ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
Том 123, № 1
апрель, 2000

© 2000 г. Л.Г. Мардоян*, А.Н. Сисакян*, В.М. Тер-Антонян*

БАЗИСЫ И МЕЖБАЗИСНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДЛЯ $SU(2)$-МОНОПОЛЯ

Переменные в уравнении Шредингера для связанной системы "заряд–$SU(2)$-монополь" разделяются в гиперсферических, параболических и сфероидальных координатах в пространстве $\mathbb{R}^5$. Показано, что коэффициенты разложения параболического базиса по гиперсферическому выражаются через коэффициенты Клебша–Гордана группы $SU(2)$. Выведены трехчленные рекуррентные соотношения, которым подчиняются коэффициенты разложения сфероидального базиса по гиперсферическому и параболическому базисам.

1. ВВЕДЕНИЕ

Пятимерная связанная система "заряд–дион" с $SU(2)$-монополем Янга [1] описывается уравнением [2]

$$\frac{1}{2m}\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x_j} - \hbar A_j^a\widehat{T}_a\right)^2\psi + \frac{\hbar^2}{2mr^2}\widehat{T}^2\psi - \frac{e^2}{r}\psi = \epsilon\psi, \tag{1}$$

где $j = 0,1,2,3,4,\ a = 1,2,3$. Операторы $\widehat{T}_a$ суть генераторы группы $SU(2)$:

$$[\widehat{T}_a, \widehat{T}_b] = i\epsilon_{abc}\widehat{T}_c.$$

Триплет пятимерных векторов $\vec{A}^a$ имеет вид

$$\vec{A}^1 = \frac{1}{r(r+x_0)}(0, -x_4, -x_3, x_2, x_1),$$
$$\vec{A}^2 = \frac{1}{r(r+x_0)}(0, x_3, -x_4, -x_1, x_2),$$
$$\vec{A}^3 = \frac{1}{r(r+x_0)}(0, x_2, -x_1, x_4, -x_3).$$

*Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Московская область, Россия

Каждый член триплета $\vec{A}^a$ совпадает с вектор-потенциалом пятимерного монополя Дирака [1] с единичным топологическим зарядом и с осью сингулярности, направленной вдоль неположительной части оси x_0. Векторы A_j^a ортогональны как друг к другу:

$$A_j^a A_j^b = \frac{1}{r^2}\frac{(r-x_0)}{(r+x_0)}\delta_{ab},$$

так и к вектору $\vec{x} = (x_0, x_1, x_2, x_3, x_4)$.

Кратность вырождения энергетического спектра ($N = 0, 1, 2, ...$)

$$\epsilon_N^T = -\frac{me^4}{2\hbar^2\left(\frac{N}{2}+2\right)^2} \tag{2}$$

при фиксированных значениях T задается формулой [3]

$$g_N^T = \frac{1}{12}(2T+1)^2\left(\frac{N}{2}-T+1\right)\left(\frac{N}{2}-T+2\right)\times$$
$$\times\left\{\left(\frac{N}{2}-T+2\right)\left(\frac{N}{2}-T+3\right)+2T(N+5)\right\}.$$

При $T = 0$ и четных $N = 2n$ правая часть последней формулы равняется $(n+1)\times(n+2)^2(n+3)/12$, т.е. кратности вырождения чисто кулоновских уровней [4]. Вырождение энергетических уровней системы "заряд–дион" – это следствие скрытой симметрии. В работе [5] нами было доказано, что группа скрытой симметрии рассматриваемой системы есть группа $SO(6)$.

Статья построена следующим образом. В разделах 2 и 4 приводятся решения уравнения (1) в пятимерных гиперсферических и параболических координатах. В разделе 3 доказывается добавочное условие ортогональности гиперсферических радиальных функций по гипермоменту. В разделе 5, пользуясь добавочным условием ортогональности для радиальных функций, мы вычисляем коэффициенты разложения гиперсферического базиса по параболическому. В разделе 6 выводятся соотношения, которым подчиняются коэффициенты разложения сфероидального базиса по гиперсферическому и параболическому.

2. ГИПЕРСФЕРИЧЕСКИЙ БАЗИС

Для полноты в этом разделе мы приводим решения уравнения (1), полученные нами в работе [3].

В пространстве $\mathbb{R}^5$ определим гиперсферические координаты $r \in [0,\infty)$, $\theta \in [0,\pi]$, $\alpha \in [0,2\pi)$, $\beta \in [0,\pi]$, $\gamma \in [0,4\pi)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} x_0 &= r\cos\theta, \\ x_1 + ix_2 &= r\sin\theta\cos\frac{\beta}{2}e^{i\frac{\alpha+\gamma}{2}}, \\ x_3 + ix_4 &= r\sin\theta\sin\frac{\beta}{2}e^{i\frac{\alpha-\gamma}{2}}. \end{aligned} \tag{3}$$

Так как

$$iA_j^a \frac{\partial}{\partial x_j} = \frac{2}{r(r+x_0)} \hat{L}_a,$$

где

$$\hat{L}_1 = \frac{i}{2}\left[D_{41}(x) + D_{32}(x)\right],$$
$$\hat{L}_2 = \frac{i}{2}\left[D_{13}(x) + D_{42}(x)\right],$$
$$\hat{L}_3 = \frac{i}{2}\left[D_{12}(x) + D_{34}(x)\right],$$
$$D_{ij}(x) = -x_i \frac{\partial}{\partial x_j} + x_j \frac{\partial}{\partial x_i},$$

