ВВЕДЕНИЕ В ВЫСШУЮ МАТЕМАТИКУ

А. А. Владимиров
ЛТФ ОИЯИ
alvladim@theor.jinr.ru

Содержание

ГЛАВА 1. Действительные числа 2
ГЛАВА 2. Пределы 8
ГЛАВА 3. Непрерывность 10
ГЛАВА 4. Дифференцирование 12
ГЛАВА 5. Ряды 18
ГЛАВА 6. Интегрирование 22

ПРИЛОЖЕНИЕ 1. Периодические дроби 25
ПРИЛОЖЕНИЕ 2. Бином Ньютона 26
ПРИЛОЖЕНИЕ 3. Комплексные числа 28
ПРИЛОЖЕНИЕ 4. Формальные ряды 31

Аннотация

Название данного пособия в точности отражает замысел автора: оно предназначено служить в качестве вводного, *самого первого* чтения по математическому анализу. Имеется в виду предлагать этот текст студентам, специализирующимся в области точных наук, в самом начале первого семестра для самостоятельного изучения с последующим разбором на занятиях и итоговым коллоквиумом. Возможно, изучение пятой и шестой глав более целесообразно отложить на начало второго семестра. Опять же по замыслу автора, результатом этого должно стать формирование у студентов *на самом старте обучения* наглядной и четкой первоначальной картины, показывающей стержневую основу, ядро математического анализа в виде вполне обозримого и логически связанного набора главных результатов и методов. Иными словами, хотелось бы добиться того, чтобы студенту-первокурснику высшая математика показалась логичной, компактной, а главное – *понятной* наукой, которой к тому же можно сразу реально пользоваться.

Пособие не ставит своей целью дублировать или улучшать учебники. У каждого своя задача. В данном тексте, например, совсем нет упражнений; точнее, единственным (как надеется автор – не слишком трудным) упражнением является понимание логики изложения. Подробный разбор однотипных ситуаций тоже, как правило, опускается. Добавим, что под стандартными учебниками ниже подразумеваются:

Г. М. Фихтенгольц. Основы математического анализа. Физматлит, 2002.

В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. Основы математического анализа. Физматлит, 2002.

С. М. Никольский. Курс математического анализа. Физматлит, 2001.

ГЛАВА 1. **Действительные числа**

Несмотря на то, что *действительные* (другое название – *вещественные*) числа впервые появляются уже в школьной программе, их все же следует относить к высшей математике, так как они теснейшим образом связаны с понятием *предела*. Вспомним, зачем мы от натуральных чисел (1, 2, 3, ...), на которых учились сложению и умножению, перешли к более широкому множеству $\mathbb{Z}$ всех целых чисел: мы хотели сделать *всегда* возможной операцию вычитания. Следующее расширение понятия числа – до множества $\mathbb{Q}$ *рациональных* чисел, т.е. всех простых дробей – было вызвано потребностью сделать возможной *почти всегда* (за исключением деления на 0) операцию деления. Чего же нам не хватало в множестве $\mathbb{Q}$, что побудило нас расширить его до множества действительных чисел $\mathbb{R}$? Непосредственным поводом к этому можно считать появление так называемых *иррациональных* (т.е. *не* рациональных) величин вроде $\sqrt{2}$ и π – нам их по многим причинам тоже хотелось бы считать числами (например, в качестве длины гипотенузы или окружности). Однако более глубокой (с математической точки зрения) причиной явилось желание найти (лучше сказать: зарезервировать) место для *пределов сходящихся числовых последовательностей* (все определения будут даны ниже). Представьте себе ситуацию: есть последовательность элементов из $\mathbb{Q}$, и есть веские основания считать ее стремящейся к некоторому пределу, – но вот самому этому пределу и не находится места в множестве $\mathbb{Q}$! Именно желание обеспечить (пусть не всегда, но в определенном разумном классе ситуаций) выполнимость предельных переходов и существование (в качестве чисел) самих предельных значений привело к формулировке понятия действительного числа и соответствующему расширению множества $\mathbb{Q}$: множество $\mathbb{R}$ получается из $\mathbb{Q}$ просто добавлением всех возможных предельных точек!

Другим важным мотивом к расширению множества рациональных чисел $\mathbb{Q}$ (и наглядным образом множества действительных чисел $\mathbb{R}$) является *числовая прямая*, или *числовая ось* – самая обычная (горизонтальная) прямая линия, бесконечная в обе стороны, с отмеченными точками 0 и 1 (правее нуля). Тем самым на прямой задан масштаб, и мы имеем возможность откладывать на ней (в виде расстояний от нуля) любые целые и рациональные числа. Но заполняют ли элементы $\mathbb{Q}$ *всю* числовую ось? Мы уже знаем, что нет: те же $\sqrt{2}$ и π тоже хотят получить на ней место, не будучи, однако, рациональными числами. Множество $\mathbb{Q}$ *плотно* на прямой (т.е. сколь угодно близко от любой точки найдется рациональное число – это следует из существования сколь угодно малых рациональных чисел), но не является в математическом смысле *полным* – существуют последовательности рациональных чисел, сходящиеся к иррациональным точкам. Поэтому нам хотелось бы получить в распоряжение такое множество чисел, которое пригодно для описания *всех* точек числовой оси. Ответ известен: *всю* числовую прямую заполняют как раз *действительные* числа.

Теперь можно сформулировать набор основных требований, которым мы хотели бы удовлетворить при построении действительных чисел: множество $\mathbb{R}$ должно находиться во взаимно-однозначном соответствии с точками числовой оси (поэтому числовую прямую и обозначают $\mathbb{R}^1$); предел сходящейся последовательности элементов из $\mathbb{R}$ должен и сам принадлежать $\mathbb{R}$ (множество $\mathbb{R}$ полно); все правила арифметики рациональных чисел должны сохранять силу и для чисел действительных.

Здесь речь идет о стандартных арифметических правилах обращения с рациональными (а как утверждается выше – и с действительными) числами – об известных

из школы свойствах сложения, умножения, деления и возведения в степень:

$$a+b=b+a\,,\quad (a+b)+c=a+(b+c)\,,\quad ab=ba\,,\quad (ab)c=a(bc)=abc\,, \tag{1}$$

$$(a+b)\,c=ac+bc\,,\quad a+0=a\,,\quad a\cdot 0=0\,,\quad a\cdot 1=a\,,\quad \frac{a}{a}=1\,, \tag{2}$$

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}\,,\quad \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}\,,\quad a^pa^q=a^{p+q},\quad (a^p)^q=a^{pq}\,,\quad (ab)^p=a^pb^p\,. \tag{3}$$

Поскольку проделывать алгебраические выкладки с точками на прямой затруднительно, нами будет явно построен альтернативный, цифровой образ действительного числа – бесконечная десятичная дробь. Так как все конечные (по длине их цифровой записи) десятичные дроби, равно как и некоторые бесконечные (так называемые *периодические*, см. Приложение 1), соответствуют рациональным числам, то на долю иррациональных действительных чисел остаются только непериодические бесконечные десятичные дроби. Их, впрочем, гораздо больше, чем остальных. Соответственно, мощность множества $\mathbb{R}$ (или мощность *континуума*) неизмеримо больше мощности (счетного) множества $\mathbb{Q}$.

Надо признать, что представление действительного числа в виде бесконечной десятичной дроби тоже не особенно удобно для практической работы. К сожалению, у нас нет ничего лучшего. Поэтому нам остается, используя свойства (1)-(3) для выполнения необходимых алгебраических выкладок, численные расчеты (если они понадобятся) проводить приближенно, аппроксимируя действительные числа рациональными (то есть, бесконечные десятичные дроби – конечными). При этом надо еще убедиться в применимости правил (1)-(3) к действительным числам: эта достаточно рутинная проверка описана во всех стандартных учебниках.

Теперь дадим несколько определений. Они сразу формулируются в виде, пригодном и для действительных чисел, которые мы еще только собираемся строить. Итак, (*числовой*) *последовательностью* $\{a_n\}$ называют *бесконечный* (это важно!) упорядоченный набор чисел, пронумерованный индексами $n=1,2,3,\ldots$. Последовательность $\{a_n\}$ *стремится к нулю*, если какое бы (сколь угодно малое) положительное число ε мы ни задали, найдется такой номер (натуральное число) N_ε, что при $n>N_\varepsilon$ все a_n окажутся по модулю меньше ε. В этом случае говорят также, что 0 является *пределом* последовательности $\{a_n\}$. Последовательность $\{a_n\}$ *стремится к числу* c, $a_n\to c$ (или: c является *пределом* последовательности $\{a_n\}$, $\lim_{n\to\infty}a_n=c$), если последовательность $\{a_n-c\}$ стремится к нулю:

$$\lim_{n\to\infty}a_n=c\ \text{ или }\ a_n\to c\ \text{ означает, что }\ \forall\,\varepsilon>0\ \ \exists\,N_\varepsilon\ :|a_n-c|<\varepsilon\ \text{ при }\ n>N_\varepsilon\,. \tag{4}$$

Смысл понятия предела вполне прозрачен: какую бы малую окрестность точки c мы ни задали, весь 'бесконечный хвост' последовательности, т. е. все ее элементы после некоторого номера N, окажутся внутри этой окрестности. При этом *вне* любой окрестности точки c останется лишь *конечное* число элементов данной последовательности – это можно считать альтернативным определением ее предела.

Следующее определение относится к менее тривиальной ситуации, когда самой предельной точки может и не существовать: назовем последовательность $\{a_n\}$ *сходящейся* (обычно такую последовательность называют *фундаментальной*, или *последовательностью Коши*), если для любого $\varepsilon>0$ найдется N_ε такое, что $|a_n-a_m|<\varepsilon$ для *всех* номеров n и m, превосходящих N_ε. Иначе говоря, начиная с некоторого номера N, вся оставшаяся бесконечная часть последовательности оказывается сконцентрированной внутри сколь угодно малого интервала наперед заданного размера.

Именно такого рода ситуацию мы и имели в виду в самом начале данной главы, когда говорили о последовательностях рациональных чисел, которые выглядят как сходящиеся, но не находят (внутри множества $\mathbb{Q}$) числа, которое стало бы их пределом. В отличие от $\mathbb{Q}$, множество действительных чисел $\mathbb{R}$ окажется *полным* – в нем, как мы увидим, любая сходящаяся последовательность имеет предел. Кстати говоря, последовательность, стремящаяся к некоторому пределу в смысле определения (4), будет с очевидностью сходящейся (ибо из $|a_n - c| < \varepsilon$, $|a_m - c| < \varepsilon$ следует $|a_n - a_m| < 2\,\varepsilon$), поэтому слова *стремиться к пределу* и *сходиться к пределу* можно воспринимать как полные синонимы.

Переходя к непосредственному построению множества $\mathbb{R}$, рассмотрим сначала пример. Известно, что иррациональное число $\sqrt{2}$ допускает *приближенное* представление *конечной* десятичной дробью со сколь угодно высокой точностью. Но это означает, что *на самом деле* оно должно быть записано в виде *бесконечной* десятичной дроби (иначе оно было бы рациональным):

$$\sqrt{2} = 1.41421356237309504880168872420 97\ldots \tag{5}$$

Именно такую (бесконечную) цифровую запись мы получили бы, если бы отложили на прямой отрезок, равный гипотенузе треугольника с единичными катетами, и стали измерять его, неограниченно уменьшая (начав с 1 и деля каждый раз на 10) деления нашей линейки. То же верно для *произвольной* точки на прямой и для любого иррационального числа, для которого известен рецепт приближенного вычисления. Поэтому, взяв *бесконечные* десятичные дроби в качестве *определения* действительных чисел (и рассматривая конечные дроби как частный случай бесконечных – например, можно дописывать к ним бесконечный хвост из нулей), мы сразу находим в новом множестве (назовем его $\mathbb{R}$) место для иррациональных чисел, и сопоставляем *каждой* точке прямой действительное число (обратное сопоставление уже не столь тривиально, мы обсудим его ниже).

Представление (5) дает, кроме всего прочего, полезный пример сходящейся последовательности. Расположим конечные аппроксимации числа $\sqrt{2}$ в порядке возрастания точности:

$$a_1 = 1.4\,, \quad a_2 = 1.41\,, \quad a_3 = 1.414\,, \quad a_4 = 1.4142\,, \quad a_5 = 1.41421\,, \quad \ldots \tag{6}$$

Увеличив в любом из a_n последнюю цифру на единицу (т.е. прибавив к нему 10^{-n}), мы уже получили бы число, большее $\sqrt{2}$. Отсюда ясно, что все a_n с номерами $n > N$ зажаты в интервале длины 10^{-N}, а значит и модуль разности между ними не может превосходить длины этого интервала. Таким образом, последовательность *рациональных* чисел $\{a_n\}$ – сходящаяся, но рационального предела она не имеет. Ее пределом является *действительное* число – бесконечная дробь (5).

