

© 2003 г. Л. Г. Мардоян*, Г. С. Погосян*^{†‡}, А. Н. Сисакян[†]

КУЛОНОВСКАЯ ЗАДАЧА НА ОДНОМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ ПОСТОЯННОЙ ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ

Построено комплексное преобразование $S_{1C} \rightarrow S_1$, обобщающее в одномерной квантовой механике известное в евклидовом пространстве преобразование Гурвица. Показано, что, как и в плоском пространстве, данное преобразование позволяет установить связь между кулоновской задачей и осцилляторной, дополненной потенциалом Калоджеро–Сазерленда. Полностью решена задача о движении в кулоновском поле на S_1 , включая определение энергетического спектра и волновых функций с правильной константой нормировки.

Ключевые слова: одномерный атом водорода, уравнение Шредингера, преобразование Гурвица, пространство постоянной кривизны.

В недавней работе [1] была построена серия комплексных преобразований $S_{2C} \rightarrow S_2$, $S_{4C} \rightarrow S_3$ и $S_{8C} \rightarrow S_5$, обобщающих для сферической геометрии известные в евклидовом пространстве преобразования типа Леви-Чивита, Кустанхеймо–Штиффеля и Гурвица [2]. Там же было показано, что данные преобразования устанавливают соответствие между задачами о движении в поле Кеплера–Кулона и осциллятора для размерностей (2, 2), (3, 4) и (5, 8) как в классической, так и в квантовой механике. Данная статья посвящена решению аналогичной задачи в одномерной квантовой механике.

Уравнение Шредингера, описывающее движение в кулоновском поле на окружности S_1 , имеет следующий вид ($\hbar = m = 1$) [3]:

$$\frac{1}{2} \Delta_{LB}^{(s)} \Psi + \left(E + \frac{\mu}{R} \frac{s_2}{|s_1|} \right) \Psi = 0, \quad (1)$$

где (s_1, s_2) – декартовы координаты объемлющего евклидова пространства E_2 , R – радиус окружности S_1 : $s_1^2 + s_2^2 = R^2$, $\Delta_{LB}^{(s)} = (s_1 \partial s_2 - s_2 \partial s_1)^2 / R^2$ – обычный оператор

*Международный центр перспективных исследований, Ереванский государственный университет, Ереван, Армения

[†]Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Московская обл., Россия

[‡]Центр физических наук, Морелос, Мексика

Лапласа–Бельтрами. На верхней полуокружности $s_1 \geq 0$ уравнение (1) (легко заметить, что уравнение для $s_1 < 0$ получается из уравнения для $s_1 \geq 0$ простой заменой $s_1 \rightarrow -s_1$) записывается в виде

$$\frac{1}{2} \Delta_{LB}^{(s)} \Psi + \left(E + \frac{\mu s_2}{R s_1} \right) \Psi = 0. \quad (2)$$

Следуя работе [1], определим одномерное комплексное преобразование

$$s_1 = i \sqrt{u_1^2 + u_2^2} \frac{u_1^2}{2u_2}, \quad s_2 = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} \left(u_2 + \frac{u_1^2}{2u_2} \right), \quad (3)$$

которое удовлетворяет тождеству Эйлера

$$s_1^2 + s_2^2 = (u_1^2 + u_2^2)^2. \quad (4)$$

Из формулы (4) видно, что точка $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ принадлежит “комплексной окружности” S_{1C} : $u_1^2 + u_2^2 = D^2$ с реальным радиусом D , если $s = (s_1, s_2)$ лежит на реальной окружности S_1 с радиусом $R = D^2$.

В общем случае комплексная окружность может быть параметризована с помощью двух действительных переменных (условие $u_1^2 + u_2^2 = D^2$ включает два уравнения – для реальной и мнимой частей), однако требование действительности декартовых координат s_i приводит к дополнительному уравнению. Таким образом, формула (3) соответствует преобразованию одномерного подпространства на комплексной окружности S_{1C} (представляющей собой двумерное реальное пространство) к подпространству на окружности S_1 . Действительно, из формулы (3) следует, что

$$\frac{s_2}{R} = \frac{1}{2} \left(\frac{u_2}{D} + \frac{D}{u_2} \right). \quad (5)$$