то уравнение (1) в гиперсферических координатах принимает вид

$$\left(\Delta_{r\theta} - \frac{\hat{L}^2}{r^2 \sin^2\theta/2} - \frac{\hat{J}^2}{r^2\cos^2\theta/2}\right)\psi + \frac{2m}{\hbar^2}\left(\epsilon + \frac{e^2}{r}\right)\psi = 0. \tag{4}$$

Здесь

$$\Delta_{r\theta} = \frac{1}{r^4}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^4 \frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^3\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin^3\theta \frac{\partial}{\partial\theta}\right),$$

а $\hat{J}_a = \hat{L}_a + \widehat{T}_a$. Отметим, что

$$[\hat{L}_a, \hat{L}_b] = i\epsilon_{abc}\hat{L}_c, \qquad [\hat{J}_a, \hat{J}_b] = i\epsilon_{abc}\hat{J}_c.$$

Решение уравнения (4) имеет вид [3]

$$\psi^{\text{sph}} = R_{N\lambda}(r) Z_{\lambda LJ}(\theta) \mathcal{D}^{JM}_{LTm't'}(\alpha,\beta,\gamma;\alpha_T,\beta_T,\gamma_T), \tag{5}$$

где

$$\mathcal{D}^{JM}_{LTm't'}(\alpha,\beta,\gamma;\alpha_T,\beta_T,\gamma_T) = \sqrt{\frac{(2L+1)(2T+1)}{4\pi^4}} \times$$
$$\times \sum_{M=m+t} C^{JM}_{L,m;T,t} D^L_{mm'}(\alpha,\beta,\gamma) D^T_{tt'}(\alpha_T,\beta_T,\gamma_T)$$

– собственные функции операторов $\hat{L}^2$, $\widehat{T}^2$ и $\hat{J}^2$ с собственными значениями $L(L+1)$, $T(T+1)$ и $J(J+1)$, соответственно. Здесь $C^{JM}_{L,m;T,t}$ – коэффициенты Клебша–Гордана, $D^L_{mm'}$ и $D^T_{tt'}$ – функции Вигнера, а α_T, β_T и γ_T – координаты группового пространства $SU(2)$.

Функции $Z_{\lambda LJ}(\theta)$ и $R_{N\lambda}(r)$ даются формулами

$$Z_{\lambda LJ}(\theta) = N^\lambda_{JLT}(1-\cos\theta)^L(1+\cos\theta)^J P^{(2L+1,2J+1)}_{\lambda-L-J}(\cos\theta), \tag{6}$$

$$R_{N\lambda}(r) = C_{N\lambda} e^{-\kappa r}(2\kappa r)^\lambda F\left(-\frac{N}{2}+\lambda, 2\lambda+4; 2\kappa r\right), \tag{7}$$

где F – вырожденная гипергеометрическая функция, N^{λ}_{JLT} и $C_{N\lambda}$ – нормировочные константы:

$$N^{\lambda}_{LJT} = \sqrt{\frac{(2\lambda+3)(\lambda-J-L)!\,\Gamma(\lambda+J+L+3)}{2^{2J+2L+3}\Gamma(\lambda+J-L+2)\Gamma(\lambda-J+L+2)}},$$

$$C_{N\lambda} = \frac{32}{(N+4)^3}\frac{1}{(2\lambda+3)!}\sqrt{\frac{(\frac{N}{2}+\lambda+3)!}{r_0^5(\frac{N}{2}-\lambda)!}},$$

$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ – многочлены Якоби, $\kappa = 2/[r_0(N+4)]$, $r_0 = \hbar^2/(me^2)$ – боровский радиус. Предполагается, что

$$\begin{gathered}\int_0^{\pi} \sin^3\theta\, Z_{\lambda' LJ}(\theta) Z_{\lambda LJ}(\theta)\, d\theta = \delta_{\lambda'\lambda},\\ \int_0^{\infty} r^4 R_{N'\lambda}(r) R_{N\lambda}(r)\, dr = \delta_{N'N}.\end{gathered} \tag{8}$$

Квантовые числа пробегают значения $|L-T| \leqslant J \leqslant L+T$, $\lambda = L+J, L+J+1, \ldots, N/2$.

Гиперсферический базис (5) является собственной функцией квадрата оператора гипермомента $\hat{\Lambda}^2$:

$$\hat{\Lambda}^2\psi^{\mathrm{hsp}} = \lambda(\lambda+3)\psi^{\mathrm{hsp}}, \tag{9}$$

где

$$\hat{\Lambda}^2 = -\frac{1}{\sin^3\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin^3\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{4}{\sin^2\theta}\hat{L}^2 + \frac{2}{1+\cos\theta}\widehat{T}^2 + \frac{2}{1+\cos\theta}\hat{L}_a\widehat{T}_a.$$

В декартовых координатах оператор $\hat{\Lambda}^2$ имеет вид

$$\hat{\Lambda}^2 = -r^2\Delta_5 + x_i x_j\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j} + 4x_i\frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{2r}{r+x_0}\widehat{T}^2 + 2ir^2A_j^a\widehat{T}_a\frac{\partial}{\partial x_j}. \tag{10}$$

3. ОРТОГОНАЛЬНОСТЬ ПО ГИПЕРМОМЕНТУ

Докажем, что для радиальных волновых функций $R_{N\lambda}(r)$ наряду с (8) выполняется следующее добавочное условие ортогональности по гипермоменту λ:

$$I_{\lambda\lambda'} = \int_0^{\infty} r^2 R_{N\lambda'}(r) R_{N\lambda}(r)\, dr = \frac{16}{r_0^2(N+4)^2}\frac{1}{2\lambda+3}\delta_{\lambda\lambda'}. \tag{11}$$

Это соотношение будет использовано в разделе 6 при нахождении межбазисных разложений. Доказать формулу (11) можно следующим образом.