Для дальнейшего нам понадобится еще несколько определений. Сплошной кусок числовой прямой между точками a и b назовем *отрезком* $[a, b]$, если он включает свои граничные точки, и *интервалом* (a, b) – если не включает. *Окрестностью* точки c называется любой интервал, содержащий эту точку. Под *ε-окрестностью* ($\varepsilon > 0$) обычно имеют в виду интервал $(c - \varepsilon, c + \varepsilon)$. Множество чисел (или точек) называется *ограниченным* сверху (снизу), если найдется число M, выше (ниже) которого чисел из этого множества нет. Говорят, что такое число M *ограничивает* наше множество (сверху или снизу), а если, кроме того, элементы данного множества найдутся в *любой* ε-окрестности точки M, то M называется (*верхней* или *нижней*) *гранью* этого множества. Если число M, ограничивающее множество (скажем,

сверху), и *само принадлежит* этому множеству, то оно, очевидно, является и его максимальным элементом, и его верхней гранью. Верхняя (нижняя) грань, если существует, обязана быть минимальным (максимальным) ограничивающим элементом данного множества, ибо существование ограничивающих элементов с *обеих* сторон от грани не позволило бы точкам множества находиться произвольно близко к ней, в противоречии с ее определением. Наконец, *сечением* числового множества называется разбиение его на две (непустые) части, верхнюю и нижнюю, причем каждый элемент множества принадлежит лишь одной из частей, и любое число из верхней части больше любого числа из нижней.

Теперь, чтобы завершить построение теории действительных чисел и попытаться охватить взором всю картину в целом, сформулируем главные свойства числовой прямой в виде следующих пяти тезисов (как мы увидим, эквивалентных друг другу):

1. Ограниченное сверху (снизу) множество имеет верхнюю (нижнюю) грань.

2. В сечении числовой прямой либо верхняя часть имеет минимальный элемент, либо нижняя часть имеет максимальный элемент.

3. Бесконечная последовательность вложенных (целиком) друг в друга отрезков, длина которых стремится к нулю, содержит общую точку.

4. Сходящаяся последовательность имеет предел.

5. Монотонная ограниченная последовательность имеет предел.

Обсудим эти утверждения подробно. Прежде всего заметим, что если мы ограничиваемся рассмотрением только рациональных чисел, то *ни одно* из этих пяти утверждений не является верным, что прекрасно видно из примера (5). Действительно, монотонная ограниченная последовательность (6) аппроксимантов числа $\sqrt{2}$, являясь к тому же сходящейся, *рационального* предела не имеет. В сечении множества $\mathbb{Q}$, нижнюю часть которого составляют все рациональные числа, меньшие $\sqrt{2}$, ни нижняя, ни верхняя части не имеют, соответственно, максимального и минимального *рационального* элемента, как не имеют они и (верхней и нижней) *рациональной* грани. Это следует из возможности сколь угодно близко приближаться к точному (иррациональному!) значению $\sqrt{2}$ рациональными аппроксимантами типа (6). Наконец, беря в качестве вложенных отрезки с рациональными краями вида $[a_n\,,\,a_n{+}10^{-n}]$, построенные на основе последовательности (6), легко убеждаемся, что ни одной общей *рациональной* точки эта система отрезков не содержит, так как расстояние между любым рациональным числом и $\sqrt{2}$ конечно, а длина отрезков стремится к нулю и любой из них содержит $\sqrt{2}$ как внутреннюю точку.

Итак, на множестве $\mathbb{Q}$ все пять наших тезисов неверны: все они утверждают существование некого числа, которого (как в нашем примере) может и не найтись среди *рациональных* чисел. Но нет худа без добра: зато *любое* из этих пяти утверждений можно, в принципе, использовать для конструктивного расширения множества $\mathbb{Q}$ до множества *действительных* чисел $\mathbb{R}$, просто *добавляя* к $\mathbb{Q}$ эти отсутствующие там числа. Но надо при этом еще убедиться, что новые числа, существование которых утверждается, задаются в каждом случае однозначно. Это почти очевидно: две *разные* точки всегда разделены *ненулевым* расстоянием и поэтому не могут *обе* принадлежать отрезку достаточно малой длины; одна и та же последовательность не может сходиться к двум разным пределам в силу невозможности существования

достаточно малой общей окрестности у *двух разных* чисел; минимальный и максимальный элементы единственны по определению; по этой же причине у числового множества не может быть двух верхних или нижних граней.

Определив $\mathbb{R}$ как множество, состоящее из бесконечных десятичных дробей, мы конструктивно использовали пятый тезис, объявив пределы (некоторых) монотонных ограниченных последовательностей рациональных чисел новыми, *действительными*, числами. Теперь нам надо разобраться в свойствах этих чисел и, в частности, *доказать* для них наши пять тезисов. Сначала мы продемонстрируем эквивалентность всех пяти, действуя по схемам $1 \to 5 \to 3 \to 2 \to 1$ и $3 \leftrightarrow 4$, т. е. сперва докажем эквивалентность друг другу тезисов 1, 2, 3 и 5, а потом – равносильность четвертого тезиса третьему, а значит и всем остальным.

$1 \to 5$ (выведем пятый тезис из первого). Согласно тезису 1, множество элементов ограниченной монотонной (для определенности – неубывающей) последовательности $\{a_n\}$ имеет верхнюю грань $M \geqslant a_n$. Она и будет пределом последовательности, ибо в любой окрестности точки M найдется некоторый элемент a_m, а значит и все элементы с бóльшими номерами тоже лежат в этой окрестности.

$5 \to 3$. Рассмотрим бесконечную последовательность вложенных отрезков стремящейся к нулю длины. Их левые (правые) края образуют неубывающую (невозрастающую) ограниченную последовательность. Согласно тезису 5, обе последовательности имеют предел – очевидно, один и тот же, ибо ненулевое расстояние между двумя *разными* предельными точками противоречило бы исчезающей длине отрезков. Этот предел и оказывается (единственной) общей точкой всех отрезков, так как он не может оказаться вне какого-то из них.

$3 \to 2$. Рассмотрим некоторое сечение прямой. Возьмем любой отрезок, левый край которого принадлежит нижней части, а правый – верхней. Разделим этот отрезок пополам и выберем ту половину, у которой снова левый край лежит в нижней, а правый – в верхней части. Продолжим такое деление неограниченно, каждый раз выбирая одну из половин по указанному принципу. Получим бесконечную последовательность вложенных отрезков исчезающей длины. Согласно тезису 3, у всех этих отрезков есть общая точка. Она и является либо максимальным элементом нижней части (если принадлежит ей), либо – минимальным для верхней части (в противном случае). Действительно, пусть общая точка оказалась в нижней части. Тогда в нижней части не может быть точки правее этой – иначе между ними втиснулся бы правый край какого-то отрезка, а он должен принадлежать верхней части.

$2 \to 1$. Имея некоторое ограниченное (скажем, сверху) множество, построим следующее сечение числовой прямой: к верхней части отнесем все числа, ограничивающие это множество сверху, а к нижней – все остальные. Из двух возможностей, предусмотренных тезисом 2, может реализоваться только одна – у верхней части есть минимальный элемент – ибо существование, напротив, максимального элемента у нижней части делало бы этот элемент тоже ограничивающим исходное множество, т.е. элементом верхней части. Но минимальный ограничивающий (сверху) элемент числовой прямой и есть верхняя грань: любое меньшее (но сколь угодно близкое) число, чтобы не оказаться ограничивающим, обязано иметь правее себя хоть один элемент исходного множества.

$3 \to 4$. Имеем сходящуюся последовательность. Возьмем числа 10^{-n} в качестве длин бесконечного набора отрезков. Расположим первый (наибольший) отрезок так, чтобы весь бесконечный хвост нашей последовательности, начиная с некоторого номера, поместился в нем. Второй (в десять раз меньший) отрезок расположим внутри первого так, чтобы в нем, в свою очередь, тоже уложился бесконечный хвост этой

же последовательности, но начиная, видимо, с бóльшего номера, и так до бесконечности. Общая точка (см. тезис 3) этой системы отрезков исчезающей длины и будет пределом последовательности.

$4 \to 3$. Последовательность, образованная левыми краями бесконечного набора вложенных отрезков стремящейся к нулю длины, сходится, так как ее бесконечный хвост содержится в очередном отрезке. Предел этой последовательности существует в силу тезиса 4. Как и в доказательстве $5 \to 3$ (см. выше), он является общей точкой для всех отрезков.

Эквивалентность всех пяти тезисов тем самым доказана. Значит, теперь достаточно установить справедливость какого-то одного из них применительно к случаю действительных чисел, и тогда будут доказаны все. Продемонстрируем выполнение тезиса 2 для элементов $\mathbb{R}$ – бесконечных десятичных дробей. Действуем по аналогии с примером (6): имея сечение числовой прямой, строим бесконечную дробь, последовательно подбирая цифры ее десятичной записи так, чтобы каждый (конечный) аппроксимант лежал в нижней части, но в случае увеличения цифры последнего разряда на единицу попадал бы в верхнюю. Построенная таким образом бесконечная десятичная дробь обязана принадлежать либо нижней части (и тогда будет ее максимальным элементом), либо верхней – и будет в ней минимальным. Действительно, попытка увеличить эту дробь (а для этого надо увеличить в ней хоть одну цифру) делает ее заведомо принадлежащей верхней части, а попытка уменьшения – нижней.

Подведем итоги. Множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$ было в математическом смысле *неполным* – сходящаяся последовательность могла там не иметь предела. Сформулированные нами пять (эквивалентных) тезисов, не будучи верными утверждениями в множестве $\mathbb{Q}$, послужили зато конструктивной основой для перехода к *полному* множеству $\mathbb{R}$ – множеству действительных чисел, или числовой прямой. Здесь каждая сходящаяся последовательность сходится не просто так, а к какому-то элементу из $\mathbb{R}$. При этом все пять тезисов приобретают характер теорем (о свойствах числовой прямой) и непосредственно доказываются. Но за нами еще остался небольшой долг – установить взаимно-однозначное соответствие между точками прямой линии (как *геометрического* объекта) и действительными числами. Выше мы без труда сопоставили каждой точке прямой действительное число. Обсудим теперь обратное сопоставление. Соответствует ли *каждой* бесконечной десятичной дроби какая-то *геометрическая* точка? Ясно, что это фактически есть вопрос о справедливости (любого из) наших пяти тезисов на *геометрической*, а не только на числовой прямой. Из аксиом геометрии мы помним, что две прямые пересекаются в точке. Это дает нам интуитивную уверенность, что *в любом месте* на прямой есть точка, что прямая линия – это *сплошное* образование, без пустот. Но при работе с *геометрическими* точками и линиями мы, к сожалению, не имеем столь же удобного конструктивного объекта, каким для нас являлась бесконечная десятичная дробь, и вынуждены поэтому принять один (любой) из пяти тезисов за геометрическую аксиому. Этим и будет достигнута необходимая формализация нашего интуитивного образа сплошной линии. Часто в качестве постулата берется тезис 3 ("Аксиома о вложенных отрезках"). Возможно, даже более наглядным было бы принятие за аксиому тезиса 2: любое сечение прямой производится какой-нибудь точкой (которая окажется краем одной из частей сечения), и никак иначе.

ГЛАВА 2. **Пределы**

В предыдущей главе мы ввели понятие предела последовательности и использовали его при построении множества действительных чисел $\mathbb{R}$ и изучении его свойств. В данной главе мы продолжаем изучение пределов последовательностей; понятие предела (и непрерывности) функции будет введено в следующей главе. Начиная с этого момента и далее, если не указано иное, под числами мы будем понимать действительные числа, т. е. элементы числовой прямой $\mathbb{R}$.

Математические понятия сходимости и предела определены лишь для *бесконечных* последовательностей. Более того, отбрасывание *любого конечного* числа начальных элементов последовательности никак не повлияет на ее предельные свойства – сходится она или нет, и к какому пределу. Действительно, во всех утверждениях о сходимости и пределах требовалось выполнение чего-то 'начиная с некоторого номера N и далее до бесконечности', так что если это выполнение имело место, то найдется, взамен отброшенного, новый номер, после которого все снова будет в порядке, а если не имело – то и теперь не найдется.

Оказывается, что если последовательность сходится, то можно отбросить и бесконечное число элементов – главное, чтобы число оставшихся было тоже бесконечным. Точное утверждение таково: любая подпоследовательность сходящейся последовательности сходится к тому же пределу. *Подпоследовательностью* называется любое бесконечное подмножество элементов исходной последовательности, пронумерованное натуральными индексами с сохранением первоначального порядка. Доказательство очевидно: если существовал номер N_ε, начиная с которого все элементы исходной последовательности лежали внутри заданной ε-окрестности, то и бесконечный хвост подпоследовательности тоже там окажется. Обратное утверждение неверно: последовательность, не имеющая предела, *может* иметь сходящуюся подпоследовательность (см. ниже).