Выбрав на S_1 полярные координаты

$$s_1 = R \sin \varphi, \quad s_2 = R \cos \varphi, \quad (6)$$

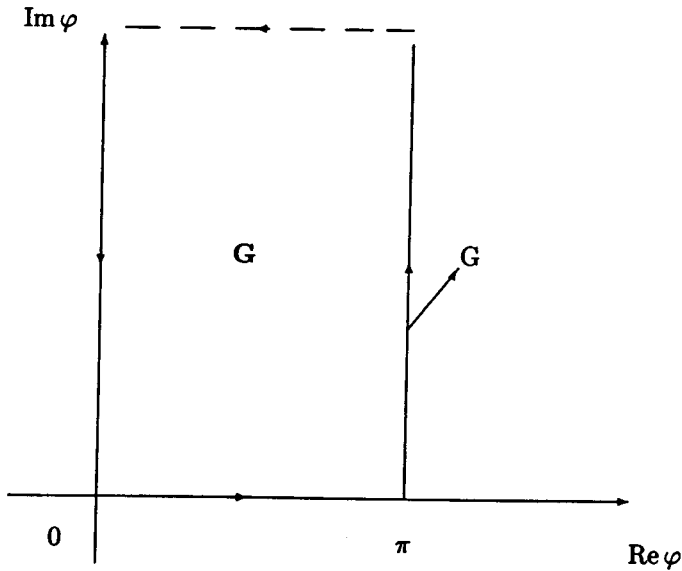
получаем, что $u_2 = D e^{i\varphi}$ и соответствующие преобразованию (3) точки на комплексной окружности S_{1C} суть

$$u_1 = D \sqrt{1 - e^{2i\varphi}}, \quad u_2 = D e^{i\varphi}, \quad (7)$$

где $0 \leq \varphi \leq \pi$.

Вернемся к уравнению Шредингера (2). После преобразования (3) (см. приложение) приходим к комплексному уравнению

$$\frac{1}{2} \Delta_{LB}^{(u)} \Phi + \left(\mathcal{E} - \frac{\omega^2 D^2}{2} \frac{u_1^2}{u_2^2} - \frac{3}{8u_1^2} \right) \Phi = 0, \quad (8)$$



где введены следующие обозначения:

$$\mathcal{E} = 2i\mu + \frac{1}{8D^2}, \quad \omega^2 = 2 \left(E - \frac{i\mu}{D^2} - \frac{1}{8D^4} \right), \quad \Psi = \left(\frac{u_1}{u_2} \right)^{1/2} \Phi. \quad (9)$$

Таким образом, видно, что кулоновская задача на реальной окружности S_1 эквивалентна задаче, в которой потенциал является суммой осцилляторного потенциала и сингулярного потенциала типа Калоджеро–Сазерленда, но уже на комплексной окружности S_{1C} и с энергией и частотой, определенными согласно формулам (9).

Перепишем уравнение (8) в комплексных координатах (7):

$$\frac{i}{D^2} \frac{\sqrt{\sin \varphi}}{e^{i\varphi/2}} \frac{d}{d\varphi} \frac{\sqrt{\sin \varphi}}{e^{i\varphi/2}} \frac{d\Phi}{d\varphi} + \left[\mathcal{E} + i\omega^2 D^2 \frac{\sin \varphi}{e^{-i\varphi}} - \frac{3i}{16D^2} \frac{e^{-i\varphi}}{\sin \varphi} \right] \Phi = 0. \quad (10)$$

Для решения последнего уравнения комплексифицируем константу связи μ , положив $k = i\mu$ в формулах для \mathcal{E} и ω :

$$\mathcal{E} = 2k + \frac{1}{8D^2}, \quad \omega^2 = 2 \left(E - \frac{k}{D^2} - \frac{1}{8D^4} \right). \quad (11)$$

Одновременно аналитически продолжим значение полярного угла φ в комплексную область G : $0 \leq \text{Re } \varphi \leq \pi$ и $0 \leq \text{Im } \varphi < \infty$ (см. рисунок). Далее перейдем к новой переменной ϑ :

$$e^{i\varphi} = \cos \vartheta. \quad (12)$$

Для действительных углов ϑ такая подстановка возможна при условии $\text{Re } \varphi = 0$ или $\text{Re } \varphi = \pi$ и $\text{Im } \varphi \in (0, \infty)$, что соответствует движению в области $0 \leq \vartheta \leq \pi/2$ или $\pi/2 \leq$

$\vartheta \leq \pi$. Уравнение (10) после этих преобразований переходит в известное уравнение типа Пешля–Теллера

$$\frac{d^2 \Phi}{d\vartheta^2} + \left\{ (2\mathcal{E}D^2 + \omega^2 D^4) - \frac{\omega^2 D^4}{\cos^2 \vartheta} - \frac{3}{4 \sin^2 \vartheta} \right\} \Phi = 0. \quad (13)$$

