ЯДЕРНАЯ ФИЗИКА, 1999, том 62, № 4, с. 671–685

ЯДРА

ИЗОТРОПНЫЙ ОСЦИЛЛЯТОР В ПРОСТРАНСТВЕ ПОСТОЯННОЙ ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ. МЕЖБАЗИСНЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ

Е. М. Акопян*, С. И. Виницкий**, Г. С. Погосян***, А. Н. Сисакян

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Россия

Поступила в редакцию 18.11.97 г.

Посвящается светлой памяти нашего дорогого друга И.В. Луценко

Проведен подробный анализ уравнения Шредингера для изотропного осциллятора в трехмерном пространстве постоянной положительной кривизны в сферической и цилиндрической системах координат. Вычислены коэффициенты разложения между сферическим и цилиндрическим базисами осциллятора. Показано, что соответствующие коэффициенты выражаются через обобщенные гипергеометрические функции ${}_4F_3$ от единичного аргумента или $6j$-символы Рака, продолженные по своим индексам в область действительных значений. Подробно рассмотрены предельные переходы к свободному движению и плоскому пространству. Построены эллиптические базисы осциллятора в форме разложения по сферическому и цилиндрическому базисам. Показано, что соответствующие коэффициенты разложений подчиняются трехчленным рекуррентным соотношениям.

1. ВВЕДЕНИЕ

Начиная с классических работ Шредингера [1], Стивенсона [2] и Инфельда [3], системы со случайным вырождением в пространствах постоянной кривизны привлекают внимание многих исследователей в связи с нетривиальной реализацией скрытой симметрии в этих задачах и возможностью различных приложений, в частности при построении многочастичных волновых функций [4], нерелятивистских моделей кварковых систем [5] и решений задачи двух центров [6].

Существенное продвижение в теории систем со случайным вырождением сделано в работах [7–13]. Было показано, что наличие полного вырождения спектра кулоновской задачи и гармонического осциллятора на трехмерной сфере по орбитальному и азимутальному квантовым числам связано с существованием дополнительного интеграла движения: аналог вектора Рунге–Ленца (для кулоновского потенциала) и аналог тензора Демкова (для осциллятора). Однако в отличие от плоского пространства интегралы движения для кулоновской задачи и изотропного осциллятора не образуют алгебры Ли, так как соответствующие коммутаторы нелинейны. Последний факт не позволяет соответственно восстановить алгебру или группу скрытой симметрии. В дальнейшем было показано [14, 15], что в качестве алгебры скрытой симметрии могут использоваться квадратичные алгебры общего типа, так называемые алгебры Рака. Системы со скрытой симметрией для гармонического потенциала и потенциалов типа Винтернитца–Смородинского в трехмерном пространстве постоянной кривизны исследовались также с помощью техники интегралов по траекториям в работах Барута, Иноматы и Юнкера [16, 17], Гроше [18] и Гроше с соавт. [19–21].

Важнейшей задачей, относящейся к системам со скрытой симметрией, является определение коэффициентов разложений между различными базисами, получаемыми в результате разделения переменных в уравнении Шредингера. Впервые такие межбазисные разложения были рассмотрены для переходов "сфера–цилиндр" (изотропный осциллятор на трехмерной сфере), переходов "сфера–парабола" и между сферическим и эллиптическим базисами (для кулоновского потенциала на сфере и гиперболоиде) в работах [14, 15, 22]. В дальнейшем [19] было показано, что, как и для уравнения Гельмгольца [23], переменные в уравнении Шредингера для потенциала изотропного осциллятора на трехмерной сфере разделяются во всех шести ортогональных системах координат: сферической, цилиндрической, сфероконической, сплюснутой и вытянутой эллиптической и эллипсоидальной.

*E-mail: yera@thsun1.jinr.dubna.su
**E-mail: vinitsky@thsun1.jinr.dubna.su
***E-mail: pogosyan@thsun1.jinr.dubna.su

Целью настоящей работы является описание решений уравнения Шредингера в сферической, цилиндрической и двух эллиптических системах координат, а также вычисление коэффициентов разложения между соответствующими базисами. Отметим, что решение уравнения Шредингера для изотропного осциллятора в сферической системе координат было найдено в работах [8, 9, 14], а в цилиндрической и эллиптических приводится впервые.

В разд. 2 приводятся некоторые известные результаты, касающиеся уравнения Шредингера для трехмерного пространства постоянной кривизны. Раздел 3 посвящен решению уравнения Шредингера для потенциала изотропного осциллятора в сферической и цилиндрической системах координат. В разд. 4, используя явное выражение для волновых функций изотропного осциллятора, вычисляются коэффициенты межбазисного разложения между сферическим и цилиндрическим базисами. В разд. 5 построены эллиптические базисы изотропного осциллятора в виде разложения по сферическому и цилиндрическому.

2. УРАВНЕНИЕ ШРЕДИНГЕРА И ИНТЕГРАЛЫ ДВИЖЕНИЯ

Уравнение Шредингера в пространстве постоянной кривизны имеет вид

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\Delta_{\text{LB}} + V(x)\right]\Psi = E\Psi, \tag{1}$$

где Δ_{LB} – оператор Лапласа–Бельтрами, который в произвольной системе координат задается выражением

$$\Delta_{\text{LB}} = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^i}\sqrt{g}g^{ik}\frac{\partial}{\partial x^k}, \quad ds^2 = g_{ik}dx^i dx^k,$$
$$g^{ik} = (g_{ik})^{-1}, \quad g = \det(g_{ik}) \quad (i, k = 1, 2, 3). \tag{2}$$

Выбирая метрику пространства постоянной кривизны в виде ($r^2 = x_i x_i$)

$$g_{ik} = \frac{1}{1 + r^2/R^2}\times$$
$$\times\left[\left(\delta_{ik} - \frac{x_i x_k}{r^2}\right) + \frac{1}{1 + r^2/R^2}\frac{x_i x_k}{r^2}\right], \tag{3}$$

получаем для оператора Лапласа–Бельтрами следующее выражение:

$$\Delta_{\text{LB}} = \left(1 + \frac{r^2}{R^2}\right)\left[\left(\delta_{ik} + \frac{x_i x_k}{R^2}\right)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} + \frac{x_i}{R^2}\frac{\partial}{\partial x_i}\right] =$$
$$= -\left(P_i P_i + \frac{1}{R^2}L_i L_i\right), \tag{4}$$

где R – радиус кривизны,

$$P_i = -i\left[\frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{x_i x_k}{R^2}\frac{\partial}{\partial x_k}\right],$$
$$L_i = -i\epsilon_{ijk}x_j\frac{\partial}{\partial x_k} = \epsilon_{ijk}x_i P_j \tag{5}$$

и имеют место следующие коммутационные соотношения:

$$[P_i x_l] = -i\left(\delta_{il} + \frac{x_i x_l}{R^2}\right), \quad [L_i, x_l] = -i\epsilon_{ijl}x_j. \tag{6}$$

Легко видеть, что в пределе плоского пространства, т.е. при $R \longrightarrow \infty$, оператор P_i соответствует обычному оператору импульса, а оператор Лапласа–Бельтрами (2) переходит в обычный оператор Лапласа в плоском трехмерном пространстве E_3.

Вопрос обобщения задачи о изотропном осцилляторе для пространств постоянной кривизны с использованием конформно-плоской метрики в классической механике, по-видимому, впервые был решен в работе [7], где, в частности, найден также дополнительный интеграл движения, присущий осцилляторному взаимодействию. Позднее в работе [8] было показано, что если метрику искривленного пространства выбрать в виде (3), то в качестве потенциала изотропного осциллятора, как и в случае плоского пространства, выступает потенциал

$$V(r) = \frac{\mu\omega^2 r^2}{2}, \tag{7}$$

а дополнительный интеграл движения имеет вид

$$D_{ik} = \frac{1}{2}(P_i P_k + P_k P_i) + \frac{\mu^2\omega^2}{\hbar^2}x_i x_k, \tag{8}$$

который в пределе больших R в точности переходит в тензор Демкова [24]. Для операторов L_i и D_{ij} имеют место следующие коммутационные соотношения:

$$[D_{ij}, L_k] = i(\epsilon_{ikl}D_{jl} + \epsilon_{ikm}D_{im}),$$

$$[D_{ik}, D_{jl}] = \frac{i\mu^2\omega^2}{\hbar^2}(\delta_{li}L_{kj} + \delta_{lk}L_{ij} + \delta_{ij}L_{kl} + \delta_{jk}L_{il}) +$$
$$+\frac{i}{2R^2}(\{L_{ij}, D_{lk}\} + \{L_{il}, D_{kj}\} + \{L_{kj}, D_{il}\} + \{L_{kl}, D_{ij}\}),$$

$$L_{ik} = x_i P_k - x_k P_i,$$

где $\{,\}$ означает антикоммутатор двух операторов.

Трехмерное пространство постоянной положительной кривизны геометрически может быть реализовано также на трехмерной сфере S_3 радиуса R, вложенной в четырехмерное евклидово пространство, т.е. на гиперповерхности

$$q_0^2 + q_i q_i = R^2,$$

где координаты q_i изменяются в области $q_i q_i \le R^2$ и каждому значению q_i соответствуют две точки на сфере. Связь между координатами x_i в касательном пространстве и q_μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$) задается соотношением

$$q_i = \frac{x_i}{\sqrt{1 + r^2/R^2}}, \quad q_0 = \frac{R}{\sqrt{1 + r^2/R^2}},$$

получающимся при отображении из центра трехмерной гиперсферы на плоскость, касательную к "северному полюсу". Такая параметризация пространства постоянной кривизны в литературе часто называется "геодезической параметризацией" [25] и взаимно однозначно отображает только полусферу (в данном случае верхнюю) или сферу с отождествленными диаметрально противоположными точками.

