А. А. ВЛАДИМИРОВ

ВВЕДЕНИЕ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНУЮ ГЕОМЕТРИЮ

1. Гладкие многообразия 1
2. Внешняя алгебра и дифференциал 3
3. Ковариантная производная 5
4. Потоки и гамильтонова динамика 7

1. Гладкие многообразия

Данный конспект занимает промежуточное положение между моим пособием для второкурсников "Тензорный анализ" и полноценными учебниками по дифференциальной геометрии. Проблема неизбежных пересечений с текстом упомянутого пособия решается так: соответствующие темы (в первых двух главах настоящего конспекта) излагаются очень сжато; попутно вводится более современная математическая терминология. Аккуратное сопоставление содержания конспекта с более подробным и наглядным изложением в указанном пособии можно считать заданием для самостоятельной работы. Другие темы, не перекрывающиеся с "Тензорным анализом", изложены в конспекте достаточно подробно. При отборе материала учитывалось, что данный курс отнюдь не завершает математическое образование будущих физиков-теоретиков. Поэтому многие ключевые понятия дифференциальной геометрии, нашедшие применение в современной теоретической физике (например, расслоенные пространства), сюда не вошли.

В основе современного подхода к дифференциальной геометрии лежит понятие *многообразия* (manifold). Гладкое многообразие M – это топологическое пространство, состоящее из точек p, задаваемых с помощью N независимых координат x^i. Можно сказать так: в окрестности каждой своей точки многообразие M выглядит как обычное N-мерное вещественное пространство, снабженное (вообще говоря, криволинейной) координатной сеткой. Одной координатной сетки может и не хватить на всё многообразие M; в таком случае M покрывается несколькими координатными *картами*, причем в местах 'сшивки' координаты разных карт должны гладким (т. е. бесконечно дифференцируемым) образом выражаться друг через друга. Впрочем, нас в данном курсе меньше будут интересовать глобальные вопросы – сколько нужно карт, как их сшивать, и т. п. Фактически, мы ограничимся тем, что будем изучать многообразия *локально*, в окрестностях точек.

Многообразия не являются линейными пространствами и не наделяются никакими линейными свойствами. В курсе тензорного анализа мы использовали вложение M в некое объемлющее линейное пространство. Обычно математики стараются без этого обойтись. Тогда возникает проблема – как определить касательный вектор, если нет возможности напрямую дифференцировать $p(x^i)$ по x^i? Проследим, как она решается во внутренних терминах, без апелляции к объемлющему пространству. Мы можем задать на многообразии траекторию $p(t)$ с координатами $x^i(t)$ и объявить величины $A^i(x) = dx^i/dt$ компонентами вектора A, касательного к этой траектории (а значит и к многообразию) в точке $p(x)$. Иначе говоря,

$$x^i(t) \;=\; x^i + tA^i + \mathcal{O}(t^2)\,, \tag{1}$$

если подразумевать $x^i = x^i(0)$. Из (1) хорошо видно, что один и тот же касательный вектор соответствует целому пучку траекторий, проходящих через данную точку. Можно также трактовать касательные векторы как линейные дифференциальные операции на функциях, заданных на многообразии M:

$$Af \;\doteq\; A^i\,\partial_i f \;=\; \frac{dx^i}{dt}\,\partial_i f \;=\; \frac{d}{dt}\,f(x(t))\,. \tag{2}$$

Величина Af – это скорость изменения функции f вдоль направления вектора A. Итак, мы задаем касательный вектор A просто как совокупность его компонент A^i. Эти векторы к тому же должным образом преобразуются при замене базиса. Поэтому можно считать, что каждой точке p многоообразия M сопоставлено N-мерное *линейное касательное пространство*, которое принято обозначать T_pM или T_xM.

Важную роль в дифференциальной геометрии играют отображения многоообразий. В общем случае, отображение $\varphi : M \to K$ задается гладкой функцией $\varphi(x) = y$, выражающей координаты y^i многоообразия K через координаты x^i исходного многообразия M. Частным случаем отображения можно считать замену координат многообразия. При этом, конечно, должна существовать (и быть гладкой) обратная функция φ^{-1}. Мы пишем $\tilde{x}$ вместо y, если хотим подчеркнуть, что речь идет именно о замене координат, а не о произвольном (возможно, необратимом) отображении.