В соотношение (11) вместо $R_{N\lambda}(r)$ и $R_{N\lambda'}(r)$ подставим их явные выражения (7), учтем, что

$$F\left(-\frac{N}{2}+\lambda, 2\lambda+4; 2\kappa r\right) = \sum_{s=0}^{\frac{N}{2}-\lambda}\frac{\left(-\frac{N}{2}+\lambda\right)_s}{(2\lambda+4)_s}\frac{(2\kappa r)^s}{s!}$$

и [6]

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda x}x^{\nu}F(\alpha,\gamma;kx)\, dx = \frac{\Gamma(\nu+1)}{\lambda^{\nu+1}}\,{}_2F_1\left(\alpha,\nu+1;\gamma;\frac{k}{\lambda}\right). \tag{12}$$

Тогда, пользуясь известной формулой для гипергеометрической функции

$$
{}_2F_1(a,b;c;1)=\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}, \tag{13}
$$

приходим к соотношению

$$
\begin{aligned}
I_{\lambda\lambda'}=&\frac{16}{r_0^2(N+4)^2}\frac{\Gamma(\lambda+\lambda'+3)}{(2\lambda+3)}\sqrt{\frac{\left(\frac{N}{2}+\lambda+3\right)!}{\left(\frac{N}{2}-\lambda\right)!\left(\frac{N}{2}-\lambda'\right)!\left(\frac{N}{2}+\lambda'+3\right)!}}\times\\
&\times\sum_{s=0}^{\frac{N}{2}-\lambda}\frac{\left(-\frac{N}{2}+\lambda\right)_s}{s!}\frac{(\lambda+\lambda'+3)_s}{(2\lambda+4)_s}\frac{\Gamma\left(\frac{N}{2}-\lambda-s+1\right)}{\Gamma(\lambda-\lambda'-s+1)}.
\end{aligned}\tag{14}
$$

Известно [7], что

$$
\frac{\Gamma(z)}{\Gamma(z-n)}=(-1)^n\frac{\Gamma(-z+n+1)}{\Gamma(-z+1)}, \tag{15}
$$

и, следовательно, сумма по s сворачивается в гипергеометрическую функцию типа (13), так что

$$
\begin{aligned}
I_{\lambda\lambda'}=&\frac{16}{r_0^2(N+4)^2}\frac{1}{\lambda+\lambda'+3}\sqrt{\frac{\left(\frac{N}{2}-\lambda\right)!\left(\frac{N}{2}+\lambda+3\right)!}{\left(\frac{N}{2}-\lambda'\right)!\left(\frac{N}{2}+\lambda'+3\right)!}}\times\\
&\times\frac{1}{\Gamma(\lambda-\lambda'+1)\Gamma(\lambda'-\lambda+1)}.
\end{aligned}\tag{16}
$$

Так как при данном N числа λ и λ' целые или полуцелые одновременно, то выражение (16) обращается в нуль при $\lambda\neq\lambda'$ за счет произведения гамма-функций $\Gamma(\lambda-\lambda'+1)$ и $\Gamma(\lambda'-\lambda+1)$, что и приводит к условию ортогональности (11).

Формула (11) обобщает соотношение ортогональности для атома водорода, полученное нами в работе [8]. Наличие добавочного условия ортогональности связано с фактом случайного вырождения энергетического спектра системы "заряд–$SU(2)$-монополь".

4. ПАРАБОЛИЧЕСКИЙ БАЗИС

Определим параболические координаты в $\mathbb{R}^5$ следующим образом:

$$
\begin{aligned}
x_0&=\frac{1}{2}(\mu-\nu),\\
x_1+ix_2&=\sqrt{\mu\nu}\cos\frac{\beta}{2}e^{i\frac{\alpha+\gamma}{2}},\\
x_3+ix_4&=\sqrt{\mu\nu}\sin\frac{\beta}{2}e^{i\frac{\alpha-\gamma}{2}},
\end{aligned}\tag{17}
$$

где $\mu,\nu\in[0,\infty)$. Оператор Лапласа в этих координатах имеет вид

$$
\Delta_5=\frac{4}{\mu+\nu}\left[\frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial\mu}\left(\mu^2\frac{\partial}{\partial\mu}\right)+\frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\nu^2\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\right]-\frac{4}{\mu\nu}\hat{L}^2,
$$

так что вместо уравнения (1) имеем

$$\left[\Delta_{\mu\nu} - \frac{4\hat{J}^2}{\mu(\mu+\nu)} - \frac{4\hat{L}^2}{\nu(\mu+\nu)}\right]\psi^{\rm par} + \frac{2m}{\hbar^2}\left(\epsilon + \frac{2e^2}{\mu+\nu}\right)\psi^{\rm par} = 0, \tag{18}$$

где

$$\Delta_{\mu\nu} = \frac{4}{\mu+\nu}\left[\frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial\mu}\left(\mu^2\frac{\partial}{\partial\mu}\right) + \frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\nu^2\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\right].$$

После подстановки

$$\psi^{\rm par} = f_1(\mu)f_2(\nu)\mathcal{D}^{JM}_{LTm't'}(\alpha,\beta,\gamma;\alpha_T,\beta_T,\gamma_T) \tag{19}$$