Регулярное решение уравнения (13) в точках $\vartheta = 0, \pi/2$ записывается в виде [4]

$$\begin{aligned} \Phi_n(\vartheta) &= C_n(\nu)(n+1)(\sin \vartheta)^{3/2}(\cos \vartheta)^{\nu+1/2} {}_2F_1(-n, n+\nu+2; 2; \sin^2 \vartheta) = \\ &= C_n(\nu)(\sin \vartheta)^{3/2}(\cos \vartheta)^{\nu+1/2} P_n^{(1, \nu)}(\cos 2\vartheta), \end{aligned} \quad (14)$$

а спектр энергии $\mathcal{E}_n(D)$ определяется формулой

$$\mathcal{E} = \frac{2(n+1)(n+1+\nu)}{D^2} + \frac{1}{8D^2}, \quad \nu = \left(\omega^2 D^4 + \frac{1}{4} \right)^{1/2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (15)$$

где $C_n(\nu)$ – это константа нормировки, а $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ – полиномы Якоби [5].

Для вычисления константы $C_n(\nu)$, соответствующей нормировке кулоновской волновой функции на полуокружности, необходимо потребовать для функции (14) выполнения условия (см. приложение)

$$\frac{iD}{2} \int_{S_{1C}} \Phi_n \tilde{\Phi}_n \frac{u_1^2}{u_2^2} dv(u) = D^2 \int_0^\pi \Phi_n(\varphi) \tilde{\Phi}_n(\varphi) \sqrt{e^{-2i\varphi} - 1} d\varphi = \frac{1}{2}, \quad (16)$$

где тильда означает комплексное сопряжение и одновременно инверсию $\varphi \rightarrow -\varphi$, т.е. $\tilde{\Phi}(\varphi) = \Phi^*(-\varphi)$ (мы выбираем скалярное произведение $\tilde{\Phi}\Phi$, так как для действительных ω^2 и \mathcal{E} волновая функция $\tilde{\Phi}(\varphi)$ также принадлежит к классу решений уравнения (10)).

Рассмотрим интеграл по контуру G в комплексной плоскости переменной φ (см. рисунок). Имеем

$$\begin{aligned} \oint \Phi_n \tilde{\Phi}_n \sqrt{e^{-2i\varphi} - 1} d\varphi &= \int_0^\pi \Phi_n \tilde{\Phi}_n \sqrt{e^{-2i\varphi} - 1} d\varphi + \int_\pi^{\pi+i\infty} \Phi_n \tilde{\Phi}_n \sqrt{e^{-2i\varphi} - 1} d\varphi + \\ &+ \int_{\pi+i\infty}^{i\infty} \Phi_n \tilde{\Phi}_n \sqrt{e^{-2i\varphi} - 1} d\varphi + \int_{i\infty}^0 \Phi_n \tilde{\Phi}_n \sqrt{e^{-2i\varphi} - 1} d\varphi. \end{aligned} \quad (17)$$

Пренебрегая интегралом по бесконечности (это возможно, так как подынтегральная функция стремится к нулю как $e^{2i\nu\varphi}$) и пользуясь фактом регулярности функции $\Phi_n(\varphi)$ в комплексной области $G = \{0 \leq \operatorname{Re} \varphi \leq \pi; 0 \leq \operatorname{Im} \varphi < \infty\}$, получаем

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \Phi_n \tilde{\Phi}_n \sqrt{e^{-2i\varphi} - 1} d\varphi &= \int_0^{i\infty} \Phi_n \tilde{\Phi}_n \sqrt{e^{-2i\varphi} - 1} d\varphi - \int_\pi^{\pi+i\infty} \Phi_n \tilde{\Phi}_n \sqrt{e^{-2i\varphi} - 1} d\varphi = \\ &= (1 - e^{2i\pi\nu}) \int_0^{i\infty} \Phi_n \tilde{\Phi}_n \sqrt{e^{-2i\varphi} - 1} d\varphi. \end{aligned} \quad (18)$$

Далее, переходя в последнем интеграле к переменной ϑ согласно формуле (12), легко видеть, что

$$\int_0^\pi \Phi_n(\varphi) \tilde{\Phi}_n(\varphi) \sqrt{e^{-2i\varphi} - 1} d\varphi = i(1 - e^{2i\pi\nu}) \int_0^{\pi/2} [\Phi_n(\vartheta)]^2 \operatorname{tg}^2 \vartheta d\vartheta. \quad (19)$$

