ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
Том 129, № 2
ноябрь, 2001

П. Винтерниц*, К. Б. Вольф†,
Г. С. Погосян‡, А. Н. Сисакян§

ВЫВОД ТЕОРЕМЫ СЛОЖЕНИЯ ГРАФА ПУТЕМ КОНТРАКЦИЙ ГРУППЫ $SO(3)$

Показано, что теорема сложения Графа для функций Бесселя может быть получена путем контракций формулы для произведения вращений группы $SO(3)$.

1. Теорема сложения Графа для функций Бесселя (см. п. 7.6.2, формула (6) на с. 54 в книге [1]) связывает члены полярного разложения функции на плоскости вокруг двух различных центров, находящихся на расстоянии z друг от друга. Пусть P – точка с координатами (r,ϕ) относительно центра O и координатами (r',ϕ') относительно O' (см. рисунок). Тогда

$$J_{m'}(r')\,e^{im'\phi'} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_{m'-m}(z)\,J_m(r)\,e^{im\phi}, \tag{1}$$

где, как это следует из плоской тригонометрии,

$$r\sin\phi = r'\sin\phi', \qquad r\cos\phi = r'\cos\phi' - z. \tag{2}$$

Для целых m' эта формула имеет также ясный теоретико-групповой смысл: она определяет матричные элементы оператора сдвига в стандартном ($k=1$) неприводимом представлении евклидовой группы $ISO(2)$ [2].

Цель настоящей заметки – получить формулу Графа (1), (2) путем контракций произведения двух вращений группы $SO(3)$,

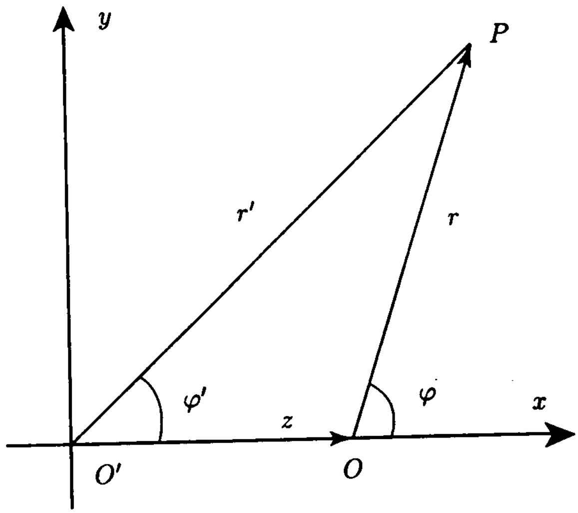
$$\mathbf{R}(\psi',\theta',\phi') = \mathbf{R}(\psi,\theta,\phi)\,\mathbf{R}(\alpha,\beta,\gamma), \tag{3}$$

*Centre de Recherches Mathématiques and Départment de Mathématiques et Statistique, Université de Montréal, Montréal, Québec, Canada

†Centro de Ciencias Físicas, Universidad Nacional Autónoma de México, Cuernavaca, Morelos, México

‡Centro de Ciencias Físicas, Universidad Nacional Autónoma de México, Cuernavaca, Morelos, México; Лаборатория теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова, Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Московская обл., Россия. E-mail: pogosyan@fis.unam.mx

§Лаборатория теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова, Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Московская обл., Россия



которые связаны соотношениями

$$\cos\theta' = \cos\theta\cos\beta + \sin\theta\sin\beta\cos(\phi-\alpha),$$

$$\operatorname{ctg}(\phi'+\gamma) = \operatorname{ctg}(\phi-\alpha)\cos\beta - \frac{\operatorname{ctg}\theta\sin\beta}{\sin(\phi-\alpha)}.$$

2. Переход в равенстве (3) к матричным элементам унитарно-неприводимого представления группы $SO(3)$ приводит к хорошо известной формуле разложения для сферических гармонических функций [2], [3]:

$$Y_{\ell,m'}(\theta',\phi') = \sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_{\ell,m}(\theta,\phi)\, D^{\ell}_{m,m'}(\alpha,\beta,\gamma), \tag{4}$$

