Краткие сообщения ОИЯИ №3[49]-91 *JINR Rapid Communications No.3[49]-91*
УДК 530.14.61

ЭНЕРГИЯ ОСНОВНОГО УРОВНЯ ϕ^{2k}-АНГАРМОНИЧЕСКОГО ОСЦИЛЛЯТОРА В ПРЕДЕЛЕ СИЛЬНОЙ СВЯЗИ

Л.Д.Корсун[1], А.Н.Сисакян, И.Л.Соловцов[2]

Разработан метод изучения ϕ^{2k}-осциллятора вне рамок теории возмущений. Предлагаемый подход к вычислению функциональных интегралов использует лишь гауссовы функциональные квадратуры. В работе представлены результаты применения различных процедур оптимизации.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

The Ground State Energy of the ϕ^{2k}-Anharmonic Oscillator in the Limit of Strong Coupling

L.D.Korsun, A.N.Sissakian, I.L.Solovtsov

The method for study of the ϕ^{2k}-oscillator is developed in the framework of the perturbation theory. Proposed approach for calculating of the functional integrals uses only Gaussian functional quadratures. The results of using of the various optimization procedure are presented in the paper.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

В настоящее время пертурбативные методы получения результатов в квантовой теории поля являются основными. Наряду с этим, все чаще возникает вопрос о выходе за рамки теории возмущений и о необходимости разработки непертурбативного подхода. В этом направлении имеется значительный поток работ. Широко применяется метод суммирования рядов теории возмущений с использованием асимптотических выражений для дальних членов ряда /1/. Задача суммирования асимптотического ряда теории возмущений имеет, вообще говоря, функциональный произвол, который можно устранить только с помощью исполь-

[1] Гомельский государственный университет
[2] Гомельский политехнический институт

зования дополнительной информации о сумме ряда [2], однако для большинства теоретико-полевых моделей такие свойства суммы неизвестны.

В данной работе мы используем предложенный в [3] новый непертурбативный метод и применяем его для вычисления энергии основного уровня ангармонического осциллятора (АО). Мы представляем искомую величину в виде ряда, на сходимость которого можно влиять при помощи специального выбора вариационных параметров. Ряды, возникающие в данном подходе, мы будем называть рядами вариационной теории возмущений (ВТВ).

Рассмотрим скалярную модель в евклидовом пространстве с действием:

$$S = S_0 + \frac{1}{2} m^2 \tilde{S} + g S_1, \tag{1}$$

где

$$S_0 = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dt \phi^2, \quad \tilde{S} = \int_{-\infty}^{\infty} dt \phi^2, \quad S_1 = \int_{-\infty}^{\infty} dt \phi^{2k}. \tag{2}$$

Предел сильной связи соответствует $g/m^{k+1} \Rightarrow \infty$. Перейдя к безразмерным переменным

$$\phi \Rightarrow g^{-\frac{1}{2(k+1)}} \phi, \quad t \Rightarrow g^{-\frac{1}{k+1}} t, \tag{3}$$

будем рассматривать величину dE_0/dg, которая выражается через $2k$-точечную евклидову функцию Грина следующим образом:

$$\frac{dE_0}{dg} = g^{-\frac{k}{k+1}} G_{2k}(0), \tag{4}$$

где

$$G_{2k}(0) = N^{-1} \int D\phi \phi^{2k}(0) \exp[-(S_0 + \frac{\omega^2}{2} \tilde{S} + S_1)], \tag{5}$$

$$N = \int D\phi \exp[-(S_0 + \frac{\omega^2}{2} \tilde{S} + S_1)], \tag{6}$$

$$\omega^2 = m^2 g^{-\frac{2}{k+1}}. \tag{7}$$

Введем для построения нового разложения вспомогательный функционал

$$A = \theta S_0 + \frac{\kappa}{2}\tilde{S} \tag{8}$$

с произвольными параметрами κ и θ. И перепишем действие (1) следующим образом:*

$$S = S'_0 + S'_1 ,$$

где

$$S'_0 = S_0 + \frac{\omega^2}{2}\tilde{S} + A^k ; \qquad S'_1 = S_1 - A^k .$$

Выполним разложение по степеням нового действия взаимодействия S'_1. Тогда ряд ВТВ запишется в виде

$$G_{2k}(0) = N^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int D\phi\,\phi^{2k}(0)\,[-S'_1]^n \exp[-S'_0]. \tag{9}$$

Таким образом, мы получили отличное от ряда теории возмущений разложение искомой величины — так называемый ряд вариационной теории возмущений. Далее, поскольку точное значение функции Грина G_{2k} не будет зависеть от параметров θ и κ, мы можем применить то или иное условие оптимизации. Например, потребуем минимальности вклада дальних членов ряда (9) и определим соответствующие данному условию оптимальные значения параметров θ и κ. Для этого найдем асимптотику функционального интеграла

$$\int d\phi\,[A^k - S_1]^n \exp[-(S_0 + A^k)] \tag{10}$$

при больших n. Производя замену $\phi \to n^{1/2k}\phi$ и используя метод функционального перевала, определим перевальную функцию ϕ_0, которая дает основной вклад в функциональный интеграл (10) /5/ :

$$\phi_0(t) = \pm\left[\sqrt{ka/b}\,(\mathrm{ch}[(k-1)\sqrt{a}\,(t-t_0)])^{-1}\right]^{\frac{1}{k-1}} , \tag{11}$$

---

*Подобный прием применялся в работах /4/.

