

© 1990 г.

И. В. Луценко, Г. С. Погосян, А. Н. Сисакян,  
В. М. Тер-Антонян

## АТОМ ВОДОРОДА В РОЛИ ИНДИКАТОРА СКРЫТОЙ СИММЕТРИИ КОЛЬЦЕОБРАЗНОГО ПОТЕНЦИАЛА

Высказана идея об аналогии между кольцеобразным и кулоновским потенциалами. Показано, что разложение параболического базиса по сферическим в задаче о кольцеобразном потенциале определяется коэффициентами Клебша – Гордана группы  $SU(2)$ , продолженными в области произвольных вещественных индексов. Найдена связь этих коэффициентов с функциями  $zF_2$ , и установлено свойство их симметрии при замене параболических квантовых чисел.

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Сравнительно недавно вышли две статьи, посвященные проблеме скрытой симметрии кольцеобразного потенциала [1, 2]. В общем случае кольцеобразный потенциал в кулоновских единицах записывается в виде

$$(1.1) \quad V(r, \theta) = -\frac{\alpha}{r} + \frac{\beta}{r^2 \sin^2 \theta},$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  – положительные константы, берущиеся из опыта,  $r$  и  $\theta$  – сферические координаты, причем под  $\theta$  понимается полярный угол. При специальной параметризации констант  $\alpha$  и  $\beta$  (1.1) переходит в потенциал Хартмана, досконально изученный в работах [3–5]. Очевидно, при  $\alpha=1$ ,  $\beta=0$  из (1.1) получается кулоновское поле.

В силу аксиальной симметрии потенциала (1.1) вместе с энергией измеримо магнитное квантовое число  $m$ . Дискретный спектр задачи описывается формулой [3]

$$(1.2) \quad E = -\alpha^2 / 2N^2,$$

здесь  $N = N_0 + M$ ,  $N_0$  пробегает лишь целые положительные значения,  $M = \sqrt{m^2 + 2\beta}$  – имеется в виду арифметический корень.

Объясним наш интерес к столь хорошо изученной задаче. Рассмотрим слагаемое  $\delta V = \beta r^{-2} \sin^{-2} \theta$  в потенциале  $V(r, \theta)$  как добавку к кулоновскому полю  $V_c = -\alpha r^{-1}$ . Казалось бы, эта нарушающая геометрическую симметрию кулоновского поля добавка должна разрушить случайное вырождение. На самом же деле спектр остается вырожденным – понижается лишь кратность его вырождения [1]. Об этом говорит хотя бы тот факт, что переменные в уравнении Шредингера с потенциалом (1.1) разделяются (как и для атома водорода) в сферических и в параболических координатах. Если считать, что за указанное вырождение ответственна скры-

тая симметрия, то нужно признать, что ее наличие само по себе весьма уникально — ведь потенциал (1.1) всего лишь аксиально-симметричен.

Группа скрытой симметрии кольцеобразного потенциала до сих пор еще не открыта. Не решен этот важный вопрос и в нашей статье. И все же полученный нами здесь результат, помимо своей прикладной ценности — хорошая техника вычисления матричных элементов — может оказаться полезным и для будущей теории скрытой симметрии кольцеобразного потенциала. Поясним сказанное. В случае атома водорода одним из сигналов, свидетельствующих о скрытой симметрии, служит факт разделения переменных, о котором говорилось выше. На этом языке тип скрытой симметрии определяется явным видом, а точнее математической структурой коэффициентов разложения параболического базиса по сферическому [6—8]. С позиции такой идеологии вполне естественно считать, что математическая структура коэффициентов аналогичного разложения для кольцеобразного потенциала может также принести конкретную пользу. Именно исследованная в настоящей статье задача о разложении параболического базиса кольцеобразного потенциала по сферическому представляется нам весьма актуальной и своевременной.