Для вычисления последнего интеграла воспользуемся известными формулами для интегрирования двух полиномов Якоби [6]:

$$\int_{-1}^1 (1-x)^\alpha (1+x)^\beta [P_n^{(\alpha,\beta)}(x)]^2 dx = \frac{2^{\alpha+\beta+1} \Gamma(n+\alpha+1) \Gamma(n+\beta+1)}{(2n+\alpha+\beta+1)n! \Gamma(n+\alpha+\beta+1)},$$

$$\int_{-1}^1 (1-x)^\alpha (1+x)^{\beta-1} [P_n^{(\alpha,\beta)}(x)]^2 dx = \frac{2^{\alpha+\beta} \Gamma(n+\alpha+1) \Gamma(n+\beta+1)}{\beta n! \Gamma(n+\alpha+\beta+1)}.$$

Находим, что

$$C_n(\nu) = \sqrt{\frac{\nu(\nu+n+1)(2n+\nu+2)}{2iD^2(1-e^{2i\pi\nu})(n+1)^2}}. \quad (20)$$

Теперь можно выписать спектр энергии и построить кулоновские волновые функции на S_1 . Подставляя $k = i\mu$ в формулу (11) и учитывая (15), получаем

$$\nu = -(n+1) + i\sigma, \quad \sigma = \frac{\mu R}{n+1}. \quad (21)$$

Следовательно, спектр энергии будет иметь вид

$$E_n(R) = \frac{(n+1)^2}{2R^2} - \frac{\mu^2}{2(n+1)^2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (22)$$

Возвращаясь в формуле (14) обратно к переменной φ и воспользовавшись формулой (21), находим нормированные собственные функции уравнения (2) при $0 \leq \phi \leq \pi$ ($s_1 \geq 0$):

$$\Psi_{n\sigma}(\varphi) = C_n(\sigma) \sin \varphi e^{-i\varphi(n-i\sigma)} {}_2F_1(-n, 1+i\sigma; 2; 1-e^{2i\varphi}), \quad (23)$$

где

$$C_n(\sigma) = e^{\sigma\pi/2} |\Gamma(1+i\sigma)| \sqrt{\frac{(n+1)^2 + \sigma^2}{\pi R}}. \quad (24)$$

Волновая функция в области $-\pi \leq \varphi < 0$ ($s_1 < 0$) определяется из формулы (23) после замены $\varphi \rightarrow -\varphi$. Общее решение уравнения Шредингера во всей области переменной $\varphi \in [-\pi, \pi]$ может быть представлено в виде четной и нечетной функций

$$\Psi_{n\sigma}^{(+)}(\varphi) = C_n(\sigma) \sin |\varphi| e^{-i(n-i\sigma)|\varphi|} F(-n, 1+i\sigma; 2; 1-e^{2i|\varphi|}), \quad (25)$$

$$\Psi_{n\sigma}^{(-)}(\varphi) = C_n(\sigma) \sin \varphi e^{-i(n-i\sigma)|\varphi|} F(-n, 1+i\sigma; 2; 1-e^{2i|\varphi|}). \quad (26)$$

Рассмотрим предельный переход к плоскому пространству. При $R \rightarrow \infty$ и конечных n спектр энергии совпадает с формулой для энергии дискретного спектра одномерного атома водорода [7]:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} E_n(R) = -\frac{\mu^2}{2(n+1)^2}, \quad n = 0, 1, \dots$$

При больших R имеем $\varphi \sim x/R$, где x – декартова координата на линии, касательной к окружности (у северного полюса). Используя далее асимптотические формулы [5]

$$\begin{aligned} \lim_{|y| \rightarrow \infty} |\Gamma(x + iy)| e^{y\pi/2} |y|^{1/2-x} &= \sqrt{2\pi}, & \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(x + \alpha)}{\Gamma(x + \beta)} &= z^{\alpha-\beta}, \\ \lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ \varphi \rightarrow 0}} {}_2F_1(-n, 1 + i\sigma; 2; 1 - e^{2i\varphi}) &= {}_1F_1\left(-n; 2; \frac{2\mu x}{n}\right), \end{aligned} \quad (27)$$

приходим к известному выражению для одномерной кулоновской волновой функции [7]:

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ \varphi \rightarrow 0}} \Psi_{n\sigma}^{(+)}(\varphi) &= \sqrt{\frac{2\mu^3}{(n+1)^3}} |x| e^{-\mu x/n} {}_1F_1\left(-n; 2; \frac{2\mu|x|}{n}\right), \\ \lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ \varphi \rightarrow 0}} \Psi_{n\sigma}^{(-)}(\varphi) &= \sqrt{\frac{2\mu^3}{(n+1)^3}} x e^{-\mu x/n} {}_1F_1\left(-n; 2; \frac{2\mu|x|}{n}\right). \end{aligned} \quad (28)$$

ПРИЛОЖЕНИЕ

Приведем некоторые формулы, используемые при решении уравнения Шредингера.