где

$$a = \frac{\kappa}{\theta}; \quad b = \frac{2}{\theta(1 - D(\phi_0))\, A^{k-1}(\phi_0)}; \quad D(\phi_0) = A^k(\phi_0) - S_1(\phi_0),$$

а параметр t_0 отражает трансляционную инвариантность теории. Вклад дальних членов ряда (9) будет минимальным, когда $D(\phi_0) = 0$. Это требование приводит к взаимосвязи между параметрами θ и κ:

$$\kappa_{\text{опт}}[\theta] = \left[\frac{2^{k-2}}{k}\left(\frac{(k^2-1)\,\Gamma(2/(k-1))}{k\sqrt{\theta}\,\Gamma^2(1/(k-1))}\right)^{k-1}\right]^{\frac{2}{k+1}}. \tag{12}$$

Отметим, что в пределе $\lim_{k\to\infty}\kappa(\theta) = 1/\theta$. Оставшийся параметр θ будем определять, исходя из конечного числа членов ряда ВТВ.

Интеграл, содержащийся в (9), можно привести к интегралу гауссова типа, используя фурье-преобразование:

$$\exp(-A^k) = \int_{-\infty}^{\infty} du\,F(u)\,\exp(-iuA), \tag{13}$$

оставив, таким образом, в показателе экспоненты в (9) только квадратичные по полям слагаемые. Воспользуемся тем, что любую степень функционала $A^k[\phi]$ можно набрать, дифференцируя выражение $\exp(\alpha A^k)$ по параметру α нужное число раз, полагая затем $\alpha = 0$. Имея в виду промежуточную размерную регуляризацию и выполняя замену $\phi \to f\phi$, где $f^2 = 1 + iu\theta\,(1-\alpha)^{1/k}$, имеем

$$G_{2k}(0) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{n}\frac{1}{(n-j)!}\left(\frac{d}{d\alpha}\right)^{n-j} \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} du\,F(u)\,\frac{g_j(Z^2)}{[1 + iu\theta(1-\alpha)^{1/k}]^{kj+k}}\Bigg|_{\alpha=0}, \tag{14}$$

где

$$Z^2 = \frac{\omega^2 + iu\kappa\,(1-\alpha)^{1/k}}{1 + iu\theta(1-\alpha)^{1/k}},$$

$$g_j(Z^2) = \frac{(-1)^j}{j!} \int D\phi\, \phi^{2k}(0)\, S_1^j \exp[-(S_0 + \frac{Z^2}{2}\tilde{S})]. \qquad (15)$$

Функции $g_j(Z^2)$ есть не что иное, как обычные коэффициенты разложения $G_{2k}(0)$ в ряд стандартной теории возмущений, а следовательно, для N-го порядка ВТВ потребуются лишь те типы фейнмановских графов, которые определяют тот же порядок обычной теории возмущений. Связь между функциями $g_j(Z^2)$ и коэффициентами A_n ряда теории возмущений:

$$E_0(g) = m/2 + m \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left(\frac{g}{m^{k+1}}\right)^n \qquad (16)$$

имеет вид

$$g_j(Z^2) = \frac{(1+j)A_{1+j}}{Z^{(k+1)j+k}}. \qquad (17)$$

Полагая $\kappa = \kappa_{\text{опт}}$ и $\omega^2 = 0$ (предел сильной связи), получим энергию основного уровня АО в N-м порядке нашей аппроксимации:

$$E_0^{(N)} = (k+1)\, g^{\frac{1}{k+1}} \sum_{n=0}^{N} \sum_{j=0}^{n} \frac{(1+j)A_{1+j}}{(n-j)!} \left(\frac{1}{\kappa}\right)^{\frac{k(j+1)+j}{2}} \times$$

$$\times \left[\Gamma\left(\frac{k(j+1)-j}{2}\right) \Gamma\left(\frac{k(j+1)+j}{2}\right)\right]^{-1} R_{n,j}(\theta), \qquad (18)$$

где

$$R_{n,y}(\theta) = \int_0^{\infty} dx\, e^{-x} x^{\frac{k(j+1)-j}{2}-1} \times$$

$$\int_0^{\infty} dy\, y^{\frac{k(j+1)+j}{2}-1} (\theta x + y)^{k(n-j)} \exp(-(\theta x + y)^k). \qquad (19)$$

Оставшийся параметр θ можно фиксировать следующим образом.

