А. А. ВЛАДИМИРОВ

ВВЕДЕНИЕ В ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

1. Необходимые сведения из линейной алгебры 1
2. Гильбертово пространство 5
3. Нормированное, метрическое, топологическое 7
4. Функциональные пространства 12
5. Линейные функционалы 14
6. Интеграл Фурье и δ-функция 16
7. Обобщенные функции 18

1. Необходимые сведения из линейной алгебры

Пусть в N-мерном векторном пространстве V задан линейный оператор A. Векторы $\mathbf{x}$, для которых $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, составляют подпространство $\mathrm{Ker}A$, называемое *ядром* оператора A, а векторы вида $A\mathbf{x}$ $(\mathbf{x} \in V)$ – подпространство $\mathrm{Im}A$, *образ* этого оператора. Размерности $\mathrm{Ker}A$ и $\mathrm{Im}A$ связаны между собой соотношением

$$\dim \mathrm{Ker}A \ + \ \dim \mathrm{Im}A \ = \ N\,. \tag{1}$$

Действительно, сделаем базис ядра $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k$ частью базиса V. Порожденные действием оператора A на остальную часть базиса векторы $A\mathbf{e}_{k+1}, \ldots, A\mathbf{e}_N$ линейно независимы (иначе какая-то комбинация векторов $\mathbf{e}_{k+1}, \ldots, \mathbf{e}_N$ принадлежала бы ядру) и образуют базис образа A, размерность которого, следовательно, равна $N - k$.

Случай $\mathrm{Ker}A = \mathbf{0}$ (когда ядро состоит из одного вектора $\mathbf{0}$) означает $\dim \mathrm{Ker}A = 0$ и $\dim \mathrm{Im}A = N$ (пространство $\mathrm{Im}A$ совпадает с V). Оператор A в этом случае имеет обратный A^{-1}, поскольку отображает пространство V на себя взаимно-однозначно: два разных вектора не могут переводиться оператором A в один и тот же, иначе их ненулевая разность принадлежала бы ядру. Детерминант матрицы (обратимого) оператора A в любом базисе отличен от нуля. Уравнение $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$ (точнее, система из N линейных уравнений с N неизвестными – координатами вектора $\mathbf{x}$) при любом $\mathbf{y} \in V$ имеет единственное решение $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{y}$.

Напротив, если $\dim \mathrm{Ker}A > 0$, то в V есть ненулевые векторы, зануляемые оператором A, который в этом случае, очевидно, необратим, а $\det A = 0$. Кроме того, $\dim \mathrm{Im}A < N$ и подпространство $\mathrm{Im}A$ не совпадает с V. Поэтому уравнение $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$ теперь имеет решения не при любом $\mathbf{y}$, а только при $\mathbf{y} \in \mathrm{Im}A$. Точнее говоря, для каждого $\mathbf{y} \in \mathrm{Im}A$ теперь имеется сразу много решений, ибо если $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$, то и $A(\mathbf{x} + \mathbf{z}) = \mathbf{y}$ для любого $\mathbf{z}$, лежащего в $\mathrm{Ker}A$.

В свете вышесказанного, общее решение уравнения $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$ (т. е. всё множество его решений при заданном $\mathbf{y}$) можно символически представить в виде $\mathbf{x}_0 + \mathrm{Ker}A$, где $\mathbf{x}_0$ – одно из таких решений (частное решение). Рассмотрим естественное обобщение этой конструкции. Пусть U – любое подпространство пространства V. Тогда V можно разбить на *классы*, объединяя в один класс те векторы, разность которых принадлежит U. Каждый вектор $\mathbf{x}$ попадает в один класс (по-английски coset), обозначаемый $[\mathbf{x}] = \mathbf{x} + U$, и может считаться его представителем. Классы $[\mathbf{x}]$ и $[\mathbf{y}]$ совпадают если и только если $\mathbf{x} - \mathbf{y} \in U$; в таком случае оба вектора $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ являются

равноправными представителями данного класса. Класс $[\mathbf{0}]$ есть просто подпространство U; все остальные классы подпространствами не являются. Интересно, что классы можно складывать и умножать на числа, считая класс $[\mathbf{x}+\mathbf{y}]$ суммой классов $[\mathbf{x}]$ и $[\mathbf{y}]$, а класс $[\lambda\mathbf{x}]$ результатом умножения числа λ на класс $[\mathbf{x}]$. Это определение корректно, так как векторные суммы любой пары представителей классов $[\mathbf{x}]$ и $[\mathbf{y}]$ принадлежат одному классу $[\mathbf{x}+\mathbf{y}] = [\mathbf{x}]+[\mathbf{y}]$. Аналогично для умножения на число. В символической записи:

$$(\mathbf{x}+U)+(\mathbf{y}+U) = (\mathbf{x}+\mathbf{y})+U\,, \qquad \lambda(\mathbf{x}+U) = \lambda\mathbf{x}+U\,. \tag{2}$$

Иными словами, классы можно считать элементами некоторого линейного пространства. Оно называется *фактор-пространством* (пространства V по подпространству U) и обозначается V/U. Роль нулевого вектора в V/U играет само $U = [\mathbf{0}]$. Размерность пространства V/U равна $N - \dim U$. Действительно, сделав базис подпространства U частью базиса V, убеждаемся, что остальные (не принадлежащие U) векторы базиса порождают классы, линейно независимые как векторы из V/U. Этот результат интуитивно понятен – любой класс содержит "столько же векторов", сколько и подпространство U, значит, размерность фактор-пространства (то есть множества всех классов) должна дополнять размерность U до $\dim V = N$. Интересен случай, когда подпространство U является ядром некоторого оператора A. Тогда действие A на векторы из V фактически сводится к действию того же, по сути, оператора на фактор-пространстве V/U. Действительно, $A(\mathbf{x}+U) = A\mathbf{x}$, то есть оператор A одинаково действует на весь класс, и его поэтому можно трактовать как действующий сразу на сами классы.

Другой способ "дополнения" подпространства U предоставляет конструкция прямой суммы. Напомним, что *прямой суммой* $U \oplus W$ векторных пространств U и W с базисами $\{\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_k\}$ и $\{\mathbf{e}'_1,\ldots,\mathbf{e}'_m\}$ соответственно, называют пространство с базисом $\{\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_k,\mathbf{e}'_1,\ldots,\mathbf{e}'_m\}$, размерность которого, очевидно, равна сумме размерностей U и W. Можно сказать и по-другому: пространство V является прямой суммой подпространств U и W если и только если любой вектор из V *однозначно* представим в виде суммы двух векторов, один из которых лежит в U, а другой в W. Нетрудно проверить следующий удобный критерий: для выполнения равенства $V = U \oplus W$ необходимо и достаточно, чтобы $\dim V = \dim U + \dim W$, а единственным общим вектором U и W был вектор $\mathbf{0}$. Отметим также, что разложение пространства V в прямую сумму двух подпространств есть, конечно же, процедура неоднозначная, даже если одно из прямых слагаемых уже фиксировано.

С разложениями в прямую сумму тесно связан специальный тип линейных операторов. Оператор P называется *проектором*, если выполнено условие $P^2 = P$. Пусть $V = U \oplus W$. Тогда любой вектор $\mathbf{x}$ однозначно представляется в виде $\mathbf{x} = \mathbf{x}_u + \mathbf{x}_w$, где $\mathbf{x}_u \in U,\ \mathbf{x}_w \in W$. Определим оператор P формулой $P\mathbf{x} = \mathbf{x}_u$. В силу однозначности разложений вида $\mathbf{x}_u = \mathbf{x}_u + \mathbf{0}$ имеем

$$(\mathbf{x}_u)_u = \mathbf{x}_u\,, \qquad (\mathbf{x}_u)_w = \mathbf{0}\,, \qquad (\mathbf{x}_w)_w = \mathbf{x}_w\,, \qquad (\mathbf{x}_w)_u = \mathbf{0}\,, \tag{3}$$

и значит $P^2 = P,\ U = \mathrm{Im}P,\ W = \mathrm{Ker}P,\ V = \mathrm{Ker}P \oplus \mathrm{Im}P$. Следовательно, оператор P является проектором (на подпространство U параллельно W). Одновременно оператор $1 - P$ в силу соотношений

$$P(1-P) = 0, \qquad (1-P)^2 = 1 - P \tag{4}$$

оказывается проектором на W. Отметим, что для произвольного оператора A (не проектора) пространство V не обязано быть прямой суммой его ядра и образа.

Продемонстрируем теперь обратное: наличие проектора порождает разложение в прямую сумму. Пусть в V задан оператор P, удовлетворяющий $P^2 = P$. Возьмем любой ненулевой вектор $\mathbf{y} = P\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ из образа P. Он не может одновременно принадлежать и ядру P, иначе было бы

$$\mathbf{0} = P\mathbf{y} = P^2\mathbf{x} = P\mathbf{x} = \mathbf{y}\,. \tag{5}$$

Итак, пересечение $\mathrm{Im}P$ и $\mathrm{Ker}P$ равно нулю. Сумма их размерностей равна $\dim V$ в силу (1). Мы доказали, что $V = \mathrm{Ker}P \oplus \mathrm{Im}P$.

Пусть в нашем (для определенности, вещественном) пространстве V задано *скалярное произведение*, т. е. билинейная симметричная функция $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ с дополнительным свойством $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \geqslant 0$, причем равенство имеет место только при $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. *Длиной* вектора $\mathbf{x}$ называют неотрицательную величину $|\mathbf{x}| = \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})}$; только нулевой вектор имеет нулевую длину. Векторы $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ называются *ортогональными* если $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$. Ненулевой вектор не может быть ортогонален сам себе. Легко проверяется, что для ортогональных векторов справедлива *теорема Пифагора*,

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad |\mathbf{x} \pm \mathbf{y}|^2 = |\mathbf{x}|^2 + |\mathbf{y}|^2\,, \tag{6}$$

а для произвольных – *равенство параллелограмма*:

$$|\mathbf{x} + \mathbf{y}|^2 + |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2 = 2\,|\mathbf{x}|^2 + 2\,|\mathbf{y}|^2\,. \tag{7}$$

Для любых векторов справедливы также неравенства

$$|(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \leqslant |\mathbf{x}|\,|\mathbf{y}|\,, \qquad |\mathbf{x} \pm \mathbf{y}| \leqslant |\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|\,, \tag{8}$$

доказательство которых будет дано ниже сразу для случая комплексного пространства. Первое из них (*неравенство Шварца*) позволяет трактовать отношение $(\mathbf{x}, \mathbf{y})/|\mathbf{x}||\mathbf{y}|$ как косинус угла между данными векторами; второе неравенство гарантирует, что сумма длин двух сторон треугольника больше длины третьей стороны (откуда, в свою очередь, следует, что модуль разности длин двух сторон меньше длины третьей стороны, например, $|\mathbf{x}| - |\mathbf{y}| \leqslant |\mathbf{x} \pm \mathbf{y}|$).