Часто мы имеем дело с двумя (или более) сходящимися последовательностями. В какой степени отношения типа больше-меньше, справедливые для элементов последовательностей, сохраняются также и для их пределов? Ответ виден из следующего типичного примера:

$$a_n \to a\,,\quad b_n \to b\,,\quad a_n \leqslant b_n \qquad \Longrightarrow \qquad a \leqslant b\,, \tag{7}$$

(причем если бы даже между элементами последовательностей было точное неравенство, между пределами все равно осталось бы $\leqslant$). Доказательство ведется от противного: в случае $a > b$ при достаточно больших n элементы a_n окажутся вблизи точки a, а b_n – около точки b, в противоречии с условием $a_n \leqslant b_n$.

Весьма полезным оказывается также следующий результат:

$$a_n \to a\,,\quad c_n \to a\,,\quad a_n \leqslant b_n \leqslant c_n \qquad \Longrightarrow \qquad b_n \to a\,. \tag{8}$$

Действительно, элементы b_n, зажатые между a_n и c_n, при больших номерах обязательно окажутся в сколь угодно малой окрестности точки a.

Над последовательностями можно выполнять арифметические операции – почленно складывать, умножать и т.п. Простые рассуждения показывают, что их пределы (если существуют) при этом также складываются или умножаются: предел суммы равен сумме пределов и т.д. Рассмотрим в качестве примера доказательство одного из такого рода утверждений: предел отношений элементов двух сходящихся последовательностей равен отношению их пределов. Пусть $a_n \to a,\ b_n \to b,\ b \neq 0$.

Раз начиная с некоторого номера элементы b_n обязаны лежать в достаточно малой окрестности точки b, то лишь конечное их число может равняться нулю. Отбросим такие элементы (а заодно и a_n с соответствующими номерами) и будем считать $b_n \neq 0$. Рассмотрим разность

$$\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b} \;=\; \frac{b\,a_n - a\,b_n}{b\,b_n}\;. \tag{9}$$

Числитель правой части становится бесконечно малым при $n \to \infty$, а знаменатель стремится к $b^2 \neq 0$. Значит, разность в левой части тоже становится сколь угодно малой, что и требовалось доказать.

Осталось упомянуть еще о возможности *стремления к бесконечности*. Последовательность $\{b_n\}$ называют стремящейся к $\pm\infty$, если ее элементы неограниченно возрастают (убывают), становясь, начиная с некоторого номера, больше (меньше) любого наперед заданного числа. Конечно, такая последовательность не может быть *сходящейся*. Очевидно также, что в этом случае $1/b_n \to 0$.

Кроме последовательностей, сходящихся к конечному пределу или стремящихся к бесконечности, существует много последовательностей, не стремящихся *ни к чему*. Такова, например, последовательность $\{a_n\}$, элементы которой равны 0 при четных и 1 при нечетных n. Интересно, что даже такие последовательности имеют отношение к теории пределов: из *любой* последовательности можно выделить сходящуюся (если она ограничена с обеих сторон) или стремящуюся к бесконечности (если она не ограничена сверху или снизу) подпоследовательность. Рассмотрим сначала случай неограниченной (например, сверху) последовательности. Для каждого натурального числа в ней найдется элемент, превосходящий это число. Тем самым, нужная нам (стремящаяся к $+\infty$) подпоследовательность сформирована. Пусть теперь исходная последовательность ограничена и сверху и снизу, т. е. зажата между некоторыми двумя числами. Поделим отрезок, краями которого являются эти числа, пополам, и выберем ту половину, где содержится *бесконечное* число элементов нашей последовательности. Если такими окажутся обе половины, то возьмем любую. Продолжим процесс деления до бесконечности. Поскольку в любой окрестности общей точки полученной системы вложенных отрезков имеется бесконечно много элементов последовательности, то сходящаяся к этой точке подпоследовательность выбирается без труда. Из проведенного построения ясно, что точек, оказывающихся пределами каких-то подпоследовательностей, у исходной последовательности могло быть и несколько (но у сходящейся – только одна).

Ровно так же, делением отрезков пополам, доказывается и следующее утверждение: у любого бесконечного ограниченного подмножества числовой прямой имеется по меньшей мере одна *предельная точка*, т. е. точка (возможно, не принадлежащая самому подмножеству), в любой окрестности которой содержится бесконечно много элементов данного подмножества. Иногда предельных точек может быть очень много. Например, *счетное* множество рациональных точек некоторого отрезка имеет *континуум* предельных точек, поскольку ими оказываются *все* точки данного отрезка.

На этом мы закончим изучение пределов последовательностей. В стандартных учебниках рассмотрено большое количество примеров на эту тему, в том числе и самый знаменитый (и самый нужный для приложений) предел

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \doteq\; e \;=\; 2.71828182845904523536028747135266249775 7\ldots \tag{10}$$

ГЛАВА 3. **Непрерывность**

Понятие предела функции во многом аналогично понятию предела последовательности, ибо основная идея совершенно та же – начиная с некоторого момента, значения функции обязаны оказаться в (сколь угодно малой) наперед заданной окрестности предельного значения, только в случае последовательности слова "начиная с некоторого момента" означали "с некоторого номера N", а в случае функции – "при значениях аргумента из достаточно малой окрестности точки a". Точнее говоря,

$$\lim_{x\to a} f(x) = c \quad \text{означает, что} \quad \forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \delta_\varepsilon \,:\, |f(x) - c| < \varepsilon \quad \text{при} \;\; |x - a| < \delta_\varepsilon\,. \quad (11)$$

Ясно, что это определение равносильно следующему: для *любой* последовательности $\{x_n\}$ значений аргумента x, сходящейся к a, имеем $f(x_n) \to c$. Действительно, из определения (11) такое свойство последовательностей сразу вытекает. Обратное следование доказывается от противного: если бы $f(x)$ *не стремилась* к c, то сколь угодно близко от точки a мы бы находили значения x такие, что $|f(x)-c|$ оставалось бы больше заданного ε. Из таких x можно тогда сформировать сходящуюся к a последовательность, для которой $\{f(x_n)\}$ *не сходится* к c.

Пределы функций играют важную роль в математическом анализе – достаточно вспомнить такие классические примеры, как

$$\lim_{x\to 0} a^x = 1\,, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1\,, \qquad \lim_{x\to 0} (1+x)^{1/x} = e \quad (12)$$

(доказательство см. в учебниках). Вопрос о пределе функции важен и тогда, когда можно без всяких проблем найти значение функции f в точке a: здесь мы подходим к понятию *непрерывности* как условию согласованности (точнее, перестановочности) процедур взятия предела и вычисления значения функции. Функция $f(x)$, заданная в некоторой окрестности точки a, называется *непрерывной* в этой точке, если $f(x) \to f(a)$ при $x \to a$, т. е. если пределом функции при стремлении ее аргумента к a является ее значение в этой точке. Из другой формы записи, $\lim_{x\to 0} |f(a+x) - f(a)| = 0$, ясен смысл непрерывности: приращение функции исчезающе мало́ при стремлении к нулю приращения аргумента. Следует отметить, что *непрерывность в точке* далеко не всегда соответствует нашему интуитивному представлению о непрерывной функции как о 'линии без разрывов': например, непрерывной в нуле является функция $f(x)$, равная 0 в рациональных и x в иррациональных точках. Поэтому более естественно рассматривать функции, непрерывные *во всех точках* какого-то отрезка или интервала (мы будем их называть просто *непрерывными на отрезке* и т.п.).

Арифметические операции над непрерывными функциями оставляют их непрерывными – это следует из соответствующих свойств пределов. Сложная функция $f(g(x))$ с непрерывными f и g тоже будет непрерывной: стремление к нулю приращения x обусловит исчезающую малость приращения $g(x)$, а значит и $f(g(x))$.

Фундаментальным результатом теории непрерывных функций является следующая теорема: множеством значений непрерывной функции, заданной на отрезке, тоже является некоторый отрезок. Легко видеть, что здесь содержится сразу несколько утверждений: такая функция ограничена, достигает своего максимального и минимального значения, а также принимает и любое промежуточное значение. Заметим, что условие задания на отрезке существенно – например, на интервале строго монотонная функция не достигает максимального и минимального значения.

Теперь докажем сделанные утверждения. Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a,b]$. Если бы она была не ограничена (скажем, сверху), то нашлась бы последовательность $\{x_n\}$ значений аргумента с бесконечно растущими $f(x_n)$, сходящаяся к некоторой точке $x_0 \in [a,b]$. Это противоречило бы существованию определенного (конечного) значения непрерывной функции f в точке x_0. Значит, множество значений функции f ограничено сверху и, следовательно, имеет верхнюю грань M_+ (минимальный ограничивающий элемент). Покажем, что найдется точка $c \in [a,b]$ такая, что $f(c) = M_+$. Если бы это было не так, то функция $1/(f(x) - M_+)$ была бы хорошо определена, непрерывна и *ограничена* на $[a,b]$, т. е. значения функции f не приближались бы сколь угодно близко к M_+, в противоречии с определением верхней грани. Аналогично доказывается, что функция f достигает и своего минимального значения, которое обозначим M_-: найдется $c' \in [a,b]$ такое, что $f(c') = M_-$. Если $M_+ \neq M_-$, то остается еще доказать, что $f(x)$ принимает и произвольное значение M, заключенное между ними. Поделив отрезок $[c,c']$ пополам, возьмем для дальнейшего деления ту его половину, на краях которой значения функции f лежат *по разные стороны* от M. Продолжим процесс деления до бесконечности. В общей точке d получившейся системы отрезков функция f, в силу (8), обязана принять значение M, так как последовательности левых и правых краев отрезков сходятся к d, а значения функции f на левых и правых краях, зажимающие M с двух сторон, в силу непрерывности f сходятся к одному и тому же пределу $f(d)$.

Переходя к вопросу о непрерывности обратной функции, отметим, что для строго монотонной функции на отрезке непрерывность *равносильна* прохождению через любое промежуточное значение. В одну сторону мы это только что доказали. Пусть теперь $f(x)$ строго монотонна на отрезке $[a,b]$ и заполняет своими значениями весь отрезок $[f(a), f(b)]$. Покажем, что f непрерывна в произвольной точке $c \in [a,b]$. Действительно, любое число y в ε-окрестности $f(c)$ есть значение функции f в некоторой точке z. Выбирая такие y и y' по разные стороны от $f(c)$, мы видим, что попадание значений функции f в данную ε-окрестность гарантировано, если значения ее аргумента будут лежать между соответствующими z и z'. Как следствие, в указанной ситуации обратная к $f(x)$ функция существует (на отрезке $[f(a), f(b)]$), строго монотонна и тоже непрерывна. Этот результат широко используется в стандартных учебниках для демонстрации непрерывности элементарных функций в их естественной области определения.

ГЛАВА 4. **Дифференцирование**

Мы приступаем к изучению *локального* поведения непрерывных функций, т.е. их поведения вблизи какой-нибудь заданной точки. Как мы увидим, основными инструментами такого локального анализа оказываются так называемые *степенные разложения* и неразрывно связанное с ними *дифференцирование*, или взятие производных. Хотя понятие производной и ее физический (скорость изменения некоторой величины) и геометрический (тангенс угла наклона касательной к графику функции) смысл можно считать известными из школьной программы, ниже будут даны все необходимые определения и приведены формулы дифференцирования базовых элементарных функций.

Итак, рассмотрим некоторую непрерывную функцию f при значениях ее аргумента, близких к точке a – иначе говоря, будем изучать функциональную зависимость $f(a+x)$ при x лежащих в некоторой окрестности нуля. Окрестность эта может быть взята сколь угодно малой, так как в данной главе нас в основном будет интересовать поведение $f(a+x)$ лишь при бесконечно малых x. Начнем с введения удобных обозначений, специально предназначенных для описания поведения функций при стремлении их аргумента x к нулю. Эти обозначения таковы: $o(x^n)$ (читается: о малое от x^n) и $\mathcal{O}(x^n)$ (читается: о большое от x^n); степень n будем считать целым неотрицательным числом, вместо $o(x^0)$ и $\mathcal{O}(x^0)$ принято писать $o(1)$ и $\mathcal{O}(1)$. Запись $g(x) = o(x^n)$ означает, что функция $g(x)$, непрерывная в некоторой окрестности нуля, при $x \to 0$ сама стремится к нулю, причем быстрее чем x^n:

$$g(x) = o(x^n) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{g(x)}{x^n} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0\,. \tag{13}$$

Об этой же ситуации можно сказать и по-другому: $g(x)$ пренебрежимо мала по сравнению с x^n, или: $g(x)$ – величина более высокого порядка малости, чем x^n.

