ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
Том 90, № 1
январь, 1992

Л. Д. Корсун, А. Н. Сисакян, И. Л. Соловцов

ВАРИАЦИОННАЯ ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ. φ^{2k}-ОСЦИЛЛЯТОР

Вариационная теория возмущений применяется для изучения ангармонического φ^{2k}-осциллятора в пределе сильной связи. Получены непертурбативные выражения для энергии вакуума, функции Грина и эффективного потенциала.

1. ВВЕДЕНИЕ

Проблема выхода за рамки теории возмущений является одной из центральных задач квантовой теории поля. Большой поток работ в этом направлении характеризуется многообразием подходов, и сейчас трудно говорить о наличии каких-либо общепризнанных принципов решения этой задачи. Один из широко применяемых методов связан с суммированием рядов теории возмущений [1]. При этом для неизвестных точно членов высших порядков используются асимптотические выражения, найденные, например, с помощью метода функционального перевала [2]. В силу асимптотического характера ряда теории возмущений его существование не является однозначной процедурой, а имеет, вообще говоря, функциональный произвол. Поэтому без привлечения дополнительной информации о сумме ряда нельзя получить надежных результатов в области сильной связи [3]. Кроме того, возможность суммирования ряда, например по методу Бореля, имеет в настоящее время обоснование лишь для скалярных моделей в пространствах одного, двух и трех измерений [4].

К числу подходов, не использующих непосредственно ряды теории возмущений, относятся вариационные методы [5, 6]. В последнее время широкое распространение находит метод гауссова эффективного потенциала [7, 8]. Следует отметить, однако, что вариационные подходы, как правило, сами по себе не содержат процедуры вычисления поправок, и, следовательно, имеется трудность в ответе на вопрос: в какой мере вариационный метод действительно дает основной вклад? В связи с этим возникает проблема надежности и устойчивости результатов, полученных, например, в рамках гауссовой аппроксимации [8].

Цель данной работы состоит в формулировке и применении непертурбативного метода, названного нами вариационной теорией возмущений (ВТВ). Предлагаемый подход, как и стандартная теория возмущений, использует только лишь гауссовы функциональные квадратуры. В его основе также лежит принцип оптимизации, который в определенном смысле можно рассматривать как некоторую вариационную процедуру. Однако, в отличие от стандартных вариационных методов, в рассматриваемом подходе искомая величина представляется в виде некоторого ряда, который позволяет в принципе вычислить необходимые поправки любого порядка. Кроме того, в n-м порядке нашей аппроксимации фигурируют лишь те типы диаграмм, которые формируют n-й порядок обычной теории возмущений. Таким образом, в техническом плане с точки зрения вычисления фейнмановских графов теория возмущений и предлагаемый подход находятся на одинаковых позициях.

Отправным пунктом вариационной теории возмущений является функциональный интеграл, который мы будем понимать с помощью гауссовых квадратур

$$\int D\varphi \exp\left\{ i\left[\frac{1}{2}\int dx((\partial\varphi)^2-M^2\varphi^2)+\int dxJ\varphi\right]\right\} =$$

$$=\left[\det\frac{\partial^2+M^2}{\partial^2+m^2}\right]^{-1/2}\exp\left[-\frac{i}{2}\langle J\Delta J\rangle\right],$$

где

$$\langle J\Delta J\rangle=\int dxJ(x)\Delta(x-y)J(y),$$

а пропагатор в импульсном пространстве равен

$$\Delta(k)=(k^2-M^2+i0)^{-1}.$$

В данной работе мы рассмотрим случай одномерной скалярной модели — φ^{2k}-ангармонический осциллятор. Вначале в методических целях рассмотрим простой численный пример, который позволяет достаточно наглядно изложить идею ВТВ. Затем мы вычислим вакуумную энергию и функцию Грина в пределе сильной связи и рассмотрим влияние различного способа выбора процедуры оптимизации. И, наконец, на основе ВТВ мы построим непертурбативный эффективный потенциал.

2. НУЛЬ-МЕРНЫЙ АНАЛОГ

Проиллюстрируем на примере двойного интеграла вида

$$Z[g]=\int\limits_{-\infty}^{\infty} dx_1\int\limits_{-\infty}^{\infty} dx_2\exp[-(S_0+gS_I)],$$

где

$$S_0=x_1^2+x_2^2=\mathbf{x}^2,\qquad S_I=x_1^{2k}+x_2^{2k},$$

способ построения нового разложения для $Z[g]$, отличного от ряда теории возмущений, используя при этом лишь гауссовы квадратуры, т. е. интегралы вида

$$\int d\mathbf{x}P(x_1,x_2)\exp(-S_0),$$

$P(x_1, x_2)$ — полином двух переменных, S_0 — нуль-мерный аналог свободного действия, а S_I — действия взаимодействия. Стандартный ряд теории возмущений

$$Z[g]=\sum_{n=0}^{\infty}g^n C_n, \tag{2.1}$$

где

$$C_n=\frac{(-1)^n}{n!}\int_{-\infty}^{\infty}dx_1\int_{-\infty}^{\infty}dx_2(x_1^{2k}+x_2^{2k})^n\exp[-(x_1^2+x_2^2)], \tag{2.2}$$

является асимптотическим рядом и, вообще говоря, сам по себе не позволяет получить информацию о функции $Z[g]$ в области больших констант связи. Так, например, тот же ряд будет иметь и функция $Z[g]+\exp(-1/g)$, которая, очевидно, обладает совершенно иной асимптотикой при $g\to\infty$. Однозначность суммирования асимптотического ряда можно гарантировать, лишь наложив на сумму ряда некоторые дополнительные условия, фигурирующие, например, в теореме Карлемана [9]. В случае квантовой теории поля какие-либо дополнительные условия для суммы ряда теории возмущений, приводящие к однозначности его суммирования, как правило, не известны.

Построим иное разложение для $Z[g]$, определяя новые S_0' и S_I' следующим образом [1]:

$$S_0'=S_0+\theta S_0^k,\qquad S_I'=gS_I-\theta S_0^k. \tag{2.3}$$

Тогда вместо (2.1) и (2.2) запишем новый ряд для $Z[g]$:

$$Z[g]=\sum_{n=0}^{\infty}Z_n[g,\theta], \tag{2.4}$$

$$Z_n[g,\theta]=\frac{1}{n!}\int d\mathbf{x}[\theta S_0^k-gS_I]^n\exp[-(S_0+\theta S_0^k)], \tag{2.5}$$

где θ — произвольный пока параметр.