Удобно выбрать в V *ортонормированный* базис, налагая условие $(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \delta_{ij}$. Ортогонализация, т. е. переход от произвольного базиса $\{\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_N\}$ к ортогональному, всегда осуществима. Ее принцип ясен из рассмотрения начальных шагов: $\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}'_2 + \alpha\,\mathbf{e}_1$, где коэффициент α определяется из требования $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = 0$, далее $\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}'_3 + \beta\,\mathbf{e}_1 + \gamma\,\mathbf{e}_2$, и т. д. Построив ортогональный базис, можно затем сделать его элементы ортонормированными, изменив их длину. В итоге получим:

$$(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \delta_{ij}\,, \qquad \mathbf{x} = \sum_{i=1}^{N} x_i \mathbf{e}_i\,, \qquad x_i = (\mathbf{e}_i, \mathbf{x})\,. \tag{9}$$

Благодаря линейности скалярного произведения, множество всех векторов из V, ортогональных данному вектору (векторам) образует подпространство. Векторы, ортогональные всему подпространству U, образуют подпространство $U^\perp$, называемое его *ортогональным дополнением*. Общим вектором U и $U^\perp$ является только $\mathbf{0}$. Если мы выберем ортонормированный базис пространства V так, что его частью будет базис U, то остальная часть базиса V будет лежать в $U^\perp$ и может считаться его базисом. Тем самым мы доказали, что $V = U \oplus U^\perp$. U-компонента вектора $\mathbf{x}$ (его

ортогональная проекция на U) имеет вид $\mathbf{x}_u = \sum_i x_i\,\mathbf{e}_i$, где сумма берется только по базису U. Тогда $\mathbf{x}-\mathbf{x}_u \in U^\perp$, как и требуется. В частности,

$$(\mathbf{x}_u\,,\ \mathbf{x}-\mathbf{x}_u) = 0\,, \qquad |\mathbf{x}|^2 = |\mathbf{x}_u|^2 + |\mathbf{x}-\mathbf{x}_u|^2\,. \tag{10}$$

Вектор $\mathbf{x}-\mathbf{x}_u$ имеет геометрический смысл перпендикуляра, опущенного из точки, соответствующей концу вектора $\mathbf{x}$, на подпространство U, а его длина оказывается минимальным расстоянием между этой точкой и подпространством U, поскольку для любого $\mathbf{y}\in U$ благодаря ортогональности векторов $\mathbf{x}-\mathbf{x}_u$ и $\mathbf{y}-\mathbf{x}_u$ имеем

$$|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2 = |(\mathbf{x}-\mathbf{x}_u)-(\mathbf{y}-\mathbf{x}_u)|^2 = |\mathbf{x}-\mathbf{x}_u|^2 + |\mathbf{y}-\mathbf{x}_u|^2 \geqslant |\mathbf{x}-\mathbf{x}_u|^2\,. \tag{11}$$

В *комплексном* векторном пространстве определение скалярного произведения несколько модифицируется. Функция $(\mathbf{x},\mathbf{y})$ теперь становится комплекснозначной и при перестановке аргументов заменяется на сопряженную. В связи с этим, оставаясь линейной по второму аргументу, она становится *сопряженно-линейной* по первому:

$$(\mathbf{y},\mathbf{x}) = \overline{(\mathbf{x},\mathbf{y})}\,, \qquad (\mathbf{x},\lambda\mathbf{y}) = \lambda(\mathbf{x},\mathbf{y})\,, \qquad (\lambda\mathbf{x},\mathbf{y}) = \bar\lambda(\mathbf{x},\mathbf{y})\,. \tag{12}$$

Скалярный квадрат (ненулевого) вектора по-прежнему положителен, определения длины и ортогональности не меняются, равно как и соотношения (6)-(8). Докажем неравенства (8) для комплексного (а тем самым и для вещественного) пространства. Пусть $\mathbf{e} = \mathbf{y}/|\mathbf{y}|$ – произвольный вектор единичной длины. Имеем

$$0 \leqslant |\mathbf{x}-(\mathbf{e},\mathbf{x})\,\mathbf{e}|^2 = |\mathbf{x}|^2 + |(\mathbf{e},\mathbf{x})|^2 - (\mathbf{e},\mathbf{x})(\mathbf{x},\mathbf{e}) - \overline{(\mathbf{e},\mathbf{x})}(\mathbf{e},\mathbf{x}) = |\mathbf{x}|^2 - |(\mathbf{e},\mathbf{x})|^2\,, \tag{13}$$

что и означает $|(\mathbf{x},\mathbf{y})| \leqslant |\mathbf{x}|\,|\mathbf{y}|$. Второе из неравенств (8) доказывается так:

$$|\mathbf{x}+\mathbf{y}|^2 = |\mathbf{x}|^2 + |\mathbf{y}|^2 + (\mathbf{x},\mathbf{y}) + (\mathbf{y},\mathbf{x}) \leqslant |\mathbf{x}|^2 + |\mathbf{y}|^2 + 2\,|\mathbf{x}|\,|\mathbf{y}| = (|\mathbf{x}|+|\mathbf{y}|)^2\,, \tag{14}$$

поскольку $(\mathbf{x},\mathbf{y}) + (\mathbf{y},\mathbf{x}) = 2\,\mathrm{Re}(\mathbf{x},\mathbf{y}) \leqslant 2\,|(\mathbf{x},\mathbf{y})| \leqslant 2\,|\mathbf{x}|\,|\mathbf{y}|$.

Важная роль в комплексных векторных пространствах принадлежит *самосопряженным* (или *эрмитовым*) операторам, т. е. операторам, для которых равенство

$$(A\mathbf{x},\mathbf{y}) \;=\; (\mathbf{x},A\mathbf{y}) \tag{15}$$

выполняется при любых $\mathbf{x},\mathbf{y}\in V$. Все собственные значения такого оператора вещественны, ибо из $A\mathbf{x}=\lambda\mathbf{x}$ следует $(A\mathbf{x},\mathbf{x}) = \bar\lambda|\mathbf{x}|^2 = (\mathbf{x},A\mathbf{x}) = \lambda|\mathbf{x}|^2$. Собственные векторы, отвечающие *различным* собственным значениям, ортогональны, поскольку $0 = (A\mathbf{x},\mathbf{y}) - (\mathbf{x},A\mathbf{y}) = (\lambda-\mu)(\mathbf{x},\mathbf{y})$. Если действие A не выводит векторы подпространства $U\subset V$ из U $\;(\mathbf{x}\in U \Longrightarrow A\mathbf{x}\in U)$, то и $U^\perp$ обладает тем же свойством:

$$\mathbf{y}\in U^\perp \;\;\Longrightarrow\;\; (\mathbf{x},\mathbf{y}) \;=\; 0 \;\;\forall\mathbf{x}\in U \;\;\Longrightarrow\;\; (\mathbf{x},A\mathbf{y}) \;=\; (A\mathbf{x},\mathbf{y}) \;=\; 0 \;\;\Longrightarrow\;\; A\mathbf{y}\in U^\perp\,.$$

Отсюда следует замечательный результат: самосопряженный оператор имеет ортогональный базис, составленный из собственных векторов. Действительно, в комплексном случае у любого оператора есть хотя бы один собственный вектор. Пусть $A\mathbf{x} = \lambda_1\mathbf{x}$. Совокупность собственных векторов, отвечающих собственному значению λ_1, образует подпространство U_1. Поскольку $AU_1\subset U_1$, то $AU_1^\perp\subset U_1^\perp$, и можно считать A оператором в пространстве $U_1^\perp$. Там снова найдется собственный вектор (с другим собственным значением λ_2), мы построим подпространство U_2, и так до исчерпания. Искомый собственный базис, в котором матрица A диагональна, составится из (ортогонализованных) базисов взаимно ортогональных подпространств U_k. Оператор A разлагается по ортогональным проекторам на эти подпространства,

$$A \;=\; \sum_k \lambda_k P_k\,, \quad \lambda_k\in\mathbb{R}, \quad P_kV \;=\; U_k\,, \quad P_k^2 \;=\; P_k\,, \quad P_k\,P_m \;=\; 0 \quad (k\neq m)\,, \tag{16}$$

сумма которых $\sum_k P_k = 1$ есть единичный (тождественный) оператор в V.