В координатах q_μ имеем

$$P_i = -\frac{1}{R}N_i = \frac{i}{R}\left(q_i\frac{\partial}{\partial q_0} - q_0\frac{\partial}{\partial q_i}\right),$$
$$L_i = -i\epsilon_{ijk}q_j\frac{\partial}{\partial q_k} \tag{9}$$

и

$$\Delta_{\mathrm{LB}} = -\frac{1}{R^2}(N_i^2 + L_i^2),$$

где операторы L_i и N_i – генераторы группы $O(4)$:

$$[L_i, L_j] = i\epsilon_{ijk}L_k, \quad [L_i, N_j] = i\epsilon_{ijk}N_k,$$
$$[N_i, N_j] = i\epsilon_{ijk}L_k.$$

Потенциал изотропного осциллятора задается симметричной функцией

$$V(r) \equiv V(q) = \frac{\mu\omega^2}{2}\frac{q^2}{1 - q^2/R^2},$$
$$q^2 = q_1^2 + q_2^2 + q_3^2, \tag{10}$$

относительно верхней и нижней полусфер, он равен нулю на полюсах сферы и имеет сингулярность на экваторе. Дополнительный интеграл движения задается выражением

$$D_{ik} = \frac{1}{2R^2}(N_iN_k + N_kN_i) + \frac{\mu^2\omega^2}{\hbar^2}\frac{q_iq_k}{1 - q^2/R^2} \tag{11}$$

и, как и в случае плоского пространства, приводит к разделению переменных в уравнении Шредингера в более чем одной системе координат.

3. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА

3.1. Сферический базис

В сферической системе координат

$$q_1 = R\sin\chi\sin\vartheta\cos\varphi, \quad q_2 = R\sin\chi\sin\vartheta\sin\varphi,$$
$$q_3 = R\sin\chi\cos\vartheta, \quad q_0 = R\cos\chi,$$
$$0 \le \chi \le \pi, \quad 0 \le \vartheta \le \pi, \quad 0 \le \varphi < 2\pi,$$

потенциал осциллятора имеет вид

$$V = \frac{\mu\omega^2R^2}{2}\mathrm{tg}^2\chi.$$

Выбрав волновую функцию согласно

$$\Psi(\chi, \vartheta, \varphi; R) = \frac{1}{\sqrt{R^3}}Z(\chi)Y_{lm}(\vartheta, \varphi),$$
$$l \in \mathbf{N}, \quad m \in \mathbf{Z}, \tag{12}$$

где $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$ – обычная сферическая функция [26], после разделения переменных в уравнении Шредингера имеем

$$\left\{\frac{1}{\sin^2\chi}\frac{\partial}{\partial\chi}\sin^2\chi\frac{\partial}{\partial\chi} + \right.$$
$$\left. + \frac{2\mu R^2}{\hbar^2}\left[E - \frac{\hbar^2}{2\mu R^2}\frac{l(l+1)}{\sin^2\chi} - \frac{\mu\omega^2R^2}{2}\mathrm{tg}^2\chi\right]\right\}Z(\chi; R) = 0. \tag{13}$$

Далее, вводя обозначения

$$\left(l + \frac{1}{2}\right)^2 = k_1^2, \quad \frac{\mu^2\omega^2R^4}{\hbar^2} + \frac{1}{4} = k_2^2,$$
$$\frac{2\mu R^2E}{\hbar^2} + \frac{\mu^2\omega^2R^4}{\hbar^2} + 1 = \mathcal{E} \tag{14}$$

и сделав подстановку

$$Z(\chi) = \frac{f(\chi)}{\sin\chi},$$

приходим к уравнению без первой производной типа Пешля–Теллера:

$$\frac{d^2f}{d\chi^2} + \left[\mathcal{E} - \frac{k_1^2 - \frac{1}{4}}{\sin^2\chi} - \frac{k_2^2 - \frac{1}{4}}{\cos^2\chi}\right]f = 0,$$

общее решение которого хорошо известно [27]. Требование регулярности волновой функции $Z(\chi)$ при $\chi = 0$ и $\pi/2$ приводит к квантованию энергии изотропного осциллятора:

$$E_N^\nu(R) = \frac{\hbar^2}{2\mu}\left[\frac{(N+1)(N+3)}{R^2} + \frac{2\nu}{R^2}\left(N + \frac{3}{2}\right)\right], \tag{15}$$

где главное квантовое число $N = 0, 1, \ldots$ связано с радиальным и орбитальным квантовыми числами соотношением $N = 2n_r + l$ и введено обозначение

$$\nu \equiv k_2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{1 + \frac{4\mu^2\omega^2R^4}{\hbar^2}} - \frac{1}{2}.$$

Отметим, что степень вырождения, как и в случае движения в поле гармонического изотропного осциллятора в трехмерном евклидовом пространстве, равна $(N+1)(N+2)/2$.

Решение квазирадиального уравнения Шредингера (13), ортонормированное в интервале $\chi \in [0, \pi/2]$, имеет вид

$$Z(\chi) \equiv Z^{\nu}_{Nl}(\chi) = \sqrt{\frac{2(N+\nu+2)\left(\frac{N-l}{2}\right)!\Gamma\left(\frac{N+l}{2}+\nu+2\right)}{\Gamma\left(\frac{N+l+3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{N-l+3}{2}+\nu\right)}} \times \tag{16}$$

$$\times (\sin\chi)^l(\cos\chi)^{\nu+1}P^{\left(l+\frac{1}{2}, \nu+\frac{1}{2}\right)}_{\frac{N-l}{2}}(\cos 2\chi),$$

где $P^{(\alpha,\beta)}_n(x)$ – полиномы Якоби.

Рассмотрим предел плоского пространства. Легко видеть, что при больших $R(\nu \longrightarrow \lambda R^2$, $\lambda = \mu\omega/\hbar^2)$ из формулы (14) восстанавливается формула для спектра энергии трехмерного осциллятора:

$$\lim_{R\to\infty} E^{\nu}_N(R) = E_N = \hbar\omega\left(N + \frac{3}{2}\right).$$

Переход от сферической системы координат на S_3 к соответствующей системе координат на E_3 осуществляется в пределе $R \longrightarrow \infty$, $\chi \longrightarrow 0$ и $\chi \sim r/R$, где r – радиус-вектор в трехмерном плоском пространстве [28]. Пользуясь известным соотношением для полиномов Якоби [29]

$$\lim_{\beta\to\infty} P^{(\alpha,\beta)}_n\left(1 - \frac{2x}{\beta}\right) = L^{\alpha}_n(x), \tag{17}$$

где $L^{\alpha}_n(x)$ – это полиномы Лагерра, и учитывая предельные соотношения

$$\sqrt{\frac{2(N+\nu+2)\Gamma\left(\frac{N+l}{2}+\nu+2\right)}{\Gamma\left(\frac{N-l+3}{2}+\nu\right)}}\frac{(\sin\chi)^l}{\sqrt{R^3}} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \sqrt{2\lambda^{3/2}}(\sqrt{\lambda}r)^l, \quad (\cos\chi)^{\nu+1/2} \longrightarrow e^{-\frac{\lambda r^2}{2}},$$

немедленно получаем, что

$$\lim_{R\to\infty}\frac{1}{\sqrt{R^3}}Z^{\nu}_{Nl}(\chi) = \left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^{1/4}\sqrt{\frac{2^{l+1}\lambda(N-l)!!}{(N+l+1)!!}} \times$$
$$\times (\sqrt{\lambda}r)^l e^{-\frac{\lambda r^2}{2}} L^{L+\frac{1}{2}}_{\frac{N-l}{2}}(\lambda r^2) = R_{Nl}(r), \tag{18}$$

где $R_{Nl}(r)$ – нормированная на единицу сферическая радиальная волновая функция обычного трехмерного изотропного осциллятора в плоском пространстве [27].

Второй интересный предел – это переход к свободному движению. При $\nu \longrightarrow 0$ $(\omega \longrightarrow 0)$ имеем

$$\lim_{\nu\to 0} E^{\nu}_N(R) = E^0_N(R) = \frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{(N+1)(N+3)}{R^2}.$$

Сравнивая полученное выше выражение с формулой энергии свободного движения частицы на сфере $\frac{\hbar^2 J(J+2)}{2\mu R^2}$, получаем, что $J = N + 1$ и $J = 1, 2, \ldots$; и, следовательно, в предельном спектре отсутствует основное состояние с $J = 0$. Так как для спектра осциллятора $(N - l)$ всегда четно, то в пределе свободного движения $(J - l)$ принимает нечетные значения и при фиксированном J существуют только состояния с $l = J - 1, J - 3, \ldots$, соответственно степень вырождения предельного спектра меньше, чем $(J+1)^2$, как это должно быть при свободном движении на сфере.