Из структуры (2.4) и (2.5) видно, что разложение по степеням нового действия взаимодействия (2.3) улучшит сходимость ряда по сравнению с рядом теории возмущений. К тому же параметр θ мы можем рассматривать как вариационный, выбирая его наиболее оптимальным образом, поскольку функция $Z[g]$ не зависит от θ. Ряды типа (2.4) мы называем рядами вариационной теории возмущений. Можно предложить различные варианты оптимизационной процедуры для нахождения параметра θ. В версии 1 вариационный параметр определяется из условия минимальности модуля суммы последних членов ряда ВТВ:

$$Z^{(N)}[g,\theta]=\sum_{n=0}^{N}Z_n[g,\theta], \tag{2.6}$$

---

[1] Аналогичный прием применялся в работах [10].

$$\theta=\theta_1: \quad \min_{\{\theta\}} \left| \sum_{n=k}^{N} Z_n[g,\theta] \right|, \qquad 1\leqslant k\leqslant N.$$

Так, в первом нетривиальном порядке ВТВ (рассмотренном в данной работе) это условие имеет вид

$$\theta_1: \quad \min_{\{\theta\}} |Z_1[g,\theta]|.$$

Вторая версия оптимизации (версия 2) использует независимость точного значения $Z[g]$ от параметра θ и соответствует уравнению

$$\theta=\theta_2: \quad \frac{\partial Z^{(N)}[g,\theta]}{\partial\theta}=0.$$

В версии 3 параметр $\theta=\theta_3$ фиксируется, если потребовать минимальность вклада дальних членов ряда ВТВ, например,

$$\theta=\theta_3: \quad \min_{\{\theta\}} \left| \sum_{n=i}^{N} Z_n[g,\theta] \right|.$$

Используя стандартные асимптотические методы, нетрудно найти асимптотику коэффициентов $Z_n[g,\theta]$ при больших номерах n. Применяя метод Лапласа, для больших n имеем

$$Z_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2\pi}}{n}\frac{1}{\theta^{1/k}}\frac{\sqrt{t-1}}{\sqrt{k^3(k-1)}}\left(\frac{t-1}{t}\right)^n \exp\left[-\frac{\sqrt{n}}{\theta^{1/k}}\right]$$

при $t>1$, где

$$t=\frac{2^{k-1}\theta}{g}. \tag{2.7}$$

Таким образом, ряд ВТВ имеет конечную область сходимости при

$$g<2^{k-1}\theta.$$

Вернемся снова к изучению ряда (2.4) с коэффициентами (2.5). Для того чтобы привести интеграл, содержащийся в (2.5), к гауссову виду, осуществим ряд преобразований. Применяя фурье-преобразование

$$\exp(-A^k)=\langle\exp(-iuA)\rangle=\int_{-\infty}^{\infty} du\Phi(u)\exp(-iuA), \tag{2.8}$$

мы можем записать члены ряда ВТВ в виде

$$Z_n[g,\theta]=\left\langle \sum_{l=0}^{n} \frac{(-\theta)^{n-l}}{(n-l)!}\left(\frac{d}{d\theta}\right)^{n-l} \frac{Z_l(g)}{[1+iu\theta^{1/k}]^{kl+1}} \right\rangle,$$

где

$$Z_l(g)=\frac{1}{l!}\int d\mathbf{x}[-g(x_1^{2k}+x_2^{2k})]^l e^{-\mathbf{x}^2},$$

$Z_l(g)$ являются коэффициентами обычного ряда теории возмущений.

Используя соотношение

$$(2.9)\qquad \frac{1}{a^\nu}=\frac{1}{\Gamma(\nu)}\int_0^\infty d\alpha\alpha^{\nu-1}e^{-\alpha a}$$

и осуществляя обратное фурье-преобразование, получим

$$Z_n[g,\theta]=\int_0^\infty d\alpha\alpha^{kn}e^{-\alpha-\theta\alpha^k}\sum_{l=0}^{n}\frac{\theta^{n-l}}{(n-l)!}\frac{Z_l(g)}{\Gamma(kl+1)}.$$

В результате приходим к следующему выражению:

$$Z_n[g,\theta]=\int_0^\infty d\alpha(\alpha^k\theta)^n e^{-\alpha-\theta\alpha^k}\sum_{l=0}^{n}\frac{(-g/\theta)^l}{(kl)!(n-l)!}a_l,$$

где

$$a_l=\sum_{m=0}^{l}\frac{\Gamma(km+1/2)}{m!}\frac{\Gamma(k(l-m)+1/2)}{(l-m)!}.$$

Далее, введем обозначение (2.7) и перейдем к $\alpha\to\alpha/\theta^{1/k}$. Тогда

$$(2.10)\qquad Z_n[g,\theta]=\left(\frac{2^{k-1}}{gt}\right)^{1/k}\int_0^\infty d\alpha\alpha^{kn}\times$$

$$\times\exp\left(-\alpha^k-\alpha\left(\frac{2^{k-1}}{gt}\right)^{1/k}\right)\sum_{l=0}^{n}\frac{(-2^{k-1}/t)^l}{(kl)!(n-l)!}a_l.$$

Отсюда следует, что оптимальное значение параметра t не зависит от константы связи g, и мы можем воспроизвести функциональную зависимость $Z[g]$ при $g\to\infty$.

Рассмотрим ВТВ в первом порядке:

$$Z_0[g,\theta]=\pi\int_0^\infty d\alpha\exp(-\alpha-\alpha^k\theta),$$

$$Z_1[g,\theta]=\pi\int_0^\infty d\alpha\alpha^k\theta\exp(-\alpha-\alpha^k\theta)\left[1-\frac{g(2k-1)!!}{k!\theta2^{k-1}}\right].$$

Если проводить оптимизацию в соответствии с версией 1, то получим

$$Z_1[g,\theta]=0:\qquad t_1=\frac{2^{k-1}\theta_1}{g}=\frac{(2k-1)!!}{k!}.$$

При оптимизации в соответствии с версией 2 полагаем

$$\frac{\partial Z^{(1)}[g,\theta]}{\partial\theta}=0,$$

Таблица 1

k	g	$Z^{\text{точн}}(g)$	$Z^{(1)}[g, \theta_1] = Z^{(1)}[g, \theta_2]$	$Z^{(0)}[g, \theta_3]$	$Z^{(1)}[g, \theta_3]$
2	0,1	2,8025	2,7994	2,89289	2,7902
	1	1,8726	1,8585	2,05988	1,8153
	10	0,8500	0,8369	0,9841	0,7920
	100	0,3076	0,3016	0,3642	0,2801
	1 000	0,1017	0,0996	0,12143	0,0918
	10 000	0,0326	0,0319	0,0391	0,0294
3	0,1	2,7046	2,6881	2,8813	2,6222
	1	1,9919	1,9556	2,2763	1,7716
	10	1,2138	1,1769	1,4680	0,9642
	100	0,6496	0,6246	0,8126	0,4711
	1 000	0,3233	0,3095	0,4116	0,2217
	10 000	0,1552	0,1482	0,1992	0,1033
4	0,1	2,6220	2,5873	2,8620	2,3596
	1	2,0535	1,9974	2,3914	1,5435
	10	1,4391	1,3806	1,7692	0,8439
	100	0,9276	0,8806	1,1837	0,4178
	1 000	0,5657	0,5333	0,7389	0,2012
	10 000	0,3334	0,3130	0,4417	0,0986