переменные в уравнении (18) разделяются, и мы приходим к следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mu}\frac{d}{d\mu}\left(\mu^2\frac{df_1}{d\mu}\right) + \left[\frac{m\epsilon}{2\hbar^2}\mu - \frac{J(J+1)}{\mu} + \frac{\hbar}{2\sqrt{m}}\beta + \frac{me^2}{2\hbar^2}\right]f_1 = 0,\\ \frac{1}{\nu}\frac{d}{d\nu}\left(\nu^2\frac{df_2}{d\nu}\right) + \left[\frac{m\epsilon}{2\hbar^2}\nu - \frac{L(L+1)}{\nu} - \frac{\hbar}{2\sqrt{m}}\beta + \frac{me^2}{2\hbar^2}\right]f_2 = 0,\end{aligned} \tag{20}$$

где β – постоянная разделения. При $T=0$ (т.е. $J=L$) эти уравнения совпадают с уравнениями для пятимерной задачи Кулона [4], и, следовательно,

$$\psi^{\rm par} = \kappa^3\sqrt{2r_0}\,f_{n_1J}(\mu)f_{n_2L}(\nu)\mathcal{D}^{JM}_{LTm't'}(\alpha,\beta,\gamma;\alpha_T,\beta_T,\gamma_T), \tag{21}$$

где

$$f_{pq}(x) = \frac{1}{(2q+1)!}\sqrt{\frac{(p+2q+1)!}{p!}}\exp\left(-\frac{\kappa x}{2}\right)(\kappa x)^q F(-p, 2q+2; \kappa x),$$

а

$$n_1 = -J-1+\frac{\hbar}{2\kappa\sqrt{m}}\beta + \frac{1}{2\kappa r_0}, \qquad n_2 = -L-1-\frac{\hbar}{2\kappa\sqrt{m}}\beta + \frac{1}{2\kappa r_0}$$

– неотрицательные целые числа. Из последних соотношений и из формулы (2) следует, что параболические квантовые числа n_1, n_2, J и L связаны с главным квантовым числом N следующим образом:

$$N = 2(n_1+n_2+J+L).$$

Исключая энергию из уравнений (20), мы приходим к добавочному интегралу движения

$$\begin{aligned}\widehat{M}_0 = \frac{\hbar}{\sqrt{m}}\Bigg\{&\frac{2}{\mu+\nu}\left[\frac{\mu}{\nu}\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\nu^2\frac{\partial}{\partial\nu}\right) - \frac{\nu}{\mu}\frac{\partial}{\partial\mu}\left(\mu^2\frac{\partial}{\partial\mu}\right)\right] - \\ &- \frac{2(\mu-\nu)}{\mu\nu}\hat{L}^2 + \frac{4\nu}{\mu(\mu+\nu)}\hat{L}_a\widehat{T}_a + \frac{2\nu}{\mu(\mu+\nu)}\widehat{T}^2 + \frac{me}{\hbar^2}\frac{\mu-\nu}{\mu+\nu}\Bigg\}\end{aligned} \tag{22}$$

с собственными значениями

$$\frac{\hbar^2}{m}\beta = \frac{2e^2\sqrt{m}}{\hbar}\frac{n_1-n_2+J-L}{N+4}.$$

В декартовых координатах оператор $\widehat{M}_0$ запишется в виде

$$\widehat{M}_0 = \frac{\hbar}{\sqrt{m}}\left[x_0\frac{\partial^2}{\partial x_\sigma \partial x_\sigma} - x_\sigma\frac{\partial^2}{\partial x_0 \partial x_\sigma} + i(r-x_0)A_j^a\widehat{T}_a\frac{\partial}{\partial x_j} - \right.$$
$$\left. - 2\frac{\partial}{\partial x_0} + \frac{r-x_0}{r(r+x_0)}\widehat{T}^2 + \frac{me^2}{\hbar^2}\frac{x_0}{r}\right], \tag{23}$$

где $\sigma = 1,2,3,4$. Оператор $\widehat{M}_0$ – компонента вектора Рунге–Ленца [5]

$$\widehat{M}_k = \frac{1}{2\sqrt{m}}\left(\hat{\pi}_i\hat{L}_{ik} + \hat{L}_{ik}\hat{\pi}_i + \frac{2me^2}{\hbar}\frac{x_k}{r}\right)$$

при $k = 0$.

5. РАЗЛОЖЕНИЕ ПАРКА–ТАРТЕРА

Гиперсферические $(r,\theta,\alpha,\beta,\gamma)$ и параболические $(\mu,\nu,\alpha,\beta,\gamma)$ координаты связаны между собой следующим образом:

$$\mu = r(1+\cos\theta), \qquad \nu = r(1-\cos\theta). \tag{24}$$

При фиксированных значениях энергии

$$\psi^{\text{par}} = \sum_{\lambda=T}^{\frac{N}{2}} W_{NJLn_1}^{\lambda}\psi^{\text{hsp}}. \tag{25}$$

Переходя в левой части соотношения (25) от μ и ν к r и θ, положив $\theta = 0$, и с учетом того, что

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(1) = \frac{(\alpha+1)_n}{n!},$$

мы установим равенство, в которое входит только переменная r. Затем, пользуясь условием ортогональности (11), получим

$$W_{NJLn_1}^{\lambda} = \frac{1}{(2J+1)!\,(2\lambda+3)!}E_{JL\lambda}^{Nn_1}K_{JL\lambda}^{Nn_1}, \tag{26}$$

