Краткие сообщения ОИЯИ №3[49]-91 *JINR Rapid Communications No.3[49]-91*
УДК 530.14.61

НЕПЕРТУРБАТИВНЫЙ ЭФФЕКТИВНЫЙ ПОТЕНЦИАЛ ДЛЯ ϕ^{2k}-ОСЦИЛЛЯТОРА

Л.Д.Корсун[1], А.Н.Сисакян, И.Л.Соловцов[2]

Предлагается непертурбативный метод вычисления функциональных интегралов. В рамках этого подхода рассматривается построение непертурбативного эффективного потенциала для ϕ^{2k}-ангармонического осциллятора.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Nonperturbative Effective Potential for ϕ^{2k}-Oscillator

L.D.Korsun, A.N.Sissakian, I.L.Solovtsov

The nonperturbative method for calculating of the functional integrals is proposed. The construction of nonperturbative effective potential for ϕ^{2k}-anharmonic oscillator is considered in the framework of this approach.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Рассмотрим действительное самодействующее скалярное поле, описываемое действием

$$S[\phi] = \int dt[1/2(\partial\phi)^2 - 1/2\, m^2\phi^2 - V(\phi)], \tag{1}$$

где

$$V(\phi) = \lambda\phi^{2k}, \quad k = 2, 3, 4. \tag{2}$$

Производящий функционал связанных функций Грина имеет вид

$$Z[J] = (i\Omega)^{-1} \ln W[J],$$

[1] Гомельский государственный университет
[2] Гомельский политехнический институт

где

$$W[J] = \int D\phi \exp\{i(S(\phi) + \langle J\phi\rangle)\}$$
$$\langle J\phi\rangle = \int dt J(t)\phi(t). \qquad (3)$$

Эффективный потенциал находится по формуле

$$V_{eff}[\phi_0] = J\phi_0 - Z[\phi_0],$$

где источник J удовлетворяет уравнению:

$$\phi_0 = \partial Z[J]/\partial J.$$

Квазиклассический метод построения эффективного потенциала, связанный с разложением по числу петель /1/, как известно, нельзя рассматривать как существенный выход за рамки теории возмущений. К числу непертурбативных подходов относятся вариационные методы /2-7/. Широкое распространение находит в последнее время метод гауссова эффективного потенциала /3-7/. Вместе с тем вариационные подходы, как правило, сталкиваются с трудностью, связанной с использованием устойчивости основного вариационного вклада.

В этой работе мы вычислим эффективный потенциал, используя метод вариационной теории возмущений (ВТВ) /8/. Введем вариационный параметр с помощью соотношения a^k/Ω^{k-1} (где Ω — объем координатного пространства). Таким образом, поскольку эффективный потенциал получается из эффективного действия при постоянных конфигурациях поля, вариационный параметр a не будет зависеть от Ω. Тогда производящий функционал мы можем представить в виде

$$W[J] = \int D\phi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!}\left[\frac{a^k}{\Omega^{k-1}}\tilde{S}^k - S_1\right]^n \times$$
$$\exp\left(i\left(S_0 - m^2\tilde{S} - \frac{a^k}{\Omega^{k-1}}\tilde{S}^k + \langle J\phi\rangle\right)\right), \qquad (4)$$

С помощью фурье-преобразования можно добиться того, что в показателе экспоненты в (4) будут присутствовать только квадратичные по полям функционалы. В результате (4) примет вид:

$$W[J] = \frac{\Omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dv \int_{-\infty}^{\infty} dC \exp(i\Omega(vC - C^k)) \times$$

$$\times \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^{n-j}}{(n-j)!} \left(\frac{d}{d\epsilon}\right)^{n-j} w_j [J, M^2], \tag{5}$$

$$w_j [J, M^2] = \frac{(-i\lambda)^j}{j!} \left[\int dx \frac{\partial^{2k}}{\partial J^{2k}(x)} \right]^j \exp(-i/2 \langle J \Delta J \rangle), \tag{6}$$

$$\Delta(p) = (p^2 - M^2 + i0)^{-1},$$

$$M^2 = m^2 + \epsilon^{1/k} a v. \tag{7}$$

В первом порядке ВТВ находим

$$W^{(1)}[J] = \frac{\Omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dv \int_{-\infty}^{\infty} dC \exp(i\Omega S(v, C)[1 + i\Omega \Delta S(v, C)], \tag{8}$$

где

$$S = Cv - C^k - 1/2(M^2)^{1/2} \tag{9}$$

$$\Delta S = \frac{1}{4k}(M^2)^{1/2} - \lambda(2k-1)!! [-1/2(M^2)^{-1/2}]^k. \tag{10}$$