## 2. БАЗИСЫ

Определим сферические и параболические координаты обычным образом [9]:

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \varphi, & y &= r \sin \theta \sin \varphi, & z &= r \cos \theta, \\ x &= \sqrt{\mu\nu} \cos \varphi, & y &= \sqrt{\mu\nu} \sin \varphi, & z &= (\mu - \nu)/2. \end{aligned}$$

Тогда для сферического и параболического базисов кольцеобразного потенциала, следуя работам [1, 3], имеем

$$(2.1) \quad \Psi_{n_r t m}(r, \theta, \varphi) = R_{n_r t}(r) Z_{t m}(\cos \theta) e^{i m \varphi} / \sqrt{2\pi},$$

$$(2.2) \quad \Phi_{n_1 n_2 m}(\mu, \nu, \varphi) = \frac{\sqrt{2\alpha^3}}{N^2} H_{n_1 m} \left( \frac{\alpha\mu}{N} \right) H_{n_2 m} \left( \frac{\alpha\nu}{N} \right) \frac{e^{i m \varphi}}{\sqrt{2\pi}}.$$

Квантовые числа  $N$  и  $M$  были определены выше. Числа  $n_r, t, n_1, n_2$  являются целыми и положительными. Выполняется условие  $N_0 = n_r + t + 1 = n_1 + n_2 + 1$ . Дальнейшие обозначения таковы:

$$(2.3) \quad Z_{t m}(\cos \theta) = 2^M \Gamma(M + 1/2) \sqrt{\frac{t!(t + M + 1/2)}{\pi \Gamma(t + 2M + 1)}} \times \\ \times (1 - \cos^2 \theta)^{M/2} C_t^{M+1/2}(\cos \theta),$$

$$(2.4) \quad H_{p m}(q) = \sqrt{\frac{\Gamma(p + M + 1)}{p!} \frac{e^{-q/2} q^{M/2}}{\Gamma(M + 1)}} {}_1F_1(-p; M + 1; q),$$

$$(2.5) \quad R_{n_r t}(r) = \frac{2}{N^2} \sqrt{\frac{\Gamma(N + \lambda + 1)}{n_r!} \frac{\alpha^{\lambda/2}}{\Gamma(2\lambda + 2)}} e^{-\alpha r/N} \times \\ \times \left( \frac{2\alpha r}{N} \right)^{\lambda} {}_1F_1 \left( -n_r; 2\lambda + 2; \frac{2\alpha r}{N} \right),$$

где  $\lambda = t + M$ , а  $C_N^q(x)$  — полиномы Гегенбауэра, для которых ниже исполь-

зуются следующие два представления [10]:

$$(2.6a) \quad C_n^q(x) = \frac{(-1)^n \Gamma(2q+n) \Gamma(q+1/2)}{\Gamma(2q) \Gamma(q+n+1/2) 2^n n!} (1-x^2)^{-q+1/2} \frac{d^n}{dx^n} (1-x^2)^{n+q-1/2},$$

$$(2.6b) \quad C_n^q(x) = \frac{\Gamma(2q+n)}{\Gamma(2q) n!} {}_2F_1\left(-n, n+2q; q + \frac{1}{2}; \frac{1-x}{2}\right).$$

Предполагается, что  $n$  целое, а  $q$  вещественное. Каждому уровню энергии (1.2) соответствуют  $N_0$  волновых функций типа (2.1) и (2.2). Поэтому разложение параболического базиса кольцеобразного потенциала по сферическому можем записать в виде

$$(2.7) \quad \Phi_{n_1 n_2 m}(\mu, \nu, \varphi) = \sum_{l=0}^{n_1+n_2} W_{n_1 n_2}^{lM} \Psi_{n_1, lM}(r, \theta, \varphi).$$

Мы должны вычислить коэффициенты  $W$ .