2. Гильбертово пространство

Гильбертово пространство возникает как прямое обобщение комплексного пространства со скалярным произведением на бесконечномерный случай. Ввиду бесконечности (точнее, счетности) базиса, важнейшими элементами конструкции становятся пределы последовательностей векторов и бесконечные ряды, которых не было в конечномерных пространствах. Можно попробовать построить искомое бесконечномерное обобщение, просто заменив в (9) размерность N на ∞,

$$(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \delta_{ij}\,, \qquad \mathbf{x} = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \mathbf{e}_i\,, \qquad x_i = (\mathbf{e}_i, \mathbf{x}) \in \mathbb{C}\,, \tag{17}$$

т. е. объявив элементами нашего пространства линейные комбинации (с комплексными коэффициентами, как конечные, так и бесконечные) счетного числа абстрактных ортонормированных базисных векторов. Сразу понятно, что сумма здесь не может быть формальной, а коэффициенты – любыми, если мы хотим, чтобы длины и скалярные произведения векторов были конечными. Действительно,

$$|\mathbf{x}|^2 = (\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2\,, \qquad (\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{\infty} \bar{x}_i y_i\ , \tag{18}$$

и числовые ряды в правых частях обязаны сходиться. Оказывается, достаточно потребовать сходимости ряда $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2$ для каждого вектора $\mathbf{x}$, поскольку тогда и

$$|(\mathbf{x}, \mathbf{y})| = |\sum_{i=1}^{\infty} \bar{x}_i y_i| \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} |\bar{x}_i y_i| = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|\,|y_i| \leqslant \frac{1}{2}\,(|\mathbf{x}|^2 + |\mathbf{y}|^2) < \infty\,, \tag{19}$$

ибо $2\,|a||b| \leqslant |a|^2 + |b|^2$ ввиду $(|a| - |b|)^2 \geqslant 0$. Величина $|\mathbf{x} + \mathbf{y}|$ в этом случае тоже конечна в силу (7) или (8). Дадим также прямое доказательство неравенства Шварца:

$$\begin{aligned} |(\mathbf{x}, \mathbf{y})|^2 \;&=\; (\sum_i \bar{x}_i y_i)\,(\sum_j x_j \bar{y}_j) \;=\; (\sum_i \bar{x}_i x_i)\,(\sum_j y_j \bar{y}_j) \\ &- \frac{1}{2}\,\sum_{ij} (x_i y_j - x_j y_i)\,(\bar{x}_i \bar{y}_j - \bar{x}_j \bar{y}_i) \leqslant (\sum_i \bar{x}_i x_i)\,(\sum_j y_j \bar{y}_j) = |\mathbf{x}|^2\,|\mathbf{y}|^2\,. \end{aligned} \tag{20}$$

Построенное нами пространство, обозначаемое l_2, оказывается еще и *полным*. Это означает, что всякая *сходящаяся* последовательность векторов $\{\mathbf{y}_n\}$ (то есть такая, у которой разности $|\mathbf{y}_m - \mathbf{y}_n|$ становятся сколь угодно малыми при больших m и n) должна иметь предел, принадлежащий этому же пространству. Предел $\mathbf{y}_n \to \mathbf{y}$ понимается, естественно, в смысле $|\mathbf{y}_n - \mathbf{y}| \to 0$. Полнота пространства l_2 следует из того, что малость $|\mathbf{y}_m - \mathbf{y}_n|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |(\mathbf{y}_m)_i - (\mathbf{y}_n)_i|^2$ означает и малость разности i-ых компонент векторов $\mathbf{y}_m$ и $\mathbf{y}_n$ при любом i. Значит, числовая последовательность $\{(\mathbf{y}_n)_i\}$ при каждом i сходится к некоторому числу y_i. Это можно было бы назвать *покомпонентной* сходимостью последовательности $\{\mathbf{y}_n\}$ к вектору $\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{\infty} y_i \mathbf{e}_i$. Нам надо теперь показать, что вектор $\mathbf{y}$ принадлежит l_2 и действительно является пределом последовательности $\{\mathbf{y}_n\}$ в указанном выше (а не только в покомпонентном) смысле. Такое доказательство требует некоторой аккуратности, поскольку нам надо осуществить одновременный переход к пределу $n \to \infty$ сразу

в бесконечном числе величин $(\mathbf{y}_n)_i$. Эта трудность преодолевается так. Оставляем сначала лишь конечное число слагаемых в нужных нам выражениях, например $\sum_{i=1}^{k} |(\mathbf{y}_m)_i - (\mathbf{y}_n)_i|^2$, выполняем предельный переход $(\mathbf{y}_n)_i \to y_i$, убеждаемся, что величина $\sum_{i=1}^{k} |(\mathbf{y}_m)_i - y_i|^2$ мала *независимо от* k, и затем устремляем k к бесконечности. Таким путем удается показать, что $|\mathbf{y}|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^2 < \infty$ и $|\mathbf{y}_n - \mathbf{y}| \to 0$.

Пространством l_2 по сути и исчерпывается список *гильбертовых пространств*, поскольку под этим именем обычно понимается комплексное счетномерное полное векторное пространство со скалярным произведением. Как мы сейчас покажем, этот набор требований гарантирует сходимость ряда (17) для любого вектора. Рассмотрим комплексное векторное пространство H со скалярным произведением, содержащее счетную ортонормированную систему векторов $\{\mathbf{e}_i\}$ такую, что ни одного ненулевого вектора, ортогонального всей системе, в пространстве H нет. Возьмем частичную сумму ряда (17), $\mathbf{x}_n = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{e}_i$. Поскольку $(\mathbf{x}_n, \mathbf{x} - \mathbf{x}_n) = 0$, то

$$|\mathbf{x}|^2 = |\mathbf{x}_n|^2 + |\mathbf{x} - \mathbf{x}_n|^2 \geqslant |\mathbf{x}_n|^2 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 . \tag{21}$$

Числовая последовательность $|\mathbf{x}_n|^2$ монотонна и ограничена. Значит, она сходится, и величина $\sum_{i=n+1}^{m} |x_i|^2 = |\mathbf{x}_m - \mathbf{x}_n|^2$ стремится к нулю при больших m и n. Поэтому сходится и последовательность из векторов $\{\mathbf{x}_n\}$. Условие полноты, налагаемое на гильбертово пространство, диктует, что сходящаяся последовательность $\{\mathbf{x}_n\}$ имеет пределом некоторый вектор $\mathbf{y} \in H$. Сравним $(\mathbf{e}_i, \mathbf{x}) = x_i$ и $(\mathbf{e}_i, \mathbf{y})$. Ввиду непрерывности функции $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ по обоим аргументам, которая следует из неравенства Шварца, $(\mathbf{e}_i, \mathbf{y}) = \lim(\mathbf{e}_i, \mathbf{x}_n) = x_i$, то есть вектор $\mathbf{x} - \mathbf{y}$ оказывается ортогональным всем $\mathbf{e}_i$. Следовательно, $\mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{0}$, а значит $\mathbf{x} = \mathbf{y} = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \mathbf{e}_i$ и $|\mathbf{x}|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2$.

Подведем итоги. Мы установили, что разложимость векторов гильбертова пространства в *ряд Фурье* (17) с квадратично суммируемыми коэффициентами вытекает из определения этого пространства. Поэтому любой пример гильбертова пространства будет, по сути, копией l_2, поскольку каждый вектор $\mathbf{x}$ однозначно характеризуется набором своих компонент $\{x_i\}$. Обратно, любая последовательность комплексных чисел $\{x_i\}$, для которой выполнено условие $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < \infty$, задает, в силу требования полноты, некоторый вектор $\mathbf{x}$, представляемый *сходящимся* рядом (17). Если же суммирование типа (17) ведется не по всему базису пространства H, а только по некоторому его поднабору $\{\mathbf{e}'_j\}$, то (при условии квадратичной суммируемости коэффициентов) суммой соответствующего ряда снова будет некий вектор из H, но не обязательно равный $\mathbf{x}$. Можно сказать точнее: суммой ряда будет $\mathbf{x}_u$ – ортогональная проекция вектора $\mathbf{x}$ на подпространство U, базисом которого является данный поднабор $\{\mathbf{e}'_j\}$. Отметим, что в гильбертовом пространстве принято включать в определение подпространств условие *замкнутости*: подпространство должно содержать все свои предельные точки (векторы). Это требование весьма разумно, так как мы собираемся разлагать векторы по бесконечному базису. Ввиду непрерывности скалярного произведения, ортогональные дополнения оказываются также замкнутыми множествами (следовательно – подпространствами), причем соотношения $H = U \oplus U^{\perp}$ и (11) остаются в силе. Поэтому, кстати, частичная сумма ряда Фурье $\mathbf{x}_n$ из (21) оказывается наилучшей аппроксимацией для исходного вектора $\mathbf{x}$ по сравнению с любыми векторами вида $\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} y_i \mathbf{e}_i$. Действительно, $|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2 \geqslant |\mathbf{x} - \mathbf{x}_n|^2$ согласно (11), поскольку из всего семейства векторов $\mathbf{x} - \mathbf{y}$ только $\mathbf{x} - \mathbf{x}_n$ ортогонален сразу всем $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$.

3. Нормированное, метрическое, топологическое

Как мы убедились, с геометрической точки зрения гильбертово пространство очень похоже на привычное нам евклидово, отличаясь от него, по сути, лишь тем, что векторы пространства могут теперь представляться не только конечными, но и бесконечными линейными комбинациями базисных векторов (при условии квадратичной суммируемости коэффициентов). Отталкиваясь от этого наглядного примера, уместно сделать краткий обзор других типов пространств, широко применяемых в математике и теоретической физике. В данной главе изложение носит весьма общий, даже абстрактный характер. В последующих главах будут более детально рассмотрены особенности и примеры конкретных функциональных пространств.

В гильбертовом пространстве длина вектора выражается через его скалярный квадрат: $|\mathbf{x}| = \sqrt{(\mathbf{x},\mathbf{x})}$. *Нормированным* называется линейное пространство, в котором скалярное произведение может быть не задано, но зато каждому вектору сопоставляется его *норма* (аналог длины) $||\mathbf{x}||$, характеризуемая следующим набором свойств:

$$||\mathbf{x}|| \geqslant 0\,, \qquad ||\lambda\mathbf{x}|| = |\lambda| \cdot ||\mathbf{x}||\,, \qquad ||\mathbf{x}|| - ||\mathbf{y}|| \leqslant ||\mathbf{x} \pm \mathbf{y}|| \leqslant ||\mathbf{x}|| + ||\mathbf{y}||\,, \tag{22}$$

причем равенство $||\mathbf{x}|| = 0$ выполняется только для нулевого вектора. Ясно, что класс нормированных пространств включает в себя гильбертово как частный случай. Нормированные пространства бывают вещественные и комплексные. Как правило, они бесконечномерны (причем не обязательно счетномерны).

В нормированном пространстве, как и в гильбертовом, расстоянием между двумя векторами служит норма (длина) их разности. Обобщая эту конструкцию, назовем *метрическим пространством* множество (не обязательно линейное пространство), каждой паре элементов которого (называемых *точками*) сопоставлено *расстояние* – вещественная функция со следующими свойствами:

$$\rho(x,y) \geqslant 0\,, \qquad \rho(x,y) = \rho(y,x)\,, \qquad |\rho(x,y) - \rho(y,z)| \leqslant \rho(x,z) \leqslant \rho(x,y) + \rho(y,z)\,, \tag{23}$$

причем $\rho(x,y) = 0$ если и только если $x = y$. Очевидно, что $\rho(x,y) = ||\mathbf{x} - \mathbf{y}||$ в нормированном пространстве удовлетворяет этим условиям.