Таблица 2

k	$Z^{\text{точн}}(g)$	$Z^{(1)}(g)$	Ошибка, %
2	$3{,}28626\, g^{-1/2}$	$3{,}21488\, g^{-1/2}$	2,172
3	$3{,}44265\, g^{-1/3}$	$3{,}28119\, g^{-1/3}$	4,689
4	$3{,}54752\, g^{-1/4}$	$3{,}311303\, g^{-1/4}$	6,658

где $Z^{(1)}=Z_0+Z_1$. Тогда

$$t_2=\frac{(2k-1)!!}{k!}.$$

Таким образом, мы получили тот же параметр t, что и в версии 1: $t=t_1=t_2$. Результаты вычислений при различных значениях k представлены в табл. 1, из которой видно, что уже в первом порядке ВТВ достигается неплохое воспроизведение точного значения $Z[g]$. Н табл. 1 включены также результаты проведения асимптотической оптимизации (версия 3), когда $t_3=1$ и интервал $(Z^{(1)}[g, \theta_3], Z^{(0)}[g, \theta_3])$ определяет двустороннюю оценку величины $Z[g]$, так как в этом случае мы имеем дело с рядом типа ряда Лейбница.

Введем обозначение $x=\frac{2^{k-1}}{t}$ и рассмотрим выражение (2.8) при $g\to\infty$. Тогда

$$Z_n[g]=\frac{x^{1/k}}{g^{1/k}}\frac{\Gamma(n+1/k)}{k}\sum_{l=0}^{n}\frac{(-x)^l}{(n-l)!(kl)!}a_l.$$

Используя соотношение

$$\sum_{m=0}^{M} \frac{\Gamma(m+a)}{m!} = \frac{1}{a} \frac{\Gamma(M+a+1)}{M!},$$

выполним одно из суммирований в N-м порядке ВТВ:

$$Z^{(N)}[g] = \frac{x^{1/k}}{g^{1/k}} \Gamma\left(N+1+\frac{1}{k}\right) \sum_{l=0}^{N} \frac{(-x)^l a_l}{(kl+1)!(N-l)!}.$$

В первом порядке ВТВ приходим к выражению

$$Z^{(1)}[g, \theta] = g^{-1/k} \left(\frac{2^{k-1}}{t}\right)^{1/k} \Gamma\left(2+\frac{1}{k}\right) \pi \left[1 - \frac{(2k-1)!!}{(k+1)!t}\right]$$

с оптимальным значением $t_1 = t_2 = (2k-1)!!/k!$. Тогда

$$Z^{(1)}[g] = g^{-1/k} \frac{\pi k}{k+1} \Gamma\left(2+\frac{1}{k}\right) \left[\frac{\sqrt{\pi} k!}{2\Gamma(k+1/2)}\right]^{1/k}.$$

В табл. 2 приведены значения $Z^{(1)}[g]$ для различных k.

3. АНГАРМОНИЧЕСКИЙ φ^{2k}-ОСЦИЛЛЯТОР В ПРЕДЕЛЕ СИЛЬНОЙ СВЯЗИ

Рассмотрим задачу о вычислении энергии основного уровня ангармонического осциллятора (АО) с евклидовым действием

$$S = S_0 + {}^1/_2 m^2 \tilde{S} + g S_I,$$

где

$$S_0 = \frac{1}{2} \int_{-T/2}^{T/2} dt \dot{\varphi}^2, \quad \tilde{S} = \int_{-T/2}^{T/2} dt \varphi^2, \quad S_I = \int_{-T/2}^{T/2} dt \varphi^{2k}. \tag{3.1}$$

Выражение для статистической суммы запишем в виде функционального интеграла

$$\exp(-TE) = \int_{\varphi\left(-\frac{T}{2}\right) = \varphi\left(\frac{T}{2}\right)} D\varphi \exp\left[-\left(S_0 + \frac{1}{2} m^2 \tilde{S} + g S_I\right)\right], \tag{3.2}$$

где E — свободная энергия. Для того чтобы получить энергию основного состояния E_0, рассмотрим выражение (3.2) в пределе $T \to \infty$. Переходя от функциональных интегралов статистической механики к функциональным интегралам евклидовой теории поля, а также учитывая дальнейшее приложение метода к квантовой теории поля, будем рассматривать величину $\partial E_0 / \partial g$:

$$\frac{\partial E_0}{\partial g} = N^{-1} \int D\varphi \varphi^{2k}(0) \exp\left[-\left(S_0 + \frac{m^2}{2} \tilde{S} + g S_I\right)\right],$$

$$N = \int D\varphi \exp\left[-\left(S_0 + \frac{m^2}{2} \tilde{S} + g S_I\right)\right],$$

где S_0, $\tilde{S}$, S_I задаются выражениями, аналогичными (3.1), но интегрирование по t осуществляется в бесконечных пределах. Переходя к безразмерным величинам

$$\varphi \to g^{-\frac{1}{2(k+1)}}\varphi, \qquad t \to g^{-\frac{1}{k+1}}t,$$

выразим величину $\partial E_0/\partial g$ через $2k$-точечную евклидову функцию Грина:

$$\frac{\partial E_0}{\partial g} = g^{-\frac{k}{k+1}} G_{2k}(0),$$

где

$$G_{2k}(0) = N^{-1}\int D\varphi\varphi^{2k}(0)\exp\left[-\left(S_0 + \frac{\omega^2}{2}\tilde{S} + S_I\right)\right], \tag{3.3}$$

$$N = \int D\varphi\exp\left[-\left(S_0 + \frac{\omega^2}{2}\tilde{S} + S_I\right)\right], \omega^2 = m^2 g^{-\frac{2}{k+1}}. \tag{3.4}$$