В свою очередь, запись $g(x) = \mathcal{O}(x^n) \equiv \sim x^n$ означает, что $g(x)$ при $x \to 0$ стремится к нулю с той же скоростью (является величиной того же порядка малости), что и x^n, а значит, их отношение стремится к некоторому конечному пределу c:

$$g(x) = \mathcal{O}(x^n) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{g(x)}{x^n} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} c\,, \tag{14}$$

причем константе c в правой части позволим быть и нулем: просто в этом случае вместо ожидаемого поведения $g(x) \sim x^n$ по каким-то случайным обстоятельствам мы получили более быстрое стремление к нулю, скажем, $g(x) \sim x^{n+1}$ – будем считать, что так даже лучше.

Ясно, что $g(x) = o(1)$ означает просто $g(0) = 0$, а $g(x) = \mathcal{O}(1)$ – что $g(0)$ может вообще равняться любому числу. Очевидно также, что $bx^n = \mathcal{O}(x^n) = o(x^m)$ для $m < n$ и произвольного числа b, что $\mathcal{O}(x^n)\,\mathcal{O}(x^m) = \mathcal{O}(x^{n+m})$, и т. п.

Вернемся теперь к анализу поведения функции f вблизи точки a. В только что введенных обозначениях условие ее непрерывности имеет вид $f(a+x) = f(a) + o(1)$. Предположим теперь, что функция f не только непрерывна, но и *дифференцируема* в точке a, т. е. в этой точке существует ее производная $f' \equiv df/dx$. По определению,

$$f'(a) \doteq \lim_{x\to 0} \frac{f(a+x) - f(a)}{x} \qquad \text{или} \qquad f(a+x) = f(a) + f'(a)\,x + o(x)\,, \tag{15}$$

и мы видим, что наши знания о локальном поведении функции f несколько углубились. Еще более детальную информацию о ее локальном поведении дает предположение о существовании у нее в окрестности точки a производных *любого порядка*.

Будем обозначать через $f^{(n)}$ производную n-ого порядка от функции f (результат ее n-кратного дифференцирования). Обычно, правда, пишут f', f'' вместо $f^{(1)}, f^{(2)}$. Тогда справедливо следующее весьма полезное представление, которое мы будем называть *степенным разложением*:

$$f(a+x) = f(a) + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_n x^n + \mathcal{O}(x^{n+1}), \qquad b_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \tag{16}$$

(обычно его называют *рядом Тейлора с остаточным членом в форме Пеано*). Данная ситуация (существование производных любого порядка) типична для элементарных, да и многих других функций: как правило, она имеет место везде, кроме отдельных точек. Вообще, начиная с этого момента будем считать рассматриваемые функции *гладкими*, т. е. непрерывными и дифференцируемыми любое число раз (если явно не оговорено иное), оставляя рассмотрение более общего случая стандартным учебникам. При этом упростятся формулировки теорем; логическую же схему доказательств мы сознательно не станем упрощать.

Обсудим теперь смысл формулы (16). Она *не является* числовым равенством: x в ней *нельзя* полагать равным конкретному числу (кроме разве что нуля), как нельзя его считать числом и под знаком $\mathcal{O}(x^n)$ или $o(x^n)$. Формула (16) описывает *локальное* поведение функции f вблизи точки a: она утверждает, что с точностью до членов $\sim x^{n+1}$ поведение $f(a+x)$ при $x \to 0$ *совпадает* с поведением полинома $f(a)+b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_n x^n$ в том смысле, что *разность* между $f(a+x)$ и этим полиномом стремится к нулю столь же быстро, как и x^{n+1}. Причем в данном рассуждении, как и в самой формуле (16), предполагается, что n можно брать произвольно большим. Но тогда напрашивается другая форма записи соотношения (16),

$$f(a+x) = f(a) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\, x^n\,. \tag{17}$$

Корректна ли она? Безусловно, да, если понимать (17) как *точный синоним* формулы (16), а сумму в правой части – как *формальный ряд* (см. Приложение 4) по степеням абстрактной переменной x, не принимающей числовых значений. Более естественно, однако, приберечь форму записи (17) для случая *степенного ряда* (см. следующую главу), когда эту формулу мы будем трактовать как *числовое равенство*, где x может принимать конкретные *числовые* значения, а сумма в правой части есть *бесконечная сумма* чисел, относительно которой правомочен вопрос о ее существовании (сходимости). Заметим, что в представлении (16) никаких бесконечных сумм нет. Еще одно замечание: дифференцируя почленно формулу (17), мы автоматически воспроизводим степенное разложение для f' и высших производных функции f.

Путь к доказательству степенного разложения (16) мы начнем с установления его эквивалентности так называемому *правилу Лопиталя*, сводящему нахождение предела отношения двух функций к вычислению отношения их первых (или высших) производных. Пусть функции h и g в точке a равны нулю вместе со своими производными до порядка $n-1$ включительно, и $g^{(n)}(x)$ не обращается в нуль в некоторой окрестности a. Тогда

$$\lim_{x\to a} \frac{h(x)}{g(x)} \;=\; \frac{h^{(n)}(a)}{g^{(n)}(a)}\,. \tag{18}$$

Вывод этого правила из (16) очевиден; в обратную сторону утверждение доказывают,

выбирая

$$h(x) = f(a+x) - f(a) - f'(a)\,x - \ldots - \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}\,x^{n-1}, \qquad g(x) = x^n, \qquad x \to 0\,. \quad (19)$$

Получение же самого́ правила Лопиталя мы совместим с доказательством нескольких полезных теорем дифференциального исчисления.

Из определения (15) следует, что в точке экстремума (максимума или минимума) функции ее производная равна нулю. Действительно, в случае $f'(a) > 0$, при достаточно малых x знак $f(a+x) - f(a)$ совпадал бы со знаком x, т. е. менялся бы при переходе через 0, что несовместимо с экстремумом в точке a. Аналогично для $f'(a) < 0$. Обратное утверждение, кстати, неверно: функция x^3 возрастающая и экстремумов не имеет, а ее производная в нуле равна 0.

Установим теперь следующий простой факт (называемый теоремой Ролля): если функция имеет равные значения на концах отрезка, то найдется *внутренняя* точка этого отрезка, в которой ее производная равна нулю. Наша функция (по предположению – непрерывная) достигает на отрезке своего минимального и максимального значения. Если эти значения не равны друг другу, то хотя бы одно из них достигается *внутри* отрезка, – именно в этой точке и равна нулю производная.

Теперь мы можем вывести исключительно полезную формулу

$$\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} \;=\; \frac{f'(c)}{g'(c)} \qquad\qquad (a < c < x) \quad (20)$$

выражающую отношение приращений (конечных, не бесконечно малых!) двух функций через отношение их производных во внутренней точке отрезка $[a, x]$. Примем, что g' не равно нулю внутри этого отрезка. Тогда по теореме Ролля $g(x) - g(a) \neq 0$, и знаменатели в (20) не обращаются в нуль. Зададим вспомогательную функцию

$$F(y) = f(y) - f(a) - \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)}\,[g(y) - g(a)]\,. \quad (21)$$

Поскольку $F(x) = 0 = F(a)$, то ее производная обратится в 0 в какой-нибудь промежуточной точке c:

$$f'(c) - g'(c)\,\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} \;=\; 0 \qquad\qquad (a < c < x)\;, \quad (22)$$

откуда и следует (20).

Если $f(a) = g(a) = 0$, то из (20) вытекает

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{c \to a} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}\,, \quad (23)$$

ибо c стремится к a вместе с x. В случае $f'(a) = g'(a) = 0$ применим ту же процедуру снова, на этот раз к отношению $\frac{f'(x)}{g'(x)}$, и т.д. В конце концов мы придем к правилу Лопиталя (18). Формула степенного разложения (16) тем самым тоже установлена.

Представление (16) идеально подходит для вычисления пределов функций в соответствующих точках, и особенно для *раскрытия неопределенностей* вида $\frac{0}{0}$ (так называют ситуацию, описанную перед формулой (18)). Но как получаются сами степенные разложения для конкретных функций? Для этого, судя по (16), надо

знать их производные. С другой стороны, из определения (15) мы можем заключить, что нахождение производной от функции уже требует некоторой информации о ее локальном поведении. И если в простейшем случае функции $f(x) = x^n$ с целым n такая информация добывается без труда из формулы бинома Ньютона (см. Приложение 2), то для других функций нам приходится использовать более изощренные средства. Рассмотрим подробно процедуру нахождения производных и построения степенных разложений для базовых элементарных функций.

Начнем с основных свойств операции дифференцирования. Во-первых, она линейна: $(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'$. Согласно второму равенству в (15), производная функции в некоторой точке равна коэффициенту при первой степени x ее степенного разложения в этой точке. Применим этот факт для получения правила дифференцирования произведения

$$(fg)' = f'g + fg' . \tag{24}$$

Действительно,

$$\begin{aligned} f(a+x)\, g(a+x) &= [f(a) + x f'(a) + o(x)]\, [g(a) + x\, g'(a) + o(x)] \\ &= f(a)\, g(a) + [f'(a)\, g(a) + f(a)\, g'(a)]\, x + o(x) . \end{aligned} \tag{25}$$

Аналогично доказывается формула для производной от *сложной функции*:

$$f(g(a+x)) = f(g(a) + x\, g'(a) + o(x)) = f(g(a)) + x\, g'(a) f'(g(a)) + o(x) , \tag{26}$$

поэтому

$$\Phi(y) = f(g(y)) \qquad \Longrightarrow \qquad \Phi'(y) = f'(g(y)) \cdot g'(y) . \tag{27}$$

Полезным частным случаем формулы (27) является правило дифференцирования *обратной функции*:

$$f(g(y)) = y \qquad \Longrightarrow \qquad g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))} . \tag{28}$$

Если при этом функции f и g *взаимно обратны* (как это обычно и бывает), то они входят в игру симметрично, поскольку справедливы также и соотношения

$$g(f(y)) = y , \qquad\qquad f'(y) = \frac{1}{g'(f(y))} . \tag{29}$$

Теперь перейдем непосредственно к элементарным функциям. Чтобы не выписывать формулы дважды, приведем сразу базовый список производных,

$$(x^\alpha)' = \alpha\, x^{\alpha-1} , \quad (e^x)' = e^x , \quad (\ln x)' = \frac{1}{x} , \quad (\sin x)' = \cos x , \quad (\cos x)' = -\sin x , \tag{30}$$

и сопутствующие степенные разложения,

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha\, x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}\, x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-m+1)}{m!}\, x^m + \mathcal{O}(x^{m+1}) \tag{31}$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \ldots + \frac{x^m}{m!} + \mathcal{O}(x^{m+1}) \tag{32}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{m+1}\, \frac{x^m}{m} + \mathcal{O}(x^{m+1}) \tag{33}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \ldots + (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} + \mathcal{O}(x^{2m+3}) \tag{34}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \ldots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} + \mathcal{O}(x^{2m+2}) \tag{35}$$

Получение этих формул начнем с логарифма. Третий предел в (12) означает $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(1+x)=1$, а следовательно

$$\ln(1+x)=x+o(x)\,,\qquad \ln(a+x)=\ln a+\ln(1+\frac{x}{a})=\ln a+\frac{x}{a}+o(x)\,, \tag{36}$$

откуда и вытекает рецепт дифференцирования $\ln x$. Воспользовавшись правилом (28), проверяем формулу для производной от экспоненты,

$$(e^x)'=\frac{1}{\ln'(e^x)}=e^x \qquad\Longrightarrow\qquad e^x=1+x+o(x)\,, \tag{37}$$

а затем и от степенной функции:

$$(a+x)^\alpha=a^\alpha\,e^{\alpha\ln(1+x/a)}=a^\alpha\,e^{\alpha x/a\,+\,o(x)}=a^\alpha(1+\frac{\alpha x}{a}+o(x))=a^\alpha+\alpha a^{\alpha-1}x+o(x)\,. \tag{38}$$

Полагая в (30) $\alpha=-1$, найдем полезное правило дифференцирования частного:

$$(\frac{1}{x})'\;\equiv\;(x^{-1})'\;=\;-\frac{1}{x^2}\qquad\Longrightarrow\qquad(\frac{1}{f})'\;=\;-\frac{f'}{f^2}\,. \tag{39}$$

Разложения (31)–(33) теперь легко проверяются m-кратным дифференцированием соответствующих функций.

Для тригонометрических функций, в силу (12) и (31), имеем

$$\sin x=x+o(x)\,,\qquad \cos x=(1-\sin^2x)^{1/2}=1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\,, \tag{40}$$

что позволяет без труда проверить формулы как для их производных,

$$\sin(a+x)\;=\;\sin a\;\cos x\;+\;\cos a\;\sin x\;=\;\sin a+\;x\,\cos a+o(x)\,, \tag{41}$$

$$\cos(a+x)\;=\;\cos a\;\cos x\;-\;\sin a\;\sin x\;=\;\cos a-x\,\sin a+o(x)\,, \tag{42}$$

так и для степенных разложений (34), (35). Производные и степенные разложения для других элементарных функций получаются из (30)–(35) с помощью установленных выше правил дифференцирования (или могут быть найдены в справочниках).