### 3. АНАЛОГИЯ

Легко убедиться, что между волновыми функциями атома водорода и кольцеобразного потенциала имеется взаимно однозначное соответствие, В самом деле, сравнение формулы (2.6б) с формулой [10]

$$(3.1) \quad P_s^\nu(x) = \frac{\Gamma(s+\nu+1)}{\Gamma(s-\nu+1)} \frac{(1-x^2)^{\nu/2}}{(-2)^\nu} {}_2F_1\left(\nu-s, \nu+s+1; \nu+1; \frac{1-x}{2}\right),$$

обобщающей функции Лежандра на случай нецелых индексов (см. [10]), убеждает, что функция  $Z_{lM}(\cos \theta)$  выражается через присоединенные полиномы Лежандра

$$(3.2) \quad Z_{lM}(\cos \theta) = (-1)^M \sqrt{\frac{l!(2l+M+1)}{2\Gamma(l+2M+1)}} P_{l+M}^M(\cos \theta).$$

Теперь видно, что подстановка

$$(3.3) \quad z \leftrightarrow \alpha, |m| \leftrightarrow M = \sqrt{m^2 + 2\beta}, l \leftrightarrow \lambda = l + M$$

переводит сферический и параболический базисы водородоподобного атома (см., например, [11]) в сферический и параболический базисы кольцеобразного потенциала и наоборот. При этом квантовые числа  $n_1, n_2, n_r$  остаются неизменными. Сказанное нарушается лишь в части, связанной с собственной функцией  $z$ -проекции орбитального момента, однако для разложения (2.7) это не существенно.

Рецепт (3.3) имеет эвристическую ценность. Действительно, для атома водорода разложение параболического базиса по сферическому имеет вид [6-8]

$$(3.4) \quad \Phi_{n_1 n_2 m}^c(\mu, \nu, \varphi) = \sum_{l=|m|}^{n_1+n_2} e^{iq_l} C_{j_1 m_1 j_2 m_2}^{lM} \Psi_{n_1, lM}^c(r, \theta, \varphi).$$

Здесь  $C_{j_1 m_1 j_2 m_2}^{lM}$  — коэффициенты Клебша — Гордана группы  $SU(2)$ , а индексы  $j_1, m_1, j_2, m_2$  выражаются через квантовые числа  $n_1, n_2, m$  следую-

щим образом:

$$(3.5) \quad j_1=j_2 = \frac{n_1+n_2+|m|}{2}, \quad m_1 = \frac{|m|+n_1-n_2}{2}, \quad m_2 = \frac{|m|+n_2-n_1}{2}.$$

Фазовый фактор  $q_l$  определяется фазовыми множителями перед волновыми функциями. Поэтому мы его не фиксируем.

Из (3.3)–(3.5) следует, что разложение (2.7) должно иметь вид

$$(3.6) \quad \Phi_{n_1 n_2 m}(\mu, \nu, \varphi) = \sum_{t=0}^{n_1+n_2} e^{iq_t} C_{J_1 M_1 J_2 M_2}^{\lambda M} \Psi_{n_r t m}(r, \theta, \varphi),$$

где приняты обозначения

$$(3.7) \quad J_1=J_2 = \frac{n_1+n_2+M}{2}, \quad M_1 = \frac{M+n_1-n_2}{2}, \quad M_2 = \frac{M+n_2-n_1}{2}.$$

Мы видим, что замеченная выше аналогия предсказывает вид коэффициентов  $W$ . Согласно (3.6) и (3.7) с точностью до фазового множителя коэффициенты разложения параболического базиса кольцеобразного потенциала по сферическому базису совпадают с коэффициентами Клебша – Гордана группы  $SU(2)$ , продолженными по своим индексам в область произвольных вещественных чисел.

#### 4. МЕТОД АСИМПТОТИК

Схема предыдущих рассуждений кажется вполне убедительной. И все же мы сочли разумным дать ей строгое математическое обоснование. Это позволит нам получить формулы (5.1) и (6.2), из которых ясно, каким образом вычислить коэффициенты  $W$  при конкретных значениях входящих в них индексов.