Наконец, наиболее общими в рассматриваемом ряду оказываются *топологические пространства*. Это такие множества точек, где может отсутствовать само понятие расстояния, а взамен, для формализации идеи близости точек друг к другу, используется концепция *окрестностей* – специально отобранных подмножеств, роль которых аналогична роли интервалов на прямой. В самом общем случае набор требований, которым должны удовлетворять окрестности, минимален: предполагается лишь, что каждая точка пространства принадлежит хотя бы одной окрестности, и что пересечение двух окрестностей тоже есть окрестность. В качестве дополнительного условия часто берется требование *отделимости* точек топологического пространства: у любых двух точек должны существовать непересекающиеся окрестности.

Переходя к рассмотрению важнейших следствий из вышеприведенных определений, мы двинемся в обратном порядке, от топологических пространств к гильбертову. Нас, главным образом, будет интересовать процесс вовлечения в игру всё новых математических понятий по мере усложнения структуры изучаемых пространств. Стоит отметить, что, сами по себе, почти все эти ‘новые’ понятия уже знакомы нам из курса математического анализа.

Центральными понятиями теории топологических пространств являются открытое и замкнутое подмножество, а также непрерывное отображение. *Открытыми* (под)множествами называются объединения любого (в том числе бесконечного, и даже несчетного) числа окрестностей. Иными словами, открытым называется множество, содержащее некоторую окрестность каждой своей точки. В частности, любая окрестность открыта. Пустое подмножество также принято причислять к открытым. Всё пространство тоже открыто (как объединение окрестностей каждой точки). Ясно, что объединение *любого* числа открытых множеств открыто. Открытым оказывается и пересечение *конечного* числа открытых множеств. Действительно, пусть, например, подмножества U и V открыты, а точка x принадлежит их пересечению $U \cap V$. Поскольку U и V суть объединения окрестностей, то $x \in U_x \subset U$ и $x \in V_x \subset V$, где U_x и V_x – некоторые окрестности, содержащие точку x и лежащие, соответственно, внутри U и V. Значит, точка x принадлежит множеству $U \cap V$ вместе со своей окрестностью $U_x \cap V_x$. Следовательно, $U \cap V$ открыто.

Замкнутые (под)множества обычно определяются как дополнения открытых. Имеется в виду дополнение до всего пространства: все точки, не принадлежащие данному открытому множеству, составляют, по определению, некоторое замкнутое множество. Замкнутыми, очевидно, являются пустое множество и всё пространство, а также пересечение любого и объединение конечного числа замкнутых множеств. Однако более наглядным представляется (эквивалентное) определение замкнутости в терминах точек прикосновения. Назовем *точкой прикосновения* множества такую точку, в любой окрестности которой есть хотя бы одна точка из этого множества. Ясно, что все точки самого множества являются его точками прикосновения. Но, возможно, не только они. Так вот, множество U называется *замкнутым*, если оно содержит *все* свои точки прикосновения. Действительно, дополнение такого множества открыто, ибо любая точка дополнения не является точкой прикосновения для U, а следовательно имеет окрестность, не содержащую точек из U, то есть лежащую целиком внутри дополнения к нему.

Замыканием множества U называется множество всех его точек прикосновения, обозначаемое $\overline{U}$. Ясно, что замыканием замкнутого множества будет оно само. Но замкнуто ли замыкание произвольного множества? Несмотря на кажущуюся тавтологичность, вопрос вполне законен: действительно, нет ли у точек прикосновения, не входивших в исходное множество U, еще каких-нибудь новых, своих собственных точек прикосновения? Оказывается, нет. Пусть точка x не принадлежит $\overline{U}$. Тогда у нее найдется некоторая окрестность V_x без точек из U. Но и точек из $\overline{U}$ в такой окрестности тоже не может быть: ведь если бы в V_x нашлась точка x' из $\overline{U}$, то V_x, будучи окрестностью для x', обязана была бы содержать точки из U. Мы доказали, что любое замыкание замкнуто. Ясно также, что $\overline{U}$ есть наименьшее замкнутое множество, содержащее U.

Отображение f одного топологического пространства в другое называется *непрерывным в точке* x, если для любой окрестности V точки $f(x)$ найдется некоторая окрестность U точки x, образ которой целиком лежит внутри V. Отображение считается непрерывным на всем пространстве, если оно непрерывно в каждой его точке. Взаимно-однозначное и взаимно-непрерывное отображение двух топологических пространств называется *гомеоморфизмом*. Гомеоморфные пространства являются в топологическом смысле точными копиями друг друга, у них одинакова структура открытых и замкнутых подмножеств, поскольку непрерывность отображения на всем пространстве равносильна тому, что прообраз каждого открытого множества открыт (а замкнутого – замкнут). Действительно, по определению не-

прерывности, прообраз открытого множества W содержит окрестность каждой своей точки, отображаемую в окрестность образа этой точки, лежащую внутри W.

Рассмотрим теперь метрические пространства. Здесь идея близости точек получает числовое оформление: точки x и y близки друг другу, если расстояние между ними $\rho(x,y)$ мало. В связи с этим открываются новые возможности, важнейшей из которых является концепция предельного перехода. По сравнению с топологическими, метрические пространства дают больше простора и нашей интуиции, натренированной на материале математического анализа. Мы воспользуемся этим обстоятельством, приводя некоторые из нижеперечисленных фактов без доказательства.

В метрических пространствах конкретизируется понятие окрестности: обычно ими объявляются *открытые шары* – подмножества точек, удаленных от данной точки на расстояние, меньшее некоторого радиуса $r > 0$. Требование, чтобы пересечение окрестностей снова было окрестностью, при этом снимается. Остальные свойства открытых и замкнутых множеств не претерпевают изменений. Расстоянием между двумя множествами X и Y (в частности, между точкой и множеством) называют $\inf \rho(x,y)$ при $x \in X$, $y \in Y$. Интересен следующий факт: для любых двух непересекающихся *замкнутых* множеств X и Y можно найти два непересекающихся *открытых* множества $X' \supset X$ и $Y' \supset Y$ (хотя расстояние между X и Y может быть даже равным нулю, как например, между графиком гиперболы и осью ординат). Идея доказательства: любая точка $x \in X$ не может быть точкой прикосновения множества Y в силу замкнутости последнего, и поэтому отделена от Y ненулевым расстоянием $\rho(x,Y) > 0$. Аналогично, $\rho(y,X) > 0$. Выберем для каждой $x \in X$ окрестность в виде шара с центром в x и радиусом $r = \rho(x,Y)/3$; аналогично для точек из Y. Объединения таких окрестностей дадут нам искомые открытые множества X' и Y'.

Пределом последовательности $\{x_n\}$ точек метрического пространства называется точка x такая, что $\rho(x_n,x) \to 0$. Единственность предела следует из неравенства треугольника $\rho(x,x') \leqslant \rho(x,x_n) + \rho(x_n,x')$: две *разные* точки x и x', разделенные ненулевым расстоянием, не могут быть пределами одной последовательности. Отсюда же вытекает и непрерывность расстояния как функции своих аргументов. Стандартным образом вводится понятие *предельной точки* множества: в любой окрестности такой точки должно лежать бесконечное количество точек данного множества. Всегда можно (например, неограниченно уменьшая размер окрестностей) выбрать в таком множестве последовательность, стремящуюся к данной предельной точке.

Принципиальное значение имеет вопрос о полноте метрического пространства: всякая ли сходящаяся последовательность имеет в нем предел? Для подмножества (рассматриваемого как подпространство) полного метрического пространства полнота эквивалентна замкнутости. В общем случае работает процедура *пополнения*: для любого метрического пространства X однозначно строится полное метрическое пространство $\overline{X}$, в котором X является подпространством, причем таким, что его замыканием оказывается как раз $\overline{X}$ (в этом случае говорят, что X *плотно* в $\overline{X}$). Идея построения состоит в том, чтобы к пространству X, в качестве новых точек, добавить именно те сходящиеся последовательности, которые не имели предела в X. Точнее говоря, точками пространства $\overline{X}$ объявляются классы сходящихся последовательностей точек исходного пространства X, сформированные по следующему принципу: в один класс (скажем, $\hat{x}$) вместе с последовательностью $\{x_n\}$ попадают все такие последовательности $\{x'_n\}$, для которых $\rho(x_n,x'_n) \to 0$. Понятно, что те классы, чьи последовательности уже и так имели предел в X (очевидно, единый для всего класса), соответствуют ‘старым’, а не новым точкам. Расстояние между точками в $\overline{X}$

(то есть между двумя классами $\hat{x}$ и $\hat{y}$) определяется как предел $\rho(\hat{x},\hat{y}) = \lim \rho(x_n, y_n)$, взятый на любых последовательностях-представителях этих классов.