До сих пор, изучая локальное поведение функций, мы имели дело со стремлением самих функций и их аргументов к некоторым *конечным* пределам. Стремление к *бесконечности* требует особого рассмотрения. Для случая $x\to\infty$ правило Лопиталя (18) легко модифицируется путем (временной) замены аргумента x на $y=1/x\to 0$:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{h(x)}{g(x)}\;=\lim_{y\to 0}\frac{h(1/y)}{g(1/y)}\;=\lim_{y\to 0}\frac{h^{(n)}(1/y)}{g^{(n)}(1/y)}\;=\lim_{x\to\infty}\frac{h^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}\,. \tag{43}$$

При стремлении же к бесконечности *самих функций* искомый результат

$$\lim_{x\to b}f(x)=\lim_{x\to b}g(x)=\infty\qquad\Longrightarrow\qquad\lim_{x\to b}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to b}\frac{f'(x)}{g'(x)} \tag{44}$$

нуждается в отдельном обосновании. Расположим b, x и еще одну точку a так, что $a<x<b$, и применим формулу (20) к отрезку $[a,x]$, преобразовав ее к виду

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}\,\frac{1-\frac{g(a)}{g(x)}}{1-\frac{f(a)}{f(x)}}\qquad\qquad(a<c<x) \tag{45}$$

Если a выбрано достаточно близко к b, то и отношение $f'(c)/g'(c)$ окажется в достаточно малой окрестности своего предельного значения (если предел этого отношения при $c \to b$ конечен, или достаточно большим – если он бесконечен). Теперь (в силу неограниченного роста функций f и g) мы можем, устремив x к b и уже не трогая a, добиться того, чтобы вторая (многоэтажная) дробь в правой части (45) сколь угодно мало отличалась от единицы, а левая часть – от предела отношения производных.

Этот вариант правила Лопиталя помогает раскрывать неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$. Например, при положительных n

$$\lim_{x\to 0} x^n \ln x \;=\; \lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{x^{-n}} \;=\; \lim_{x\to 0} \frac{(\ln x)'}{(x^{-n})'} \;=\; -\lim_{x\to 0} \frac{x^n}{n} \;=\; 0\,, \tag{46}$$

$$\lim_{x\to \infty} \frac{\ln x}{x^n} \;=\; \lim_{x\to \infty} \frac{(\ln x)'}{(x^n)'} \;=\; \lim_{x\to \infty} \frac{x^{-n}}{n} \;=\; 0\,, \tag{47}$$

$$\lim_{x\to \infty} \frac{e^x}{x^n} \;=\; \lim_{x\to \infty} \frac{(e^x)'}{(x^n)'} \;=\; \lim_{x\to \infty} \frac{(e^x)^{(n)}}{(x^n)^{(n)}} \;=\; \lim_{x\to \infty} \frac{e^x}{n!} \;=\; \infty\,, \tag{48}$$

т. е. экспонента растет быстрее, а логарифм – медленнее любой степени.

В заключение этой главы коснемся вопроса о *частных производных*. Пусть, например, имеется функция от *двух* аргументов $f(u,v)$. Ясно, что, фиксируя один из них, мы можем изучать ее зависимость от оставшегося аргумента и при этом пользоваться всеми результатами, полученными выше – например, вычислять производные. Такие производные принято называть *частными* и обозначать $f'_u \equiv \partial_u f$ и $f'_v \equiv \partial_v f$:

$$f'_u(u,v) = \partial_u f(u,v) \doteq \lim_{x\to 0} \frac{f(u+x,v) - f(u,v)}{x}\,, \tag{49}$$

$$f'_v(u,v) = \partial_v f(u,v) \doteq \lim_{x\to 0} \frac{f(u,v+x) - f(u,v)}{x}\,, \tag{50}$$

откуда следует $f(u+x,v) = f(u,v) + f'_u(u,v)\,x + o(x)$ и т. п. Аналогично вводятся частные производные функций с бóльшим числом аргументов. Важным свойством (кратных) частных производных является их независимость от порядка выполнения дифференцирований, например, $\partial_u\,\partial_v f = \partial_v\,\partial_u f$.

Правило дифференцирования сложной функции в случае частных производных несколько модифицируется. Идею проще всего проиллюстрировать на примере. Так, для $f(u(t),v(t))$ имеем $df/dt = f'_u\,u'(t) + f'_v\,v'(t)$. Действительно,

$$\begin{aligned} f(u(t+x)\,,\,v(t+x)) &= f(u(t)+u'(t)\,x+o(x)\,,\,v(t)+v'(t)\,x+o(x)) \\ &= f(u(t)\,,\,v(t)) \;+ x\,[\,f'_u(u(t),v(t))\,u'(t) + f'_v(u(t),v(t))\,v'(t)\,] + \;o(x)\,. \end{aligned} \tag{51}$$

Обобщение на случай большего числа переменных очевидно.

Заодно получим рецепт дифференцирования *неявной функции*. Так обычно называют функцию $v(u)$ *одного* аргумента, заданную условием вида $f(u,\,v(u)) = 0$, т. е. через посредство некоторой функции $f(u,v)$ от *двух* аргументов. Способ нахождения $v'(u)$ таков:

$$0 \;=\; \frac{df(u,\,v(u))}{du} \;=\; f'_u(u,\,v(u)) + f'_v(u,\,v(u))\,v'(u) \qquad\Longrightarrow\qquad v'(u) \;=\; -\frac{f'_u(u,v)}{f'_v(u,v)}\,. \tag{52}$$

ГЛАВА 5. **Ряды**

Данная глава представляет собой краткое введение в теорию рядов, в том числе степенных рядов вида (17). Числовым *рядом* называют *бесконечную сумму* вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \;\doteq\; \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} u_n \qquad (u_n \in \mathbb{R}) \;. \tag{53}$$

Основным здесь, конечно, является вопрос о *существовании* указанного предела, причем бесконечный 'предел' не считается: ряд (53) называется *сходящимся*, если существует *конечный* предел S его *частичных сумм* $S_N = \sum_{n=1}^{N} u_n$ при $N \to \infty$; число S в этом случае называют *суммой* ряда (53). В противном случае ряд называется *расходящимся*. Идентичность понятий сходимости *ряда* и сходимости *последовательности* $\{S_N\}$ к конечному пределу означает, в силу результатов главы 1, равносильность следующих утверждений:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lim_{N\to\infty} \sum_{n=N+1}^{N+p} u_n \;=\; \lim_{N\to\infty} \sum_{n=N+1}^{\infty} u_n \;=\; 0 \tag{54}$$

(любой достаточно удаленный кусок сходящегося ряда, конечный или бесконечный, становится сколь угодно мал). Как и в случае последовательностей, отбрасывание любого конечного числа начальных членов суммы (53) не влияет на сходимость ряда.

Очевидно (например, это следует из (54) с $p = 1$), что элементы u_n сходящегося ряда и сами стремятся к нулю: $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$. Это условие, однако, ни в коей мере не является достаточным для сходимости ряда: ему могут удовлетворять как сходящиеся, так и расходящиеся ряды. Из школьной программы известен пример сходящегося ряда (87), частичные суммы которого легко вычисляются,

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^{N-1} \;=\; \frac{(1+q+q^2+\ldots+q^{N-1})(1-q)}{1-q} \;=\; \frac{1-q^N}{1-q} \;\xrightarrow[N\to\infty]{}\; \frac{1}{1-q} \;.$$

Элементы этого ряда, q^n, при $|q| < 1$ стремятся к нулю (и ряд сходится), а при $|q| \geqslant 1$ не стремятся, и ряд расходится. Однако элементы известного *гармонического ряда*

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \;\ldots \tag{55}$$

тоже стремятся к нулю, но сам ряд тем не менее расходится. Мы привели так много членов этого ряда, чтобы его расходимость была сразу видна из сравнения с рядом

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \;\ldots \tag{56}$$

элементы которого *не превосходят по величине* соответствующие члены ряда (55), но который явно расходится, так как сводится к бесконечной сумме половинок.

Вообще, сравнение (элементов) данного ряда с некоторым другим, свойства которого известны, является одним из наиболее эффективных методов изучения рядов. Будем сначала рассматривать ряды с *неотрицательными* элементами. Последовательность частичных сумм такого ряда монотонна, поэтому условием ее сходимости (а значит и сходимости ряда) является ее ограниченность. Отсюда вытекает, что ряд (53) сходится, если сходится некоторый другой ряд с элементами u'_n, и $u_n \leqslant K u'_n$,

где K – положительная константа. На сравнении с геометрической прогрессией (87) основан *признак Даламбера*: если (возможно, начиная с некоторого номера) $u_{n+1}/u_n \leqslant q < 1$, то такой ряд сходится. Действительно, в этом случае $u_{n+1} \leqslant q^n u_1$. Важно, что условие *нельзя* заменить просто на $u_{n+1}/u_n < 1$. Можно, однако, переформулировать признак так: если $\lim_{n\to\infty} u_{n+1}/u_n < 1$, то ряд сходится (выбрав q между предельным значением и единицей, дождемся попадания u_{n+1}/u_n в малую окрестность своего предела). Абсолютно так же доказывается *признак Коши*: если $\sqrt[n]{u_n} \leqslant q < 1$ (или $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} < 1$), то ряд сходится.

Для сходимости *знакочередующихся* рядов достаточно монотонного стремления их элементов к нулю (*признак Лейбница*):

$$0 < u_{n+1} \leqslant u_n\,, \quad u_n \to 0 \qquad \Longrightarrow \qquad u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + u_5 - u_6 + \ldots = S\,. \tag{57}$$

Действительно, частичные суммы (четного числа элементов) S_{2k} монотонно растут, оставаясь при этом меньше u_1 – следовательно, они имеют некий конечный предел S. Но к нему же стремятся и остальные S_{2k+1} в силу $S_{2k+1} = S_{2k} + u_{2k+1}$. В учебниках обычно приводятся еще несколько признаков сходимости рядов.

Со знакопеременными рядами (не обязательно с точным чередованием знаков) связаны понятия *абсолютной* и *условной* сходимости. Рассмотрим ряд вида (53), и пусть известно, что ряд с элементами $|u_n|$ сходящийся. Тогда сходится и исходный ряд (53): любую его частичную сумму можно разбить на две части – одна состоит из положительных, другая – из отрицательных элементов; обе части ограничены (иначе расходился бы ряд из модулей) и, значит, имеют пределы; разность этих пределов и будет суммой исходного ряда. Говорят, что ряд вида (53) сходится *абсолютно*, если сходящимся является и ряд с элементами $|u_n|$; в противном случае говорят, что ряд сходится *условно*.

Займемся теперь изучением *степенных рядов*. Основным примером таких объектов для нас будут ряды вида (17), но в отличие от предыдущей главы, мы теперь считаем x *числовым параметром*, притом не обязательно малым. Элементы степенных рядов принято нумеровать с нуля,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad\qquad (x,\, a_n \in \mathbb{R}) \tag{58}$$

Степенные ряды характеризуются следующим замечательным свойством: если ряд вида (58) сходится при каком-то значении $x = x_0$, то он сходится абсолютно при любом x, удовлетворяющем $|x| < |x_0|$. Действительно,

$$|a_n x^n| \;=\; |a_n x_0^n| \cdot |x/x_0|^n \;\leqslant\; c\,|x/x_0|^n\,,$$

ибо элементы $a_n x_0^n$ сходящегося ряда стремятся к нулю, а значит ограничены по модулю. Отсюда логично возникает важное понятие *радиуса сходимости* степенного ряда: назовем так верхнюю грань r значений x, для которых данный ряд сходится (множество таких x непусто, так как $x = 0$ точно ему принадлежит). При $|x| < r$ ряд абсолютно сходится (ведь точки сходимости есть сколь угодно близко к грани), а при $|x| > r$ он расходится (иначе удалось бы поднять грань). Если ряд сходится при любых x, то полагают $r = \infty$. Имеет место полезная формула

$$r^{-1} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|. \tag{59}$$

Действительно, поскольку тогда

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \;=\; \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| \;=\; |x|\,\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \;=\; \frac{|x|}{r}\;, \tag{60}$$

то по признаку Даламбера ряд абсолютно сходится при $|x|<r$, а при $|x|>r$ модули его элементов, начиная с некоторого, вообще не убывают – значит, он расходится.

Обратимся теперь непосредственно к степенным рядам (17). Здесь нужно различать две задачи: во-первых, найти радиус r сходимости соответствующего ряда (как правило, это не слишком сложно), а во-вторых – показать, что сумма ряда (она существует при $|x|<r$) совпадает при этих x со значением функции в левой части. Обе эти задачи можно решить одновременно, если суметь доказать стремление к нулю (при $n\to\infty$) *остаточного члена* $R_{n+1}(x)$, определяемого соотношением

$$f(a+x) \;=\; f(a) \;+\; \sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,x^k \;+\; R_{n+1}(x)\,, \tag{61}$$

которое носит название *ряда Тейлора*. Смысл формулы понятен – от величины $R_{n+1}(x)$ зависит точность аппроксимации значений функции полиномом степени n.