Отображение $\varphi : M \to K$ естественным образом индуцирует два других. Одно из них, $\varphi_* : T_xM \to T_yK$, переводит вектор $A \in T_xM$, касающийся некоторой кривой, проходящей через точку x на многообразии M, в вектор $B = \varphi_* A \in T_yK$, касательный к *образу* этой кривой, проходящему через точку y многообразия K. Второе отображение обозначают φ^* и по-английски называют pullback (общепринятого русского перевода нет). Оно действует в обратном направлении – превращает функцию $f(y)$, заданную на многообразии K, в функцию $g(x) = (\varphi^* f)(x) \doteq f(\varphi(x))$, заданную уже на многообразии M. Проще говоря, $g(x) = f(y(x))$. Вытекающее отсюда тождественное (относительно переменной t) равенство $g(x(t)) = f(y(x(t)))$ позволяет на основании (2) убедиться, что $Bf = Ag$, или

$$(\varphi_* A)f \;=\; A(\varphi^* f)\,, \tag{3}$$

наглядно демонстрируя связь двух индуцированных преобразований между собой.

Преобразования *координат* многообразия одновременно меняют и базисные векторы касательных пространств (которые мы, в духе (2), пишем в виде дифференциальных операторов $\partial_i = \partial/\partial x^i$), и любые тензоры в этих пространствах. Тензор определенного ранга, заданный в каждом касательном пространстве, порождает *тензорное поле* на всем многоообразии M. Напомним закон преобразования тензорных полей при заменах координат (обобщение данного примера очевидно):

$$\tilde{D}^j_i(\tilde{x}) \;=\; \frac{\partial x^m}{\partial \tilde{x}^i}\;\frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^n}\;D^n_m(x)\,. \tag{4}$$

Преобразование базисов здесь выполняют матрицы, составленные из производных одних координат по другим. Полезно привести здесь и явные формулы для φ_*:

$$(\varphi_* A)^i(y) = \frac{\partial y^i}{\partial x^j}\,A^j(x)\,, \qquad \varphi_*\frac{\partial}{\partial x^i} \;=\; \frac{\partial y^j}{\partial x^i}\,\frac{\partial}{\partial y^j}\,, \tag{5}$$

– первая из них копирует (4), а вторая есть просто правило замены переменной.

2. Внешняя алгебра и дифференциал

Линейное пространство, дуальное к касательному пространству T_xM, принято обозначать T_x^*M. Его элементы – линейные функции на касательных векторах – называются 1-формами или дифференциальными формами первого порядка. Соответствующее поле $H = H_i(x)\,dx^i$, компоненты которого несут один нижний индекс, называют также ковекторным полем. Величины dx^i образуют базис 1-форм, дуальный к базису векторных полей $\{\partial_i\}$:

$$<dx^j\,,\,\partial_i> = \delta_i^j\,, \qquad <dx^i\,,\,A> = A^i(x)\,, \qquad <df\,,\,A> = A^i\,\partial_i f \;=\; Af\,, \tag{6}$$

в согласии с обычными представлениями о дифференциале функции, $df(x) = \partial_i f\,dx^i$.

Естественно ожидать, что отображением многообразий индуцируется некоторое линейное отображение ковекторов. Его обозначают тем же символом φ^*, что и для функций, поскольку оно тоже действует 'в обратную сторону', то есть относится к типу pullback. Это вполне логично, так как ковекторы – это *функции* на векторах, и если векторы отображаются операцией φ_* из T_xM в T_yK, то ковекторы – из T_y^*K в T_x^*M, дуальной операцией φ^*. Её определение сходно с (3):

$$<\varphi^*H\,,\,A>_x \;=\; <H\,,\,\varphi_*A>_y\;\;. \tag{7}$$

В явном виде,

$$(\varphi^*H)_i(x) \;=\; \frac{\partial y^j}{\partial x^i}\,H_j(y)\,, \qquad \varphi^*dy^i \;=\; \frac{\partial y^i}{\partial x^j}\;dx^j\,. \tag{8}$$