Далее, используя преобразование [30]

$$xP^{\left(\lambda-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}_m(2x^2 - 1) =$$
$$= \frac{\Gamma(\lambda)\Gamma(m+3/2)}{\Gamma(\lambda+m+1)\Gamma(1/2)}C^{\lambda}_{2m+1}(x), \tag{19}$$

связывающее нечетные полиномы Гегенбауэра и полиномы Якоби, а также переходя от квантового числа N к J, получаем функцию

$$\lim_{\nu\to 0} Z^{\nu}_{Nl}(\chi) = \frac{2^{l+1}l!}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{(J+1)(J-l)!}{(J+l+1)!}} \times$$
$$\times (\sin\chi)^l C^{l+1}_{J-l}(\cos\chi),$$

которая с точностью фактора $\sqrt{2}$ соответствует решению свободного уравнения Шредингера на трехмерной сфере с непроницаемым барьером на экваторе $(\chi = \pi/2)$.

3.2. Цилиндрический базис

В цилиндрической системе координат

$$q_1 = R\sin\alpha\cos\phi_1, \quad q_2 = R\sin\alpha\sin\phi_1,$$

$$q_3 = R\cos\alpha\sin\phi_2, \quad q_0 = R\cos\alpha\cos\phi_2,$$
$$0 \le \alpha \le \pi/2, \quad 0 \le \phi_1 < 2\pi, \quad -\pi \le \phi_2 \le \pi,$$

потенциал изотропного осциллятора записывается в виде

$$V = \frac{\mu\omega^2 R^2}{2}\left[\frac{1}{\cos^2\alpha\cos^2\phi_2} - 1\right]. \qquad (20)$$

Выбирая волновую функцию как

$$\Psi(\phi_1, \alpha, \phi_2; R) = \frac{1}{\sqrt{R^3}}\Phi(\alpha)K(\phi_2)\frac{e^{im\phi_1}}{\sqrt{2\pi}},$$

после разделения переменных приходим к двум дифференциальным уравнениям типа Пешля–Теллера:

$$\frac{d^2M}{d\alpha^2} + \left(\mathscr{E} - \frac{m^2 - \frac{1}{4}}{\sin^2\alpha} - \frac{A - \frac{1}{4}}{\cos^2\alpha}\right)M = 0, \qquad (21)$$

$$\frac{d^2K}{d\phi^2} + \left(4A - \frac{k_2^2 - \frac{1}{4}}{\sin^2\phi} + \frac{k_2^2 - \frac{1}{4}}{\cos^2\phi}\right)K = 0, \qquad (22)$$

где $(\sin\alpha\cos\alpha)^{-1/2}M(\alpha) = \Phi(\alpha)$ и $\phi = \phi_2/2 + \pi/4$, $\phi \in [0, \pi/2]$, а $\mathscr{E}$ определяется выражением (14). Спектр констант определяется выражением

$$A = (n_3 + \nu + 1)^2,$$

$$\mathscr{E} = (2n + n_3 + |m| + \nu + 2)^2,$$

где квантовые числа n_3 и n пробегают значения 0, 1, 2, ... Положив главное квантовое число N равным $N = 2n + |m| + n_3$, приходим к формуле (15) для энергии изотропного осциллятора. Для цилиндрического базиса получаем следующее выражение:

$$\Psi(\phi_1, \alpha, \phi_2; R) \equiv \Psi^{\nu}_{Nmn_3}(\phi_1, \alpha, \phi_2; R) = \\ = \frac{1}{\sqrt{R^3}}\Phi^{\nu}_{N|m|n_3}(\alpha)K^{\nu}_{n_3}(\phi_2)\frac{e^{im\phi_1}}{\sqrt{2\pi}}, \qquad (23)$$

где функции $\Phi^{\nu}_{N|m|n_3}(\alpha)$ и $K^{\nu}_{n_3}(\phi_2)$, нормированные в интервале $\phi_2 \in [-\pi/2, \pi/2]$, $\alpha \in [0, \pi/2]$, есть

$$\Phi^{\nu}_{N|m|n_3}(\alpha) = \sqrt{\frac{2(N+\nu+2)\left(\frac{N-|m|-n_3}{2}\right)!\,\Gamma\left(\frac{N+|m|+n_3}{2}+\nu+2\right)}{\left(\frac{N+|m|-n_3}{2}\right)!\,\Gamma\left(\frac{N-|m|+n_3}{2}+\nu+2\right)}}(\sin\alpha)^{|m|}(\cos\alpha)^{n_3+\nu+1}P^{(|m|,\, n_3+\nu+1)}_{\frac{N-|m|-n_3}{2}}(\cos 2\alpha), \qquad (24)$$

$$K^{\nu}_{n_3}(\phi_2) = \frac{\sqrt{(n_3+\nu+1)\Gamma(n_3+2\nu+2)(n_3)!}}{2^{\nu+1/2}\Gamma\left(n_3+\nu+\frac{3}{2}\right)}(\cos\phi_2)^{\nu+1}P^{(\nu+1/2,\, \nu+1/2)}_{n_3}(\sin\phi_2).$$

Отметим, что цилиндрической системе координат соответствует дополнительный интеграл движения

$$M = -\frac{d^2}{d\phi_2^2} + \frac{\mu^2\omega^2R^4}{\hbar^2}\frac{1}{\cos^2\phi_2} = R^2D_{33} + \frac{\mu^2\omega^2R^4}{\hbar^2}. \qquad (25)$$

В пределе больших R цилиндрическая система координат на сфере переходит в обычную цилиндрическую систему координат (ρ, ϕ, z) в евклидовом пространстве E_3 [28]. Переходя к пределу $R \longrightarrow \infty$ и $\alpha, \phi_2 \longrightarrow 0$ и положив

$$\sin\alpha \sim \alpha \sim \frac{\rho}{R}, \quad \sin\phi_2 \sim \phi_2 \sim \frac{z}{R},$$

а также воспользовавшись формулой (17) и соотношением [29]

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda^{-n/2}C_n^{\lambda/2}\left(t\sqrt{\frac{2}{\lambda}}\right) = \frac{2^{-n/2}}{n!}\mathscr{H}_n(t),$$

где $\mathscr{H}_n(z)$ – полиномы Эрмита [29], получаем:

$$\lim_{R\to\infty}\frac{1}{R}\Phi^{\nu}_{N|m|n_3}(\alpha) = \sqrt{\frac{2\lambda\left(\frac{N-|m|-n_3}{2}\right)!}{\left(\frac{N+|m|-n_3}{2}\right)!}} \times \\ \times e^{-\frac{\lambda\rho^2}{2}}(\sqrt{\lambda}\rho)^{|m|}L^{|m|}_{\frac{N-|m|-n_3}{2}}(\lambda\rho^2),$$

$$\lim_{R\to\infty}\frac{1}{\sqrt{R}}K^{\nu}_{n_3}(\phi_2) = \left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^{1/4}\frac{e^{-\frac{\lambda z^2}{2}}}{\sqrt{2^{n_3}(n_3)!}}\mathcal{H}_{n_3}(\sqrt{\lambda}z).$$

Таким образом, от формулы (23) приходим к ортонормированному цилиндрическому базису изотропного осциллятора в плоском пространстве.

В пределе свободного движения $\nu \longrightarrow 0$ $(\omega \longrightarrow 0)$, используя формулу [29]

$$P_n^{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}(x) = \frac{(2n+1)!!}{2^n(n+1)!}\frac{\sin[(n+1)\arccos x]}{\sin(\arccos x)},$$

имеем:

$$\lim_{\nu\to 0}K^{\nu}_{n_3}(\phi_2) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin\{(n_3+1)(\phi_2+\pi/2)\},$$

$$\lim_{\nu\to 0}\Phi^{\nu}_{N|m|n_3}(\alpha) =$$

$$= \sqrt{\frac{(N+2)\left(\frac{N-n_3-|m|}{2}\right)!\left(\frac{N+n_3+|m|}{2}+1\right)!}{\left(\frac{N-|m|+n_3}{2}+1\right)!\left(\frac{N+|m|-n_3}{2}\right)!}}\times$$

$$\times(\sin\alpha)^{|m|}(\cos\alpha)^{n_3+1}P^{(|m|,\,n_3+1)}_{\frac{N-n_3-|m|}{2}}(\cos 2\alpha).$$

Положив $n_3 + 1 = |m_2|$, $|m| = |m_1|$ и $J = N + 1$, получаем (с точностью до фактора $\sqrt{2}$) нечетные решения уравнения Шредингера для свободного движения в цилиндрической системе координат.

4. РАЗЛОЖЕНИЕ МЕЖДУ СФЕРИЧЕСКИМ И ЦИЛИНДРИЧЕСКИМ БАЗИСАМИ

4.1. Вычисление коэффициентов перехода

Выпишем разложение для сферического и цилиндрического базиса изотропного осциллятора в виде

$$\Psi^{\nu}_{Nlm}(\chi,\vartheta,\varphi;R) = \sum_{n_3=0,1}^{N-|m|}W^{n_3}_{Nlm}(\nu)\Psi^{\nu}_{Nmn_3}(\phi_1,\alpha,\phi_2;R), \tag{26}$$

где квантовое число n_3 принимает четные или нечетные значения в зависимости от четности $N-|m|$.