Мы будем рассматривать предел сильной связи, когда

$$g/m^{k+1} \to \infty \quad (\omega^2 \to 0).$$

Введем в рассмотрение вспомогательный функционал

$$A = \theta S_0 + \frac{\varkappa}{2}\tilde{S},$$

где θ и $\varkappa$ — некоторые пока что неопределенные параметры. Тогда выражения (3.3), (3.4) мы можем записать в виде ряда ВТВ:

$$G_{2k}(0) = N^{-1}\int D\varphi\varphi^{2k}(0)\exp\left[-\left(S_0 + \frac{\omega^2}{2}\tilde{S} + A^k\right) - (S_I - A^k)\right] =$$
$$= N^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int D\varphi\varphi^{2k}(0)[A^k - S_I]^n \exp\left[-\left(S_0 + \frac{\omega^2}{2}\tilde{S} + A^k\right)\right]. \tag{3.5}$$

Рассмотрим асимптотическое поведение функционального интеграла

$$\int D\varphi[A^k - S_I]^n \exp[-(S_0 + A^k)] \tag{3.6}$$

при больших значениях n, используя метод функционального перевала. Для этого представим интеграл (3.6) в «перевальном» виде, выполнив замену $\varphi \to n^{1/2k}\varphi$. Тогда придем к интегралу вида

$$\int D\varphi \exp[-nS_{eff}[\varphi] - n^{1/k}S_0[\varphi]], \tag{3.7}$$

где

$$S_{eff}[\varphi] = A^k - \ln[A^k - S_I]. \tag{3.8}$$

Определим перевальную функцию, соответствующую минимуму действия, из условия $\delta S_{eff}[\varphi]/\delta\varphi = 0$. В этом случае функция φ_0 удовлетворяет уравнению

$$-\ddot{\varphi}_0 + a\varphi_0 - b\varphi_0^{2k-1} = 0, \tag{3.9}$$

где

$$a=\frac{\varkappa}{\theta};\quad b=\frac{2}{\theta A^{k-1}[\varphi_0](1-D[\varphi_0])};\quad D[\varphi_0]=A^k-S_I.$$

Нетривиальное решение уравнения (3.9), минимизирующее действие и убывающее на бесконечности, которое дает основной вклад в функциональный интеграл (3.7), имеет вид

$$\varphi_0(t)=\pm\left[\sqrt{\frac{ka}{b}}\left(\operatorname{ch}\left[(k-1)\sqrt{a}\,(t-t_0)\right]\right)^{-1}\right]^{\frac{1}{k-1}},\tag{3.10}$$

где t_0 — произвольно выбранный парамер, отражающий трансляционную инвариантность теории. Тогда значение функционала (3.8) на перевальной функции (3.10) можно записать как

$$S_{\text{eff}}[\varphi_0]=1-\ln D[\varphi_0],$$

$$D[\varphi_0]=1-\frac{2^{k-2}}{k\varkappa}\left[\frac{k^2-1}{k\sqrt{\theta\varkappa}}\,\frac{\Gamma\left(\frac{2}{k-1}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{1}{k-1}\right)}\right]^{k-1}.$$

Заметим, что введенные ранее произвольные параметры θ и $\varkappa$ можно подобрать таким образом, чтобы $D[\varphi_0]=0$. Это соответствует процедуре

Таблица 3

k	$\varkappa(\theta)$	A_1	A_2
2	$\left(\frac{9}{16\theta}\right)^{2/3}$	3/4	−21/8
3	$\frac{8}{3\pi}\sqrt{\frac{2}{3\theta}}$	15/8	−3 495/64
4	$\left[\frac{15}{4\sqrt{\theta}}\,\frac{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{1}{3}\right)}\right]^{6/5}$	105/16	−540 120/16²

асимптотической оптимизации, при которой вклад дальних членов ряда является минимальным. В этом случае связь между параметрами θ и $\varkappa$ имеет вид

$$\varkappa(\theta)=\left[\frac{2^{k-2}}{k}\left(\frac{\Gamma\left(\frac{2}{k-1}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{1}{k-1}\right)}\,\frac{k^2-1}{k\sqrt{\theta}}\right)^{k-1}\right]^{\frac{2}{k+1}}.\tag{3.11}$$

В пределе

$$\lim_{k\to\infty}\varkappa(\theta)=\frac{1}{4}.$$

Значения параметра $\varkappa$ для различных k приведены в табл. 3. Таким образом, остается только один вариационный параметр θ, который фиксируется исходя из конечного числа членов ряда ВТВ.

Вернемся к вычислению функционального интеграла в (3.5). Во-первых, мы можем привести его к интегралу гауссова типа при помощи преобразования Фурье (2.8). В результате в показателе экспоненты в (3.5) остаются лишь слагаемые, квадратичные по полям φ. Во-вторых, учитывая тот факт, что любую степень A^k, возникающую при раскрытии выражения $[A^k-S_I]^n$, можно набрать с помощью операции дифференцирования выражения $\exp(\alpha A^k)$ по параметру α соответствующее число раз, положив затем $\alpha=0$, получим

$$G_{2k}(0)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{n}\frac{1}{n!}C_n^l(-1)^l\left(\frac{d}{d\alpha}\right)^{n-l}N^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}du\Phi(u)\times$$

$$\times\int D\varphi\varphi^{2k}(0)S_I^l\exp\left\{-\left[(1+iu\theta(1-\alpha)^{1/k})S_0+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{1}{2}(\omega^2+iu\varkappa(1-\alpha)^{1/k})\tilde{S}\right]\right\}.$$

Введем обозначение

$$z^2=\frac{\omega^2+iu\varkappa(1-\alpha)^{1/k}}{1+iu\theta(1-\alpha)^{1/k}}$$

и примем размерную регуляризацию, осуществляя замену $\varphi\to f\varphi$, где $f^2=1+iu\theta(1-\alpha)^{1/k}$. Тогда

$$G_{2k}(0)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{n}\frac{1}{(n-l)!}\left(\frac{d}{d\alpha}\right)^{n-l}\left\langle\frac{g_l[z^2]}{[1+iu\theta(1-\alpha)^{1/k}]^{kl+k}}\right\rangle, \tag{3.12}$$

где

$$g_l[z^2]=\frac{(-1)^l}{l!}\int D\varphi\varphi^{2k}(0)S_I^l\exp\left[-\left(S_0+\frac{z^2}{2}\tilde{S}\right)\right].$$

Заметим, что функция $g_l(z^2)$ представляет собой обычные коэффициенты разложения $G_{2k}(0)$ в ряд теории возмущений, что позволяет использовать диаграммную технику обычной теории возмущений для исходного гамильтониана, причем для N-го порядка нашей аппроксимации нужны только диаграммы, содержащиеся в N-м порядке обычной теории возмущений. Можно установить связь функции $g_l(z^2)$ с коэффициентами A_n ряда теории возмущений для энергии основного уровня квантовомеханического АО с энергией возмущения

$$V=g\varphi^{2k}:\quad E_0(g)=\frac{1}{2}m+m\sum_{n=1}^{\infty}A_n\left(\frac{g}{m^{k+1}}\right)^n.$$

Искомое соотношение имеет вид

$$g_l[z^2]=\frac{(1+l)A_{1+l}}{z^{(k+1)l+k}}. \tag{3.13}$$

Значения коэффициентов A_n приведены в табл. 3 для различных значений k.