где

$$E_{JL\lambda}^{Nn_1} = \sqrt{(2\lambda+3)(\lambda-J-L)!\left(\frac{N}{2}+\lambda+3\right)!}\times$$
$$\times\left[\frac{\Gamma(\lambda+J-L+2)(n_1+2J+1)!\,(n_2+2L+1)!}{n_1!\,n_2!\,\left(\frac{N}{2}-\lambda\right)!\,\Gamma(\lambda-J+L+2)\Gamma(\lambda+J+L+3)}\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{27}$$

$$K_{JL\lambda}^{Nn_1} = \int_0^\infty e^{-x}x^{\lambda+J+L+2}F(-n_1,2J+2;x)F\left(-\frac{N}{2}+\lambda,2\lambda+4;x\right)dx. \tag{28}$$

Для вычисления интеграла $K_{JL\lambda}^{Nn_1}$ запишем вырожденную гипергеометрическую функцию $F(-n_1, 2J+2; x)$ в виде многочлена, произведем интегрирование согласно формуле (12) и, учитывая соотношение (13), получим

$$K_{JL\lambda}^{Nn_1} = \frac{(2\lambda+3)!\,\left(\frac{N}{2}-J-L\right)!\,\Gamma(\lambda+J+L+3)}{(\lambda-J-L)!\,\left(\frac{N}{2}+\lambda+3\right)!} \times \\ \times {}_3F_2\left\{\begin{matrix} -n_1, -\lambda+J+L, \lambda+J+L+3 \\ 2J+2, -\frac{N}{2}+J+L \end{matrix}\middle| 1\right\}. \tag{29}$$

Подстановка (27) и (29) в (26) дает

$$W_{NJLn_1}^{\lambda} = \left[\frac{(2\lambda+3)\Gamma(\lambda+J+L+3)(n_1+2J+1)!\,(n_2+2L+1)!}{n_1!\,n_2!\,(\lambda-J-L)!\,\left(\frac{N}{2}-\lambda\right)!\,\left(\frac{N}{2}+\lambda+3\right)!}\right]^{\frac{1}{2}} \times \\ \times \frac{\left(\frac{N}{2}-J-L\right)!}{(2J+1)!}\sqrt{\frac{\Gamma(\lambda+J-L+2)}{\Gamma(\lambda-J+L+2)}}\,{}_3F_2\left\{\begin{matrix} -n_1, -\lambda+J+L, \lambda+J+L+3 \\ 2J+2, -\frac{N}{2}+J+L \end{matrix}\middle| 1\right\}. \tag{30}$$

Известно, что коэффициенты Клебша–Гордана можно записать в виде [9]

$$C_{a\alpha;b\beta}^{c\gamma} = (-1)^{a-\alpha}\delta_{\gamma,\alpha+\beta}\frac{(a+b-\gamma)!\,(b+c-\alpha)!}{\sqrt{(b-\beta)!\,(b+\beta)!}} \times \\ \times \left[\frac{(2c+1)(a+\alpha)!\,(c+\gamma)!}{(a-\alpha)!\,(c-\gamma)!\,(a+b+c+1)!\,(a+b-c)!\,(a-b+c)!\,(b-a+c)!}\right]^{\frac{1}{2}} \times \\ \times {}_3F_2\left\{\begin{matrix} -a-b-c-1, -a+\alpha, -c+\gamma \\ -a-b+\gamma, -b-c+\alpha \end{matrix}\middle| 1\right\}. \tag{31}$$

Пользуясь формулой [7]

$${}_3F_2\left\{\begin{matrix} s, s', -N \\ t', 1-N-t \end{matrix}\middle| 1\right\} = \frac{(t+s)_N}{(t)_N}\,{}_3F_2\left\{\begin{matrix} s, t'-s', -N \\ t', t+s \end{matrix}\middle| 1\right\},$$

соотношение (31) можно записать в виде

$$C_{a\alpha;b\beta}^{c\gamma} = \left[\frac{(2c+1)(b-a+c)!\,(a+\alpha)!\,(b+\beta)!\,(c+\gamma)!}{(b-\beta)!\,(c-\gamma)!\,(a+b-c)!\,(a-b+c)!\,(a+b+c+1)!}\right]^{\frac{1}{2}} \times \\ \times \delta_{\gamma,\alpha+\beta}\frac{(-1)^{a-\alpha}}{\sqrt{(a-\alpha)!}}\frac{(a+b-\gamma)!}{(b-a+\gamma)!}\,{}_3F_2\left\{\begin{matrix} -a+\alpha, c+\gamma+1, -c+\gamma \\ \gamma-a-b, b-a+\gamma+1 \end{matrix}\middle| 1\right\}. \tag{32}$$

Наконец, сравнивая (32) и (30), приходим к следующему представлению:

$$W_{NJLn_1}^{\lambda} = (-1)^{n_1} C^{\lambda+1,J+L+1}_{\frac{N-2J+2L+2}{4},L+\frac{n_2-n_1+1}{2};\frac{N+2J-2L+2}{4},J+\frac{n_1-n_2+1}{2}}. \tag{33}$$

При $T=0$ (т.е. $J=L$) формула (33) переходит в соответствующую формулу для пятимерной задачи Кулона [4].

Обратное разложение, т.е. разложение гиперсферического базиса по параболическому, имеет вид

$$\psi^{\text{hsp}} = \sum_{n_1=0}^{\frac{N}{2}-J-L} \widetilde{W}^{n_1}_{NJL\lambda}\psi^{\text{par}}. \tag{34}$$

Пользуясь условием ортонормируемости коэффициентов Клебша–Гордана группы $SU(2)$, получим

$$\widetilde{W}^{n_1}_{NJL\lambda} = (-1)^{n_1} C^{\lambda+1, J+L+1}_{\frac{N-2J+2L+2}{4}, \frac{N-2J+2L+2}{4}-n_1; \frac{N+2J-2L+2}{4}, n_1+J-\frac{N-2J-2L-2}{4}}. \tag{35}$$

С учетом формул (31) или (32) можно выразить эти коэффициенты и через функции ${}_3F_2$.