Для вычисления явного вида коэффициентов разложения $W^{n_3}_{Nlm}(\nu)$ достаточно воспользоваться ортогональностью по одной из переменной для функций, входящих в цилиндрическую волновую функцию, и зафиксировать в наиболее удобной точке вторую, не участвующую в интегрировании переменную. Переходя заранее в левой части разложения (26) от сферических координат к цилиндрическим согласно формулам

$$\cos\chi = \cos\alpha\cos\phi_2,$$

$$\sin\vartheta = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha\cos^2\phi_2}},\quad \phi = \phi_1$$

и учитывая, что при $\alpha \longrightarrow 0$

$$\cos\chi \longrightarrow \cos\phi_2,\quad \sin\vartheta \longrightarrow \frac{\sin\alpha}{\sin\phi_2} \longrightarrow 0,$$

получаем:

$$Z^{\nu}_{Nl}(\chi) \longrightarrow Z^{\nu}_{Nl}(\phi_2),$$

$$Y_{lm}(\vartheta,\phi) \longrightarrow \frac{(-1)^{\frac{m+|m|}{2}}}{2^{|m|}|m|!}\times$$

$$\times\sqrt{\frac{2l+1}{2}\frac{(l+|m|)!}{(l-|m|)!}}\frac{(\sin\alpha)^{|m|}}{(\sin\phi_2)^{|m|}}\frac{e^{im\phi}}{\sqrt{2\pi}},$$

$$\Phi^{\nu}_{N|m|n_3}(\alpha) \longrightarrow \sqrt{\frac{2(N+\nu+2)\left(\frac{N+|m|-n_3}{2}\right)!\,\Gamma\left(\frac{N+|m|+n_3}{2}+\nu+2\right)}{\left(\frac{N-|m|-n_3}{2}\right)!\,\Gamma\left(\frac{N-|m|+n_3}{2}+\nu+2\right)}}\frac{(\sin\alpha)^{|m|}}{|m|!}.$$

Далее, подставляя полученные асимптотические формулы в межбазисное разложение (26), сокращая $(\sin\alpha)^{|m|}$ и используя ортогональность функций $K^{\nu}_{n_3}(\phi_2)$ в интервале $-\frac{\pi}{2} \le \phi_2 \le \frac{\pi}{2}$, приходим к следующему интегральному представлению для коэффициентов $W_{Nlm}(\nu)$:

$$W_{Nlmn_3}(\nu) = (-1)^{\frac{m+|m|}{2}}\sqrt{\frac{(2l+1)(n_3+\nu+1)}{2^{|m|+\nu+1}\Gamma\left(n_3+\nu+\frac{3}{2}\right)}\frac{(l+|m|)!\left(\frac{N-|m|-n_3}{2}\right)!(n_3)!}{(l-|m|)!\left(\frac{N+|m|-n_3}{2}\right)!}\frac{\left(\frac{N-l}{2}\right)!}{\Gamma\left(\frac{N+l}{2}+\frac{3}{2}\right)}}\times$$
$$\times\sqrt{\frac{\Gamma\left(\frac{N-|m|+n_3}{2}+\nu+2\right)\Gamma\left(\frac{N+l}{2}+\nu+2\right)\Gamma(n_3+2\nu+2)}{\Gamma\left(\frac{N+|m|+n_3}{2}+\nu+2\right)\Gamma\left(\frac{N-l}{2}+\nu+\frac{3}{2}\right)}}A^l_{N|m|n_3}(\nu), \quad (27)$$

где

$$A^l_{N|m|n_3}(\nu) = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}(\sin\phi_2)^{l-|m|}(\cos\phi_2)^{2\nu+2}\times$$
$$\times P^{\left(l+\frac{1}{2},\nu+\frac{1}{2}\right)}_{\frac{N-l}{2}}(\cos 2\phi_2)P^{\left(\nu+\frac{1}{2},\nu+\frac{1}{2}\right)}_{n_3}(\sin\phi_2)d\phi_2. \quad (28)$$

Для полного решения задачи нам остается вычислить интеграл в формуле (28). Рассмотрим раздельно случаи четного и нечетного квантового числа n_3. Разбивая промежуток интегрирования в (28) на два промежутка $(-\pi/2, 0)$ и $(0, \pi/2)$, после замены в первом интеграле $\phi_2 \longrightarrow -\phi_2$ видим, что значение интеграла просто удваивается в силу четности $(l-|m|-n_3)$. Применяя далее хорошо известное преобразование для полиномов Якоби [30]

$$P^{(\alpha,\alpha)}_{n_3}(x) = \begin{cases}\dfrac{\Gamma(n_3+\alpha+1)\left(\frac{n_3}{2}\right)!}{\Gamma\left(\frac{n_3}{2}+\alpha+1\right)(n_3)!}P^{(\alpha,-1/2)}_{\frac{n_3}{2}}(2x^2-1) \\ \text{для четных } n_3, \\ \dfrac{\Gamma(n_3+\alpha+1)\left(\frac{n_3-1}{2}\right)!}{\Gamma\left(\frac{n_3+1}{2}+\alpha\right)(n_3)!}xP^{(\alpha,1/2)}_{\frac{n_3-1}{2}}(2x^2-1) \\ \text{для нечетных } n_3,\end{cases}$$

после подстановки $x = \cos^2\phi_2$ приходим к следующим двум табличным интегралам для четных и нечетных n_3:

$$A^{l(+)}_{N|m|n_3}(\nu) = \frac{(-1)^{\frac{n_3}{2}}}{2^{\nu+\frac{l-|m|}{2}+1}}\frac{\Gamma\left(n_3+\nu+\frac{3}{2}\right)\left(\frac{n_3}{2}\right)!}{\Gamma\left(\frac{n_3+3}{2}+\nu\right)(n_3)!}\times$$
$$\times\int\limits_{-1}^{1}(1-x)^{\frac{l-|m|-1}{2}}(1+x)^{\nu+1/2}\times$$
$$\times P^{(l+1/2,\nu+1/2)}_{\frac{N-l}{2}}(x)P^{(-1/2,\nu+1/2)}_{n_3}(x)dx,$$

$$A^{l(-)}_{N|m|n_3}(\nu) = \frac{(-1)^{\frac{n_3-1}{2}}}{2^{\nu+\frac{l-|m|+3}{2}}}\frac{\Gamma\left(n_3+\nu+\frac{3}{2}\right)\left(\frac{n_3-1}{2}\right)!}{\Gamma\left(\frac{n_3+2}{2}+\nu\right)(n_3)!}\times$$
$$\times\int\limits_{-1}^{1}(1-x)^{\frac{l-|m|}{2}}(1+x)^{\nu+1/2}\times$$
$$\times P^{(l+1/2,\nu+1/2)}_{\frac{N-l}{2}}(x)P^{(1/2,\nu+1/2)}_{\frac{n_3-1}{2}}(x)dx.$$

Используя формулу для интегрирования двух полиномов Якоби [31]:

$$\int\limits_{-1}^{1}(1-x)^{\tau}(1+x)^{\beta}P^{(\alpha,\beta)}_n(x)P^{(\rho,\beta)}_m(x)dx =$$
$$= \frac{2^{\beta+\tau+1}\Gamma(\alpha-\tau+n)\Gamma(\beta+n+l)}{(m)!(n)!\Gamma(\rho+1)\Gamma(\alpha-\tau)}\times$$
$$\times\frac{\Gamma(\rho+m+1)\Gamma(\tau+1)}{\Gamma(\beta+\tau+n+2)}\times$$
$$\times{}_4F_3\left\{\begin{matrix}-m, \rho+\beta+m+1, \tau+1, \tau-\alpha+1 \\ \rho+1, \beta+\tau+n+2, \tau-\alpha-n+1\end{matrix}\middle| 1\right\},$$

немедленно получаем, что $A^{l(\pm)}_{N|m|n_3}(\nu)$ выражается через обобщенную гипергеометрическую функцию ${}_4F_3$ от единичного аргумента

$$A^{l(+)}_{N|m|n_3}(\nu) = \frac{(-1)^{\frac{n_3}{2}}}{\sqrt{\pi}}\times$$

$$\times \frac{\Gamma\left(n_3+\nu+\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{N+|m|}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{N-l+3}{2}+\nu\right)}{(n_3)!\Gamma\left(\frac{n_3+3}{2}+\nu\right)\left(\frac{N-l}{2}\right)!\Gamma\left(\frac{l+|m|}{2}+1\right)} \times$$

$$\times \frac{\Gamma\left(\frac{l-|m|+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_3+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{N-|m|}{2}+\nu+2\right)} \times$$

$$\times {}_4F_3\left\{\begin{matrix} -\frac{n_3}{2}, \frac{n_3}{2}+\nu+1, \frac{l-|m|+1}{2}, -\frac{l+|m|}{2} \\ \frac{1}{2}, \frac{N-|m|}{2}+\nu+2, -\frac{N+|m|}{2} \end{matrix}\middle| 1\right\},$$

и аналогично

$$A^{l(-)}_{N|m|n_3}(\nu) = \frac{(-1)^{\frac{n_3-1}{2}}}{\sqrt{\pi}} \times$$

$$\times \frac{2\Gamma\left(n_3+\nu+\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{N+|m|+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{N-l+3}{2}+\nu\right)}{(n_3)!\Gamma\left(\frac{n_3+2}{2}+\nu\right)\left(\frac{N-l}{2}\right)!\Gamma\left(\frac{l+|m|+1}{2}\right)} \times$$

$$\times \frac{\Gamma\left(\frac{l-|m|}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{n_3}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{N-|m|+5}{2}+\nu\right)} \times$$

$$\times {}_4F_3\left\{\begin{matrix} -\frac{n_3-1}{2}, \frac{n_3+3}{2}+\nu, \frac{l-|m|}{2}+1, -\frac{l+|m|-1}{2} \\ \frac{3}{2}, \frac{N-|m|+5}{2}+\nu, -\frac{N+|m|-1}{2} \end{matrix}\middle| 1\right\}.$$