Таким образом, учитывая (3.13) и используя представление (2.9), получим функцию Грина

$$G_{2k}(0)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{n}\frac{(1+l)A_{1+l}}{(n-l)!}\left[\Gamma\left(\frac{k(1+l)-l}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k(1+l)+l}{2}\right)\right]^{-1}\times$$
$$\times\left(\frac{d}{d\alpha}\right)^{n-l}F_l(\theta,\varkappa,\alpha),$$

где

$$(3.14)\qquad F_l(\theta,\varkappa,\alpha)=\int_0^{\infty}dx\,x^{\frac{k(1+l)-l}{2}-1}e^{-x}\int_0^{\infty}dy\,y^{\frac{k(1+l)+l}{2}-1}e^{-\omega^2 y}\times$$
$$\times\exp\left[-(1-\alpha)(\theta x+\varkappa y)^k\right].$$

Здесь нас интересует основной вклад в E_0 в пределе сильной связи, поэтому положим $\omega^2=0$. Тогда, учитывая что $\varkappa=\varkappa_{\text{опт}}$, где $\varkappa_{\text{опт}}$ определено согласно (3.11), получим для энергии основного уровня АО в пределе сильной связи в N-м порядке нашей аппроксимации

$$(3.15)\qquad E_0^{(N)}=(k+1)\,g^{\frac{1}{k+1}}\sum_{n=0}^{N}\sum_{l=0}^{n}\frac{(1+l)\,A_{1+l}}{(n-l)!}\left[\frac{1}{\varkappa}\right]^{\frac{k(l+1)+l}{2}}\times$$
$$\times\left[\Gamma\left(\frac{k(l+1)-l}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k(l+1)+l}{2}\right)\right]^{-1}R_{n,l}(\theta),$$

где

$$(3.16)\qquad R_{n,l}(\theta)=\int_0^{\infty}dx\,e^{-x}x^{\frac{k(l+1)-l}{2}-1}\int_0^{\infty}dy\,y^{\frac{k(l+1)+l}{2}-1}(\theta x+y)^{k(n-l)}e^{-(\theta x+y)^k}.$$

Выражение (3.15) можно значительно упростить, учитывая, что как в первой, так и во второй версиях оптимальное значение параметра θ достаточно мало, т. е. $\theta\ll 1$. Таким образом, ограничиваясь первым порядком по θ, в первом порядке ВТВ из (3.15) и (3.16) получим

$$(3.17)\qquad E_0^{(1)}=(k+1)\,g^{\frac{1}{k+1}}[E_0'+E_1'],$$

где

$$E_0'=\frac{A_1}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\varkappa^{k/2}}\left[\frac{1}{k}\sqrt{\pi}-\frac{k\theta}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{k}\right)\right],$$

$$E_1'=\frac{A_1}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\varkappa^{k/2}}\left[\frac{\sqrt{\pi}}{2k}+\frac{k\theta}{2}\left(\Gamma\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{k}\right)-\Gamma\left(\frac{5}{2}-\frac{1}{k}\right)\right)\right]+$$
$$+\frac{2A_2}{\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)\varkappa^{k+1/2}}\left[\frac{1}{2k^2}\Gamma\left(\frac{1}{2k}\right)-\theta\left(k-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(2-\frac{1}{2k}\right)\right].$$

Здесь $\varkappa$ определяется из (3.11), а коэффициенты A_1 и A_2 из табл. 3

Таблица 4

k	$\theta_{\text{опт}}$	$E_0^{\text{точн}}(g)$	$E_0^{(1)}(g)$
2	0,027926	$0{,}668\,g^{1/3}$	$0{,}663\,g^{1/3}$
3	0,038009	$0{,}680\,g^{1/4}$	$0{,}698\,g^{1/4}$
4	0,040149	$0{,}704g^{1/5}$	$0{,}709\,g^{1/5}$

Таблица 5

g	$E_0^{\text{точн}}$	$E_0^{(5)}$	$\theta_{\text{опт}}$	Ошибка, %
0,1	0,559	0,56407	0,0255	0,906
0,5	0,696	0,69793	0,0246	0,277
1,000	0,804	0,80557	0,0241	0,220
2,000	0,952	0,95334	0,0218	0,141
50,00	2,500	2,50322	0,0215	0,141
200	3,931	3,93627	0,0215	0,134
1 000	6,694	6,70317	0,0215	0,137
8 000	13,367	13,38603	0,0229	0,142
20 000	18,137	18,16315	0,0229	0,144

Вычислим оптимальное значение параметра $\varkappa$ из выражения (3.17) для различных k и убедимся, что параметр θ достаточно мал и наше приближение обосновано. А также определим значения $E_0^{(1)}$ и сравним их с точными[2] для различных k (см. табл. 4).

Для большого числа членов нашей аппроксимации можно получить более точные результаты, используя ту или иную процедуру оптимизации. Так, например,

$$k=2 \quad E_0^{(4)}=0{,}6688,$$

$$k=3 \quad E_0^{(4)}=0{,}6915,$$

$$k=4 \quad E_0^{(4)}=0{,}7081.$$

Если в формуле (3.14) выполнить разложение по $\omega^2=g^{-2/3}m^2$ $(m^2=1)$ для $k=2$ и, используя методы оптимизации, получить разложение по степеням g для E_0, то результат можно сравнить с численным:

$$E_0^{\text{точн}}=g^{1/3}[0{,}668+g^{-2/3}\cdot 0{,}14367-g^{-4/3}\cdot 0{,}0088+\cdots],$$

$$E_0^{(1)}=g^{1/3}[0{,}663+g^{-2/3}\cdot 0{,}140727-g^{-4/3}\cdot 0{,}0085+\cdots].$$

Как видим, уже первый порядок нашего разложения хорошо описывает область сильной связи. В заключение отметим, что если провести вычисление E_0 для любых g $(m^2=1)$ для $k=2$, полученный результат можно сравнить с точным (табл. 5).