Ввиду важности данной конструкции, приведем доказательство корректности определения пространства $\overline{X}$, плотности множества X в нем, а также полноты самого $\overline{X}$. Из неравенства треугольника (23) получаются полезные соотношения

$$\rho(x,w) \leqslant \rho(x,y) + \rho(y,z) + \rho(z,w)\,, \qquad |\rho(x,w) - \rho(y,z)| \leqslant \rho(x,y) + \rho(z,w)\,. \tag{24}$$

Теперь из $\rho(x,x') \leqslant \rho(x,x_n) + \rho(x_n,x'_n) + \rho(x'_n,x')$ сразу видно, что последовательности из одного класса действительно не могут стремиться к разным пределам. Из $|\rho(x_n,y_n) - \rho(x_m,y_m)| \leqslant \rho(x_n,x_m) + \rho(y_n,y_m)$ следует, что *числовая* последовательность $\rho(x_n,y_n)$ сходится, а значит действительно имеет предел, обозначенный нами $\rho(\hat{x},\hat{y})$. Наконец, из $|\rho(x_n,y_n) - \rho(x'_n,y'_n)| \leqslant \rho(x_n,x'_n) + \rho(y_n,y'_n)$ видим, что этот предел не зависит от выбора представителей соответствующих классов. Выполнение метрических аксиом (23) для пространства $\overline{X}$ почти очевидно, например:

$$\rho(x_n,z_n) \leqslant \rho(x_n,y_n) + \rho(y_n,z_n) \qquad \Longrightarrow \qquad \rho(\hat{x},\hat{z}) \leqslant \rho(\hat{x},\hat{y}) + \rho(\hat{y},\hat{z})\,. \tag{25}$$

Точки исходного пространства X рассматриваются в $\overline{X}$ на равных правах с новыми точками. В частности, расстояние между старой (x) и новой ($\hat{x}$) точками, согласно общему для всех определению, есть $\rho(x,\hat{x}) = \lim \rho(x,x_n)$. Но последовательность $\{x_n\}$, представляющая здесь класс $\hat{x}$, по определению сходится. Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x_n,\hat{x}) \;=\; \lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} \rho(x_n,x_m) \;=\; 0\,, \tag{26}$$

и новая точка $\hat{x}$ оказывается (в пространстве $\overline{X}$) пределом последовательности точек x_n из X. Это доказывает плотность X в $\overline{X}$. Осталось показать, что построенное метрическое пространство $\overline{X}$ полно, то есть, что любая сходящаяся последовательность $\{\hat{x}_n\}$ имеет в нем предел. Плотность X в $\overline{X}$ позволяет нам аппроксимировать каждый элемент $\hat{x}_n \in \overline{X}$ некоторой точкой $x_n \in X$ так, чтобы $\rho(x_n,\hat{x}_n) < 1/n$. Ввиду $\rho(x_n,x_m) \leqslant \rho(x_n,\hat{x}_n) + \rho(\hat{x}_n,\hat{x}_m) + \rho(\hat{x}_m,x_m)$ заключаем, что при больших n и m величина $\rho(x_n,x_m)$ становится сколь угодно мала, а значит последовательность аппроксимантов $\{x_n\}$ сходится и задает некоторую точку $\hat{x} \in \overline{X}$. Неравенство $\rho(\hat{x},\hat{x}_n) \leqslant \rho(\hat{x},x_n) + \rho(x_n,\hat{x}_n)$ гарантирует, что именно эта точка и является пределом последовательности $\{\hat{x}_n\}$.

На вещественной прямой и в $\mathbb{R}^n$ важную роль играли ограниченные замкнутые подмножества (отрезки и т. п.). В метрических пространствах общего вида аналогичное значение имеют *компактные* подмножества или просто *компакты*. Они выделены следующим характеристическим свойством: если компакт покрыт открытыми множествами, то можно оставить лишь конечное их число, не нарушив покрытия. Из компактности множества следует его ограниченность и замкнутость. Обратное неверно: например, в гильбертовом (а значит – метрическом) пространстве l_2 множество векторов единичного шара $|\mathbf{x}| \leqslant 1$ замкнуто и ограничено, но некомпактно. Для компактов справедливы аналоги многих теорем анализа: на компакте всякое бесконечное множество точек имеет предельную точку; любая последовательность на компакте содержит подпоследовательность, имеющую на нем предел; непрерывный образ компакта – компакт, и т. д.

Докажем первое из этих утверждений. Рассмотрим некоторое *бесконечное* подмножество S точек компакта M и предположим, что ни одна из точек этого компакта не является предельной точкой для S. Тогда у любой точки $x \in M$ найдется

окрестность U_x, содержащая не более чем конечное число точек множества S. Совокупность *всех* этих окрестностей, очевидно, покрывает M. Но в силу компактности M, некоторый *конечный* набор этих окрестностей тоже полностью его покрывает, и значит должен включать *все* точки множества S. В то же время, такой набор может содержать лишь *конечное* их количество, будучи объединением *конечного* числа окрестностей вида U_x. Полученное противоречие доказывает, что на компакте любое бесконечное множество обязательно имеет предельную точку. Отсюда сразу следует, что у любой последовательности точек компакта найдется подпоследовательность, имеющая на этом компакте предел. Действительно, если в этой последовательности имеется *бесконечно* много *различных* точек, то таким пределом будет соответствующая предельная точка, а если число различных точек в последовательности конечно, то хотя бы одна из них встречается бесконечное число раз – она и будет пределом.

Покажем теперь, что образ компакта M при непрерывном отображении есть тоже компакт. Обозначим этот образ через M' и возьмем любое его покрытие открытыми множествами. Их прообразы открыты (в силу непрерывности) и покрывают M; мы можем сохранить покрытие, оставив из них лишь конечное число. Оставленные множества покрывают M полностью, а значит их образы (по предположению – открытые) покрывают всё множество M', что и доказывает его компактность.

В заключение данной главы, рассмотрим некоторые аспекты теории нормированных пространств. Принципиально новым моментом, отличающим нормированные пространства от метрических, является, конечно, их линейность. С одной стороны, мы возвращаемся в привычный мир линейной алгебры, но с другой – встречаем много проблем, обусловленных существенно бесконечномерной природой рассматриваемых объектов. Прежде всего отметим, что нормированные пространства тоже можно пополнять (естественно, с сохранением линейности). Полные нормированные пространства обычно называют *банаховыми*. В отличие от конечномерного случая, не во всех нормированных пространствах существует *базис* – линейно независимая конечная либо счетная система векторов $\{\mathbf{e}_i\}$, по которой каждый вектор данного пространства *однозначно* разлагается в сумму (или сходящийся по норме бесконечный ряд) вида $\mathbf{x} = \sum_i c_i \mathbf{e}_i$. Необходимым условием наличия базиса является *сепарабельность* пространства – существование в нем счетного плотного подмножества. Очевидно, любой базис порождает такое подмножество (например, множество конечных линейных комбинаций базисных векторов с рациональными коэффициентами: ими можно сколь угодно точно аппроксимировать любой вектор, а это и означает, что замыканием данного множества будет все пространство). Обратное утверждение в нормированном пространстве, вообще говоря, неверно: из сепарабельности наличие базиса не вытекает (контрпример будет приведен в следующей главе). Однако оно оказывается справедливым в гильбертовом случае. Действительно, пусть в гильбертовом пространстве H имеется счетная система векторов $\{\mathbf{e}_i\}$ такая, что каждый вектор из H может быть с любой точностью приближен конечными линейными комбинациями векторов $\mathbf{e}_i$. Без потери общности мы можем считать эту систему линейно независимой и ортонормированной. Пусть, тем не менее, она не является базисом H. Для гильбертова пространства это равносильно тому, что в H найдется вектор $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, ортогональный всем $\mathbf{e}_i$. В силу исходного предположения этот вектор является пределом некоторой последовательности линейных комбинаций векторов $\{\mathbf{e}_i\}$, причем каждой из этих комбинаций вектор $\mathbf{x}$ ортогонален. Из непрерывности скалярного произведения следует, что он ортогонален сам себе, то есть равен нулю. Противоречие доказывает, что система $\{\mathbf{e}_i\}$ является базисом H в смысле разложения (17).

4. Функциональные пространства

Пространства всех перечисленных выше типов часто бывают реализованы как *функциональные* пространства, элементами (точками, векторами) которых являются функции из определенного класса, заданные на некотором множестве. В рассмотренных ниже примерах таким множеством будет, как правило, отрезок $[a,b]$ вещественной прямой. Функциональные пространства наделяются естественной линейной структурой на основе операций поточечного сложения функций и их умножения на числа. Так, множество $C[a,b]$ всех *непрерывных* на отрезке функций является нормированным пространством с нормой $||f||_{\rm c} = \sup|f(x)|$. Сходимость по такой норме называется *равномерной* сходимостью: $\sup|f_n(x)-f(x)| \to 0$. Множество всех функций, *интегрируемых* на отрезке, снабженное нормой $||f||_1 = \int_a^b dx\,|f(x)|$, образует нормированное пространство L_1. А вот множество L_2 всех *квадратично интегрируемых* на отрезке комплекснозначных функций с нормой $||f||_2 = (\int_a^b dx\,|f(x)|^2)^{1/2}$ оказывается гильбертовым пространством.

Два последних определения, существенно использующих понятие интеграла, требуют комментариев. Не вдаваясь в общую (и достаточно сложную) теорию меры и интегрирования, приведем из нее лишь минимальный набор необходимых фактов. Множеством меры 0 называется такое подмножество точек (вещественной прямой), которое может быть накрыто системой отрезков (или интервалов) сколь угодно малой суммарной длины. Ясно, что конечное (и даже счетное) множество точек имеет меру 0. Например, такую меру имеет множество всех рациональных точек отрезка. Но бывают и несчетные множества меры 0. Если какое-то свойство выполняется везде кроме, быть может, множества меры 0, то говорят, что оно выполнено *почти всюду*. Например, последовательность $f_n(x)$ сходится к функции $f(x)$ почти всюду на отрезке, если поточечная сходимость $f_n(x) \to f(x)$ имеет место для всех точек x этого отрезка, за исключением множества нулевой меры.

Вообще, понятие *меры* – некоторого неотрицательного числа, сопоставляемого данному подмножеству точек – обобщает понятия длины, площади и т. п. Определенную меру имеют только *измеримые* множества. На вещественной прямой таковыми оказываются самые разнообразные, в том числе и весьма экзотические множества (но всё-таки не все). Нам будет достаточно знать, что мера отрезка (как и интервала) равна его длине, и что любые открытые и замкнутые множества измеримы (как и их конечные или счетные объединения и пересечения), причем мера конечного или счетного объединения непересекающихся измеримых множеств равна сумме их мер.

Конструкция *интеграла Римана*, как известно, сводится к разбиению отрезка $[a,b]$ на сколь угодно малые куски Δ_i и вычислению предела суммы $\sum_i f(x_i)\,\Delta_i$ (точка x_i лежит в Δ_i). Интегрируемыми по Риману оказываются ограниченные функции, непрерывные почти всюду. Существенно расширить этот класс позволяет *интегрирование по Лебегу*, идея которого состоит в разбиении на исчезающе малые куски Δ_i уже не области определения, а области значений функции $f(x)$:

$$\int_a^b dx f(x) = \lim \sum_i f_i\,\mu_i \qquad (f_i \in \Delta_i)\ , \tag{27}$$

где μ_i – мера прообраза Δ_i, то есть множества тех точек отрезка $[a,b]$, для которых $f(x) \in \Delta_i$. Из этого определения видно, что интеграл Лебега от функций, различающихся лишь на множестве меры 0, одинаков. Все интегрируемые по Риману функции интегрируемы и по Лебегу, причем значения интегралов совпадают. Но

класс интегрируемых по Лебегу функций (их еще называют *измеримыми*) значительно шире: практически любая ограниченная функция измерима. В то же время, измеримые функции в некотором смысле близки к непрерывным: любая измеримая функция может быть сделана непрерывной путем ее изменения на множестве сколь угодно малой меры. Существование *неизмеримых* функций доказано теоретически, но в явном виде они не построены. Достоинством интеграла Лебега являются также более широкие возможности предельных переходов под знаком интеграла и тому подобных операций. В дальнейшем мы будем понимать все интегралы в смысле Лебега, не упоминая этого явно.