Оптимальное значение параметра M^2 соответствует минимуму модуля ΔS:

$$M^2 : \min|\Delta S|.$$

В случае, когда k — четные, условие оптимизации выглядит следующим образом: $\Delta S = 0$, и, поскольку

$$V_{eff}^{(1)}(\phi_0) = E_0^{(1)} + O(\phi_0^2),$$

энергия основного уровня определяется из выражения:

$$E_0^{(1)} = -S(v_0, C_0), \tag{11}$$

где параметры v_0 и C_0 являются точками стационарности функции

$S(v, C)$:

$$\frac{\partial S}{\partial C}\Big|_{\substack{C=C_0 \\ v=v_0}} = 0, \qquad \frac{\partial S}{\partial v}\Big|_{\substack{C=C_0 \\ v=v_0}} = 0.$$

Тогда для четных k находим

$$(M^2)^{1/2} = 1/2[\,8k\lambda(2k-1)\,!!\,]^{1/(k+1)} \tag{12}$$

$$E_0^{(1)} = \frac{k+1}{4k}(M^2)^{1/2}. \tag{13}$$

Полученный результат можем сравнить с численным [9]:

$k = 2$: $\quad E_0^{(1)} = 0{,}681\,\lambda^{1/3}, \quad E_0^{\text{числ.}} = 0{,}668\,\lambda^{1/3},$

$k = 4$: $\quad E_0^{(1)} = 0{,}792\,\lambda^{1/5}, \quad E_0^{\text{числ.}} = 0{,}745\,\lambda^{1/5}.$

Для случая $k = 3$ оптимизация будет состоять в выборе такого вещественного положительного значения M^2, при котором $|\Delta S| = \min$. Поскольку

$$\Delta S = \frac{(M^2)^{1/2}}{12} + \lambda\,\frac{15}{8}(M^2)^{-3/2},$$

то параметр $(M^2)^{1/2}$ получаем равным $2{,}866\,\lambda^{1/4}$.

Далее возможны два пути: во-первых, можно применить метод стационарной фазы для выражения

$$\exp(i\Omega(S+\Delta S)) = \exp(i\Omega\tilde{S}).$$

Тогда

$$E_0^{(1)} = -\tilde{S}(v_0, C_0) = 0{,}6396\,\lambda^{1/4}.$$

Другой способ состоит в том, что в силу малости ΔS выражение $[1 + i\Omega\,\Delta S(v, C)]$ мы считаем предэкспонентой и вышеуказанный метод применяем для $S(v, C)$ и уже потом записываем $[1 + i\Omega\Delta S\,(v, C)] = \exp(i\Omega\Delta S)$. В этом случае

$$E_0^{(1)} = -S - \Delta S = 0{,}6396\,\lambda^{1/4},$$

тогда как

$$E_0^{\text{числ.}} = 0{,}680\,\lambda^{1/4}.$$

Таким образом, мы получаем тот же результат, что и в первом случае, что может служить критерием внутренней согласованности данного подхода.

Авторы выражают благодарность В.Г.Кадышевскому, Д.И.Казакову, В.Н.Капшаю, Г.В.Ефимову, С.Н.Недельо, К.Робертсу и О.Ю.Шевченко за интерес к работе и полезное обсуждение полученных результатов.

Литература

1. Coleman S., Weinberg S. — Phys.Rev., 1973, v.D7, No.6, p.1886.
2. Efimov G.V. — Commun.Math.Phys., 1979, v.65, No.1, p.15;
   Ефимов Г.В., Иванов М.А. — Препринт ОИЯИ Р2-81-707, Дубна, 1981;
   Ефимов Г.В. — Проблемы квантовой теории нелокальных взаимодействий. М.: Наука, 1985.
3. Barnes T., Ghandour T. — Phys.Rev., 1980, v.D22, No.4, p.924.
4. Stevenson P.M. — Phys.Rev., 1984, v.D30, No.8, p.1712;
   Phys.Rev., 1985, v.D32, No.6, p.1389;
   Hajj G.A., Stevenson P.M. — Phys.Rev., 1988, v.D37, No.2, p.413;
   Stevenson P.M., Alles B., Tarrach R. — Phys.Rev., 1987, v.D35, No.8, p.2407;
   Stevenson P.M. — Z.Phys.C — Part.and Fields, 1987, v.35, No.4, p.467;
   Munoz-Tapia R., Tarrach R. — Phys.Lett., 1991, v.256B, No.1, p.50.
5. Bollini G.C., Giambiagi J.J. — Nuovo Cim., 1986, v.93A, No.2, p.113.
6. Ritschel U. — Z.Phys.C — Part.and Fields, 1990, v.47, No.3, p.457;
   Ritschel U. — Phys.Lett., 1989, v.227B, No.2, p.251.
7. Thoma M.H. — Z.Phys.C — Part.and Fields, 1989, v.44, No.2, p.343.
8. Сисакян А.Н., Соловцов И.Л. — В сб.: Краткие сообщения ОИЯИ, № 1 (47)-91, Дубна, 1991, с.10.
9. Hioe F.T., Montroll E.W. — Journ.Math.Phys., 1975, v.16, No.9, p.1945; Hioe F.T., MacMillen D., Montroll E.W. — Phys.Rep., 1978, v.43, No.7, p.305;
   Schiff L.I. — Phys.Rev., 1953, v.92, p.766.

Рукопись поступила 6 июня 1991 года.