Обратимся к методу асимптотик [8, 12, 13], а именно: а) перейдем в функции (2.2) от параболических координат к сферическим  $\mu=r(1+\cos\theta)$ ,  $\nu=r(1-\cos\theta)$ ; б) устремим  $r \rightarrow \infty$  и заменим все вырожденные гипергеометрические полиномы их асимптотиками

$${}_1F_1(-n; k; x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n \Gamma(k) x^n}{\Gamma(n+k)};$$

в) воспользуемся тем, что функции  $Z_{lM}$  ортогональны, т. е.

$$\int_{-1}^1 Z_{lM}(x) Z_{l'M}(x) dx = \delta_{ll'}.$$

После этого можно показать, что справедливо интегральное представление

$$(4.1) \quad W_{n_1 n_2}^{lM} = \frac{(-1)^l \mathcal{P}_{n_1 n_2}^{lM}}{2^{n_1+n_2+M+1/2}} \sqrt{\frac{n_r! \Gamma(n_r+2l+2M+2)}{n_1! n_2! \Gamma(n_1+M+1) \Gamma(n_2+M+1)}},$$

$$(4.2) \quad \mathcal{P}_{n_1 n_2}^{lM} = \int_{-1}^1 (1+x)^{n_1+M/2} (1-x)^{n_2+M/2} Z_{lM}(x) dx.$$

Отсюда легко вывести формулу (3.6). Воспользуемся для функций Гегенбауэра, входящих в определение функции  $Z_{lM}$ , формулой Родрига (2.6а).

Тогда из (4.1) и известной формулы для коэффициентов Клебша — Гордана [14]

$$C_{\alpha\alpha, \beta\beta}^{c\gamma} = \frac{(-1)^{a-c+\beta} \Delta}{2^{a+b+c+1}} \int_{-1}^1 (1+x)^{a-\alpha} (1-x)^{b-\beta} \frac{d^{c-\gamma}}{dx^{c-\gamma}} \times \\ \times \{ (1-x)^{b+c-a} (1+x)^{a+c-b} \} dx, \\ \Delta = \left\{ \frac{(2c+1) \Gamma(c+\gamma+1) \Gamma(a+b-c+1) \Gamma(a+b+c+2)}{\Gamma(a+\alpha+1) \Gamma(a-\alpha+1) \Gamma(b+\beta+1) \Gamma(b-\beta+1) \Gamma(b+c-a+1)} \right\}^{1/2} \times \\ \times (\Gamma(a+c-b+1) \Gamma(c-\gamma+1))^{-1/2}$$

переходим к результату (3.6) с  $Q_i = \pi(n_2 - t)$ , т. е. подтверждаем предсказание, сделанное на основе аналогии между кулоновским и кольцеобразным потенциалами. Итак,

$$(4.3) \quad W_{n_1 n_2}^{iM} = (-1)^{n_2 - t} C_{J_1 M_1, J_2 M_2}^{\lambda, M},$$

где  $J_1 M_1, J_2 M_2$  даются выражениями (3.7).

### 5. ЯВНЫЙ ВИД КОЭФФИЦИЕНТОВ

Формула (4.3) указывает на связь проблемы межбазисного разложения в кольцеобразном потенциале с проблемой сложения моментов. Однако для вычисления значений коэффициентов  $W$  при конкретных значениях индексов эта формула не приспособлена. В этом смысле она несет на себе скорее символическую, чем вычислительную, нагрузку.

Подставим в формулу (4.1) вместо функции  $Z_{iM}$ , а точнее, вместо входящего в нее полинома Гегенбауэра, выражение (2.6б), разложим гипергеометрическую функцию в ряд и проведем интегрирование. Результат таков:

$$(5.1) \quad W_{n_1 n_2}^{iM} = (-1)^t \sqrt{\frac{n_r! (2t+2M+1) \Gamma(n_1+M+1) \Gamma(n_r+2t+2M+2)}{t! n_1! n_2! \Gamma(n_2+M+1) \Gamma(t+2M+1)}} \times \\ \times \sum_{s=0}^t \frac{\Gamma(-t+s) \Gamma(t+2M+1+s) \Gamma(n_2+M+1+s)}{\Gamma(-t) \Gamma(M+1+s) \Gamma(n_1+n_2+2M+2+s) s!}.$$