Вернемся к рассмотрению примеров функциональных пространств. Нормированное пространство $C[a,b]$ является полным, так как пределом равномерно сходящейся последовательности непрерывных на отрезке функций является тоже непрерывная функция. Оно также является сепарабельным. Соответствующее плотное счетное множество образуют, например, полиномы с рациональными коэффициентами в силу теоремы Вейерштрасса о равномерном приближении непрерывных функций многочленами. Заметим, однако, что линейно независимая система функций $\{x^n\}$ (n целые неотрицательные), порождающая это плотное множество, не может быть базисом пространства $C[a,b]$, поскольку разлагаться в (равномерно сходящийся) степенной ряд могут только аналитические функции, а в $C[a,b]$ живут любые непрерывные.

В определениях пространств L_1 и L_2 нужно теперь уточнить один момент. Из аксиом нормированного пространства следует, что нулевую норму должен иметь только нулевой вектор. Но, как отмечалось выше, интеграл от функции, равной нулю почти всюду, и сам равен нулю. Это значит, что *все* такие функции имеют нулевую норму. Выход такой: считать эквивалентными (или просто одинаковыми) функции, совпадающие почти всюду. Фактически, мы объявляем элементами пространств L_1 и L_2 целые *классы эквивалентных функций* (в L_1 – измеримых, в L_2 – квадратично интегрируемых). Оба этих пространства полны и сепарабельны; в обоих непрерывные функции (а значит и полиномы) образуют плотные подмножества. Подчеркнем, что пространство $C[a,b]$ (состоящее из непрерывных функций), полное по норме $||\,.\,||_{\mathrm{c}}$, *не полно* по нормам $||\,.\,||_1$ и $||\,.\,||_2$. Его пополнениями по этим нормам как раз и являются L_1 и L_2. Другим примером плотного подмножества в L_1 и L_2 является множество ступенчатых функций с конечным числом ступенек. Трактуя его как нормированное пространство и пополняя по нормам $||\,.\,||_1$ и $||\,.\,||_2$, получим снова L_1 и L_2. Интересно отметить, что в процессе этих пополнений пространство L_1 всех интегрируемых по Лебегу функций возникает без какого-либо упоминания (и использования) специфики лебеговского интегрирования, поскольку непрерывные и ступенчатые функции можно интегрировать и по Риману.

Пространство L_2 является не просто нормированным, а гильбертовым, поскольку в нем можно задать скалярное произведение: $(f,g)=\int dx\overline{f(x)}g(x)$. Если взять ортогональный базис в виде $\mathbf{e}_n=e^{inx}$, то ряд (17) будет отвечать разложению функций в стандартный тригонометрический ряд Фурье. Другому выбору базиса могла бы соответствовать система каких-то ортогональных полиномов, и т. д. В заключение, проведем сопоставление трех введенных функциональных норм. Очевидно, что из равномерной сходимости следует сходимость по обеим нормам $||\,.\,||_1$ и $||\,.\,||_2$. Из неравенства Шварца для L_2, имеющего вид $|\int\overline{f(x)}g(x)|^2\leqslant\int|f(x)|^2\int|g(x)|^2$, получаем, полагая $g(x)=1$, оценку $||f||_1\leqslant\sqrt{b-a}\,||f||_2$. Значит, сходимость по норме $||\,.\,||_2$ влечет за собой сходимость по норме $||\,.\,||_1$. Этому соответствует следующая диаграмма включения наших трех пространств: $C[a,b]\subset L_2\subset L_1$.

5. Линейные функционалы

Как известно, линейные функции на конечномерном векторном пространстве V образуют линейное пространство V^* такой же размерности, которое называется *сопряженным* или *дуальным* к V. В функциональных пространствах, элементами (векторами) которых являются функции, принято называть элементы сопряженного пространства не линейными функциями, а *линейными функционалами*. Будем следовать этой традиции в отношении нормированных (и вообще любых бесконечномерных линейных) пространств. Итак, линейный функционал p – это правило, сопоставляющее каждому элементу $f \in V$ некоторое число $<p\,,f>$, причем $<p\,,\alpha f+\beta g>=\alpha<p\,,f>+\beta<p\,,g>$. Если V – функциональное пространство, то таким правилом может быть, например, $<p\,,f>=\int_a^b dx\,p(x)f(x)$. Естественные операции сложения функционалов и умножения их на числа делают множество всех линейных функционалов на V векторным пространством (очевидно, бесконечномерным, если таковым было V).

Будем для определенности считать линейное пространство V бесконечномерным и нормированным. В этом случае оказалось удобным определить сопряженное пространство V^* как совокупность не всех, а только *непрерывных* линейных функционалов на V. Как обычно, непрерывность функционала p означает, что если последовательность $\{f_n\}$ элементов из V сходится (по норме) к некоторому f, то числовая последовательность $<p\,,f_n>$ сходится к $<p\,,f>$. Ввиду линейности, можно упростить это определение, упоминая в нем лишь последовательности, стремящиеся к нулю:

$$||f_n|| \longrightarrow 0 \qquad \Longrightarrow \qquad <p\,,f_n> \longrightarrow 0\,, \qquad p \in V^*\,. \tag{28}$$

Интересно, что непрерывность линейных функционалов эквивалентна их ограниченности. Функционал p называется *ограниченным*, если можно найти такое $M<\infty$, что $|<p\,,f>| \leqslant M\,||f||$ для всех $f \in V$, то есть если ограничено отношение $|<p\,,f>|/||f||$ (понятно, что диапазон самих значений $|<p\,,f>|$ ограничен только если $p \equiv 0$). Из этого определения видно, что любой ограниченный функционал непрерывен, ибо малость $||f||$ влечет за собой малость $|<p\,,f>|$. Возьмем теперь неограниченный функционал q. Найдется последовательность $\{f_n\}$ такая, что $|<q\,,f_n>| > n\,||f_n||$. Но тогда элементы $g_n = f_n/(n\,||f_n||)$ образуют последовательность, стремящуюся к нулю, поскольку $||g_n|| = 1/n$, в то время как $|<q\,,g_n>| > 1$. Мы показали, что неограниченный функционал не может быть непрерывным.

В дальнейшем, если не оговорено противное, под словом 'функционал' будет пониматься непрерывный линейный функционал, то есть элемент из V^*. По аналогии с линейными операторами, *ядром* функционала p называют подпространство $\mathrm{Ker}\,p \subset V$, состоящее из всех тех $f \in V$, для которых $<p\,,f>=0$. В n-мерном пространстве размерность ядра (ненулевой) линейной функции равна, очевидно, $n-1$. Обобщим этот результат на бесконечномерный случай: покажем, что размерность фактор-пространства $V/\mathrm{Ker}\,p$ равна 1 для любого функционала p, не равного нулю тождественно. Действительно, векторами такого фактор-пространства являются классы (наборы элементов) вида $[g] = g + \mathrm{Ker}\,p$; на каждом представителе данного класса функционал p принимает одно и то же значение. Если p не тождественный нуль, то существует ненулевой класс $[g]$. Но тогда любой другой класс получается из него домножением на некоторое число. Попутно мы установили, что любой элемент $f \in V$ представим в виде $f = h + \alpha g,\ h \in \mathrm{Ker}\,p,\ <p\,,g>=1$. Из непрерывности p следует замкнутость $\mathrm{Ker}\,p$ (как и вообще любого класса из $V/\mathrm{Ker}\,p$).

Вот еще одно следствие непрерывности: если функционал равен нулю на плотном подмножестве пространства V, то он тождественно равен нулю и на всем V (соответственно, функционалы, совпадающие на плотном подмножестве, просто равны). Это значит, в частности, что при пополнении пространства V, когда мы расширяем V до его замыкания $\overline{V}$, новых (непрерывных) функционалов не появляется, и $\overline{V}^* = V^*$.

Установленную выше ограниченность непрерывных функционалов можно использовать для превращения V^* в нормированное пространство, положив

$$||p|| \;=\; \sup_{f\neq 0} \frac{|<p\,,f>|}{||f||} \;=\; \sup_{||f||=1} |<p\,,f>|\,. \tag{29}$$

Отсюда следует $|<p\,,f>| \leqslant ||p||\cdot||f||$. Проверка аксиом (22) тривиальна. Интересно, что V^* оказывается полным нормированным пространством независимо от полноты исходного пространства V. Действительно, пусть $\{p_n\}$ – сходящаяся последовательность функционалов. Тогда, ввиду $|<p_n\,,f> - <p_m\,,f>| \leqslant ||p_n - p_m||\cdot||f||$, числовая последовательность $<p_n\,,f>$ сходится к некоторому пределу $<p\,,f>$. Линейность построенного таким образом функционала p очевидна. Его ограниченность следует из совокупной ограниченности чисел $<p_n\,,f>$ на элементах f с единичной нормой.

При построении сопряженного пространства V^* мы ограничились лишь непрерывными функционалами. В этой связи уместен вопрос: существуют ли такие функционалы вообще, и если да, то насколько их много? На конечномерном (нормированном) пространстве непрерывна любая линейная функция (которых в определенном смысле столько же, сколько и векторов исходного пространства). В бесконечномерном случае ситуация не столь проста, но ответ тоже положителен: на нормированном пространстве V всегда существуют непрерывные линейные функционалы, и их количество достаточно, например, для того, чтобы 'отличить' любой ненулевой вектор из V от нуля (а значит, и 'различить' два неравных вектора): для любого $f \neq 0$ найдется функционал $p \in V^*$ такой, что $<p\,,f>\neq 0$. Однако даже всех функционалов из V^* оказывается иногда недостаточно, чтобы отличить сходящуюся последовательность от расходящейся. Так, для некоторой последовательности $\{f_n\}$, которая *не сходится* в пространстве V, может оказаться, что числовые последовательности $<p\,,f_n>$ сходятся для любого $p \in V^*$. В такой ситуации говорят о *слабой сходимости* последовательности $\{f_n\}$. Ясно, что обычная сходимость (по норме) влечет за собой слабую. Отметим еще следующий важный результат (теорема Хана-Банаха): функционал, заданный на некотором подпространстве нормированного пространства можно продолжить на все пространство с сохранением нормы.