Второе равенство – простая замена переменных, а первое вкупе с (4) и (5) говорит, что общий рецепт (4) применим и для отображений φ_* и φ^*, но с оговорками: в первом случае просто меняем $\tilde{x}$ на y, а во втором, учитывая, что pullback 'направлен назад', заменяем x на y и $\tilde{x}$ на x. Наконец, выведем соотношение $\varphi^*(df) = d(\varphi^*f)$. Оно означает, что операции φ^* и d можно применять в любом порядке – либо сначала отобразить функцию pullback'ом, а потом продифференцировать, либо применить pullback к 1-форме df – результат не изменится. Доказательство дается выкладкой

$$<\varphi^*(df)\,,\,A> = <df\,,\,\varphi_*A> = \;(\varphi_*A)f \;=\; A(\varphi^*f) \;= <d(\varphi^*f)\,,\,A>\;\;. \tag{9}$$

Перейдем к тензорам высших рангов. *Тензорным произведением* линейных пространств V и W называется линейное пространство $V\otimes W$ с базисом $\{\mathbf{e}_i\,\mathbf{e}'_j\}$, сформированным из всевозможных упорядоченных пар элементов исходных базисов $\{\mathbf{e}_i\}$ и $\{\mathbf{e}'_j\}$. Подчеркнем, что выражение $\mathbf{e}_i\,\mathbf{e}'_j$ (иногда пишут даже $\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}'_j$) есть просто обозначение векторов нового базиса, а вовсе не какое-то произведение. Очевидно, размерность пространства $V\otimes W$ равна произведению размерностей сомножителей. Когда речь идет о тензорных полях на многообразиях, то тензоры с одними верхними индексами живут в пространствах вида $T_xM\otimes\ldots\otimes T_xM$, с одними нижними – в тензорных степенях пространства T_x^*M, а например $D_i^j(x)$ – в $T_xM\otimes T_x^*M$. Конечно, тензор с одними нижними индексами можно считать просто функцией от нескольких касательных векторов, линейной по каждому аргументу.

Особый интерес представляют *полностью антисимметричные* функции на касательных пространствах, меняющие знак при перестановке любой пары аргументов. Соответствующие тензорные поля несут только нижние индексы и антисимметричны по ним. Они отвечают дифференциальным формам вида

$$\omega \;=\; \omega_{i\ldots j}(x)\,dx^i\ldots dx^j\,, \qquad\qquad dx^i\,dx^j \;=\; -\,dx^j\,dx^i\,. \tag{10}$$

Антикоммутативность дифференциалов dx^i, а значит и любых 1-форм, порождает характерный тип перестановочных свойств у дифференциальных форм произвольного порядка: формы нечетных порядков антикоммутируют (меняют знак при перестановке), во всех остальных случаях (четный с четным или четный с нечетным) знак не меняется. Для напоминания об этих свойствах, произведение дифференциальных форм часто записывают при помощи специального знака $\wedge$ (по-английски wedge) и называют *внешним произведением*. Так, $dx^i\,dx^j \equiv dx^i \wedge dx^j$. Соотношения

$$(\omega^k \wedge \omega^l) \wedge \omega^m = \omega^k \wedge (\omega^l \wedge \omega^m)\,, \qquad \omega^k \wedge \omega^m = (-)^{km}\,\omega^m \wedge \omega^k \tag{11}$$

(верхний индекс указывает порядок формы) говорят о том, что умножение форм ассоциативно и антисимметрично. Не вдаваясь в общую технологию манипуляций с формами (называемую *внешней алгеброй*), отметим, что многое здесь упрощается, если данная конкретная форма представлена как произведение 1-форм. Тогда дело по сути сводится к одной формуле, задающей внешнее произведение n 1-форм как антисимметричную функцию на n касательных векторах,

$$(H^1 \wedge \ldots \wedge H^n)\,(A_1, \ldots, A_n) \;=\; \det < H^i, A_j >\,, \tag{12}$$

например, $(dx^1 \wedge dx^2)(A, B) = A^1 B^2 - A^2 B^1$.