Принимая во внимание известное свойство симметрии для рядов ${}_4F_3(1)$ типа Заальшютца [32]

$${}_4F_3\left\{\begin{matrix} -n, b, c, d \\ e, f, g \end{matrix}\middle| 1\right\} = \frac{(f-b)_n(g-b)_n}{(f)_n(g)_n} \times$$

$$\times {}_4F_3\left\{\begin{matrix} -n, b, e-c, e-d \\ e, b-f-n+1, b-g-n+1 \end{matrix}\middle| 1\right\},$$

$$-n+b+c+d = 1+e+f+g,$$

легко убедиться, что обе гипергеометрические функции ${}_4F_3(1)$, входящие в $A^{l(\pm)}_{N|m|n_3}(\nu)$, могут быть преобразованы к единому виду:

$${}_4F_3\left\{\begin{matrix} -\frac{n_3}{2}, \frac{n_3}{2}+\nu+1, \frac{l-|m|+1}{2}, -\frac{l+|m|}{2} \\ \frac{1}{2}, \frac{N-|m|}{2}+\nu+2, -\frac{N+|m|}{2} \end{matrix}\middle| 1\right\} =$$

$$= \frac{(-1)^{\frac{n_3}{2}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{l-|m|}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{l+|m|}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{n_3+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{l+|m|-n_3}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{l-|m|-n_3}{2}+1\right)} \times$$

$$\times \frac{\Gamma\left(\frac{n_3}{2}+\nu+\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{N-|m|}{2}+\nu+2\right)\left(\frac{N+|m|-n_3}{2}\right)!}{\Gamma\left(\frac{N+|m|}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{N-|m|+n_3}{2}+\nu+2\right)\Gamma(\nu+1)} \times$$

$$\times {}_4F_3\left\{\begin{matrix} -\frac{n_3}{2}, -\frac{n_3-1}{2}, -\frac{N-l}{2}, \frac{N+l}{2}+\nu+2 \\ \nu+\frac{3}{2}, \frac{l+|m|-n_3}{2}+1, \frac{l-|m|-n_3}{2}+1 \end{matrix}\middle| 1\right\},$$

$${}_4F_3\left\{\begin{matrix} -\frac{n_3-1}{2}, \frac{n_3+3}{2}+\nu, \frac{l-|m|}{2}+1, -\frac{l+|m|-1}{2} \\ \frac{3}{2}, \frac{N-|m|+5}{2}+\nu, -\frac{N+|m|-1}{2} \end{matrix}\middle| 1\right\} =$$

$$= \frac{(-1)^{\frac{n_3-1}{2}}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{l-|m|+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{l+|m|+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n_3}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{l+|m|-n_3}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{l-|m|-n_3}{2}+1\right)} \times$$

$$\times \frac{\Gamma\left(\frac{n_3}{2}+\nu+\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{N-|m|}{2}+\nu+\frac{5}{2}\right)\left(\frac{N+|m|-n_3}{2}\right)!}{\Gamma\left(\frac{N+|m|+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{N-|m|+n_3}{2}+\nu+2\right)\Gamma(\nu+1)} \times$$

$$\times {}_4F_3\left\{\begin{matrix} -\frac{n_3}{2}, -\frac{n_3-1}{2}, -\frac{N-l}{2}, \frac{N+l}{2}+\nu+2 \\ \nu+\frac{3}{2}, \frac{l+|m|-n_3}{2}+1, \frac{l-|m|-n_3}{2}+1 \end{matrix}\middle| 1\right\}.$$

После простых преобразований окончательно находим искомую формулу для коэффициентов межбазисного разложения $W^{n_3}_{Nlm}(\nu)$:

$$W^{n_3}_{Nlmn_3}(\nu) = \frac{(-1)^{\frac{m+|m|}{2}}\sqrt{\pi}}{2^{l+\nu+1}}\frac{\sqrt{(2l+1)(n_3+\nu+1)(l+|m|)!(l-|m|)!}}{\Gamma\left(\frac{l-|m|-n_3}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{l+|m|-n_3}{2}+1\right)\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right)}\times$$

$$\times\sqrt{\frac{\Gamma\left(\frac{N+l}{2}+\nu+2\right)\Gamma\left(\frac{N-l+3}{2}+\nu\right)\Gamma(n_3+2\nu+2)\left(\frac{N-|m|-n_3}{2}\right)!\left(\frac{N+|m|-n_3}{2}\right)!}{\Gamma\left(\frac{N+l}{2}+\frac{3}{2}\right)\left(\frac{N-l}{2}\right)!\Gamma\left(\frac{N-|m|+n_3}{2}+\nu+2\right)\Gamma\left(\frac{N+|m|+n_3}{2}+\nu+2\right)(n_3)!}}\times \tag{29}$$

$$\times{}_4F_3\left\{\begin{matrix}-\frac{n_3}{2}, -\frac{n_3-1}{2}, -\frac{N-l}{2}, \frac{N+l}{2}+\nu+2\\ \nu+\frac{3}{2}, \frac{l+|m|-n_3}{2}+1, \frac{l-|m|-n_3}{2}+1\end{matrix}\middle|1\right\}.$$

Отметим, что полученное нами выражение для $W^{n_3}_{Nlm}(\nu)$ не зависит от четности квантового числа n_3.

4.2. Связь с коэффициентами Рака

Коэффициенты межбазисного разложения (29) могут быть выражены также через $6j$-символы или коэффициенты Рака группы $SU(2)$, продолженные по своим индексам в область действительных значений. Сравнивая выражение для $W^{l}_{Nlmn_3}(\nu)$ с представлением коэффициентов Рака $W(abed;\, cf)$ через гипергеометрические функции ${}_4F_3(1)$ от единичного аргумента [26]

$$W(abed;\, cf) = \frac{\Delta(abc)\Delta(cde)\Delta(aef)\Delta(bdf)}{(a+b-c)!(d+e-c)!(a-f+e)!(b-f+d)!(c-a-d+f)!}\times$$

$$\times\frac{(a+b+d+e+1)!}{(c-b-e+f)!}{}_4F_3\left\{\begin{matrix}-a-b+c, -b-d+f, -a-e+f, c-d-e\\ -a-b-d-e-1, -a+c-d+f+1, -b+c-e+f+1\end{matrix}\middle|1\right\}, \tag{30}$$

где $\Delta(abc)$ есть

$$\Delta(abc) = \sqrt{\frac{(a+b-c)!(a-b+c)!(b+c-a)!}{(a+b+c+1)!}},$$

а также учитывая свойство симметрии коэффициентов Рака

$$W(abed;\, cf) = i(-1)^{a+b-c}W(ab\bar{e}\bar{d};\, c\bar{f}),$$

$$\bar{e} = -e-1,\quad \bar{d} = -d-1,\quad \bar{f} = -f-1,$$

после несложных вычислений получаем искомую формулу:

$$W^{n_3}_{Nlm}(\nu) = (-1)^{\frac{N-l}{2}+\frac{m+|m|}{2}}\times$$

$$\times\sqrt{(l+1/2)(n_3+\nu+1)}\,W(abed;\, cf), \tag{31}$$

$$a = \frac{N+|m|}{4},\quad b = \frac{N-|m|-1}{4},\quad c = \frac{2l-1}{4},$$

$$d = \frac{N-|m|}{4}+\frac{\nu}{2}+\frac{1}{4},\quad e = \frac{N+|m|}{4}+\frac{\nu}{2},\quad f = \frac{n_3}{2}+\frac{\nu}{2}.$$

Используя далее соотношение ортонормировки для коэффициентов Рака [26]

$$\sum_c\sqrt{(2c+1)(2f+1)}\times$$

$$\times W(abed;\, cf)W(abed;\, cf') = \delta_{ff'},$$

можем записать обратное разложение в виде

$$\Psi^{\nu}_{Nmn_3}(\phi_1, \alpha, \phi_2;\, R) =$$

$$= \sum_{l=|m|,\,|m|+1}^{N}\tilde{W}^{l}_{Nmn_3}(\nu)\Psi^{\nu}_{Nlm}(\chi, \vartheta, \varphi;\, R),$$

где суммирование по l начинается с $|m|$ или $|m|+1$ в зависимости от четности числа $N-|m|$, а коэффициенты

$$\tilde{W}^{l}_{Nmn_3}(\nu) = W^{n_3}_{Nlm}(\nu)$$

можно выразить через полиномы ${}_4F_3(1)$, используя представление (30).

4.3. Предельные соотношения

Рассмотрим предельные переходы к плоскому пространству и свободному движению в коэффициентах разложения $W^{l}_{Nmn_3}(\nu)$.