Эта формула позволяет составить таблицы коэффициентов  $W$  (см. табл. 1, 2, 3). В каждой из таблиц сумма  $n_1+n_2=n_r+t$  фиксирована ( $n_1+n_2=1, 2, 3$  соответственно для табл. 1–3). Магнитное число  $m$ , а вместе с ним параметр  $M$  произвольны. Пользуясь табличными данными, можно получить следующие конкретные разложения для  $n_1+n_2=0, 1, 2$  и произвольных  $m$ :

$$\Phi_{00m} = \Psi_{00m}, \quad n_1+n_2=0; \quad \Phi_{10m} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Psi_{10m} + \frac{1}{\sqrt{2}} \Psi_{01m},$$

$$\Phi_{01m} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Psi_{10m} - \frac{1}{\sqrt{2}} \Psi_{01m}, \quad n_1+n_2=1;$$

$$\Phi_{11m} = \sqrt{\frac{M+1}{2M+3}} \Psi_{20m} - \sqrt{\frac{M+2}{2M+3}} \Psi_{02m},$$

Таблица 1

$n_1$	$i$	
	0	1
0	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$
1	$1/\sqrt{2}$	$-1/\sqrt{2}$

Таблица 2

$n_1$	$i$		
	0	1	2
0	$\sqrt{\frac{M+2}{2(2M+3)}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\sqrt{\frac{M+1}{2(2M+3)}}$
1	$\sqrt{\frac{M+1}{2M+3}}$	0	$\sqrt{\frac{M+2}{2M+3}}$
2	$\sqrt{\frac{M+2}{2(2M+3)}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\sqrt{\frac{M+1}{2(2M+3)}}$

Таблица 3

$n_1$	$i$			
	0	1	2	3
0	$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{M+3}{2M+3}}$	$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{3M+9}{2M+5}}$	$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{3M+3}{2M+3}}$	$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{M+1}{2M+5}}$
1	$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{3M+3}{2M+3}}$	$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{M+1}{2M+5}}$	$-\frac{1}{2} \sqrt{\frac{M+3}{2M+3}}$	$-\frac{1}{2} \sqrt{\frac{3M+9}{2M+5}}$
2	$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{3M+3}{2M+3}}$	$-\frac{1}{2} \sqrt{\frac{M+1}{2M+5}}$	$-\frac{1}{2} \sqrt{\frac{M+3}{2M+3}}$	$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{3M+9}{2M+5}}$
3	$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{M+3}{2M+3}}$	$-\frac{1}{2} \sqrt{\frac{3M+9}{2M+5}}$	$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{3M+3}{2M+3}}$	$-\frac{1}{2} \sqrt{\frac{M+1}{2M+5}}$

$$\Phi_{20m} = \sqrt{\frac{M+2}{2(2M+3)}} \Psi_{20m} - \frac{1}{\sqrt{2}} \Psi_{11m} + \sqrt{\frac{M+1}{2(2M+3)}} \Psi_{02m},$$

$$\Phi_{02m} = \sqrt{\frac{M+2}{2(2M+3)}} \Psi_{20m} + \frac{1}{\sqrt{2}} \Psi_{11m} + \sqrt{\frac{M+1}{2(2M+3)}} \Psi_{02m}, \quad n_1+n_2=2.$$

Каждое из этих разложений справедливо для серии с бесконечным числом уровней, т.к. при фиксированной сумме  $n_1+n_2$  магнитное число  $m$  произвольно.

Из формул (4.3) и (5.1) видно, что коэффициенты  $W$  не зависят от параметра  $\alpha$  в потенциале (1.1). Это связано с тем, что согласно (4.1)  $W$  выражается через угловую функцию  $Z_{tM}$ , зависящую только от параметра  $\beta$ .

## 6. СВЯЗЬ $W$ С ФУНКЦИЕЙ ${}_3F_2$

Выражение (5.1) может быть свернуто в обобщенную гипергеометрическую функцию  ${}_3F_2$ . По определению

$$(6.1) \quad {}_3F_2 \left\{ \begin{matrix} a, b, c \\ k, l \end{matrix} \middle| x \right\} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+s)\Gamma(b+s)\Gamma(c+s)\Gamma(k)\Gamma(l)}{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c)\Gamma(k+s)\Gamma(l+s)} \frac{x^s}{s!}$$