Как известно, операция d (дифференциал), переводящая функции в 1-формы, применима и к самим дифференциальным формам, увеличивая их порядок на единицу. Напомнив определение d на примере формы ω из (10),

$$d\,\omega \;=\; d\omega_{i\ldots j}(x)\,dx^i \ldots dx^j \;=\; \partial_k\,\omega_{i\ldots j}(x)\;dx^k\,dx^i \ldots dx^j\,, \tag{13}$$

приведем его почти очевидные следствия,

$$d(f\omega) = df \wedge \omega + f\,d\omega\,, \qquad d(\omega^k \wedge \omega^m) = d\omega^k \wedge \omega^m + (-)^k \omega^k \wedge d\omega^m, \qquad d \circ d = 0\,, \tag{14}$$

где f – некоторая функция. Отметим также, что вывод (9) может быть обобщен на произвольные формы. Получим

$$\varphi^*(\omega \wedge \omega') = \varphi^*\omega \wedge \varphi^*\omega' \qquad \Longrightarrow \qquad \varphi^*(d\omega) = d(\varphi^*\omega)\,. \tag{15}$$

Нильпотентность дифференциала ($d^2 = 0$) ставит интересную проблему *когомологий*: существуют ли формы, удовлетворяющие условию $d\omega = 0$, кроме тех, которые сами имеют вид $\omega = d\theta$? Известно, что на вещественной прямой и в пространствах $\mathbb{R}^N$ таких форм нет. Опишем простейший пример формы искомого типа. Рассмотрим окружность как одномерное многообразие, параметризованное координатой $0 \leqslant x < 2\pi$. Любые функции $f(x)$, заданные на этом многообразии, должны обязательно быть периодическими с периодом 2π. Рассмотрим произвольную 1-форму $H = h(x)\,dx$. Очевидно, что $dH = 0$. Означает ли это, что H непременно имеет вид $H = df$? Нет, ибо, например, 1-форма dx не является дифференциалом *периодической* функции. Иными словами, на окружности существуют нетривиальные когомологии. Если же вместо окружности рассмотреть прямую, то такая аргументация, конечно, не проходит. Разобранный случай, видимо, останется единственным в данном конспекте примером, где решающую роль играет глобальный аспект: окружность *локально* неотличима от прямой, но *глобально* они совершенно различны.

3. Ковариантная производная

Согласно определению (13), операция d сводится к дифференцированию коэффициентной функции $\omega_{i\ldots j}(x)$ дифференциальной формы ω, превращая последнюю в форму более высокого порядка. При этом важное значение имеет антисимметричность, лежащая в основе всей конструкции – именно она обеспечивает тензорный характер величин после дифференцирования. Действительно, рассмотрим, например, преобразование величины $\partial_i H_j(x)$:

$$\tilde\partial_i \tilde H_j(\tilde x) \;=\; \frac{\partial}{\partial\tilde x^i}\left(\frac{\partial x^k}{\partial\tilde x^j}\,H_k(x)\right) \;=\; \frac{\partial x^k}{\partial\tilde x^j}\,\frac{\partial x^l}{\partial\tilde x^i}\,\partial_l H_k(x) \;+\; \frac{\partial^2 x^k}{\partial\tilde x^i\,\partial\tilde x^j}\,H_k(x)\,. \qquad (16)$$

Второе слагаемое правой части явно нарушает тензорный закон (4). Конечно, этот нежелательный эффект исчезнет после антисимметризации по индексам ij, и поле $\partial_i H_j - \partial_j H_i$, отвечающее 2-форме dH, уже будет тензорным. Но нас сейчас интересует не антисимметричный случай (дифференциальные формы), а общая ситуация. Выпишем еще формулу преобразования для $\partial_i A^j(x)$:

$$\tilde\partial_i \tilde A^j(\tilde x) \;=\; \frac{\partial}{\partial\tilde x^i}\left(\frac{\partial\tilde x^j}{\partial x^k}\,A^k(x)\right) \;=\; \frac{\partial\tilde x^j}{\partial x^k}\,\frac{\partial x^l}{\partial\tilde x^i}\,\partial_l A^k(x) \;+\; \frac{\partial x^l}{\partial\tilde x^i}\,\frac{\partial^2\tilde x^j}{\partial x^l\partial x^k}\,A^k(x)\,. \qquad (17)$$

Её нетензорный характер столь же очевиден. Следовательно, производная тензорного поля сама тензорным полем, вообще говоря, не является.