Во-первых, его можно определить из условия минимальности модуля суммы последних членов ряда ВТВ. Во-вторых, поскольку точное значение $Z[g]$ не зависит от параметра θ, процедура оптимизации может выглядеть как $\partial E_0^{(N)}/\partial\theta = 0$. Эти способы дают близкие друг к другу значения.

В табл.1 приведены значения $E_0^{(1)}$ в первом порядке нашей аппроксимации для различных k, а также соответствующие им параметры θ. Точные значения E_0 взяты из работ [5].

Для большего числа членов нашей аппроксимации можно получить более точные результаты, используя ту или иную процедуру оптимизации. Так, например:

$$k = 2 \quad E_0^{(3)} = 0{,}6689\, g^{1/3}$$

$$k = 3 \quad E_0^{(3)} = 0{,}6915\, g^{1/4}$$

$$k = 4 \quad E_0^{(3)} = 0{,}7081\, g^{1/5}.$$

Наряду с доминирующим в пределе сильной связи вкладом в E_0 метод ВТВ позволяет определить также поправки к основному вкладу. Это достигается за счет разложения по степеням ω^2. В результате для ϕ^4-осциллятора ($k = 2$) в первом порядке ВТВ находим ($m^2 = 1$):

$$E_0^{(1)} = g^{1/3}\,[0{,}663 + g^{-2/3}\,0{,}140727 - g^{-4/3}\,0{,}00848 + \ldots],$$

в то время как точное выражение имеет вид [6]:

$$E_0^{exact} = g^{1/3}\,[0{,}668 + g^{-2/3}\,0{,}14367 - g^{-4/3}\,0{,}0088 + \ldots].$$

Таблица 1. Энергия основного уровня АО в первом порядке ВТВ в пределе сильной связи

k	θ	$E_0^{точн.}(g)$	$E_0^{(1)}(g)$
2	0,027926	$0{,}668g^{1/3}$	$0{,}663g^{1/3}$
3	0,038009	$0{,}680g^{1/4}$	$0{,}698g^{1/4}$
4	0,040149	$0{,}704g^{1/5}$	$0{,}709g^{1/5}$

Таблица 2. Энергия основного уровня АО $E_0^{(5)}$ $(k = 2)$ при различных значениях g $(m^2 = 1)$

g	$E_0^{точн}$	$E_0^{(5)}$	$\theta_{опт}$	Ошибка (%)
0,1	0,559	0,56407	0,0255	0,906
0,5	0,696	0,69793	0,0246	0,277
1,000	0,804	0,80557	0,0241	0,220
2,000	0,952	0,95334	0,0218	0,141
50,00	2,500	2,50322	0,0215	0,141
200	3,931	3,93627	0,0215	0,134
1000	6,694	6,70317	0,0215	0,137
8000	13,367	13,3860	0,0229	0,142
20000	18,137	18,1631	0,0229	0,144

В заключение отметим, что в табл.2 приведены результаты вычисления $E_0^{(5)}$ $(k = 2)$ для любых значений константы связи g $(m^2 = 1)$. Таким образом, уже низшие порядки нашей аппроксимации обеспечивают хорошую точность расчетов.

Авторы выражают благодарность В.Г.Кадышевскому, Д.И.Казакову, В.Н.Капшаю, Г.В.Ефимову, С.Н.Недельэко, К.Робертсу и О.Ю.Шевченко за интерес к работе и полезное обсуждение полученных результатов.

Литература

1. Kasakov D.I., Shirkov D.V. — Fortschr.Phys., 1980, v.28, p.465; Zinn-Justin J. — Phys.Reports., 1981, v.70, p.109.
2. Parisi G. — Phys.Lett., 1977, v.69B, p.329; Reed M., Simon B. — Methods of Modern Mathematical Physics. IV: Analysis of Operators. Academic Press. New York, San Francisco, London, 1978.
3. Сисакян А.Н., Соловцов И.Л. — В сб.: Краткие сообщения ОИЯИ, № 1 (47) -91, Дубна: ОИЯИ, 1991, с.10.
4. Halliday I.G., Suranyi P. — Phys.Lett., 1979, v.85B, p.241; Phys.Rev., 1980, v.D21, p.1529; Ushveridze A.G. — Phys.Lett., 1984, v.B142, p.403.

5. Hioe T.F., Montroll E.W. — J.Math.Phys., 1979, v.16, p.1945;
Hioe F.T., Montroll E.W., MacMillen D. — Phys.Reports., 1978, v.C43, p.305;
Ader J.P., Bonnier B., Hontebeyrie M. — Nucl.Phys., 1980, v.B170, p.165.
6. Brezin E., LeGuillou J.C., Zinn-Justin J. — Phys.Rev., 1977, v.D15, p. 1544.

Рукопись поступила 6 июня 1991 года.