Из преобразования (3) легко вывести формулу, связывающую квадраты элементов дуг в s - и u -пространствах:

$$ds \cdot ds = (u_1^2 + u_2^2) \left[\frac{(\mathbf{u} \cdot d\mathbf{u})^2}{u_2^2} - \left(\frac{u_1^2}{u_2^2} \right) d\mathbf{u} \cdot d\mathbf{u} \right] + 3(\mathbf{u} \cdot d\mathbf{u})^2.$$

Учитывая далее условие связи на окружности, приходим к соотношению

$$\frac{ds \cdot ds}{R} = - \left(\frac{u_1^2}{u_2^2} \right) d\mathbf{u} \cdot d\mathbf{u},$$

которое показывает, что, как и в случае плоского пространства, преобразование (3) является конформным.

Оператор Лапласа–Бельтрами на u -окружности в комплексных координатах (7) есть

$$\Delta_{\text{LB}}^{(u)} = \frac{1}{D^2} \left(u_1 \frac{\partial}{\partial u_2} - u_2 \frac{\partial}{\partial u_1} \right)^2 = \frac{2i}{D^2} \sqrt{\sin \varphi} e^{-i\varphi/2} \frac{d}{d\varphi} \sqrt{\sin \varphi} e^{-i\varphi/2} \frac{d}{d\varphi}.$$

Сравнивая эту формулу с формулой для обычного оператора Лапласа–Бельтрами на реальной s -окружности

$$\Delta_s^{(1)} = \frac{1}{R^2} \left(s_1 \frac{\partial}{\partial s_2} - s_2 \frac{\partial}{\partial s_1} \right)^2 = \frac{1}{R^2} \frac{d^2}{d\varphi^2},$$

находим, что оба оператора связаны соотношением

$$\Delta_{LB}^{(s)} = - \left(\frac{u_1}{u_2} \right)^{1/2} \left\{ \frac{u_2^2}{u_1^2} \frac{1}{D^2} \left[\Delta_u^{(1)} - \frac{3}{4u_1^2} + \frac{1}{4u_2^2} \right] \right\} \left(\frac{u_1}{u_2} \right)^{-1/2}.$$

Элемент объема в u - и s -пространствах имеет соответственно вид

$$dv(u) = - \frac{iDe^{i\varphi}}{\sqrt{1 - e^{i\varphi}}} d\varphi, \quad dv(s) = R d\varphi,$$

откуда получаем

$$dv(s) = iD \frac{u_1}{u_2} dv(u).$$

Благодарности. Авторы благодарят профессора В. М. Тер-Антоняна за многократные обсуждения данной задачи. Л. Г. Мардоян и Г. С. Погосян благодарны за поддержку фонду Armenian National Science and Education Foundation (ANSEF), грант PS81.

Список литературы

- [1] E. G. Kalnins, W. Miller, Jr. Pogosyan, G. S. Pogosyan. J. Math. Phys. 2000. V. 41. P. 2629.
- [2] D. Lambert, M. Kibler. J. Phys. A. 1988. V. 21. P. 307.
- [3] P. W. Higgs. J. Phys. A. 1979. V. 12. P. 309; H. J. Leemon. J. Phys. A. 1979. V. 12. P. 489; C. Grosche, G. S. Pogosyan, A. N. Sissakian. Fortschr. Phys. 1995. V. 43. P. 523.
- [4] З. Флюгге. Задачи по квантовой механике. Т. 1. М.: Мир, 1974.
- [5] Г. Бейтмен, А. Эрдейи. Высшие трансцендентные функции. Т. 1. М.: Наука, 1973.
- [6] Г. Бейтмен, А. Эрдейи. Таблицы интегральных преобразований. Т. 2. М.: Наука, 1970.
- [7] R. Loudon. Am. J. Phys. 1959. V. 27. P. 649; I. V. Lutsenko, L. G. Mardoyan, G. S. Pogosyan, A. N. Sissakian V. M. Ter-Antonyan. J. Phys. A. 1989. V. 22. P. 2739.