Для того, чтобы иметь возможность дифференцировать любые (а не только антисимметричные) тензорные поля без потери тензорных свойств, придумана специальная конструкция – *ковариантная производная* ∇. Принцип её действия таков:

$$\nabla_i D^k_j \;=\; \partial_i D^k_j + \Gamma^k_{li} D^l_j - \Gamma^l_{ji} D^k_l\,, \qquad \nabla(AB) = (\nabla A)B + A\,\nabla B\,. \qquad (18)$$

Мы видим, что ковариантная производная ∇_i отличается от обычной появлением дополнительных слагаемых по числу тензорных индексов дифференцируемого поля, причем знаки слагаемых, отвечающих верхним и нижним индексам, разные. Для скалярных функций обычная и ковариантная производные совпадают (поэтому градиент $\partial_i f$ есть тензорное поле). Новые поля $\Gamma^k_{ij}(x)$ (*символы Кристоффеля*) призваны обеспечить тензорный характер преобразования ковариантных производных. Ясно, что для этого их собственный закон преобразования не должен быть тензорным. Действительно, он имеет вид

$$\tilde\Gamma^k_{ij}(\tilde x) \;=\; \frac{\partial x^m}{\partial\tilde x^i}\,\frac{\partial x^n}{\partial\tilde x^j}\,\frac{\partial\tilde x^k}{\partial x^l}\,\Gamma^l_{mn}(x) \;+\; \frac{\partial\tilde x^k}{\partial x^m}\,\frac{\partial^2 x^m}{\partial\tilde x^i\partial\tilde x^j}\;. \qquad (19)$$

Последнее (как раз нетензорное) слагаемое представимо и в другой форме,

$$\frac{\partial\tilde x^k}{\partial x^m}\,\frac{\partial^2 x^m}{\partial\tilde x^i\partial\tilde x^j} \;=\; \frac{\partial\tilde x^k}{\partial x^m}\,\frac{\partial}{\partial\tilde x^i}\left(\frac{\partial x^m}{\partial\tilde x^j}\right) \;=\; -\frac{\partial}{\partial\tilde x^i}\left(\frac{\partial\tilde x^k}{\partial x^m}\right)\!\cdot\frac{\partial x^m}{\partial\tilde x^j} \;=\; -\frac{\partial^2\tilde x^k}{\partial x^n\partial x^m}\,\frac{\partial x^n}{\partial\tilde x^i}\,\frac{\partial x^m}{\partial\tilde x^j}\,, \qquad (20)$$

поскольку

$$\frac{\partial}{\partial\tilde x^i}\left(\frac{\partial\tilde x^k}{\partial x^m}\,\frac{\partial x^m}{\partial\tilde x^j}\right) \;=\; \frac{\partial}{\partial\tilde x^i}\,\delta^k_j \;=\; 0\,. \qquad (21)$$

Сопоставляя теперь это нетензорное слагаемое в первой и второй формах соответственно с (16) и (17), убеждаемся, что преобразование ковариантной производной действительно имеет тензорный вид (4).

Рецепт (18) задает разные правила дифференцирования функций переменной x в зависимости от того, есть у них тензорные индексы или нет, что кажется несколько неестественным. Попробуем взглянуть на проблему под другим углом. Будем считать, что ковариантному дифференцированию подвергаются не только коэффициентные функции тензорного поля (к примеру, векторного $A = A^i(x)\partial_i$ или ковекторного $H = H_i(x)dx^i$), а эти объекты целиком, вместе с базисными элементами. Примем правило Лейбница как в (18), но пусть теперь для *любых* коэффициентных функций, даже с тензорными индексами, ковариантная производная равняется обычной, а символы Кристоффеля возникают лишь при дифференцировании базиса,

$$\nabla_i \Phi^{j\cdots}_{k\ldots}(x) \;=\; \partial_i \Phi^{j\cdots}_{k\ldots}(x)\,, \qquad \nabla_i \partial_j \;\doteq\; \Gamma^k_{ji}\,\partial_k\,, \qquad \nabla_i dx^j \;\doteq\; -\Gamma^j_{ki}\,dx^k\,. \tag{22}$$

