad \rho(x,x') = \int dy\,\psi(x,y)\psi^*(x',y)\,.$$