С практической стороны весьма удобно, если 'различать' неодинаковые векторы может не только всё V^* в совокупности, но даже некоторое его счетное подмножество, как это происходит, например, в гильбертовом пространстве, где любой вектор $\mathbf{x}$ однозначно определяется, в силу (17), своими *коэффициентами Фурье* $x_i = (\mathbf{e}_i, \mathbf{x})$. Очевидно, что скалярное произведение, ввиду неравенства Шварца (8), есть непрерывный линейный функционал по обоим аргументам. Оказывается, что других (непрерывных линейных) функционалов в гильбертовом пространстве и нет: для каждого $p \in H^*$ найдется ровно один вектор $\mathbf{p} \in H$ такой, что $<p\,,\mathbf{x}>= (\mathbf{p},\mathbf{x})$ для любого $\mathbf{x} \in H$. Вектор $\mathbf{p}$ легко построить. Выберем в (одномерном) пространстве $(\mathrm{Ker}\,p)^\perp$ вектор $\mathbf{q}$, имеющий единичную длину: $(\mathbf{q},\mathbf{q}) = |\mathbf{q}|^2 = 1$. Пусть $<p\,,\mathbf{q}>= \alpha$. Тогда, очевидно, $\mathbf{p} = \bar{\alpha}\mathbf{q}$. Итак, в гильбертовом пространстве $H^* \simeq H$, т. е. роль функционалов (через скалярное произведение) берут на себя сами векторы. В нормированных пространствах ситуация фактически обратная: функционалы в какой-то (но далеко не полной) мере компенсируют отсутствие скалярного произведения.

6. Интеграл Фурье и δ-функция

С необходимостью обобщения привычного понятия функции мы, фактически, столкнулись уже при первом знакомстве с функциональными пространствами: нам пришлось объявить элементами пространств L_1 и L_2 целые классы функций, различающихся лишь на множестве меры 0. Это означает, что элементы данных пространств, даже если мы продолжаем называть их функциями, уже не имеют определенных значений в точках своей области определения. Мы променяли это исконное свойство функций на возможность работы в рамках нормированных пространств. Тем самым обозначилась тенденция характеризовать данную функцию не столько ее значениями в конкретных точках, сколько значениями определенных интегралов от нее, то есть функционалов на соответствующих пространствах. Эта тенденция вскоре приведет нас к понятию обобщенной функции. Но первый пример из этого класса – знаменитая δ-функция Дирака – появляется, причем очень естественно, уже в определении интеграла Фурье, к рассмотрению которого мы и переходим.

Начнем с рядов Фурье. В широком смысле – это любые ряды вида (17), в узком, интересующем нас сейчас – это разложение функций из $L_2[-\pi,\pi]$ по тригонометрическому базису $\mathbf{e}_n = e^{inx}$ с целыми n:

$$f(x) \;=\; \sum_n f_n\, e^{inx}\,, \qquad\qquad f_n \;=\; \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx\, e^{-inx} f(x)\,. \tag{30}$$

Мы включили фактор $1/2\pi$ в определение скалярного произведения, чтобы сделать базис ортонормированным:

$$(f,g) \;=\; \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx \overline{f(x)}\, g(x) \qquad\Longrightarrow\qquad (\mathbf{e}_n,\mathbf{e}_m) \;=\; \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx\, e^{ix(m-n)} \;=\; \delta_{mn}\,. \tag{31}$$

Сходимость ряда (30) понимается по норме пространства L_2. Однако на практике мы разлагаем в ряд самые обычные функции, и нас, как правило, интересует поточечная либо равномерная сходимость ряда Фурье. По этому поводу известно, что ряд (30) для любой функции $f \in L_2$ сходится к $f(x)$ почти всюду. Ряд Фурье для периодической (с периодом 2π) непрерывно дифференцируемой функции сходится к ней равномерно. Любая непрерывная функция однозначно определяются своими фурье-коэффициентами f_n, но поточечная сходимость ряда (30) не гарантируется.

Интегральное *преобразование Фурье* (или просто *интеграл Фурье*) вводится для функций, заданных на всей прямой, и выглядит как естественное обобщение ряда (30) путем замены суммы по дискретному (счетному) множеству чисел на интеграл по непрерывной переменной:

$$f(x) \;=\; \int dk\, e^{ikx} \tilde{f}(k)\,, \qquad\qquad \tilde{f}(k) \;=\; \frac{1}{2\pi}\int dx\, e^{-ikx} f(x)\,. \tag{32}$$

(пределы интегрирования, где не указаны явно, подразумеваются равными $\pm\infty$). Мы, очевидно, вышли за пределы введенных ранее функциональных пространств. Более того, не видно и ничего похожего на счетный базис. Это действительно так: интеграл Фурье, в отличие от одноименного ряда, не привязан к гильбертову пространству (хотя аналог L_2 на бесконечной прямой существует). Пока нам достаточно будет знать, что для непрерывно дифференцируемой функции $f(x)$, если она еще и интегрируема по модулю на всей прямой, обе формулы (32) имеют место.

Широчайшие возможности практического применения интегралов и рядов Фурье обусловлены одним замечательным обстоятельством, которое мы проиллюстрируем на примере интеграла: как видно из его определения (32), дифференцированию функции $f(x)$ отвечает простое умножение ее *фурье-образа* $\tilde{f}(k)$ на фактор ik:

$$f'(x) \;=\; i\int dk\, e^{ikx}\, k\tilde{f}(k)\,. \tag{33}$$

Благодаря этому свойству, преобразование Фурье оказывается исключительно удобным инструментом поиска решений дифференциальных уравнений, сводя их к алгебраическим. Отметим еще одну часто встречающуюся конструкцию. *Сверткой* двух функций $f(x)$ и $g(x)$ называют функцию $(f\star g)(x) = \int dy f(x-y)\, g(y)$. Ее фурье-образ есть произведение фурье-образов этих функций, домноженное на 2π:

$$\int dy f(x-y)\, g(y) \;=\int dy\, dk\, e^{ik(x-y)}\tilde{f}(k)\, g(y) \;=\; 2\pi\int dk\; e^{ikx}\tilde{f}(k)\,\tilde{g}(k)\,. \tag{34}$$

Вернемся теперь к исходным формулам (32). Если трактовать вторую из них просто как определение $\tilde{f}(k)$, то смысл (32) сведется к следующему утверждению:

$$f(x) \;=\; \frac{1}{2\pi}\int dk \int dy\; e^{ik(x-y)} f(y)\,. \tag{35}$$

Попробуем записать это в другом виде, изменив порядок интегрирования:

$$f(x) \;=\; \int dy\,\delta(x-y) f(y)\,, \qquad \delta(x) \;=\; \frac{1}{2\pi}\int dk\; e^{ikx}\,. \tag{36}$$

Объект, обозначенный через $\delta(x-y)$, призван играть роль непрерывного аналога символа δ_{mn} из (31). К сожалению, его определение, данное здесь, некорректно, ибо второй интеграл в (36) не существует ни при каких x. Однако сама идея непрерывного аналога выглядит вполне здравой. Подойдем к вопросу с другой стороны. Символ δ_{mn} – это еще и матричный элемент единичного оператора. Формула $(Kf)(x) = \int dy\, K(x,y) f(y)$ со взятым (почти) наугад ядром $K(x,y)$ задает некоторый *линейный интегральный оператор* в функциональном пространстве, переводящий функцию f в Kf. Согласно (36), наша $\delta(x-y)$, если бы существовала, была бы ядром *единичного* оператора. Парадоксально, но факт: при всей кажущейся тривиальности самого этого оператора, корректно определить его интегральное ядро как обычную функцию не удается.

В следующей главе будет показано, что выход может быть найден на пути радикального обобщения понятия функции, в русле той самой тенденции, о которой уже шла речь выше. В частности, в рамках формализма *обобщенных функций* удается придать смысл и δ-функции, заданной соотношениями (36), и ее периодическому аналогу, связанному с рядом Фурье (30),

$$\frac{1}{2\pi}\sum_n e^{inx} \;=\; \delta_{2\pi}(x) \;=\; \sum_n \delta(x+2\pi n)\,, \qquad \int_{-\pi}^{\pi} dy\,\delta_{2\pi}(x-y) f(y) \;=\; f(x)\,. \tag{37}$$

На обыденном уровне этот смысл принято выражать такими словами: δ-функция, хотя и не существует в строгом понимании как функция своего аргумента, тем не менее, будучи подставлена под знак интеграла, позволяет получать верные ответы. На более математическом языке это означает, что мы с самого начала должны считать ее не функцией, а чисто условной формой представления некоторого *функционала*.

7. Обобщенные функции

Наивное определение δ-функции (36) порождает смутное представление о ней как о некой (четной) квази-функции $\delta(x)$, которую можно считать равной нулю при всех $x \neq 0$, но совершенно непонятно чему надо полагать при $x = 0$. Такого определения, впрочем, оказывается достаточно для успешной работы с δ-функцией во многих физических приложениях. С математической же точки зрения сразу ясно, что δ не есть функция ни в обычном смысле, ни в расширенном – в духе пространств L_1 или L_2. В то же время, корректная математическая трактовка δ-функции и других подобных квази-функций существует и сводится к следующему. Будем называть *обобщенной функцией* (по-английски distribution) всякий линейный непрерывный функционал f на некотором специально выбранном линейном пространстве, состоящем из *основных* или *пробных* функций $\varphi(x)$ (для определенности, одного вещественного аргумента; расширение на многомерный и комплексный случай тоже возможно). Некоторые (но далеко не все) из этих функционалов допускают представление в виде

$$<f\,,\varphi> \;=\; \int dx\, f(x)\,\varphi(x)\,, \tag{38}$$

где $f(x)$ – функция в обычном смысле (например, из L_1). Такие обобщенные функции (по существу, совпадающие с обычными) называются *регулярными*. Для остальных запись (38) тоже используется, но носит условный характер; поэтому для них требуется дать и прямое определение соответствующего функционала. В частности, δ-функция не является регулярной. Она определяется так:

$$<\delta\,,\varphi> \;=\; \varphi(0) \;\simeq\; \int dx\,\delta(x)\,\varphi(x)\,. \tag{39}$$

Сравнение с первой формулой из (36) показывает удобство интегральной записи – она позволяет в данном случае задать сразу целое однопараметрическое семейство обобщенных функций $\delta(x-y)$. В дальнейшем мы будем применять обе записи – интегральную и скобочную – как полные синонимы, имея в виду сделанные оговорки.