6. СФЕРОИДАЛЬНЫЙ БАЗИС

Определим пятимерные сфероидальные координаты следующим образом:

$$\begin{aligned}
x_0 &= \frac{R}{2}(\xi\eta+1),\\
x_1 + ix_2 &= \frac{R}{2}\sqrt{(\xi^2-1)(1-\eta^2)}\cos\frac{\beta}{2}e^{i\frac{\alpha+\gamma}{2}},\\
x_3 + ix_4 &= \frac{R}{2}\sqrt{(\xi^2-1)(1-\eta^2)}\sin\frac{\beta}{2}e^{i\frac{\alpha-\gamma}{2}},
\end{aligned}$$

где $\xi \in [1,\infty)$, $\eta \in [-1,1]$, $R \in [0,\infty)$. Параметр R есть межфокусное расстояние, и при $R \to 0$ и $R \to \infty$ сфероидальные координаты переходят в гиперсферические и параболические, соответственно.

Оператор Лапласа в этих координатах имеет вид

$$\begin{aligned}
\Delta_5 = \frac{4}{R^2(\xi^2-\eta^2)}&\left\{\frac{1}{\xi^2-1}\frac{\partial}{\partial\xi}\left[(\xi^2-1)^2\frac{\partial}{\partial\xi}\right] + \frac{1}{1-\eta^2}\frac{\partial}{\partial\eta}\left[(1-\eta^2)^2\frac{\partial}{\partial\eta}\right]\right\} -\\
&- \frac{16\hat{L}^2}{R^2(\xi^2-1)(1-\eta^2)},
\end{aligned}$$

поэтому вместо уравнения (1) имеем

$$\begin{aligned}
&\left[\Delta_{\xi\eta} - \frac{8\hat{J}^2}{R^2(\xi+\eta)(\xi+1)(1+\eta)} - \frac{8\hat{L}^2}{R^2(\xi+\eta)(\xi-1)(1-\eta)}\right]\psi^{\text{spr}} +\\
&\qquad + \frac{2m}{\hbar^2}\left[\epsilon + \frac{2e^2}{R(\xi+\eta)}\right]\psi^{\text{spr}} = 0,
\end{aligned} \tag{36}$$

где

$$\Delta_{\xi\eta} = \frac{4}{R^2(\xi^2-\eta^2)}\left\{\frac{1}{\xi^2-1}\frac{\partial}{\partial\xi}\left[(\xi^2-1)^2\frac{\partial}{\partial\xi}\right] + \frac{1}{1-\eta^2}\frac{\partial}{\partial\eta}\left[(1-\eta^2)^2\frac{\partial}{\partial\eta}\right]\right\}.$$

После подстановки

$$\psi^{\mathrm{spr}} = \phi_1(\xi)\phi_2(\eta)\mathcal{D}^{JM}_{LTm't'}(\alpha,\beta,\gamma;\alpha_T,\beta_T,\gamma_T) \tag{37}$$

переменные в уравнении (36) разделяются:

$$\begin{aligned}
&\left[\frac{1}{\xi^2-1}\frac{d}{d\xi}(\xi^2-1)^2\frac{d}{d\xi}-\right.\\
&\qquad\left.-\frac{2L(L+1)}{\xi-1}+\frac{2J(J+1)}{\xi+1}+\frac{R}{r_0}\xi+\frac{mR^2\epsilon}{2\hbar^2}(\xi^2-1)\right]\phi_1 = A(R)\phi_1,\\
&\left[\frac{1}{1-\eta^2}\frac{d}{d\eta}(1-\eta^2)^2\frac{d}{d\eta}-\right.\\
&\qquad\left.-\frac{2L(L+1)}{1-\eta}-\frac{2J(J+1)}{1+\eta}-\frac{R}{r_0}\eta+\frac{mR^2\epsilon}{2\hbar^2}(1-\eta^2)\right]\phi_2 = -A(R)\phi_2,
\end{aligned} \tag{38}$$

где $A(R)$ – постоянная разделения.

Исключая энергию из системы уравнений (38), мы получим сфероидальный интеграл движения

$$\begin{aligned}
\hat{A} = {}&\frac{1}{\xi^2-\eta^2}\left[\frac{1-\eta^2}{\xi^2-1}\frac{\partial}{\partial\xi}(\xi^2-1)^2\frac{\partial}{\partial\xi}-\frac{\xi^2-1}{1-\eta^2}\frac{\partial}{\partial\eta}(1-\eta^2)^2\frac{\partial}{\partial\eta}\right]+\\
&+\frac{4(\xi^2+\eta^2-2)}{(\xi^2-1)(1-\eta^2)}\hat{L}^2+i\frac{R^2}{2}(\xi^2+\eta^2+\xi\eta+\xi+\eta-1)A^a_j\widehat{T}_a\frac{\partial}{\partial x_j}+\\
&+\frac{2(\xi^2+\eta^2+\xi\eta+\xi+\eta-1)}{(\xi+\eta)(\xi+1)(1+\eta)}\widehat{T}^2+\frac{R(\xi\eta+1)}{r_0(\xi+\eta)}.
\end{aligned} \tag{39}$$

В последнем выражении, переходя к декартовым координатам и учитывая (10) и (23), получим

$$\hat{A} = \hat{\Lambda}^2 + \frac{R\sqrt{m}}{\hbar}\widehat{M}_0. \tag{40}$$

Итак,

$$\hat{A}\psi^{\mathrm{spr}} = A_q(R)\psi^{\mathrm{spr}}. \tag{41}$$

Индекс q нумерует собственные значения оператора $\hat{A}$ и пробегает следующие значения: $0 \leqslant q \leqslant N/2 - L - J$.