Попробуем получить явное выражение для $R_{n+1}(x)$. Определим функцию

$$\varphi(z) = f(a+x) - f(a+z) - \sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(a+z)}{k!}\,(x-z)^k\,, \qquad 0\leqslant z\leqslant x \tag{62}$$

и продифференцируем ее по z:

$$\varphi'(z) = -f'(a+z) - \sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k+1)}(a+z)}{k!}\,(x-z)^k + \sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(a+z)}{(k-1)!}\,(x-z)^{k-1}\,. \tag{63}$$

В правой части сокращаются все слагаемые кроме одного. В итоге имеем

$$\varphi(0) = R_{n+1}(x)\,, \qquad \varphi(x) = 0\,, \qquad \varphi'(z) = -\frac{f^{(n+1)}(a+z)}{n!}\,(x-z)^n\,. \tag{64}$$

Теперь применим формулу (20) на отрезке $[0,\,x]$ к функции $\varphi(z)$ и какой-нибудь другой функции $\psi(z)$, чья производная не обращалась бы в нуль внутри этого отрезка:

$$\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{\psi(x)-\psi(0)} = \frac{\varphi'(c)}{\psi'(c)}\,. \tag{65}$$

Точку c лежащую внутри отрезка $[0,\,x]$ обычно записывают в виде $c=\theta x,\ 0<\theta<1$. Мы получили представление для остаточного члена ряда Тейлора в терминах (пока почти произвольной) функции ψ:

$$R_{n+1}(x) \;=\; \frac{\psi(x)-\psi(0)}{\psi'(\theta x)}\;\;\frac{f^{(n+1)}(a+\theta x)\,(x-\theta x)^n}{n!}\;. \tag{66}$$

Выбирая, например,

$$\psi(z)=(x-z)^{n+1} \qquad\Longrightarrow\qquad \psi(0)=x^{n+1}\,,\quad \psi(x)=0\,,\quad \psi'(c)=-(n+1)(x-\theta x)^n\,,$$

получаем остаточный члена ряда Тейлора *в форме Лагранжа*,

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(a+\theta x)}{(n+1)!}\;x^{n+1}\,, \tag{67}$$

а при выборе

$$\psi(z) = x - z \qquad \Longrightarrow \qquad \psi(0) = x\,, \quad \psi(x) = 0\,, \quad \psi'(c) = -1\,,$$

– *в форме Коши*:

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(a+\theta x)\,(1-\theta)^n}{n!}\,x^{n+1}\,. \tag{68}$$

Воспользуемся представлением (67) с $a = 0$ для проверки того факта, что степенные ряды (32), (34) и (35), взятые в форме (17), сходятся *при всех* значениях параметра x именно к значениям соответствующих функций. Действительно, хотя θ следует считать зависящим от n, но производные от синуса и косинуса все равно ограничены по модулю единицей, а для экспоненты $|f^{(n+1)}(\theta x)| \leqslant e^x$. Отношение же $x^{n+1}/(n+1)!$ стремится к нулю при $n \to \infty$. Чтобы показать это, рассмотрим последовательность $a_n = b^n/n!$ для $b > 0$. В силу $|a_{n+1}/a_n| = b/(n+1) \to 0$ ее элементы с некоторого момента начинают все быстрее убывать по модулю, что возможно только если ее пределом является нуль. Тем самым мы убедились, что для вышеуказанных функций $\lim_{n\to\infty} R_{n+1}(x) = 0$ при произвольном x.

Посмотрим теперь на ряд (33) для логарифма. Из (59) следует, что его радиус сходимости равен 1. Для оценки остаточного члена при $|x| < 1$ используем представление (68) с $a = 0$:

$$f^{(n+1)}(\theta x) \;=\; \frac{(-1)^n\,n!}{(1+\theta x)^{n+1}}\,, \qquad R_{n+1}(x) \;=\; \frac{(-1)^n\,x}{1+\theta x}\left(\frac{x(1-\theta)}{1+\theta x}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\,, \tag{69}$$

ибо дроби в правой части ограничены величинами $|x|/(1-|x|)$ и $|x|$ соответственно. Наконец, исследуем ряд (31). Он имеет единичный радиус сходимости для любого α. Применим (68) при $a = 0$ и $|x| < 1$. Из $f^{(n+1)}(\theta x) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)\,(1+\theta x)^{\alpha-n-1}$ получаем

$$R_{n+1}(x) \;=\; \frac{(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)\,x^n}{n!}\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n \alpha x(1+\theta x)^{\alpha-1} \quad \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\,. \tag{70}$$

Действительно, величина $1+\theta x$ зажата между $1 \pm |x|$, вторая дробь в правой части ограничена единицей, а первая дробь есть в точности n-й член степенного ряда для $(1+x)^{\alpha-1}$, и он должен стремиться к нулю, поскольку при $|x| < 1$ этот ряд сходится.

Итак, мы убедились в справедливости *рядов Тейлора* (31)–(35) для основных элементарных функций. Подчеркнем еще раз, что мы теперь рассматриваем их как *числовые степенные ряды*, без знака $\mathcal{O}$. Заодно проверен (для данных функций) и следующий важный факт: почленное дифференцирование разложения функции в степенной ряд (в пределах его радиуса сходимости) воспроизводит степенной ряд для ее производной, который имеет тот же радиус сходимости. Это утверждение на самом деле справедливо для любой функции, разложимой в степенной ряд Тейлора.

На этом мы закончим изучение рядов, ибо дальнейшее развитие теории требует более глубоких подходов. В частности, адекватное понимание всего круга вопросов, связанных со сходимостью степенных рядов, достигается в рамках теории *аналитических функций комплексного переменного*.

ГЛАВА 6. **Интегрирование**

В основе теории интегрирования лежит следующий замечательный факт: площадь 'криволинейной трапеции' под графиком функции f выражается через значения функции Φ такой, что $\Phi' = f$. Пусть некоторая функция f (как и в предыдущих главах, считаем ее непрерывной) принимает на отрезке $[a, b]$ только неотрицательные значения. Проведем из точек a и b вертикальные линии до пересечения с графиком этой функции. Площадь получившейся криволинейной фигуры, ограниченной этими линиями, отрезком $[a, b]$ и куском графика функции, обозначим символом $\int_a^b dx f(x)$ и будем называть *интегралом* (или *определенным интегралом*) от функции f, взятым по отрезку $[a, b]$, а числа a и b – нижним и верхним *пределами интегрирования*. Любой разумный способ численного выражения площадей плоских фигур должен удовлетворять следующим условиям (назовем их *постулатами интегрирования*):

1. Нормировка: $\int\limits_a^b dx = b - a$ (это просто площадь прямоугольника)
2. Аддитивность: $\int\limits_a^b dx f(x) + \int\limits_b^c dx f(x) = \int\limits_a^c dx f(x)$ (смежные отрезки)
3. Положительность: $f(x) \geqslant 0 \quad \Longrightarrow \quad \int\limits_a^b dx f(x) \geqslant 0$
4. Линейность: $\int\limits_a^b dx\,(\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha \int\limits_a^b dx f(x) + \beta \int\limits_a^b dx\, g(x)$

Отложим пока обсуждение статуса этих постулатов, чтобы сразу извлечь важнейшие следствия. Из условий 3 и 1 вытекает, что

$$m \leqslant f(x) \leqslant M \quad \Longrightarrow \quad m(b-a) \leqslant \int_a^b dx f(x) \leqslant M(b-a)\,. \tag{71}$$

Вычислим теперь производную функции $\Phi(y) = \int_a^y dx f(x)$. По определению,

$$\Phi'(y) = \lim_{u\to 0} \frac{1}{u}\left[\int_a^{y+u} dx f(x) - \int_a^y dx f(x)\right] = \lim_{u\to 0} \frac{1}{u}\int_y^{y+u} dx f(x) = f(y)\,, \tag{72}$$

ибо максимальное и минимальное значения (непрерывной) функции $f(x)$ на отрезке $[y,\ y+u]$ при $u \to 0$ стремятся к $f(y)$; в силу (71) туда же стремится и $1/u \int_y^{y+u} dx f(x)$. Поскольку $\Phi(a) = 0$ (следствие постулата 2), мы получили обещанное соотношение

$$\Phi'(x) = f(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \Phi(y) = \int^y dx f(x)\,, \quad \int_a^b dx f(x) = \Phi(b) - \Phi(a)\,, \tag{73}$$

выражающее *интеграл* от функции f через *значения* функции Φ, чья производная есть f. Такую функцию Φ называют *первообразной* (или *примитивной*, или *неопределенным интегралом*) функции f. Ясно, что первообразная определена с точностью до константы: $\Phi(x)$ и $\Phi(x) + C$ имеют одинаковую производную. Мы далее не выписываем такие константы явно; а чтобы подчеркнуть неоднозначность первообразной, мы будем записывать ее в виде интеграла с одним верхним пределом, как в (73).

Теперь обсудим сами постулаты 1– 4. *Сами по себе* они не дают рецепта вычисления интеграла от произвольной функции f, кроме тривиального случая $f(x) = c$.

Если мы знаем первообразную от f, то это, казалось бы, не страшно, поскольку тогда в нашем распоряжении есть удобная формула (73). И действительно, на практике в подавляющем большинстве случаев интегралы берутся именно по этой формуле. Но даже в этой ситуации (не говоря уже о более общей) встает вопрос о *существовании конструктивного рецепта* вычисления интегралов (понимаемых как площади плоских фигур или как-то иначе), удовлетворяющих постулатам 1– 4 для некоторого достаточно широкого класса функций. Такой рецепт действительно существует, но мы здесь не будем в него вникать, и не только потому, что он подробно изложен в стандартных учебниках (конструкция *интеграла по Риману* путем разбиения отрезка $[a,b]$ на бесконечно малые кусочки с последующим суммированием вкладов и предельным переходом, в духе вычисления площади круга посредством вписанных и описанных многоугольников), но и потому, что этот рецепт неоднозначен: например, определение *интеграла по Лебегу*, устроенного совсем иначе, позволяет даже расширить класс интегрируемых функций. Для нас же важно следующее: конструктивные способы вычисления интегралов (и площадей) известны, удовлетворяют постулатам 1– 4, и для *непрерывных* функций приводят к одинаковым результатам.

Продолжим извлекать следствия из принятых постулатов. Выше мы уже отметили, что интеграл по отрезку нулевой длины ($b=a$) равен нулю. Логично также принять, что $b<a$ просто соответствует смене знака интеграла (заметим, что в силу условия линейности мы имеем возможность интегрировать функции любого знака),

$$\int_a^a dx f(x) = 0\,, \qquad \int_b^a dx f(x) = -\int_a^b dx f(x) = \int_a^b dx\,(-f(x))\,. \tag{74}$$

Наконец, интегрируя неравенство $-|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant |f(x)| \leqslant M$, получаем

$$\left|\int_a^b dx f(x)\right| \leqslant \int_a^b dx\,|f(x)| \leqslant M(b-a)\,. \tag{75}$$

От общих свойств интеграла перейдем теперь к вопросу об интегрировании конкретных функций. Для некоторых из них мы можем восстановить первообразные прямо из списка производных от элементарных функций (30):

$$\int^y dx\cdot 0 = C\,, \quad \int^y dx = y\,, \quad \int^y dx\,x^\alpha = \frac{y^{\alpha+1}}{\alpha+1}\,, \quad \int^y \frac{dx}{x} = \ln|y|\,, \tag{76}$$

$$\int^y dx\,e^x = e^y\,, \quad \int^y dx\,\sin x = -\cos y\,, \quad \int^y dx\,\cos x = \sin y\;; \tag{77}$$

другие требуют дополнительной работы. Стандартным приемом отыскания первообразной является *замена переменной*. Пусть первообразная функции f известна: $\Phi' = f$. Тогда можно сразу выписать первообразные для целого семейства функций вида $f(\varphi(x))\varphi'(x)$: они равны $\Phi(\varphi(x))$, как следует из формулы дифференцирования сложной функции (27). Другими словами, преобразование

$$\int^y dx\,\varphi'(x)\,f(\varphi(x)) \equiv \int^y d(\varphi(x))\,f(\varphi(x)) = \int^{\varphi(y)} dt\,f(t) \equiv \int^{\varphi(y)} dx\,f(x) \tag{78}$$

можно трактовать как *замену переменной интегрирования* $t=\varphi(x)$, $dt = dx\,\varphi'(x)$ (реально важнó, конечно, не переобозначение переменной другой буквой, а изменение предела интегрирования). Для полноты выпишем и соответствующую формулу для *определенного* интеграла:

$$\int_a^b dx\,\varphi'(x)\,f(\varphi(x)) = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} dx\,f(x)\,. \tag{79}$$

Здесь уместно сказать несколько слов по поводу самих символов $dx, d(\varphi(x))$ и т.п. (так называемых *дифференциалов*). В данном тексте они используются *только как составная часть общепринятого обозначения* (единого и неразрывного) для производной ($df/dx \equiv f'(x)$) или интеграла ($\int d(\varphi(x)) \equiv \int dx\, \varphi'(x)$). Как самостоятельные объекты, дифференциалы появляются в математике в виде *дифференциальных форм* в рамках дифференциальной геометрии. Кочующая из учебника в учебник 'теория' дифференциала (как "главной линейной части приращения") выглядит досадным анахронизмом.