в которую входят D-функции Вигнера

$$D^{\ell}_{m,m'}(\alpha,\beta,\gamma) = e^{-im\alpha}\, d^{\ell}_{m,m'}(\beta)\, e^{-im'\gamma},$$

$$d^{\ell}_{m,m'}(\beta) = \frac{(-1)^{m-m'}}{(m-m')!}\sqrt{\frac{(\ell+m)!\,(\ell-m')!}{(\ell-m)!\,(\ell+m')!}}\left(\cos\frac{\beta}{2}\right)^{2\ell-m+m'}\left(\sin\frac{\beta}{2}\right)^{m-m'}\times$$
$$\times\, {}_2F_1\left(m-\ell,\, -m'-\ell; m-m'+1; -\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}\right) \tag{5}$$

и сферические гармонические функции

$$Y_{\ell,m}(\theta,\phi) = D^{\ell}_{0,m}(\psi,\theta,\phi)$$

в исходной и повернутой системах координат.

Используем гамильтонову теорию поворотов (см. гл. 4 и 5 в книге [4]), чтобы поставить в соответствие произведению вращений (3) треугольник, сторонами которого являются векторы на больших кругах сферы, как показано на рисунке, где векторы PO и OO', соответствующие поворотам $\mathbf{R}(\psi,\theta,\phi)$ и $\mathbf{R}(\alpha,\beta,\gamma)$, в сумме дают вектор PO', соответствующий повороту $\mathbf{R}(\psi',\theta',\phi')$.

3. Существует несколько способов контракций группы вращений $SO(3)$ до евклидовой группы $ISO(2)$ [5]–[8]. Сферические координаты дают декартовы или полярные координаты на плоскости. Контракции, которые мы используем далее, известны как контракции Иноню–Вигнера [9]. Рассмотрим поэтому "радиальный" параметр R, который неограниченно возрастает и определяет скорости роста и убывания для представлений и углов в формуле (4) следующим образом:

$$\ell \simeq kR, \qquad \theta \simeq \frac{r}{R}, \qquad \theta' \simeq \frac{r'}{R}, \qquad \beta \simeq \frac{z}{R},$$

где k, r и r' – конечные числа. Используя асимптотическую формулу для гипергеометрической функции в равенстве (5), получаем

$$\lim_{R\to\infty} d^{\ell}_{m,m'}(\beta) = J_{m-m'}(kz),$$

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{\sqrt{R}}\, Y_{\ell,m}(\theta,\phi) = (-1)^m \sqrt{\frac{k}{2\pi}}\, J_m(kr)\, e^{im\phi}.$$

Переход в (4) к пределу $R \to \infty$ с использованием этих результатов дает, как это было указано вначале, теорему сложения Графа (1).

Благодарности. Авторы благодарят А. А. Изместьева (ОИЯИ, Дубна) за плодотворные обсуждения и Г. Кроша (CCF-UNAM) за подготовку рисунка. Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант № 00-02-81023, Г.С.П. и К.Б.В.), DGAPA-UNAM (грант № IN112300, Г.С.П. и К.Б.В.), NSERC Канада (П.В.) и FCAR Квебек (П.В.).

Список литературы

[1] *Г. Бейтмен, А. Эрдейи.* Высшие трансцендентные функции. Т. 2. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. М.: Наука, 1966.

[2] *N. Ya. Vilenkin, A. U. Klimyk.* Representation of Lie Groups and Special Functions. Dordrecht: Kluwer, 1991.

[3] *Д. А. Варшалович, А. Н. Москалев, В. К. Херсонский.* Квантовая теория углового момента. Л.: Наука, 1975.

[4] *L. C. Biedenharn, J. D. Louck.* Angular Momentum in Quantum Physics. Theory and Application. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1981.

[5] *A. A. Izmest'ev, G. S. Pogosyan, A. N. Sissakian, P. Winternitz.* J. Phys. A. 1996. V. 29. P. 5940–5962.

[6] *A. A. Izmest'ev, G. S. Pogosyan, A. N. Sissakian, P. Winternitz.* Int. J. Mod. Phys. A. 1997. V. 12. P. 53–61.

[7] *E. G. Kalnins, W. Miller Jr., G. S. Pogosyan.* J. Phys. A. 1999. V. 32. P. 4709–4732.

[8] *A. A. Izmest'ev, G. S. Pogosyan, A. N. Sissakian, P. Winternitz.* J. Math. Phys. 1999. V. 40. P. 1549–1573.

[9] *E. Inönü, E. P. Wigner.* Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1953. V. 39. P. 510–524.