Сравнение формул (5.1) и (6.1) убеждает, что коэффициенты можно записать в виде

$$(6.2) \quad W_{n_1 n_2}^{tM} = A_{n_1 n_2}^{tM} {}_3F_2 \left\{ \begin{matrix} -t, t+2M+2, n_2+M+1 \\ n_1+n_2+2M+2, M+1 \end{matrix} \middle| 1 \right\},$$

где константа  $A_{n_1 n_2}^{tM}$  определяется следующим выражением:

$$A_{n_1 n_2}^{tM} = (-1)^t \frac{\sqrt{\Gamma(n_1+n_2-t+1)\Gamma(n_1+n_2+2M+t+2)}}{\Gamma(M+1)\Gamma(n_1+n_2+2M+2)} \times \\ \times \sqrt{\frac{(2t+2M+1)\Gamma(t+2M+1)\Gamma(n_1+M+1)\Gamma(n_2+M+1)}{t!n_1!n_2!}}$$

Формула (6.2) обобщает аналогичный результат в теории атома водорода [7] и переходит в него в пределе  $\beta \rightarrow 0$ , если заведомо согласованы фазовые множители в базисах.

## 7. СИММЕТРИЯ И ПРАВИЛО ОТБОРА

Справедливо свойство симметрии

$$(7.1) \quad W_{n_1 n_2}^{tM} = (-1)^t W_{n_2 n_1}^{tM}$$

из которого, в частности, следует, что  $W=0$ , если  $n_1=n_2$  и  $t$  нечетно. Это правило отбора, как и само свойство симметрии (7.1), доказывается следующим образом. Базис (2.2) не меняется, если наряду с заменой  $\mu \leftrightarrow \nu$  поменять индекс  $n_1 \leftrightarrow n_2$ . Замена  $\mu \leftrightarrow \nu$  эквивалентна замене  $\cos \theta \leftrightarrow -\cos \theta$ , при которой  $Z_{tM} \leftrightarrow (-1)^t Z_{tM}$ . Таким образом, чтобы базис  $\Phi_{n_1 n_2}$  не менялся, должно соблюдаться условие (7.1).

Формулы (4.3), (5.1) и (6.2) не содержат в себе симметрии (7.1) явным образом. Ее можно получить из (6.2), если учесть тождество [15]

$$(7.2) \quad {}_3F_2 \left\{ \begin{matrix} s, s', -N \\ a', 1-N-a \end{matrix} \middle| 1 \right\} = \frac{\Gamma(a)\Gamma(a+N+s)}{\Gamma(a+s)\Gamma(a+N)} {}_3F_2 \left\{ \begin{matrix} s, a'-s', -N \\ a', a+s \end{matrix} \middle| 1 \right\},$$

В самом деле, приняв  $s=t+2M+1$ ,  $s'=n_2+M+1$ ,  $a'=n_1+n_2+2M+1$ ,  $N=t$ , находим из условия  $M+1=1-t-a$  параметр  $a$ . Затем, конкретизируя по этим данным функцию  ${}_3F_2$  в правой части (7.2), легко убедиться, что она совпадает с гипергеометрической функцией в (6.2), но с заменой  $n_1 \leftrightarrow n_2$ .

Что касается фактора, составленного из гамма-функций в правой части (7.2), то он после учета тождества  $\Gamma(-n+z)/\Gamma(z) = (-1)^n \Gamma(1-z)/\Gamma(1-z+n)$  легко преобразуется к виду  $(-1)^l$ .

## 8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итак, мы выяснили, что кольцообразный потенциал аналогичен атому водорода и что эта аналогия конкретизируется правилом соответствия (3.3). Отсюда нами было предсказано, а затем и строго обосновано методом асимптотик важное следствие: переход от параболического базиса кольцообразного потенциала к его сферическому базису получается аналитическим продолжением коэффициентов Клебша — Гордана группы  $SU(2)$  в область произвольных вещественных индексов.

В теории скрытой симметрии атома водорода первостепенное значение имеют операторы орбитального момента  $L$  и вектор Рунге — Ленца  $A$ . Последний играет роль добавочного интеграла движения в кулоновском поле [9]. Именно эти операторы реализуют генераторы группы скрытой симметрии  $O(4)$  атома водорода в дискретном спектре.