Метод замены переменной сработает, если подынтегральное выражение удастся факторизовать на два нужных множителя как в левой части (78); разумеется, это не всегда возможно. Простейший (но распространенный) пример подходящей замены:

$$\int^y dx\, e^{ax} = \frac{1}{a} \int^y d(ax)\, e^{ax} = \frac{1}{a} \int^{ay} dx\, e^x = \frac{e^{ay}}{a}\,. \tag{80}$$

Отсюда, кстати, получается формула

$$\int^y dx\, a^x = \int^y dx\, e^{x \ln a} = \frac{a^y}{\ln a}\,. \tag{81}$$

А вот чуть менее тривиальный пример:

$$\int^y dx\, \sin^3 x = \int^y dx\, (\cos x)'\, (\cos^2 x - 1) = \int^{\cos y} dx\, (x^2 - 1) = \frac{\cos^3 y}{3} - \cos y\,. \tag{82}$$

Другим весьма популярным приемом нахождения первообразной является рецепт *интегрирования по частям*

$$\int^y dx\, f(x)\, g'(x) = \int^y dx\, [(fg)'(x) - f'(x)\, g(x)] = f(y)\, g(y) - \int^y dx\, f'(x)\, g(x)\,. \tag{83}$$

Пример применения:

$$\int^y dx\, \ln x = \int^y dx\, x'\, \ln x = \int^y dx\, [(x \ln x)' - x\, (\ln x)'] = y \ln y - \int^y dx = y \ln y - y\,.$$

Более интересный пример: n-кратным интегрированием по частям доказывается *интегральная форма* остаточного члена ряда Тейлора (61):

$$R_{n+1}(x) = \frac{1}{n!} \int_0^x dt\, f^{(n+1)}(a + t)\, (x - t)^n\,. \tag{84}$$

Вообще, в отличие от почти автоматически выполняемой процедуры дифференцирования, явное нахождение первообразных (вычисление интегралов) даже от комбинаций элементарных функций осуществимо далеко не всегда, а когда оказывается выполнимым, то, как правило, требует известного искусства. Многочисленные примеры на эту тему и готовые формулы можно отыскать в учебниках и справочниках.

В заключение упомянем без доказательства следующий результат: функцию, разложимую в степенной ряд, можно внутри ее радиуса сходимости интегрировать почленно. То есть, беря первообразную от каждого члена ряда, мы получаем степенной ряд для первообразной от самой функции, имеющий тот же радиус сходимости.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1. **Периодические дроби**

Здесь мы покажем, что любое рациональное число может быть записано в виде конечной либо *периодической* бесконечной десятичной дроби, и наоборот – любая периодическая дробь есть десятичная запись некоторого рационального числа.

Периодической десятичной дробью называют бесконечную десятичную дробь, устроенную следующим образом: начиная с некоторого момента ее цифровая запись становится бесконечным повторением одной и той же (конечной) последовательности цифр. Например (десятичная запись числа $\frac{75}{7}$) ,

$$10.7142857142857142857

В заключение, установим полезный факт: десятичная дробь, имеющая бесконечный хвост из одних девяток (оканчивающаяся на 9 в периоде), на самом деле равна конечной десятичной дроби. Действительно, в этом случае $b = 9, N = 1$, и формула (88) дает $t = a + 10^{1-M}$ – конечную десятичную дробь. Например:

$$0.4(9) = 0.4999\ldots = \frac{4}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \ldots = \frac{4}{10} + \frac{9}{100-10} = \frac{5}{10} = 0.5 \qquad (89)$$

Итак, множество периодических десятичных дробей (если причислять к ним и конечные десятичные дроби, мысленно дописывая ноль в периоде: $0.5 = 0.5(0) = 0.5000\ldots = 0.4999\ldots$) в точности совпадает с множеством рациональных чисел. Все непериодические бесконечные десятичные дроби являются, следовательно, иррациональными действительными числами.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2. **Бином Ньютона**

Биномом Ньютона называют полезные формулы вида

$$(1+x)^n = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} x^m\,, \qquad (a+b)^n = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} a^m\, b^{n-m}\,, \qquad (90)$$

где x, a и b – любые числа, n и m – целые неотрицательные, а $\binom{n}{m}$ – так называемые *биномиальные коэффициенты*

$$\binom{n}{m} \doteq \frac{n!}{m!(n-m)!} = \binom{n}{n-m}\,. \qquad (91)$$

Напомним, что $n! = 1\cdot 2\cdot \ldots \cdot (n-1)\cdot n = n(n-1)!\,, \quad 0! = 1\,.$ Достаточно доказать первое равенство (90); второе из него следует. Проведем доказательство по индукции. Поскольку при $n = 0$ и 1 равенство очевидно, требуется, предположив его справедливость для некоторого n, доказать его для $n+1$. Перепишем (90) в виде

$$(1+x)^n = 1 + \ldots + \binom{n}{m-1} x^{m-1} + \binom{n}{m} x^m + \ldots + x^n\,. \qquad (92)$$

Домножив это выражение на $1+x$, мы должны получить

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)(1+x)^n = \sum_{m=0}^{n+1} \binom{n+1}{m} x^m\,. \qquad (93)$$

Проследим, как формируется в (93) числовой коэффициент при x^m. Мы специально выделили явно нужные слагаемые в (92): действительно, x^m в (93) возникает только в результате домножения x на x^{m-1} и единицы на x^m из (92). Значит, коэффициент при x^m в (93) должен быть равен $\binom{n}{m-1} + \binom{n}{m}$. Нам осталось убедиться, что

$$\binom{n}{m-1} + \binom{n}{m} = \binom{n+1}{m}\,. \qquad (94)$$

Действительно,

$$\frac{n!}{(m-1)!(n-m+1)!} + \frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{n!\,[m+(n-m+1)]}{m!(n-m+1)!} = \frac{(n+1)!}{m!(n+1-m)!}\,.$$

Формула (90) тем самым доказана. Попутно получено полезное рекуррентное соотношение (94) для биномиальных коэффициентов. Другое важное соотношение получается подстановкой $x = 1$ в (90):

$$(1+1)^n = 2^n = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m}. \tag{95}$$

Оба эти соотношения играют свою роль в построении так называемого *треугольника Паскаля* – наглядного рецепта вычисления биномиальных коэффициентов с небольшими n и m:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
\cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots
\end{array}$$

Первая (сверху) строка соответствует $n = 0$, вторая – $n = 1$, и т.д. Числа в каждой строке дают значения биномиальных коэффициентов с m от 0 до n, начиная слева (впрочем, строки симметричны). Каждое число в треугольнике Паскаля равно сумме двух стоящих над ним чисел – это и есть соотношение (94). Сумма чисел в строке равна 2^n, в согласии с равенством (95).

Воспользуемся удобным поводом и обсудим некоторые приемы обращения с суммами. Однократное суммирование вопросов, как правило, не вызывает. Поэтому разберем пример, требующий двукратного суммирования. А именно, проделаем следующее вычисление, применяя (90) дважды:

$$(1+x+y)^n = \big((1+x)+y\big)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (1+x)^{n-k}\, y^k = \sum_{k=0}^{n} \sum_{m=0}^{n-k} \binom{n}{k} \binom{n-k}{m} x^m\, y^k. \tag{96}$$

С другой стороны,

$$(1+x+y)^n = \big(1+(x+y)\big)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} (x+y)^p = \sum_{p=0}^{n} \sum_{k=0}^{p} \binom{n}{p} \binom{p}{k} x^{p-k}\, y^k. \tag{97}$$

Правые части (96) и (97) должны быть равны, но как это увидеть? Попытка сделать в правой части (97) замену $p = k + m$ (чтобы получить x в нужной степени x^m) не проходит, так как суммировать по k от нуля до $k+m$, естественно, нельзя. Поэтому сначала надо изменить порядок суммирования по p и k, а затем уже делать замену:

$$\sum_{p=0}^{n} \sum_{k=0}^{p} \binom{n}{p} \binom{p}{k} x^{p-k}\, y^k = \sum_{k=0}^{n} \sum_{p=k}^{n} \binom{n}{p} \binom{p}{k} x^{p-k}\, y^k = \sum_{k=0}^{n} \sum_{m=0}^{n-k} \binom{n}{k+m} \binom{k+m}{k} x^m\, y^k.$$

Теперь согласие с правой частью (96) становится явным:

$$\binom{n}{k+m} \binom{k+m}{k} \;=\; \frac{n!}{k!\, m!\, (n-k-m)!} \;=\; \binom{n}{k} \binom{n-k}{m}. \tag{98}$$

Произведенная в ходе этой выкладки перестановка порядка суммирования, сопровождавшаяся изменением его пределов, требует некоторого пояснения. Если бы

мы имели двойную сумму с фиксированными диапазонами по обеим переменным, то изменение порядка суммирования никаких проблем бы не вызвало, например,

$$\sum_{p=0}^{n}\sum_{k=0}^{m} \;=\; \sum_{k=0}^{m}\sum_{p=0}^{n}\,, \tag{99}$$

поскольку в обоих случаях просто перебираются все пары $\{p,k\}$ из числового прямоугольника $0\leqslant p\leqslant n,\ 0\leqslant k\leqslant m$. Наш случай

$$\sum_{p=0}^{n}\sum_{k=0}^{p} \;=\; \sum_{k=0}^{n}\sum_{p=k}^{n} \tag{100}$$

отвечает в этом смысле числовому треугольнику $0\leqslant k\leqslant p\leqslant n$. Расстановка пределов суммирования по индексам p и k зависит от порядка следования этих сумм. Так, в левой части (100) мы *сначала* отмечаем, что p может, в принципе, принимать значения во всем диапазоне от 0 до n, а *затем* из условия $k\leqslant p$ заключаем, что при каждом значении p индекс k должен меняться от 0 до p. Аналогично может быть объяснена и правая часть. В другом важном случае,

$$\sum_{p=0}^{n}\sum_{k=0}^{n-p} \;=\; \sum_{k=0}^{n}\sum_{p=0}^{n-k}\,, \tag{101}$$

диапазоном суммирования служит треугольник $k\geqslant 0$, $p\geqslant 0$, $k+p\leqslant n$.

ПРИЛОЖЕНИЕ 3. **Комплексные числа**

Основной причиной появления *компле́ксных чисел* в математике явилась проблема неразрешимости многих алгебраических уравнений в действительных числах. Простейший пример – явное отсутствие на числовой оси "квадратного корня из -1", т. е. решения уравнения $x^2=-1$. Оказалось, что (разумным образом организованное) добавление этого отсутствующего 'числа' приводит к совершенно замечательным последствиям: расширение множества (математики говорят: *поля*) действительных чисел $\mathbb{R}$ до поля комплексных чисел $\mathbb{C}$ делает разрешимым *любое* алгебраическое уравнение, а также массу других уравнений и задач; без комплексных чисел просто немыслима ни теоретическая, ни прикладная математика.

Итак, введем в качестве корня из -1 новый, не принадлежащий $\mathbb{R}$ объект i со свойством $i^2=-1$, и попробуем трактовать его как число, т. е. включить в систему алгебраических правил (1)–(3) наряду с действительными числами. В частности, мы должны иметь возможность перемножать и складывать i с элементами $\mathbb{R}$. Оказывается, это требование позволяет дать *явное описание* нового числового множества – поля комплексных чисел $\mathbb{C}$: *любое* комплексное число представимо в виде

$$z=x+iy \qquad\qquad (x,y\in\mathbb{R}) \tag{102}$$

в том смысле, что *ни одна* алгебраическая операция, упомянутая в (1)–(3) и выполняемая с соблюдением указанных там правил, не выводит нас из класса (102). В представлении (102) число x называют *действительной*, а y – *мнимой* частью комплексного числа z. При $y=0$ число $x+i0\in\mathbb{C}$ *отождествляется* с действительным

числом x. Само число i называется *мнимой единицей*, однако роль единицы в (2) играет, конечно, не оно, а по-прежнему *действительное* число $1 = 1 + i0$, равно как и роль нуля – *действительное* число $0 = 0 + i0$. Два комплексных числа считаются равными друг другу (а их разность – равной нулю) только в том случае, когда равны и их мнимые, и их действительные части. Понятие больше-меньше в множестве комплексных чисел отсутствует.