4.3.1. При $R \longrightarrow \infty$ обобщенная гипергеометрическая функция ${}_4F_3(1)$ переходит в функцию ${}_3F_2(1)$ согласно

$$ {}_4F_3\left\{\begin{matrix} -\frac{n_3}{2}, -\frac{n_3-1}{2}, -\frac{N-l}{2}, \frac{N+l}{2}+\nu+2 \\ \nu+1, \frac{l+|m|-n_3}{2}+1, \frac{l-|m|-n_3}{2}+1 \end{matrix}\middle| 1\right\} \longrightarrow $$

$$ \longrightarrow {}_3F_2\left\{\begin{matrix} -\frac{n_3}{2}, -\frac{n_3-1}{2}, -\frac{N-l}{2} \\ \frac{l+|m|-n_3}{2}+1, \frac{l-|m|-n_3}{2}+1 \end{matrix}\middle| 1\right\}. $$

Проделав соответствующий предельный переход в гамма-функциях, после несложных алгебраических преобразований приходим к известной формуле для коэффициентов межбазисного разложения между сферическим и цилиндрическим базисами гармонического изотропного осциллятора в плоском евклидовом пространстве [33]:

$$ \lim_{\nu\to\infty} W^{n_3}_{Nlm}(\nu) = \frac{(-1)^{\frac{m+|m|}{2}}}{2^{l-n_3}} \times \sqrt{\frac{(N-|m|-n_3)!!(N+|m|-n_3)!!}{(N+l+1)!!(N-l)!!(n_3)!}} \times $$

$$ \times \frac{\sqrt{(2l+1)(l+|m|)!(l-|m|)!}}{\Gamma\left(\frac{l-|m|-n_3}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{l+|m|-n_3}{2}+1\right)} \times $$

$$ \times {}_3F_2\left\{\begin{matrix} -\frac{n_3}{2}, -\frac{n_3-1}{2}, -\frac{N-1}{2} \\ \frac{l+|m|-n_3}{2}+1, \frac{l-|m|-n_3}{2}+1 \end{matrix}\middle| 1\right\}. $$

Однако предельный переход к плоскому пространству можно проследить прямо в формуле (31). Действительно, пользуясь при больших R асимптотической связью [26]

$$ W(abe+R, d+R;\, c, f+R) \approx $$

$$ \approx \frac{1}{\sqrt{2R(2c+1)}} C^{c,\, d-e}_{a,\, f-e;\, b,\, d-f} $$

и свойством симметрии коэффициентов Клебша–Гордана [26]

$$ C^{c,\,-\gamma}_{a,\,-\alpha;\, b,\,-\beta} = (-1)^{a+b-c} C^{c,\,\gamma}_{a,\,\alpha;\, b,\,\beta}, $$

получаем, что

$$ \lim_{\nu\to\infty} W^{n_3}_{Nlm}(\nu) = $$

$$ = (-1)^{\frac{m+|m|}{2}} C^{\frac{2l-1}{4},\, \frac{2|m|-1}{4}}_{\frac{N+|m|}{4},\, \frac{N+|m|-2n_3}{4};\, \frac{N-|m|-1}{4},\, \frac{2n_3-N+|m|-1}{4}}. $$

4.3.2. Положив $\nu = 0$ $(\omega = 0)$ и переходя к квантовым числам, соответствующим свободному движению на сфере: $m = m_1$, $n_3 + 1 = |m_2|$, $N = J - 1$ (заметим, что $J - l$ нечетно, а $J - |m_1| - |m_2|$ четно), имеем

$$ \lim_{\nu\to 0} W^{n_3}_{Nlm}(\nu) = (-1)^{\frac{m_1+|m_1|}{2}} \frac{|m_2|}{2^l} \sqrt{\frac{\left(\frac{J+|m_1|-|m_2|}{2}\right)!\left(\frac{J-|m_1|-|m_2|}{2}\right)!(J+l+1)!!(J-l)!!}{\left(\frac{J+|m_1|+|m_2|}{2}\right)!\left(\frac{J+|m_1|-|m_2|}{2}\right)!(J+l)!!(J-l-1)!!}} \times $$

$$ \times \frac{\sqrt{(l+1/2)(l+|m|)!(l-|m|)!}}{\Gamma\left(\frac{l-|m_1|-|m_2|}{2}+\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{l+|m_1|-|m_2|}{2}+\frac{3}{2}\right)} {}_4F_3\left\{\begin{matrix} -\frac{|m_2|-1}{2}, -\frac{|m_2|-2}{2}, -\frac{J-l-1}{2}, \frac{J+l+3}{2} \\ \frac{3}{2}, \frac{l+|m|-|m_2|}{2}+\frac{3}{2}, \frac{l-|m|-|m_2|}{2}+\frac{3}{2} \end{matrix}\middle| 1\right\} = \quad (32) $$

$$ = (-1)^{\frac{J-l-1}{2}+\frac{m_1+|m_1|}{2}} \sqrt{(l+1/2)|m_2|}\, W(abed;\, cf), $$

где

$$a = \frac{J+|m|-1}{4}, \quad b = \frac{J-|m|-2}{4}, \quad c = \frac{2l-1}{4},$$

$$d = \frac{J-|m|}{4}, \quad e = \frac{J+|m|-1}{4}, \quad f = \frac{|m_2|-1}{2}.$$

Отметим интересный факт, что в пределе свободного движения в формуле (32) для межбазисных коэффициентов $W^{n_3}_{Nlm}(\nu)$ вместо гипергеометрической функции ${}_3F_2$ от единичного аргумента остается функция ${}_4F_3$, а вместо коэффициентов Клебша–Гордана группы $SU(2)$ – коэффициенты Рака для 1/4 значений момента группы $SU(1, 1)$. Аналогичные формулы возникали при вычислении коэффициентов перехода между различными гиперсферическими системами координат (в формализме "деревьев") и были проанализированы в работе [34]. В нашем случае данный факт связан с возможностью альтернативного вычисления интеграла $A^{l}_{N|m|n_3}(\nu)$ в формуле (28) при $\nu = 0$.

5. ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ БАЗИСЫ

Сплюснутая эллиптическая система координат (в литературе эта система координат известна как эллипсо-цилиндрическая I) имеет вид

$$q_1 = R\mathrm{sn}(\mu, k)\mathrm{dn}(\nu, k')\cos\phi,$$

$$q_2 = R\mathrm{sn}(\mu, k)\mathrm{dn}(\nu, k')\sin\phi,$$

$$q_3 = R\mathrm{cn}(\mu, k)\mathrm{cn}(\nu, k'), \quad q_0 = R\mathrm{dn}(\mu, k)\mathrm{sn}(\nu, k');$$

$$-K \le \mu \le K, \quad -2K' \le \nu \le 2K', \quad 0 \le \phi < 2\pi,$$

где эллиптические функции Якоби от переменных α и β имеют модули k и k' соответственно, $k^2 + k'^2 = 1$, а K и K' – полные эллиптические интегралы.

Для потенциала V в эллиптической системе координат имеем

$$V(\mu, \nu) = \frac{1}{2}M\omega^2R^2\left[\frac{1}{\mathrm{dn}^2\mu\,\mathrm{sn}^2\nu} - 1\right]. \qquad (33)$$

Выбирая волновую функцию Ψ в виде

$$\Psi(\mu, \nu, \varphi) = \psi_1(\mu)\psi_2(\nu)\frac{e^{im\varphi}}{\sqrt{2\pi}}, \quad m \in \mathbf{Z}, \qquad (34)$$

после разделения переменных в уравнении Шредингера (33) приходим к двум обыкновенным дифференциальным уравнениям:

$$\frac{d^2\psi_1}{d\mu^2} + \frac{\mathrm{cn}\mu\,\mathrm{dn}\mu}{\mathrm{sn}\mu}\frac{d\psi_1}{d\mu} - \left[\left(\frac{2MER^2}{\hbar^2} + \frac{M^2\omega^2R^4}{\hbar^2}\right)k^2\mathrm{sn}^2\mu + \frac{m^2}{\mathrm{sn}^2\mu} - \frac{M^2\omega^2R^4}{\hbar^2}\frac{k'^2}{\mathrm{dn}^2\mu}\right]\psi_1 = -\lambda_q(k;\, R)\psi_1, \qquad (35)$$

$$\frac{d^2\psi_2}{d\nu^2} - k'^2\frac{\mathrm{sn}\nu\,\mathrm{cn}\nu}{\mathrm{dn}\nu}\frac{d\psi_2}{d\nu} + \left[\left(\frac{2MER^2}{\hbar^2} + \frac{M^2\omega^2R^4}{\hbar^2}\right)\mathrm{dn}^2\nu + \frac{k^2m^2}{\mathrm{dn}^2\nu} - \frac{M^2\omega^2R^4}{\hbar^2}\frac{1}{\mathrm{sn}^2\nu}\right]\psi_2 = +\lambda_q(k;\, R)\psi_2, \qquad (36)$$

где квантовое число q нумерует эллиптическую константу разделения $\lambda_q(k; R)$. Исключая из уравнений (35) и (36) энергию E, приходим к следующему оператору:

$$\Lambda = \frac{1}{k^2\mathrm{sn}^2\mu - \mathrm{dn}^2\nu}\left[\mathrm{dn}^2\nu\frac{\partial^2}{\partial\mu^2} + k^2\mathrm{sn}^2\mu\frac{\partial^2}{\partial\nu^2} + \frac{\mathrm{cn}\mu\,\mathrm{dn}\mu}{\mathrm{sn}\mu}\mathrm{dn}^2\nu\frac{\partial}{\partial\mu} - k'^2k^2\frac{\mathrm{sn}\nu\,\mathrm{cn}\nu}{\mathrm{dn}\nu}\frac{\partial}{\partial\nu}\right] + \frac{M^2\omega^2R^4}{\hbar^2}\frac{\mathrm{dn}^2\nu + k^2\mathrm{sn}^2\mu - 1}{\mathrm{dn}^2\mu\,\mathrm{sn}^2\nu} - \frac{\mathrm{dn}^2\nu + k^2\mathrm{sn}^2\mu}{\mathrm{dn}^2\nu\,\mathrm{sn}^2\mu}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} = (1-k^2)L^2 - k^2R^2D_{33} + k^2L_3^2 + (k'^2)\frac{M^2\omega^2R^4}{\hbar^2} + k^2\frac{2MR^2}{\hbar^2}H, \qquad (37)$$