Рассмотрим функцию Грина для гамильтониана вида $H=\frac{p^2}{2}+$ $+\frac{m^2}{2}\varphi^2+g\varphi^{2k}$ в пределе сильной связи. Энергия основного уровня свя-

[2]) Точные значения E_0 взяты из работ [11].

зана с пропагатором соотношением [12]

$$E_0=\frac{k+1}{2k}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dp}{2\pi}\,(1-G_0^{-1}(p)G(p)).$$

А функция Грина в p-пространстве для $k=2$ имеет вид

$$G(p)=\frac{1}{p^2+m^2}-\frac{6g}{m}\frac{1}{(p^2+m^2)^2}+\ldots=G_0(p)+G_1(p)+\ldots.$$

В выражении (3.12) положим $\theta=0$. Тогда имеем

$$G(p)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{n}\frac{1}{(n-l)!}\left(\frac{d}{d\alpha}\right)^{n-l}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{du}{2\sqrt{\pi}}e^{-u^2/4}G_l(p,z^2)\,|_{\alpha=0},$$

$$z^2=\omega^2+iu\varkappa\sqrt{1-\alpha}.$$

Далее, учитывая что

$$\int\limits_0^{\Lambda}\frac{dp}{2\pi}p^2G_{(1)}(p^2)=-\frac{3g}{4z^2},$$

$$\int\limits_0^{\Lambda}\frac{dp}{2\pi}p^2G_0(p^2)\simeq\frac{1}{2\pi}\left[\Lambda-\frac{z\pi}{2}\right]+o(1/\Lambda),$$

получим для энергии основного уровня в первом порядке нашей аппроксимации

$$E_0^{\Lambda}=\frac{3}{8}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{du}{2\sqrt{\pi}}e^{-u^2/4}\left[\left(1+\frac{d}{d\alpha}\right)(z^2)^{1/2}+\frac{3g}{z^2}\right].$$

Осуществляя ряд преобразований, а также устремляя $\Lambda\to\infty$, будем иметь

$$E_0=\frac{3}{8}\left\{\frac{3}{4}\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\sqrt{\frac{\varkappa}{\pi}}+\frac{3g}{2\varkappa}\sqrt{\pi}\right\}.$$

Далее, мы можем применять различные версии оптимизации, например, для $k=2$:

версия 1: $E_0^{(1)}=0{,}645g^{1/3}$,

версия 2: $E_0^{(1)}=0{,}634g^{1/3}$.

Аналогично мы можем вычислить энергию основного уровня для случая $k=3$:

версия 1: $E_0^{(1)}=0{,}810g^{1/4}$,

версия 2: $E_0^{(1)}=0{,}602g^{1/4}$.

Для $k=4$:

версия 1: $E_0^{(1)}=0{,}603g^{1/5}$,

версия 2: $E_0^{(1)}=0{,}589g^{1/5}$.

4. НЕПЕРТУРБАТИВНЫЙ ЭФФЕКТИВНЫЙ ПОТЕНЦИАЛ

Рассмотрим действительное самодействующее скалярное поле, описываемое действием

$$S[\varphi]=\int dx\left[\frac{1}{2}(\partial\varphi)^2-\frac{1}{2}m^2\varphi^2-V(\varphi)\right]$$

в пространстве n измерений для случаев, когда

$$V(\varphi)=\lambda_k\varphi^{2k},\qquad \lambda_k=\frac{g}{(2k)!},\qquad k=2,3,4;\qquad n=d-2\beta.$$

Производящий функционал функций Грина имеет вид

$$W[J]=N\int D\varphi\exp\{i(S[\varphi]+\langle J\varphi\rangle)\};$$

$$\langle J\varphi\rangle=\int dxJ(t)\varphi(t),$$

где $J(t)$ – произвольный источник. Вычислим эффективный потенциал методом ВТВ.

Введем вариационный параметр с помощью соотношения $\frac{a^k}{\Omega^{k-1}}$ учитывая, что мы вычисляем эффективный потенциал, возникающий из эффективного действия при постоянных конфигурациях поля $\varphi_0=\text{const}$. Тогда вариационный параметр не будет зависеть от объема пространства Ω. Амплитуду перехода вакуума в вакуум можно записать как

$$W[J]=\int D\varphi\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n}{n!}\left[\frac{a^k}{\Omega^{k-1}}\tilde{S}^k-\lambda S_I\right]^n\times \tag{4.1}$$

$$\times\exp\left\{i\left(S_0-m^2\tilde{S}-\frac{a^k}{\Omega^{k-1}}\tilde{S}^k+\langle J\varphi\rangle\right)\right\}.$$

Функциональный интеграл (4.1) имеет негауссов вид. Однако, используя фурье-преобразование

$$\exp\left(-i\varepsilon\frac{a^k}{\Omega^{k-1}}\tilde{S}^k\right)=\frac{\Omega}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dv\exp(-i\varepsilon^{1/k}av\tilde{S})\int_{-\infty}^{\infty}dCe^{iv\Omega C}e^{-i\Omega C^k},$$

можно добиться того, что в показателе экспоненты в (4.1) будут присутствовать только квадратичные по полям функционалы. А также, используя операцию дифференцирования по параметру ε, получим производящий функционал в виде

$$W[J]=\frac{\Omega}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dv\int_{-\infty}^{\infty}dCe^{i\Omega(vC-C^k)}\times \tag{4.2}$$

$$\times\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{n}\frac{(-1)^{n-l}}{(n-l)!}\left(\frac{d}{d\varepsilon}\right)^{n-l}w_l[J,M^2],$$

где после дифференцирования полагаем $\varepsilon=1$,

$$w_l[J,M^2]=\frac{1}{l!}\int D\varphi(-i\lambda S_I)^l\exp(i(S_0-M^2\tilde{S}+\langle J\varphi\rangle)),$$
$$M^2=m^2+\varepsilon^{1/k}av.$$

Коэффициенты ряда теории возмущений $w_l[J,M^2]$ для функционала $W[J]$ определяются как

$$w_l[J,M^2]=\frac{(-i\lambda)^l}{l!}\left[\int dx\frac{\delta^{2k}}{\delta J^{2k}(x)}\right]^l e^{-(i/2)\langle J\Delta J\rangle},$$