Как можно использовать эту информацию? Нужно выяснить вид операторов, заменяющих оператор орбитального момента и оператор Рунге — Ленца. После этого можно было бы воспользоваться методом Паули [16] и вывести генераторы группы скрытой симметрии кольцообразного потенциала. Аналог оператора Рунге — Ленца можно, видимо, построить из повышающих и понижающих операторов, введенных в работе [1]. Как получить аналог оператора момента, мы не знаем.

Мы уже говорили, что правило соответствия (3.3) не применимо к собственным функциям  $z$ -проекции орбитального момента. Это обстоятельство отражается и на числе координатных систем, в которых переменные разделяются. В атоме водорода, как известно [17], их четыре — сферические, параболические, сфероидальные и сфероконические, а в кольцообразном потенциале, как легко убедиться, три — сферические, параболические и сфероидальные. Отсутствие сфероконических координат в списке координат, разделяющих переменные в уравнении Шредингера — это плата за нарушение центральной симметрии при переходе от кулоновского потенциала к кольцообразному.

Как видно из сказанного, кольцообразный потенциал разумно именовать аксиально-симметричным аналогом атома водорода.

Мы благодарны Ивайло Младенову, обратившему наше внимание на работу Мориса Киблера и Рауля Винтернитца [1].

### Список литературы

- [1] Kibler M., Winternitz R. // J. Phys. 1987. V. A20. P. 4097–4108.
- [2] Gerry C. // Phys. Lett. 1986. V. A118. P. 445–447.
- [3] Hartmann H. // Theor. Chim. Acta. 1972. V. 24. P. 201–206.
- [4] Hartmann H., Schuck R., Radtke J. // Theor. Chim. Acta. 1976. V. 42. P. 1–3.
- [5] Hartmann H., Schuck R. // Inter. J. Quantum. Chem. 1980. V. XVIII. P. 125–141.
- [6] Park D. // Zs. of Phys. 1960. V. 159. P. 155–157.
- [7] Tarter C. B. // J. Math. Phys. 1970. V. 11. P. 3192–3195.
- [8] Арутюнян А. Г., Погосян Г. С., Тер-Антонян В. М. // Изв. АН Арм. ССР. Физика. 1978. Т. 13. С. 152–154.
- [9] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика. М.: Наука, 1974.
- [10] Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. I, II. М.: Наука, 1966.



- [11] *Бете Г., Солпитер Э.* Квантовая механика атомов с одним и двумя электронами. М.: Физматгиз, 1960.
- [12] *Mardoyan L. G., Pogosyan G. S., Sissakian A. N., Ter-Antonyan V. M.* // *J. Phys.* 1982. V. A16. P. 711–728.
- [13] *Погосян Г. С., Тер-Антонян В. М.* // *ТМФ.* 1979. Т. 40. С. 140–143.
- [14] *Варшавович Д. А., Москалев А. Н., Херсонский В. К.* Квантовая теория углового момента. Л.: Наука, 1975.
- [15] *Bailey W. M.* Generalized Hypergeometric Series. Cambridge Tracts. № 32, Cambridge, 1935.
- [16] *Pauli W.* // *Z. Phys.* 1926. V. 36. P. 336–363.
- [17] *Kalnins E. G., Miller W. Jr., Winternitz R.* // *SIAM J. Appl. Math.* 1976. V. 30. P. 630–664.

Объединенный институт  
ядерных исследований

Поступила в редакцию  
27.IX.1989 г.

**I. V. Lutsenko, G. S. Pogosyan, A. N. Sissakyan, V. M. Ter-Antonyan**

**HYDROGEN ATOM AS AN INDICATOR OF THE HIDDEN SYMMETRY  
OF A RING-SHAPED POTENTIAL**

Idea of the analogy between the ring-shaped and Coulomb potentials is suggested. It is shown that the expansion of the parabolic base over spherical ones in the ring-shaped potential problem is determined by the Klebsch – Gordan coefficients of  $SU(2)$  continued to arbitrary real values. Connection between these coefficients and  ${}_3F_2$  functions is established and symmetry of the coefficients under substitutions of parabolic quantum numbers is proved.