собственные значения которого есть $\lambda_q(k; R)$, а собственные функции даются выражением (34). Введем новый оператор

$$\mathfrak{L}^{\text{спл}} = \frac{1}{1-k^2}\left\{\Lambda + (1-k^2)\frac{M^2\omega^2R^4}{\hbar^2} - k^2\frac{2MR^2}{\hbar^2}H + k^2L_3^2\right\} = L^2 - aR^2D_{33}, \qquad (38)$$

где $a = k^2/(1-k^2) \in [0, \infty)$. Как известно [35], переход от сплюснутой к вытянутой эллиптической системе координат на сфере может быть получен при преобразовании $k \longrightarrow ik/k'$, $k' \longrightarrow 1/k'$. При этом оператор (38) для вытянутой системы координат имеет вид

$$\mathfrak{L}^{\text{выт}} = L^2 + k^2R^2D_{33}. \qquad (39)$$

Последняя формула дает нам возможность описать обе эллиптические системы координат единым образом, используя оператор

$$\mathfrak{T} = L^2 - aR^2 D_{33}, \qquad (40)$$

где $a \in [-1, \infty)$. Для положительных a мы имеем сплюснутую систему, а для $a \in [-1, 0]$ – вытянутую эллиптическую систему координат.

Разложение эллиптических базисов по гиперсферическому и цилиндрическому

Таким образом, в предыдущих разделах мы видели, что все три базиса осциллятора: гиперсферический, цилиндрический и оба эллиптических – являются собственными функциями трех полных наборов операторов $\{H, L^2, L_z^2\}$, $\{H, D_{33}, L_z^2\}$ и $\{H, \mathfrak{T}, L_z^2\}$ так, что

$$L^2\Psi_{Nlm}(\chi, \vartheta, \varphi) = l(l+1)\Psi_{Nlm}(\chi, \vartheta, \varphi), \qquad (41)$$

$$D_{33}\Psi_{Nn_3m}(\varphi_1, \alpha, \varphi_2) = (n_3+\nu+1)^2 \times \Psi_{Nn_3m}(\varphi_1, \alpha, \varphi_2), \qquad (42)$$

$$\mathfrak{T}\Psi_{nqm}(\mu, \nu, \varphi) = \lambda_q(a; R)\Psi_{nqm}(\mu, \nu, \varphi). \qquad (43)$$

Операторные уравнения (41)–(43) позволяют нам построить эллиптические базисы изотропного осциллятора на сфере в виде суперпозиции по гиперсферическому и цилиндрическому базисам.

Выпишем теперь искомые разложения:

$$\Psi_{Nqm}(\mu, \nu, \varphi) = \sum_{l=|m|, |m|+1}^{N} T^l_{Nqm}(a; R)\Psi_{Nlm}(\chi, \vartheta, \varphi), \qquad (44)$$

$$\Psi_{Nqm}(\mu, \nu, \varphi) = \sum_{n_3=0,1}^{N-|m|} U^{n_3}_{Nqm}(a; R)\Psi_{Nn_3m}(\varphi_1, \alpha, \varphi_2). \qquad (45)$$

Рассмотрим разложение (44). Подставляя (44) в операторное уравнение (42), находим

$$\frac{1}{aR^2}\{l(l+1) - \lambda_q(a; R)\}T^l_{Nqm} = \sum_{l'=0}^{N} T^{l'}_{Nqm}(D_{33})_{ll'}, \qquad (46)$$

где

$$(D_{33})_{ll'} = \int \Psi^*_{Nlm}(D_{33})\Psi_{Nl'm}d\Omega. \qquad (47)$$

Для вычисления интеграла (47) воспользуемся разложением сферического базиса по цилиндрическому и уравнением (42) для собственных функций оператора D_{33}. В результате приходим к следующему выражению для $(D_{33})_{ll'}$:

$$(D_{33})_{ll'} = \sum_{n_3}^{N-|m|} W^{n_3}_{Nlm}W^{n_3}_{Nl'm}(n_3+\nu+1)^2. \qquad (48)$$

Далее, используя трехчленные рекуррентные соотношения для коэффициентов Рака [26]:

$$cB_c\begin{Bmatrix} a, b, c+1 \\ d, l, f \end{Bmatrix} + (c+1)B_{c-1}\begin{Bmatrix} a, b, c-1 \\ d, l, f \end{Bmatrix} + (2c+1)A_c\begin{Bmatrix} a, b, c \\ d, l, f \end{Bmatrix} = 0, \qquad (49)$$

где

$$B_c = [(a+b+c+2)(-a+b+c+1) \times (a-b+c+1)(a+b-c)]^{1/2} \times [(d-l+c+1)(d+l-c) \times (d+l+c+2)(-d+l+c+1)]^{1/2}, \qquad (50)$$

$$A_c = [a(a+1) - b(b+1)][d(d+1) - l(l+1)] + c(c+1)[a(a+1) + b(b+1) + d(d+1) + l(l+1) - c(c+1)] - 2c(c+1)f(f+1), \qquad (51)$$

и свойство ортогональности

$$\sum_{n_3=0,1}^{N-|m|} W^{n_3}_{Nlm}W^{n_3}_{Nl'm} = \delta_{ll'}, \qquad (52)$$

имеем

$$(D_{33})_{ll'} = -\frac{16B_{l-2}}{(2l-1)(2l+1)}\delta_{l-2,l'} + C_l\delta_{ll'} - \frac{16B_l}{(2l+1)(2l+3)}\delta_{l+2,l'},$$

где

$$B_l = \frac{1}{16}[(l-|m|+1)(l-|m|+2)(l+|m|+1) \times (l+|m|+2)(N+l+3)(N-l)]^{1/2} \times \sqrt{(N+l+2\nu+4)(N-l+2\nu+1)}, \qquad (53)$$

$$C_l = \frac{1}{8}\left\{4(N+1)(N+3) + 2(2|m|^2-1) + 4\nu(2N+2\nu+5) - (2l-1)(2l+3) - \frac{(4|m|^2-1)(2N+3)(2N+5+\nu)}{(2l-1)(2l+3)}\right\}. \qquad (54)$$

Подставляя матричный элемент (53) в (46), приходим окончательно к трехчленному рекуррентному соотношению

$$\frac{16}{(2l-1)(2l+1)}B_{l-2}T^{l-2}_{Nqm}(a;\,R)+$$
$$+\left\{\frac{1}{aR^2}[l(l+1)-\lambda_q(a;\,R)]-C_l\right\}T^l_{Nqm}(a;\,R)+ \tag{55}$$
$$+\frac{16}{(2l+1)(2l+3)}B_lT^{l+2}_{Nqm}(a;\,R)\;=\;0,$$
$$T^{-1}_{Nqm}(a;\,R)\;=\;T^{-2}_{Nqm}(a;\,R)\;=\;0,$$

для коэффициентов разложения $T^l_{Nqm}(a;\,R)$. Рекуррентное соотношение (55) представляет собой систему однородных уравнений, которую необходимо решать вместе с условием нормировки

$$\sum_{l=|m|,\,|m|+1}^{N}\left|T^l_{Nqm}(a;\,R)\right|^2\;=\;1.$$

Собственные значения эллиптической константы разделения $\lambda_q(a;\,R)$ вычисляются из условия равенства нулю детерминанта системы однородных уравнений (55).

Рассмотрим теперь разложение (45) эллиптического базиса по цилиндрическому. Поступая так же, как и при вычислении коэффициентов разложения (44), получаем

$$\{\lambda_q(k;\,R)+aR^2(n_3+\nu+1)^2\}U^{n_3}_{Nqm}(k;\,R)\;=$$
$$=\sum_{n'_3=0,\,1}^{N-|m|}U^{n'_3}_{Nqm}(k;\,R)(L^2)_{n_3n'_3}, \tag{56}$$

где

$$(L^2)_{n_3n'_3}\;=\;\int\Psi^*_{Nn_3m}L^2\Psi_{Nn'_3m}d\Omega. \tag{57}$$

Интеграл в (57) можно вычислить, если воспользоваться разложением цилиндрического базиса осциллятора по сферическому, а затем свойством симметрии коэффициентов Рака

$$\begin{Bmatrix}a,\,b,\,c\\ d,\,l,\,f\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}a,\,l,\,f\\ d,\,b,\,c\end{Bmatrix} \tag{58}$$

и трехчленным рекуррентным соотношением (49). В результате несложных вычислений приходим к выражению ($U^{n_3}_{Nqm}\equiv U_{n_3}$)

$$\tilde B_{n_3}U_{n_3+2}+\{\tilde C_{n_3}-\lambda_q(k;\,R)-aR^2(n_3+\nu+1)^2\}U_{n_3}+$$
$$+\tilde B_{n_3-2}U_{n_3-2}\;=\;0, \tag{59}$$

где

$$\tilde B_{n_3}=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{(n_3+2\nu+2)(n_3+2)(n_3+1)(n_3+2\nu+3)(N+|m|+n_3+2\nu+4)}{(n_3+\nu+1)(n_3+\nu+2)^2(n_3+\nu+3)}}\times$$
$$\times\sqrt{(N+|m|-n_3)(N-|m|-n_3)(N-|m|+n_3+2\nu+4)},$$
$$\tilde C_{n_3}\;=\;\frac{1}{2}\left\{(N+2)^2+\nu(2N+2\nu+5)+\right.$$
$$+(|m|^2-2)-(n_3+\nu)(n_3+\nu+2)-$$
$$\left.-\frac{\nu(\nu+1)(N+|m|+\nu+2)(N-|m|+\nu)}{(n_3+\nu)(n_3+\nu+2)}\right\}.$$

Как и в предыдущем случае, однородная система уравнений должна решаться совместно с условием нормировки

$$\sum_{n_3=0,\,1}^{N-|m|}\left|U^{n_3}_{Nqm}(a;\,R)\right|^2\;=\;1,$$

а константа разделения снова может быть определена из условия равенства нулю соответствующего определителя однородной системы уравнений (59).