где

$$\Delta(p)=(p^2-M^2+i0)^{-1}.$$

Из (4.2) в N-м порядке ВТВ получаем

$$W[J]=\frac{\Omega}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dv\int_{-\infty}^{\infty}dCe^{i\Omega(vC-C^k)}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{n}\frac{(-1)^{n-l}}{(n-l)!}\times \tag{4.3}$$
$$\times\left(\frac{d}{d\varepsilon}\right)^{n-l}\left\{\det\frac{\partial^2+M^2}{\partial^2+m^2}\right\}^{-1/2}w_l[J,M^2].$$

В дальнейшем мы будем ориентироваться на вычисление V_{eff}, это позволяет считать φ_0 и $J=\text{const}$. Функциональный определитель в (4.3) вычисляется следующим образом:

$$\left[\det\frac{\partial^2+M^2}{\partial^2+m^2}\right]^{-1/2}=\exp\left\{-\frac{1}{2}\operatorname{Sp}\ln\left[1+\frac{\varepsilon^{1/k}va}{\partial^2+m^2}\right]\right\}.$$

Переходя к евклидову пространству, используя поворот Вика $p_0\to\to ip_0$, получим

$$\operatorname{Sp}\ln\left[1+\frac{\varepsilon^{1/k}va}{\partial^2+m^2}\right]\to\Omega i\int\frac{dp_E}{(2\pi)^n}\ln\left[1+\frac{\varepsilon^{1/k}va}{p_E{}^2+m^2}\right].$$

В результате имеем следующее соотношение:

$$\left[\det\frac{\partial^2+M^2}{\partial^2+m^2}\right]^{-1/2}=\exp\left\{-i\Omega\frac{a_\beta}{n}[(M^2)^{n/2}-(m^2)^{n/2}]\right\},$$

где

$$a_\beta=\mu^{2\beta}\frac{\Gamma(1-n/2)}{(4\pi)^{n/2}}.$$

Введем обозначение

$$\tilde{w}_0=\left[\det\frac{\partial^2+M^2}{\partial^2+m^2}\right]^{-1/2}w_0[J,M^2]=$$
$$=\exp\left\{-i\Omega\frac{a_\beta}{n}[(M^2)^{n/2}-(m^2)^{n/2}]+\frac{i\Omega}{2}\frac{J^2}{M^2}\right\}$$

и запишем производящий функционал в первом порядке по N в виде

$$W^{(1)}[J]=\frac{\Omega}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dv\int_{-\infty}^{\infty}dCe^{i\Omega S(v,C)}\left[1-\frac{1}{\tilde{w}_0}\frac{d\tilde{w}_0}{d\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=1}+\frac{w_1}{w_0}\right] \tag{4.4}$$

где

$$S(v,C)=Cv-C^k-\frac{a_\beta}{n}[(M^2)^{n/2}-(m^2)^{n/2}]+\frac{1}{2}\frac{J^2}{M^2}.$$

Интеграл (4.4) будем вычислять по методу стационарной фазы. В результате найдем производящий функционал $W[J]$. После применения процедуры оптимизации перейдем к производящему функционалу связанных функций Грина

$$Z[J]=\frac{1}{i\Omega}\ln W[J].$$

Эффективный потенциал находится по формуле

$$V_{eff}[\varphi_0]=J\varphi_0-Z[\varphi_0],$$

в которой J рассматривается как функция φ_0, задаваемая неявным образом с помощью соотношения $\varphi_0=\partial Z[J]/\partial J$. Рассмотрим в качестве примера случай квантово-механического АО, когда $n=1$, $m^2=0$, $J=0$ при $k=2$, 3, 4. Тогда выражение для производящего потенциала мы можем записать в виде

$$W^{(1)}[0]=\frac{\Omega}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dv\int_{-\infty}^{\infty}dCe^{i\Omega S(v,C)}[1+i\Omega\Delta S(v,C)],$$

где

$$S=Cv-C^k-{}^1/_2(M^2)^{1/2};$$

$$\Delta S=\frac{1}{4k}(M^2)^{1/2}-\lambda(2k-1)!!\left[-\frac{1}{2}(M^2)^{-1/2}\right]^k,$$

$$\frac{w_1}{w_0}=-i\lambda\Omega(2k-1)!!\left[-\frac{1}{2}(M^2)^{-1/2}\right]^k.$$

Метод оптимизации в данном случае состоит в выборе такого оптимального значения M^2, при котором ΔS будет минимально. Случай, когда $\Delta S=0$, будет иметь место при четных k. Тогда находим

$$(M^2)^{1/4}={}^1/_2[8k\lambda(2k-1)!]^{\frac{1}{k+1}}. \tag{4.5}$$

В результате для эффективного потенциала имеем

$$V_{eff}^{(1)}(\varphi_0)=E_0^{(1)}+o(\varphi_0^2),\qquad E_0^{(1)}=-S(v_0,C_0),$$

где v_0 и C_0 — стационарные точки функции $S(v,C)$:

$$\left.\frac{\partial S}{\partial C}\right|_{\substack{C=C_0\\ v=v_0}}=0;\qquad \left.\frac{\partial S}{\partial v}\right|_{\substack{C=C_0\\ v=v_0}}=0.$$

Тогда

$$E_0^{(1)}=\frac{k+1}{4k}(M^2)^{1/2},$$

где $(M^2)^{1/2}$ определяется из (4.5) и при

$$k=2\quad E_0^{(1)}=0{,}681\lambda^{1/3},$$

$$k=4\quad E_0^{(1)}=0{,}792\lambda^{1/5}.$$

Для $k=3$ оптимизация будет состоять в выборе такого вещественного положительного значения M^2, при котором $|\Delta S|=\min$. Обозначим $(M^2)^{1/2}=t$, тогда

$$\Delta S=\frac{t}{12}+\lambda\frac{15}{8}t^{-3}.$$

Из условия $\Delta S'=0$ находим $t_0=2{,}866\lambda^{1/4}$.

Далее возможны два пути. Можно, например, применить метод стационарной фазы для выражения $e^{i\Omega(S+\Delta S)}=e^{i\Omega\tilde{S}}$. Тогда

$$E_0^{(1)}=-\tilde{S}(v_0, C_0)=0{,}6396\lambda^{1/4}.$$

Другой способ состоит в том, что в силу малости ΔS выражение $[1+i\Omega\Delta S(v, C)]$ считаем предэкспонентой и метод стационарной фазы применяем только для $S(v, C)$ и записываем $[1+i\Omega\Delta S]=e^{i\Omega\Delta S}$ уже после применения указанного метода. В этом случае

$$E_0^{(1)}=-S-\Delta S=0{,}6396\lambda^{1/4}.$$

Таким образом, получаем тот же результат, что и в первом методе, что может служить критерием внутренней согласованности подхода.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе предложен непертурбативный метод вычисления функциональных интегралов, приводящий к ряду вариационной теории возмущений. При этом используются лишь гауссовы функциональные квадратуры и те типы диаграмм, которые возникают в стандартной теории возмущений.