Выбор пространства основных функций диктуется следующими соображениями. С одной стороны, их должно быть достаточно много, чтобы уметь 'различать' обычные функции (иначе, например, две неодинаковые обычные функции могли бы соответствовать одной и той же обобщенной), а с другой – они должны быть достаточно гладкими, чтобы их можно было свободно дифференцировать. На стыке этих интересов возникли два широко применяемых пространства основных функций: пространство $\mathcal{D}$ бесконечно дифференцируемых *финитных* (отличных от нуля лишь в ограниченной области) функций и пространство $\mathcal{S}$ бесконечно дифференцируемых функций, убывающих быстрее любой степени $|x|^{-1}$. Примером функции из $\mathcal{S}$ является e^{-x^2}, а из $\mathcal{D}$ – функция, равная нулю при $|x| \geqslant 1$ и $\exp(1/(x^2-1))$ при $|x| < 1$. Линейные пространства $\mathcal{D}$ и $\mathcal{S}$ не являются нормированными и даже метрическими. Они имеют достаточно сложную топологическую структуру (в которую мы не хотим вдаваться, освобождая себя заодно и от необходимости доказывать перечисленные ниже результаты), но при этом допускают определение сходимости последовательностей основных функций (а значит и задание непрерывных функционалов) и обладают свойством полноты относительно этой сходимости.

Пространства функционалов (обобщенных функций) на $\mathcal{D}$ и $\mathcal{S}$ принято обозначать $\mathcal{D}'$ и $\mathcal{S}'$. Рассмотрим диаграмму включения этих пространств, введя в нее также

гильбертово пространство L_2, состоящее из функций, квадратично интегрируемых на всей прямой:

$$\mathcal{D} \subset \mathcal{S} \subset L_2 \simeq L_2' \subset \mathcal{S}' \subset \mathcal{D}' . \tag{40}$$

Элементы $\mathcal{D}'$ обычно называют просто *обобщенными функциями*, а элементы $\mathcal{S}'$ – *обобщенными функциями умеренного роста* (tempered distributions). В диаграмме (40) учтено, что элементы L_2' (функционалы на L_2) – это, фактически, сами элементы L_2, то есть обычные функции. Иными словами, в пространстве L_2' регулярны *все* функции, поскольку *любой* непрерывный линейный функционал на L_2 представим в виде (38). Регулярными функциями в $\mathcal{S}'$ являются (обычные) функции, рост которых на бесконечности ограничен некоторой степенью $|x|$, а в $\mathcal{D}'$ – функции, интегрируемые на любом компакте. При этом запас основных функций в $\mathcal{D}$ оказывается достаточным для того, чтобы только те из обычных функций, которые совпадают почти всюду, порождали одну и ту же (регулярную) обобщенную функцию.

Сходимость в пространствах $\mathcal{D}'$ и $\mathcal{S}'$ определяется по образцу слабой сходимости: последовательность обобщенных функций $\{f_n\}$ сходится к f если числовая последовательность $<f_n\,,\varphi>$ сходится к $<f\,,\varphi>$ для любой основной функции φ. Заметим, что для регулярных функций обычная сходимость (например, по норме $||\,.\,||_1$) означает и сходимость в смысле обобщенных функций. Из (40) очевидно, что сходимость в $\mathcal{S}'$ влечет за собой сходимость в $\mathcal{D}'$. По отношению к введенной сходимости оба пространства $\mathcal{D}'$ и $\mathcal{S}'$ полны. Нужно также отметить, что любую обобщенную функцию можно представить как предел последовательности основных функций из $\mathcal{D}$.

Важнейшим свойством обобщенных функций является возможность дифференцировать (и интегрировать) любую из них любое число раз, оставаясь всё в том же пространстве. Явный рецепт дифференцирования обобщенной функции подсказан ее интегральной записью:

$$\int dx\, f'(x)\,\varphi(x) \;=\; -\int dx\, f(x)\,\varphi'(x) \quad \Longrightarrow \quad <f^{(k)}\,,\varphi> \doteq\; (-)^k\,<f\,,\varphi^{(k)}> \tag{41}$$

(здесь пригодилась бесконечная дифференцируемость основных функций). При этом многие регулярные функции, недифференцируемые в обычном смысле, прекрасно дифференцируются в обобщенном, например,

$$\int dx\,\theta(x)\,\varphi'(x) \;=\; \int_0^\infty dx\,\varphi'(x) \;=\; -\varphi(0) \quad \Longrightarrow \quad \theta'(x) \;=\; \delta(x)\,. \tag{42}$$

Более того, оказывается, что любая обобщенная функция (из $\mathcal{S}'$) представима в виде производной конечного порядка от некоторой регулярной (и даже непрерывной) функции. Поэтому множество обобщенных функций можно рассматривать как такое (минимальное) расширение класса непрерывных функций, в результате которого операция дифференцирования становится выполнимой всегда. Интегрирование в пространствах обобщенных функций тоже всегда осуществимо и является, с точностью до произвольной константы, (взаимно-)обратной операцией по отношению к дифференцированию. Наконец, сходящиеся последовательности обобщенных функций можно (без потери сходимости) почленно дифференцировать и интегрировать.

Однако за все эти преимущества приходится и чем-то платить. Так, мы не можем свободно умножать обобщенные функции друг на друга. Например, выражение $\delta^2(x)$ не имеет смысла – ему не отвечает никакая обобщенная функция. Обобщенную функцию можно, как правило, умножать на обычную (бесконечно дифференцируемую) функцию, хотя и не на любую: функции из $\mathcal{S}'$ позволено умножать лишь на функции умеренного роста. Отметим еще, что $\delta(x)f(x) = \delta(x)f(0)$.

Несмотря на то, что значений в конкретных точках у обобщенной функции, вообще говоря, нет, можно иногда констатировать ее равенство нулю в открытой области. А именно, вводится понятие *носителя* обобщенной функции f (обозначается $\mathrm{supp} f$) как некоторого замкнутого множества, вне которого она считается равной нулю. Для обычной (например, основной) функции носителем называют замыкание множества точек, в которых эта функция отлична от нуля. На любые обобщенные функции это определение распространяется так: говорят, что обобщенная функция равна нулю в открытой области U, если она зануляется на любой основной функции, носитель которой сосредоточен внутри U. Тогда носителем данной обобщенной функции объявляется дополнение к объединению всех открытых областей, где она равна нулю. В итоге картина получается одинаковой для всех обобщенных функций, как регулярных, так и не регулярных: если точка x лежит *вне* носителя функции, то эта функция равна нулю в некоторой окрестности x.

Важный подкласс функций из $\mathcal{S}'$ образуют обобщенные функции с носителем, состоящим всего из одной точки (например, из точки $x = 0$). Конечно, они не являются регулярными. К этому классу относится $\delta(x)$ и любые ее производные. Как выясняется, ничего другого в этом классе и нет: любая обобщенная функция с одноточечным носителем оказывается линейной комбинацией производных конечного порядка от δ-функции.

Преобразование Фурье обобщенных функций наиболее естественно строится в пространстве $\mathcal{S}'$. Дело в том, что соответствующее пространство основных функций $\mathcal{S}$ переводится преобразованиями (32) само в себя, причем взаимно-однозначно. Пусть $\varphi \in \mathcal{S}$ – основная, а $f \in \mathcal{S}'$ – регулярная функция. Тогда

$$\int dx\, f(x)\, \tilde{\varphi}(x) \;=\; \frac{1}{2\pi} \int dx\, dy\, e^{-ixy} f(x)\, \varphi(y) \;=\; \int dy\, \tilde{f}(y)\, \varphi(y)\,. \tag{43}$$

Этот факт позволяет распространить определение преобразования Фурье на всё пространство $\mathcal{S}'$,

$$<\tilde{f}\,, \varphi> \doteq <f\,, \tilde{\varphi}>\,; \tag{44}$$

на нем преобразование Фурье также оказывается взаимно-однозначным отображением. В частности, второе равенство в (36) теперь интерпретируется весьма просто: фурье-образом единицы в $\mathcal{S}'$ является δ-функция, и наоборот. Фурье-образами производных от δ-функции будут, очевидно, степени x. Добавим, что пространство L_2, вложенное в $\mathcal{S}'$ согласно (40), также переводится фурье-преобразованием в себя:

$$\begin{aligned} \int dx\, |f(x)|^2 \;&=\; \int dx\, dp\, dq\, e^{ix(p-q)}\, \tilde{f}(p)\, \overline{\tilde{f}(q)} \\ &=\; 2\pi \int dp\, dq\, \delta(p-q)\, \tilde{f}(p)\, \overline{\tilde{f}(q)} \;=\; 2\pi \int dp\, |\tilde{f}(p)|^2\,. \end{aligned} \tag{45}$$

Находит свое место в общей картине и функция $\delta_{2\pi}(x)$ из (37) – так называемая *периодическая δ-функция*. Она является обобщенной функцией из $\mathcal{S}'$, поскольку

$$\int dx\, \delta_{2\pi}(x)\, \varphi(x) \;=\; \sum_n \int dx\, \delta(x + 2\pi n)\, \varphi(x) \;=\; \sum_n \varphi(-2\pi n)\,, \tag{46}$$

и ввиду быстрого убывания функции φ ряд справа должен сходиться. А значит, сходится (в обобщенном смысле, т. е. в пространстве $\mathcal{S}'$) и ряд $\sum_n \exp(inx)$, который в обычном смысле, конечно, расходится (доказать первое равенство (37) помогает разложение периодической функции $\Phi(x) = \sum_n \varphi(x - 2\pi n)$ в ряд Фурье). Как видно из (46), носитель обобщенной функции $\delta_{2\pi}(x)$ представляет собой дискретное счетное множество точек $x = 2\pi n$.