В заключение отметим, что в пределе свободного движения $\nu\longrightarrow 0$ трехчленные рекуррентные соотношения (55) и (59) переходят в трехчленные рекуррентные соотношения для коэффициентов разложения эллиптического базиса по цилиндрическому и сферическому, полученные в работе [35].

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе сделан первый шаг к полному исследованию уравнения Шредингера и вычислению коэффициентов всевозможных межбазисных разложений для потенциала изотропного осциллятора на трехмерной сфере в различных ортогональных системах координат. Мы вычислили межбазисные разложения для перехода сфера–цилиндр, а также построили решения уравнения Шредингера в обеих эллиптических системах координат в форме разложения по сферическому и цилиндрическому базисам. В отличие от переходов сфера–цилиндр, где коэффициенты преобразования выражаются через обобщенные гипергеометрические функции ${}_4F_3$ от единичного аргумента или через коэффициенты Рака, продолженные по своим индексам в область произвольных действительных значений, коэффициенты переходов для эллиптических базисов определяются трехчленными рекуррентными соотношениями и не могут быть выписаны в явном виде.

В настоящей статье мы не рассмотрели сфероконический и эллипсоидальный базисы изотропного осциллятора. При разделении переменных в уравнении Шредингера для сфероконической системы координат мы приходим к квазирадиальному уравнению (13), рассмотренному в разд. 3, и двум стандартным уравнениям Ламэ, получающимся при разделении переменных для уравнения Гельмгольца на двумерной сфере. В результате решение уравнения Шредингера запишется в виде

$$\Psi(\chi, \alpha, \beta; R) = Z^{\nu}_{Nl}(\chi)\Lambda_{l\lambda}(\alpha)\Lambda_{l\lambda}(\beta),$$

где функция $Z^{\nu}_{Nl}(\chi)$ определяется выражением (16), а явный вид полиномов Ламэ $\Lambda_{l\lambda}(\alpha)$ можно найти в работах [29, 36].

Для эллипсоидального базиса изотропного осциллятора после разделения переменных в уравнении Шредингера мы приходим к трем идентичным уравнениям, содержащим две эллипсоидальные константы разделения λ_1, λ_2. Это означает, что в отличие от рассмотренных случаев мы имеем дело с двухпараметрической спектральной задачей. Применение метода построения решений уравнения Шредингера в виде разложения по более простым базисам приводит к двум многочленным рекуррентным соотношениям, определяющимся кубической матрицей. По-видимому, наиболее простой путь к построению эллипсоидального базиса состоит в применении метода Нивена [37], позволяющего выписать решение уравнения Шредингера в терминах нулей волновой функции и свести задачу к системе соответствующих нелинейных уравнений. Такое исследование выходит за рамки настоящей статьи и составляет предмет отдельной работы.

В заключение выражаем благодарность Л.Г. Мардояну и В.М. Тер-Антоняну за многочисленные интересные дискуссии.

Исследования одного из авторов (Г.С.П.) проводились при частичной поддержке РФФИ (проект № 93-01-00330).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Schrödinger E.* // Proc. Roy. Irish. Acad. 1940. V. A46. P. 9; 183; 1941. V. A47. P. 53.
2. *Stivenson A.F.* // Phys. Rev. 1941. V. 59. P. 842.
3. *Infeld L., Schild A.* // Phys. Rev. 1945. V. 67. P. 121.
4. *Bessis N., Bessis G.* // J. Phys. (London). 1979. V. A12. P. 1991.
5. *Изместьев А.А.* // ЯФ. 1990. Т. 52. С. 1697; 1991. Т. 53. С. 1402.
6. *Bogush A.A., Otchik V.S.* // J. Phys. (London). 1997. V. A30. P. 559.
7. *Nishino Y.* // Math. Japon. 1972. V. 17. P. 59.
8. *Higgs P.W.* // J. Phys. (London). 1979. V. A12. P. 309.
9. *Leemon H.I.* // J. Phys. (London). 1979. V. A12. P. 489.
10. *Курочкин Ю.А., Отчик В.С.* // Докл. АН БССР. 1979. Т. XXIII. С. 987.
11. *Богуш А.А., Курочкин Ю.А., Отчик В.С.* // Докл. АН БССР. 1980. Т. XXIV. С. 19.
12. *Богуш А.А., Отчик В.С., Редьков В.М.* // Вестн. АН БССР. 1983. Т. 3. С. 56.
13. *Отчик В.С., Редьков В.М.* Препринт 298 ИФ АН БССР, 1983.
14. *Грановский Ю.А., Жеданов А.С., Луценко И.М.* // ТМФ. 1992. Т. 91. С. 207.
15. *Грановский Ю.А., Жеданов А.С., Луценко И.М.* // ТМФ. 1992. Т. 91. С. 396.
16. *Barut A.O., Inomata A., Junker G.* // J. Phys. (London). 1987. V. A20. P. 6271.
17. *Barut A.O., Inomata A., Junker G.* // J. Phys. (London). 1990. V. A23. P. 1179.
18. *Grosche C.* //Ann. Phys. (N.Y.). 1990. V. 204. P. 208.
19. *Grosche C., Pogosyan G.S., Sissakian A.N.* // Fortschr. Phys. 1995. V. 43. P. 523.
20. *Гроше К., Погосян Г.С., Сисакян А.Н.* // ЭЧАЯ. 1996. Т. 27. С. 244.
21. *Гроше К., Погосян Г.С., Сисакян А.Н.* // ЭЧАЯ. 1997. Т. 28. С. 1229.
22. *Pogosyan G.S., Sissakian A.N.* // Turkish J. Phys. 1997. V. 21. P. 515.
23. *Олевский М.П.* // Мат. сб. 1950. Т. 27. С. 379.
24. *Демков Ю.Н.* // ЖЭТФ. 1965. Т. 48. С. 88.
25. *Кадышевский В.Г.* // Докл. АН СССР. 1962. Т. 147. С. 588.
26. *Варшалович Д.А., Москалев А.Н., Херсонский В.К.* Квантовая теория углового момента. Л.: Наука, 1975.
27. *Флюгге З.* Задачи по квантовой механике. М.: Мир, 1974.
28. *Izmest'ev A.A., Pogosyan G.S., Sissakian A.N., Winternitz P.* // J. Phys. (London). 1996. V. A29. P. 5949.

29. *Бейтмен Т., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. М.: Наука, 1966.
30. *Сеге Г.* Ортогональные многочлены. М.: Физматгиз, 1962.
31. *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. Дополнительные главы. М.: Наука, 1986.
32. *Bailey W.N.* Generalized hypergeometric series, Cambridge Tracts, № 32. Cambridge, 1935.
33. *Погосян Г.С., Тер-Антонян В.М.* Сообщение ОИЯИ Р2-11962. Дубна, 1978.
34. *Кузнецов Г.И., Смородинский Я.А.* // ЯФ. 1977. Т. 25. С. 447.
35. *Grosche C., Karayan Kh.H., Pogosyan G.S., Sissakian A.N.* // J. Phys. (London). 1997. V. A30. P. 1629.
36. *Patera J., Winternitz P.* // J. Math. Phys. 1973. V. 14. P.1130.
37. *Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж.Н.* Курс современного анализа. Т. 2. М.: Физматгиз, 1963.

ISOTROPIC OSCILLATOR IN THE SPACE OF CONSTANT POSITIVE CURVATURE. INTERBASIS EXPANSIONS

Ye. M. Hakobyan, S. I. Vinitsky, G. S. Pogosyan, A. N. Sissakian

The Schrödinger equation is thoroughly analyzed for the isotropic oscillator in the three-dimensional space of constant positive curvature in the spherical and cylindrical systems of coordinates. The expansion coefficients between the spherical and cylindrical bases of the oscillator are calculated. It is shown that the relevant coefficients are expressed through the generalized hypergeometric functions ${}_4F_3$ of the unit argument of $6j$ Racah symbols extended over their indices to the region of real values. Limiting transitions to a free motion and flat space are considered in detail. Elliptic bases of the oscillator are constructed in the form of expansion over the spherical and cylindrical bases. The corresponding expansion coefficients are shown to obey the three-term recurrence relations.