В отличие от асимптотического ряда стандартной теории возмущений ряд ВТВ имеет конечную область сходимости. Кроме того, наличие свободных параметров позволяет влиять на скорость сходимости и тем самым получить для искомой величины наиболее оптимальную аппроксимацию. Важной чертой предлагаемого подхода является возможность построения в его рамках знакочередующихся сходящихся рядов (рядов типа Лейбница), которые позволяют выполнить двухсторонние оценки искомой величины, а наличие вариационных параметров позволяет максимально сузить эти оценки. Этот вопрос мы планируем подробно рассмотреть в последующих публикациях.

Процедура оптимального выбора вариационных параметров, содержащаяся в данном подходе, аналогична нахождению свободных параметров в стандартных вариационных методах. Однако существенным отличием нашего подхода от последних является присутствие с самого начала в его формализме процедуры вычисления поправок любого порядка. Это связано с тем, что мы имеем дело не с оценкой искомой величины в соответствии с вариационным принципом, а с представлением ее в виде ряда, на скорость сходимости которого мы влияем с помощью выбора свободных параметров. Таким образом, предлагаемый подход содержит принципиальную возможность вычисления поправок к основному вкладу и тем самым позволяет изучить вопрос устойчивости и надежности полученных результатов.

В данной работе мы рассмотрели φ^{2k}-ангармонический осциллятор, исследовав его на основе ВТВ в области сильной связи. Мы применили различные подходы для вычисления числовых характеристик осциллятора. Оказалось, что во всех рассмотренных случаях уже первый порядок нашей аппроксимации приводит к хорошему согласию с известными точными значениями. Так, например, для вакуумной энергии ВТВ позволяет получить формулу, хорошо описывающую $E_0(g)$ во всей области изменения константы связи.

Дальнейшей нашей целью является применение ВТВ для квантово-полевых моделей в пространствах большего числа измерений. Благоприятной предпосылкой для этого является использование универсального формализма континуального интеграла. Удобным также является рассмотренный здесь метод эффективного потенциала.

Авторы глубоко признательны В. Г. Кадышевскому, Д. И. Казакову, В. Н. Капшаю, Г. В. Ефимову, С. Н. Неделько, К. Робертсу и О. Ю. Шевченко за интерес к работе и полезное обсуждение полученных результатов.

Список литературы

[1] *Kasakov D. I., Shirkov D. V.* // Fortschr. Phys. 1980. V. 28. № 8/9. P. 465–499. *Zinn-Justin J.* // Phys. Repts. 1981. V. 70. № 1. P. 109–167. *Попов В. С., Елецкий В. Л., Турбинер А. В.* // ЖЭТФ. 1978. Т. 74. С. 445–456.

[2] *Lam C. S.* // Nuovo Cimento. 1966. V. 47A. P. 451–459. *Langer J. S.* // Ann. Phys. 1967. V. 41. P. 108–157. *Липатов Л. Н.* // ЖЭТФ. 1977. Т. 72. С. 411–427. *Brezin E., Le Guillou J. C., Zinn-Justin J.* // Phys. Rev. 1977. V. D15. № 6. P. 1544–1564. *Brezin E., Parisi B., Zinn-Justin J.* // Phys. Rev. 1977. V. D16. № 2. P. 408–412. *Collins J. S., Soper D. E.* // Ann. Phys. 1978. V. 112. № 1. P. 209–234. *Auberson G., Mennessier G., Mahoux G.* // Nuovo Cimento. 1978. V. 48A. P. 1–23.

[3] *Казаков Д. И., Тарасов О. В., Ширков Д. В.* // ТМФ. 1979. Т. 38. № 1. С. 15–25. *Parisi G.* // Phys. Lett. 1977. V. B69. № 3. P. 329–331.

[4] *Глимм Дж., Джаффе А.* Математические методы квантовой физики. М.: Мир, 1984.

[5] *Efimov G. V.* // Commun. Math. Phys. 1979. V. 65. P. 15–44. *Ефимов Г. В., Иванов М. А.* Препринт Р2-81-707. Дубна: ОИЯИ. 1981.

[6] *Cornwall J. M., Jackiw R., Tomboulis E.* // Phys. Rev. 1974. V. D10. № 8. P. 2428–2444. *Bardeen N. A., Moshe M.* // Phys. Rev. 1983. V. D28. P. 1372–1385.

[7] *Barnes T., Ghandour G. I.* // Phys. Rev. 1980. V. D22. № 4. P. 924–938. *Stevenson P. M.* // Phys. Rev. 1984. V. D30. № 8. P. 1712–1726; 1985. V. D32. № 6. P. 1389–1408. *Consoli M., Ciancitto A.* // Nucl. Phys. 1985. V. B254. P. 653–677.

[8] *Ritschel U.* // Phys. Lett. 1989. V. B227. № 2. P. 251–254. *Polley L., Ritschel U.* // Phys. Lett. 1989. V. B221. № 1. P. 44–48. *Funke M., Kaulfuss U., Kummel H.* // Phys. Rev. 1987. V. D35. № 2. P. 621–630.

[9] *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики. Т. 4. М.: Мир, 1982.

[10] *Halliday I. G., Suranyi P.* // Phys. Lett. 1979. V. 85B. P. 421–423; Phys. Rev. 1980. V. D21. № 6. P. 1529–1537. *Утеридзе А. Г.* // ЯФ. 1983. Е. 38. С. 798–802; Phys. Lett. 1984. V. 142B. P. 403–405.

[11] *Hioe F. T., Montroll E. W.* // J. Math. Phys. 1975. V. 16. № 9. P. 1945–1955. *Hioe F. T., Mac-Millen D., Montroll E. W.* // Phys. Reports. 1978. V. C43. № 7. P. 305–335. *Ader J. P., Bonnier B., Hontebeyrie M.* // Nucl. Phys. 1980. V. B170. P. 165–174.

[12] *Caswell W. E.* // Ann. Phys. 1979. V. 123. P. 153–184.

Объединенный институт ядерных исследований

Поступила в редакцию 28.VI.1991 г.

L. D. Korsun, A. N. Sissakian, I. L. Solovtsov

VARIATION PERTURBATION THEORY. φ^{2k}-OSCILLATOR

The variation perturbation theory is applied for study of the anharmonic φ^{2k}-oscillator in the strong coupling limit. Nonperturbative expressions for vacuum energy, the Green function and the effective potential are obtained.