Тогда

$$\nabla_i A(x) \;=\; \nabla_i \left(A^j(x)\,\partial_j\right) \;=\; \left(\partial_i A^j\right)\partial_j + A^j(\nabla_i\,\partial_j) \;=\; \left(\partial_i A^k + \Gamma^k_{ji}\,A^j\right)\partial_k\,, \tag{23}$$

$$\nabla_i H(x) \;=\; \nabla_i \left(H_j(x)\,dx^j\right) \;=\; \left(\partial_i H_j\right)dx^j + H_j(\nabla_i\,dx^j) \;=\; \left(\partial_i H_k - \Gamma^j_{ki}\,H_j\right)dx^k\,. \tag{24}$$

Выражения в скобках в правых частях соответствуют (18). Таким образом, если за определение ковариантного дифференцирования взять постулаты (22), то рецепт (18) можно считать удобным мнемоническим правилом. Впрочем, гораздо чаще именно его принимают в качестве основного определения.

Отметим теперь очевидное следствие формулы (19): разность $\Gamma^k_{ij} - \Gamma^k_{ji}$ является тензором. Она носит название *тензора кручения*. Гораздо труднее проверить (мы не станем здесь этого делать) тензорный характер комбинации

$$R^i_{jmn} \;=\; \partial_m \Gamma^i_{jn} - \partial_n \Gamma^i_{jm} + \Gamma^i_{km}\Gamma^k_{jn} - \Gamma^i_{kn}\Gamma^k_{jm}\,, \tag{25}$$

которая называется *тензором кривизны*. Здесь уместно сказать несколько слов о геометрическом смысле символов Кристоффеля и тензора R^i_{jmn}. Задав на многообразии символы $\Gamma^k_{ij}(x)$, мы вводим на нем понятие *параллельности*. Тензорное поле Φ (любого ранга) называется *параллельным вдоль кривой* $x(t)$, касательной к векторному полю $A^i(x)$, если $A^i\nabla_i\Phi = 0$. Так, условие $\nabla_i\Phi = 0$ выделяет поле, параллельное вдоль i-ой координаты. У нас появляется возможность параллельно переносить любые тензорные объекты вдоль кривых, заданных на многообразии. Однако, имея некий тензор в точке x, не всегда можно однозначно указать параллельный ему тензор в любой другой точке x', так как результат переноса может зависеть от пути: параллельный перенос из x в x' вдоль различных кривых дает, вообще говоря, различные результаты. И именно тензор кривизны R^i_{jmn} является своего рода мерой неоднозначности параллельных переносов: если этот тензор тождественно равен нулю, то многообразие является *плоским* и результат параллельного переноса не зависит от пути (как например в евклидовых координатах, когда все Γ^k_{ij} обращаются в нуль). Но бывают многообразия (например, сфера), в которых ни символы Кристоффеля, ни тензор кривизны невозможно положить равными нулю во всех точках.

Если на многообразии задан метрический тензор $g_{ij}(x)$ (и обратный к нему g^{ij}), то можно показать, что требованиями $\nabla_k g_{ij} = 0$ и $\Gamma^k_{ji} = \Gamma^k_{ij}$ символы Кристоффеля определяются однозначно:

$$\Gamma^k_{ij} \;=\; \frac{1}{2}\,g^{kl}\left(\partial_i\,g_{jl} + \partial_j\,g_{il} - \partial_l\,g_{ij}\right). \tag{26}$$

Такие значения Γ^k_{ij} называются *согласованными с метрикой*, так как в этом случае процедура поднятия или опускания индексов перестановочна с операцией ∇.