Убедимся теперь в замкнутости представления (102) относительно простейших арифметических операций. Со сложением и умножением все очевидно,

$$(a + ib) \pm (c + id) = (a \pm c) + i(b \pm d)\,, \tag{103}$$

$$(a + ib)\,(c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc)\,, \tag{104}$$

а деление удобно выполнять, используя следующий факт: домножение комплексного числа $z = x+iy$ на его *сопряженное* $\bar{z} = x-iy$ (отличающееся только знаком мнимой части) дает в результате действительное число:

$$z\bar{z} = (x + iy)\,(x - iy) = x^2 + y^2\,. \tag{105}$$

Теперь получаем

$$\frac{a + ib}{c + id} = \frac{(a + ib)(c - id)}{(c + id)(c - id)} = \frac{(ac + bd) + i(bc - ad)}{c^2 + d^2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + i\frac{bc - ad}{c^2 + d^2}\,. \tag{106}$$

Приступим к более интересной задаче – извлечению корней (для этого, собственно, и вводились комплексные числа). На языке представления (102) нахождение, скажем, квадратного корня из $a+ib$ свелось бы к решению системы двух уравнений:

$$a + ib = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases} \tag{107}$$

Анализируя эту систему, можно сделать многообещающий вывод, что у нее *всегда есть ровно два решения* (с единственным исключением: корнем из 0 является только сам нуль), однако гораздо удобнее здесь воспользоваться так называемым *тригонометрическим представлением* комплексных чисел.

Поскольку представление (102) однозначно сопоставляет комплексное число *любой паре* действительных чисел, можно рассматривать элементы $\mathbb{C}$ как точки некоторой плоскости (ее называют *компле́ксной плоскостью*) с обычными (действительными) декартовыми координатами x и y. При этом правила сложения комплексных чисел и умножения их на действительные числа воспроизводят правила сложения двумерных векторов и умножения их на те же числа. Вдобавок, над элементами $\mathbb{C}$ можно будет выполнять и другие алгебраические действия. Но сначала обсудим геометрическую картину. Положительную величину $|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$ (длину вектора с координатами x, y) называют *модулем* комплексного числа z. Вводя угол φ между этим вектором и осью x, мы теперь можем записать число $z \in \mathbb{C}$ *в тригонометрической форме*:

$$z = x + iy = \rho\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)\,, \qquad \rho = |z|\,, \quad x = |z|\cos\varphi\,, \quad y = |z|\sin\varphi\,. \tag{108}$$

От декартовых координат x, y на плоскости $\mathbb{C}$ мы перешли к полярным, ρ и φ, причем угловая координата $\varphi = \operatorname{arctg} y/x$, называемая *аргументом* комплексного числа z, оказывается *периодической*: ее сдвиг на $2\pi n$ (n целое) не изменяет z.

В тригонометрической форме комплексные числа неудобно складывать и вычитать, но зато *очень* удобно умножать, делить и возводить в произвольную степень. Перемножим два числа, $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ и $w = \sigma(\cos\psi + i\sin\psi)$:

$$\begin{aligned} zw &= \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)\,\sigma(\cos\psi + i\sin\psi) \\ &= \rho\sigma\,[(\cos\varphi\,\cos\psi - \sin\varphi\,\sin\psi) + i(\sin\varphi\,\cos\psi + \cos\varphi\,\sin\psi)] \\ &= \rho\sigma\,[\,\cos(\varphi+\psi) + i\sin(\varphi+\psi)]\,. \end{aligned} \tag{109}$$

Мы видим, что рецепт умножения в тригонометрической записи крайне прост: *модули перемножаются, а аргументы складываются*. Отсюда очевиден и рецепт возведения в любую целую степень,

$$z^n = [\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = \rho^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))\,, \tag{110}$$

верный и при отрицательных n, например,

$$\frac{1}{z} \;=\; \frac{\rho^{-1}}{\cos\varphi + i\sin\varphi} \;=\; \rho^{-1}\,\frac{\cos\varphi - i\sin\varphi}{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} \;=\; \rho^{-1}(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi))\,. \tag{111}$$

Отсюда заодно получаем и формулу для деления:

$$\frac{w}{z} \;=\; \frac{\sigma(\cos\psi + i\sin\psi)}{\rho\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)} \;=\; \frac{\sigma}{\rho}\,[\,\cos(\psi-\varphi) + i\sin(\psi-\varphi)]\,. \tag{112}$$

Пусть теперь $\rho = |z| = 1$ (такие точки комплексной плоскости заполняют окружность единичного радиуса). Рассмотрим функцию (одной действительной переменной) $f(\varphi) = \cos\varphi + i\sin\varphi$. Из (110) вытекает ее свойство $[f(\varphi)]^n = f(n\varphi)$, сильно напоминающее поведение степенной функции, $(a^x)^n = a^{nx}$. Может быть, и f зависит от φ по степенному закону? Да, поскольку имеет место замечательная формула

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi\,, \tag{113}$$

открывающая, кстати, возможность возведения в *мнимую* степень. В справедливости этой формулы, кроме вышеприведенных аргументов, убеждает полное согласие (113) с соотношениями (30), (32), (34), (35) для производных и степенных разложений экспоненты, синуса и косинуса. Мы приходим к еще одному, *экспоненциальному* представлению комплексного числа:

$$z = x + iy = \rho\,(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \rho\,e^{i\varphi}, \quad \bar{z} = \rho\,e^{-i\varphi} \qquad (\,\rho = |z|\,, \quad \varphi = \operatorname{arctg} y/x\,)\,. \tag{114}$$

Стоит отметить несколько полезных частных случаев:

$$e^{\pm\frac{i\pi}{2}} = \pm\,i\,, \qquad e^{\pm i\pi} = -1\,, \qquad e^{2ni\pi} = 1 \qquad (n \text{ целое})\,. \tag{115}$$

Получим, наконец, рецепт извлечения корней. Начнем со случая $\rho = 1$ (точек на единичной окружности). Такое ρ ни при возведении в целую степень посредством (110), ни при обратной операции – извлечении корня, – меняться не должно. Значит $\sqrt[n]{e^{i\varphi}}$ можно искать в виде $e^{i\psi}$. Казалось бы, ответ очевиден: $\psi = \varphi/n$. Но надо еще учесть периодичность по φ:

$$\sqrt[n]{e^{i\varphi}} = e^{i\psi} \quad\Longrightarrow\quad e^{i\varphi} = e^{in\psi} \quad\Longrightarrow\quad n\psi = \varphi + 2\pi k \quad\Longrightarrow\quad \sqrt[n]{e^{i\varphi}} = e^{i\frac{\varphi+2\pi k}{n}}, \tag{116}$$

где k – любое целое число. Теперь можно выписать формулу извлечения корня степени n из *любого* комплексного числа:

$$\sqrt[n]{\rho\, e^{i\varphi}} = \rho^{\frac{1}{n}}\; e^{i\frac{\varphi}{n}}\, e^{2\pi i\frac{k}{n}} \qquad (n \text{ и } k \text{ целые}) . \tag{117}$$

При положительном n таких корней будет ровно n штук (для $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ получаются разные корни, а все остальные уже повторяются), и все они расположены в плоскости $\mathbb{C}$ на окружности радиуса $\rho^{1/n}$.

Тем самым мы показали, что уравнение $z^n = w$ всегда имеет (относительно z) ровно n решений в комплексных числах. Оказывается, справедлив и более общий результат ("Основная теорема алгебры"): в поле комплексных чисел алгебраическое уравнение n-й степени всегда имеет решение (фактически, оно всегда будет иметь n решений, но некоторые из них могут совпадать). Это свойство поля $\mathbb{C}$ кардинально отличает его от поля действительных чисел – там многие алгебраические уравнения, начиная с квадратного, могли вообще не иметь ни одного решения.

ПРИЛОЖЕНИЕ 4. **Формальные ряды**

Степенные разложения из главы 4, записанные в форме (17), являют собой пример *формальных рядов*. Так принято называть бесконечные (в одну или даже в обе стороны) суммы по целым степеням *формальной* или *абстрактной* переменной x (можно рассматривать ряды и по большему числу формальных переменных), которая *по определению* не может принимать числовых значений. Другими словами, это просто символ (латинская буква x), любые степени которого, x^n, тоже считаются независимыми символами, а *единственное* алгебраическое правило работы с ними есть $x^m x^n = x^{m+n}$. На весь формальный ряд можно поэтому смотреть как на бесконечное число ячеек, где хранится некая числовая информация – в виде коэффициентов при различных степенях переменной x. Польза формальных рядов в том, что над ними оказывается выполнимым (как правило, однозначно) весьма широкий класс математических операций: арифметические операции (включая возведение в степень и извлечение корня), логарифмирование, дифференцирование, подстановка одного ряда в другой (замена переменных) и др. Эта техника обращения с рядами находит применение и в случае числовых *степенных рядов* (см. главу 5) и вообще любых *разложений по малому параметру*, когда переменная x уже не формальна, а наоборот, принимает конкретные числовые значения – просто те соотношения, которые в случае формальных рядов были верны *безусловно*, теперь будут справедливы *лишь при условии сходимости* соответствующих рядов.

Не ставя задачи охватить самый общий случай, рассмотрим несколько примеров, близких по структуре к степенным разложениям элементарных функций. Начнем со следующего упражнения: воспроизведем несколько первых членов ряда (31) при $\alpha = 1/2$, *вообще не пользуясь дифференцированием*. Предположив, что

$$\sqrt{1+x} = 1 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \ \ldots\ , \tag{118}$$

возведем обе части в квадрат:

$$1 + x = 1 + 2b_1 x + (b_1^2 + 2b_2)x^2 + (2b_1 b_2 + 2b_3)x^3 + \ \ldots\ . \tag{119}$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях, получим

$$b_1 = \frac{1}{2}\,, \qquad b_2 = -\frac{b_1^2}{2} = -\frac{1}{8}\,, \qquad b_3 = -b_1 b_2 = \frac{1}{16}\,, \tag{120}$$

в полном согласии с разложением (31). Мы приняли без обсуждения, что два формальных ряда считаются равными только в том случае, если они *совпадают тождественно*, т. е. если у них равны друг другу коэффициенты при любых степенях x. И конечно, равенство (119) не есть *уравнение* на x – это *тождество* по x, одновременно оказывающееся уравнением на все b_n сразу. Мы могли бы успешно продолжать нахождение коэффициентов b_n и дальше: при каждой новой степени x^m в правой части (119), очевидно, появляется ровно один не вычисленный ранее коэффициент b_m, и соответствующее линейное уравнение легко решается.

Разобранный пример демонстрирует главное правило работы с формальными рядами: любые алгебраические выкладки с ними сводятся, фактически, к последовательному собиранию коэффициентов перед степенями x, *начиная с младшей*. *Нельзя* приступать к вычислениям в старшем порядке по x, пока они не завершены в предыдущем.

Рассмотрим теперь следующую задачу – поделить на заданный ряд. А именно, имея ряд $1 + b_1x + b_2x^2 + \ldots$ с *известными* коэффициентами b_n, построить ряд

$$\frac{1}{1 + b_1x + b_2x^2 + \ldots} \;=\; 1 + \alpha_1x + \alpha_2x^2 + \;\ldots \tag{121}$$

т. е. выразить коэффициенты α через b. Эту задачу можно решать двумя способами. Один из них аналогичен предыдущему примеру: домножить обе части на исходный ряд, получив слева 1; собрать справа коэффициенты при x, x^2, ... и приравнять их нулю; из возникших простых уравнений последовательно найти α_1, α_2 и т.д. Результат таков:

$$\alpha_1 = -b_1, \quad \alpha_2 = b_1^2 - b_2, \quad \ldots \tag{122}$$

К нему же приведет и второй способ: подставить *ряд* $b_1x+b_2x^2+\ldots$ (без единицы!) в формулу (31) вместо x при $\alpha = -1$; затем просто собрать коэффициенты при нужных степенях. Такая подстановка одного ряда внутрь другого применяется очень часто – надо только следить, чтобы подставляемое выражение не вступало в противоречие с самим смыслом переменной разложения (например, не начиналось бы с 1).

Похожая ситуация возникает при так называемом *обращении* формальных рядов:

$$y = x + ax^2 + bx^3 + \;\ldots \qquad \Longrightarrow \qquad x = y + \alpha y^2 + \beta y^3 + \;\ldots \tag{123}$$

Подставляя ряд для x из правой части в левую (можно и наоборот), находим

$$\alpha = -a\,, \quad \beta = 2a^2 - b\,, \quad \ldots \tag{124}$$

Формальные ряды можно почленно дифференцировать. Из формул (31)–(35) хорошо видно, как при этом ряд для экспоненты переходит сам в себя, для синуса и косинуса – друг в друга, а ряд для логарифма – в формулу прогрессии

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \;\ldots\;. \tag{125}$$

Заменяя в ней x на x^2, убеждаемся заодно в справедливости разложения

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{2m+1} + \mathcal{O}(x^{2m+3})\;, \tag{126}$$

поскольку $(\operatorname{arctg} x)' = 1/(1+x^2)$.