Теперь построим сфероидальный базис в виде разложений

$$\psi^{\mathrm{spr}} = \sum_{\lambda=J+L}^{\frac{N}{2}} U^{\lambda}_{NqJL}(R)\psi^{\mathrm{hsp}}, \tag{42}$$

$$\psi^{\mathrm{spr}} = \sum_{n_1=0}^{\frac{N}{2}-J-L} V^{n_1}_{NqJL}(R)\psi^{\mathrm{par}}. \tag{43}$$

Подействуем оператором $\hat{A}$ на левые и правые части разложений (42), (43), тогда с учетом уравнений (9), (41) и

$$\widehat{M}_0\psi^{\rm par} = \frac{2e^2\sqrt{m}}{\hbar(N+4)}(n_1 - n_2 + J - L)\psi^{\rm par} \tag{44}$$

мы получим две системы линейных однородных уравнений

$$\left[A_q(R) - \lambda(\lambda+3)\right]U^{\lambda}_{NqJL}(R) = \frac{R\sqrt{m}}{\hbar}\sum_{\lambda'=J+L}^{\frac{N}{2}} U^{\lambda'}_{NqJL}(R)(\widehat{M}_0)_{\lambda\lambda'}, \tag{45}$$

$$\left[A_q(R) - \frac{2R}{r_0(N+4)}(n_1 - n_2 + J - L)\right]V^{n_1}_{NqJL}(R) = \sum_{n_1'=0}^{\frac{N}{2}-J-L} V^{n_1'}_{NqJL}(R)(\hat{\Lambda}^2)_{n_1n_1'}. \tag{46}$$

Здесь

$$(\widehat{M}_0)_{\lambda\lambda'} = \int \psi^{*\rm hsp}_{\lambda}\widehat{M}_0\psi^{\rm hsp}_{\lambda'}\,dv,$$

$$(\hat{\Lambda}^2)_{n_1n_1'} = \int \psi^{*\rm par}_{n_1}\hat{\Lambda}^2\psi^{\rm par}_{n_1'}\,dv.$$

Из (34) и (44) следует, что

$$(\widehat{M}_0)_{\lambda\lambda'} = \frac{2e^2\sqrt{m}}{\hbar(N+4)}\sum_{n_1=0}^{\frac{N}{2}-J-L}\left(2n_1 - \frac{N}{2} + 2J\right)\widetilde{W}^{n_1}_{NJL\lambda}\widetilde{W}^{n_1}_{NJL\lambda'}. \tag{47}$$

Теперь после подстановки формулы (35) в (47) и с учетом рекуррентного соотношения [9]

$$C^{c\gamma}_{a\alpha;b\beta} = -\left[\frac{4c^2(2c+1)(2c-1)}{(c+\gamma)(c-\gamma)(b-a+c)(a-b+c)(a+b-c+1)(a+b+c+1)}\right]^{\frac{1}{2}}\times$$
$$\times\left\{\left[\frac{(c-\gamma-1)(c+\gamma-1)(b-a+c-1)(a-b+c-1)(a+b-c+2)(a+b+c)}{4(c-1)^2(2c-3)(2c-1)}\right]^{\frac{1}{2}}\times\right.$$
$$\left.\times C^{c-2,\gamma}_{a\alpha;b\beta} - \frac{(\alpha-\beta)c(c-1) - \gamma a(a+1) + \gamma b(b+1)}{2c(c-1)}C^{c-1,\gamma}_{a\alpha;b\beta}\right\}$$

и условия

$$\sum_{\alpha,\beta} C^{c\gamma}_{a\alpha;b\beta}C^{c'\gamma'}_{a\alpha;b\beta} = \delta_{c'c}\delta_{\gamma'\gamma}$$

получим

$$(\widehat{M}_0)_{\lambda\lambda'} = -\frac{e^2\sqrt{m}}{\hbar(N+4)}\left[\frac{(L-J)(L+J+1)(N+4)}{(\lambda+1)(\lambda+2)}\delta_{\lambda\lambda'} + \right.$$
$$\left. + B^{\lambda+1}_{NJL}\delta_{\lambda',\lambda+1} + B^{\lambda}_{NJL}\delta_{\lambda',\lambda-1}\right], \tag{48}$$

где

$$B^{\lambda}_{NJL} = \frac{\sqrt{(N-2\lambda+2)(N+2\lambda+6)}}{(\lambda+1)} \times$$
$$\times \left[\frac{(\lambda+J+L+2)(\lambda-J-L)(\lambda-J+L+1)(\lambda+J-L+1)}{(2\lambda+1)(2\lambda+3)}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Подставив (48) в (45), мы приходим к трехчленным рекуррентным соотношениям

$$\left[A_q(R) - \lambda(\lambda+3) + \frac{R}{r_0}\frac{(L-J)(L+J+1)}{(\lambda+1)(\lambda+2)}\right] U^{\lambda}_{NqJL}(R) +$$
$$+ \frac{R}{r_0(N+4)}\left[B^{\lambda+1}_{NJL} U^{\lambda+1}_{NqJL}(R) + B^{\lambda}_{NJL} U^{\lambda-1}_{NqJL}(R)\right] = 0. \quad (49)$$