4. Потоки и гамильтонова динамика

Согласно (2), векторное поле, действуя на функцию, превращает ее снова в функцию. Поэтому действие можно повторить. На этой простой идее основано определение *коммутатора векторных полей*:

$$[A\,,B]f \;\doteq\; A(Bf)-B(Af) \;=\; [A\,,B]^i\,\partial_i f\,, \qquad [A\,,B]^i \;=\; A^j\,\partial_j B^i - B^j\,\partial_j A^i\,. \quad (27)$$

Появление коммутаторов здесь отнюдь не случайно. Дело в том, что одним из важнейших примеров гладких многообразий являются *группы Ли*, а тесно связанные с ними линейные объекты – *алгебры Ли* – состоят из инвариантных векторных полей на этих многообразиях. Представляя нелинейный объект – группу Ли – условно в виде сферы, можно представлять её алгебру Ли в виде касательной плоскости.

Другим важным понятием, связанным с векторным полем, является *поток*. По заданному векторному полю, решая соответствующие дифференциальные уравнения, однозначно строится траектория $x(t)$, проходящая через данную точку x и касательная к этому полю. Движение вдоль таких траекторий, понимаемое как отображение многообразия в себя, и есть порождаемый векторным полем A поток A^t – однопараметрическая группа преобразований точек данного многообразия:

$$A^t:\; x(s) \;\to\; A^t x(s) = x(s+t) \qquad \Longrightarrow \qquad A^s A^t = A^{s+t}, \quad A^{-t} = (A^t)^{-1}\,. \quad (28)$$

Векторные поля A и B генерируют, конечно, разные потоки A^t и B^u (параметры соответствующих траекторий естественно тоже обозначить разными буквами). Перестановочны ли преобразования этих двух потоков? Будем считать t и u инфинитезимальными. Тогда, по смыслу касательного вектора, имеем

$$B^u\circ A^t \;:\; x^i \longrightarrow x^i + tA^i(x) + \ldots \longrightarrow x^i + tA^i(x) + uB^i(x+tA+\ldots) + \ldots\,, \quad (29)$$
$$A^t\circ B^u \;:\; x^i \longrightarrow x^i + uB^i(x) + \ldots \longrightarrow x^i + uB^i(x) + tA^i(x+uB+\ldots) + \ldots\,. \quad (30)$$

Разлагая правые части в ряд Тейлора, представим разницу между ними в виде $tu(A^j\,\partial_j B^i - B^j\,\partial_j A^i) + \ldots$ Сравнивая её с (27), получаем замечательный результат: коммутирующим векторным полям соответствуют перестановочные потоки,

$$[A\,,\,B] \;=\; 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad A^t\circ B^u \;=\; B^u\circ A^t\,. \quad (31)$$

Поток, как и всякое отображение многообразий, должен индуцировать линейные отображения тензоров $(A^t)_*$ и $(A^t)^*$. Воспользуемся обратимостью потока, чтобы изменить направление действия отображения $(A^t)^*$ (оно, как и положено pullback'у, действует назад). А именно, свяжем с потоком A^t набор линейных отображений $(A^t)_*\,, (A^{-t})^*$. Все они действуют вперед и, в совокупности, транслируют вдоль потока тензоры любых рангов. Итак, векторное поле A порождает поток, который тащит за собой все тензорные поля. При этом исходное поле A переходит само в себя, поскольку оно по построению касательно к траекториям своего потока. А вот значения других тензоров, приносимые в данную точку, могут и не совпадать со значениями, бывшими там изначально. То есть, при преобразованиях потока тензорные поля могут изменяться. Скорость этого изменения называется *производной Ли* L_A, отвечающей потоку вдоль векторного поля A. Приведем без вывода ряд её свойств:

$$L_A f \;=\; Af\,, \quad L_A B \;=\; [A\,,\,B]\,, \quad L_A L_B - L_B L_A \;=\; L_{[A,B]}\,, \quad L_A\circ d \;=\; d\circ L_A\,. \quad (32)$$

Рецепт действия L_A на любые тензорные поля ясен из следующего примера:

$$(L_A D)^j_i \;=\; A^k\,\partial_k D^j_i + \partial_i A^k\, D^j_k - \partial_k A^j\, D^k_i\,. \tag{33}$$