Эту систему $N/2 - J - L$ линейных однородных уравнений надо решать совместно с условием нормировки

$$\sum_{\lambda=J+L}^{\frac{N}{2}} \left|U^{\lambda}_{NqJL}(R)\right|^2 = 1.$$

Пользуясь разложением (25), получим

$$(\hat{\Lambda}^2)_{n_1 n'_1} = \sum_{\lambda=J+L}^{\frac{N}{2}} \lambda(\lambda+3) W^{\lambda}_{NJLn_1} W^{\lambda}_{NJLn'_1}. \quad (50)$$

Формула (33), соотношение [10]

$$\left[c(c+1) - a(a+1) - b(b+1) - 2\alpha\beta\right] C^{c,\gamma}_{a,\alpha;b,\beta} =$$
$$= \sqrt{(a+\alpha)(a-\alpha+1)(b-\beta)(b+\beta+1)}\, C^{c,\gamma}_{a,\alpha-1;b,\beta+1} +$$
$$+ \sqrt{(a-\alpha)(a+\alpha+1)(b+\beta)(b-\beta+1)}\, C^{c,\gamma}_{a,\alpha+1;b,\beta-1}$$

и условие

$$\sum_{c,\gamma} C^{c\gamma}_{a\alpha;b\beta} C^{c\gamma}_{a\alpha';b\beta'} = \delta_{\alpha\alpha'}\delta_{\beta\beta'}$$

позволяют получить для матричного элемента $(\hat{\Lambda}^2)_{n_1 n'_1}$ следующее выражение:

$$(\hat{\Lambda}^2)_{n_1 n'_1} = \left[n_2(n_1+1) + (n_1+2J+1)(n_2+2L+2) + (L-J)(L-J+1) - 2\right]\delta_{n'_1 n_1} -$$
$$- \left[n_1(n_1+2J+1)(n_2+1)(n_2+2L+2)\right]^{\frac{1}{2}} \delta_{n'_1, n_1-1} -$$
$$- \left[n_2(n_1+1)(n_1+2J+2)(n_2+2L+1)\right]^{\frac{1}{2}} \delta_{n'_1, n_1+1}.$$

Подставляя последнюю формулу в (46), получим трехчленное рекуррентное соотношение

$$\Big[n_2(n_1+1)+(n_1+2J+1)(n_2+2L+2)-2+(L-J)(L-J+1)+$$
$$+\frac{R}{r_0(N+4)}(4n_1-N+4J)-A_q(R)\Big]V^{n_1}_{NqJL}(R)=$$
$$=\big[n_1(n_2+1)(n_1+2J+1)(n_2+2L+2)\big]^{\frac{1}{2}}V^{n_1+1}_{NqJL}(R)+$$
$$+\big[n_2(n_1+1)(n_1+2J+2)(n_2+2L+1)\big]^{\frac{1}{2}}V^{n_1-1}_{NqJL}(R),$$

которое нужно решать с условием

$$\sum_{n_1=0}^{\frac{N}{2}-J-L}\left|V^{n_1}_{NqJL}(R)\right|^2=1.$$

Приведем следующие предельные формулы:

$$\lim_{R\to 0}U^{\lambda}_{NqJL}(R)=\delta_{\lambda q},\qquad \lim_{R\to\infty}U^{\lambda}_{NqJL}(R)=\widetilde{W}^{n_1}_{NJL\lambda},$$
$$\lim_{R\to 0}V^{n_1}_{NqJL}(R)=W^{\lambda}_{NJLn_1},\qquad \lim_{R\to\infty}V^{n_1}_{NqJL}(R)=\delta_{n_1 q}.$$

Заметим, что при $\widehat{T}=0$, т.е. при $\hat{J}=\hat{L}$, воспроизводятся все формулы, полученные нами [4] для чисто кулоновского случая.

Список литературы

[1] *C. N. Yang.* J. Math. Phys. 1978. V. 19. P. 320.

[2] *L. G. Mardoyan, A. N. Sissakian, V. M. Ter-Antonyan.* Oscillator as a hidden non-Abelian monopole. Preprint E2-96-24. Dubna: JINR, 1996; hep-th/9601093.

[3] *Л. Г. Мардоян, А. Н. Сисакян, В. М. Тер-Антонян.* ЯФ. 1998. Т. 61. С. 1859.

[4] *Kh. H. Karayan, L. G. Mardoyan, V. M. Ter-Antonyan.* The Eulerian bound states: 5D Coulomb problem. Preprint E2-94-359. Dubna: JINR, 1994.

[5] *L. G. Mardoyan, A. N. Sissakian, V. M. Ter-Antonyan.* Mod. Phys. Lett. A. 1999. V. 14. P. 1303.

[6] *Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц.* Квантовая механика. М.: Наука, 1974.

[7] *Г. Бейтман, А. Эрдейи.* Высшие трансцендентные функции. Т. 1. М.: Наука, 1965.

[8] *Л. Г. Мардоян, Г. С. Погосян, В. М. Тер-Антонян.* Изв. АН Армянской ССР. Физика. 1984. Т. 19. С. 3.

[9] *Д. А. Варшалович, А. Н. Москалев, В. К. Херсонский.* Квантовая теория углового момента. Л.: Наука, 1975.

[10] *M. Kibler, G. Grenet.* J. Math. Phys. 1980. V. 21. P. 422.

Поступила в редакцию 3.IX.1999 г.