В терминах потоков очень удобно представлять гамильтонову динамику на многообразиях. А именно, гамильтоновы уравнения движения отвечают потоку $\bar{H}^t$, порожденному *гамильтоновым векторным полем* $\bar{H}(x)$:

$$\frac{dx^i}{dt} \;=\; \bar{H}^i(x) \;=\; \Lambda^{ij}\,\partial_j H\,, \qquad \Lambda^{ji} \;=\; -\Lambda^{ij}\,. \tag{34}$$

Здесь $H(x)$ – некоторая (вообще говоря, произвольная) функция на многообразии, называемая *гамильтонианом*, а $\Lambda^{ij}(x)$ – *пуассоново тензорное поле*. Как следствие, получаем закон временно́й эволюции значений любой функции на многообразии:

$$\frac{dF(x)}{dt} \;=\; \bar{H}F \;=\; \Lambda^{ij}\,\partial_i F\,\partial_j H \;\doteq\; \{H,F\}\,. \tag{35}$$

Билинейная операция $\{H,F\}$ (*скобки Пуассона*) удовлетворяет очевидным свойствам

$$\{H,F\} = -\{F,H\}\,,\quad \{H,FG\} = \{H,F\}G + F\{H,G\}\,,\quad \{H,\Phi(F)\} = \{H,F\}\frac{d\Phi}{dF}\,. \tag{36}$$

Итак, для гамильтоновой динамики требуется многообразие M (*фазовое пространство*), функция $H(x)$ на нем (гамильтониан), и антисимметричное тензорное поле $\Lambda^{ij}(x)$, превращающее градиент H в векторное поле $\bar{H}(x)$. В качестве дополнительного ограничения на Λ^{ij} налагается условие $\Lambda^{im}\partial_m\Lambda^{jk} + \Lambda^{jm}\partial_m\Lambda^{ki} + \Lambda^{km}\partial_m\Lambda^{ij} = 0$, означающее выполнение тождества Якоби для скобок Пуассона,

$$\{F,\{H,G\}\} \;+\; \{G,\{F,H\}\} \;+\; \{H,\{G,F\}\} \;=\; 0\,. \tag{37}$$

Благодаря этому сам пуассонов тензор не изменяется под действием гамильтоновых потоков, $L_{\bar{H}}\,\Lambda = 0$. Кроме того, тождество (37) означает, что алгебра скобок Пуассона фактически совпадает с алгеброй гамильтоновых векторных полей:

$$\overline{\{H,F\}} = [\bar{H},\bar{F}]\,, \tag{38}$$

поскольку действием обеих частей на функцию G немедленно воспроизводится (37).

Если $\Lambda^{ij}(x)$ имеет обратный (тоже антисимметричный) тензор Ω_{ij}, то

$$\Lambda^{ik}\Omega_{kj} \;=\; \delta^i_j\,, \qquad \Omega \;=\; \Omega_{ij}(x)\,dx^i\wedge dx^j\,, \qquad d\Omega \;=\; 0\,, \tag{39}$$

ибо тождество (37) равносильно условию $d\Omega = 0$ для *симплектической формы* Ω. Многообразия, допускающие такую 2-форму, обязательно четномерны. Каноническим примером такого *симплектического многообразия* является следующая конструкция. Пусть имеется произвольное N-мерное многообразие M с координатами q^i. Обозначим через T^*M $2N$-мерное многообразие, точки которого параметризованы расширенным набором координат (p_i, q^j), где p_i – компоненты 1-форм пространства $T^*_q M$, имеющие физический смысл компонент импульса. На многообразии T^*M определена 2-форма $\Omega = dp_i\wedge dq^i$. Свойство $d\Omega = 0$ для нее очевидно. Нетрудно также убедиться, что она невырождена (тензор Ω_{ij} обратим), причем оба тензора Ω_{ij} и Λ^{ij} не зависят от координат, а скобки Пуассона и уравнения движения принимают хорошо известный гамильтонов вид

$$\{H,F\} = \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial F}{\partial q^i} - \frac{\partial H}{\partial q^i}\frac{\partial F}{\partial p_i}\,,\qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q^i}\,,\qquad \frac{dq^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}\,,\qquad \frac{dF}{dt} = \{H,F\}\,. \tag{40}$$