объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р2-87-454

Л.С.Давтян*, Г.С.Погосян*, А.Н.Сисакян,
В.М.Тер-Антонян*

АЛГЕБРАИЗАЦИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ КУЛОНОВСКИХ ВОЛНОВЫХ ФУНКЦИЙ В НЕПРЕРЫВНОМ СПЕКТРЕ

Направлено в журнал "Теоретическая и
математическая физика"

* Ереванский государственный университет

1987

I. Задача о двухмерном атоме водорода, т.е. электрон-протонной системе с потенциалом взаимодействия $\mathcal{U} = -\alpha/\sqrt{x^2+y^2}$ впервые была рассмотрена в полярных координатах в работе [I], а затем в параболических координатах – в работе [2]. Энергетический спектр этой системы $2E_n = -(n+1/2)^{-2}$, как в трехмерье, случайно вырожден. Объяснение этому вырождению было дано в работе [3]. Дальнейшее развитие теории двухмерного атома водорода связано с работами [4-7], в которых были установлены разложения, связывающие между собой собственные функции генераторов группы скрытой симметрии $O(3)$, ответственной за случайное вырождение энергетического спектра; проведен последовательный анализ задачи в эллиптических координатах и предложен метод вычисления эллиптических поправок к полярному и двум параболическим, выступающим в роли собственных функций генераторов указанной выше группы $O(3)$. Более сложная в математическом отношении область непрерывного спектра исследовалась в работах [8,9], где использовались полярные и параболические координаты. В этих работах были установлены разложения, выражающие в непрерывном спектре полярные волновые функции через параболические и параболические волновые функции первого рода через параболические волновые функции второго рода.

В настоящей работе сделан первый шаг к исследованию эллиптических кулоновских волновых функций в непрерывном спектре. Важность такого исследования объясняется тем, что именно указанные волновые функции служат правильным нулевым приближением к более общей двухмерной задаче о двух неподвижных кулоновских центрах.

2. Определим эллиптические координаты следующим образом:

$$x = \frac{R}{2}\left(\operatorname{ch}\xi\cos\eta + 1\right), \quad y = \frac{R}{2}\operatorname{sh}\xi\sin\eta \tag{I}$$

$$0 \leq \xi < \infty, \quad 0 \leq \eta < 2\pi, \quad 0 \leq R < \infty.$$

В работе [4] показано, что разделенные в переменных (I) решения уравнения Шредингера для двухмерного атома водорода, т.е. эллиптические кулоновские волновые функции, являются также собственными функциями эллиптического интеграла движения, имеющего вид

$$\hat{\Lambda} = \hat{L}^2 + kR\hat{P}. \tag{2}$$

В этой формуле $k = \sqrt{2mE}/\hbar$, R - параметр, входящий в определение эллиптических координат, а $\hat{L}$ и $\hat{P}$ - некоммутирующие операторы, общие собственные функции каждого из которых с гамильтонианом есть волновые функции двухмерного атома водорода в полярных и параболических координатах:

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \;, \quad x = (u^2 - v^2)/2 \qquad 0 \le u < \infty \\ y &= r\sin\varphi \;, \quad y = uv \qquad\qquad -\infty < v < \infty. \end{aligned} \tag{3}$$

Явный вид операторов $\hat{L}$ и $\hat{P}$ таков:

$$\hat{L} = -i\frac{\partial}{\partial\varphi}, \tag{4}$$

$$\hat{P} = \frac{1}{2k}\frac{1}{u^2+v^2}\left\{u^2\frac{\partial^2}{\partial v^2} - v^2\frac{\partial^2}{\partial u^2} + 2(u^2+v^2)\right\}. \tag{5}$$

Обозначим эллиптические кулоновские волновые функции с данной четностью относительно преобразования $\eta \to -\eta$ через $\psi_{k\lambda}^{(\pm)}$, где λ - собственные значения оператора (2), которые мы также снабдим индексами "$\pm$":

$$\hat{\Lambda}\psi_{k\lambda}^{(\pm)} = \lambda^{(\pm)}\psi_{k\lambda}^{(\pm)}. \tag{6}$$

3. Разложим эллиптические кулоновские волновые функции по полярному базису двухмерного атома водорода в непрерывном спектре:

$$\psi_{k\lambda}^{(\pm)} = \sum_{m=0}^{\infty} W_{k\lambda m}^{(\pm)}\,\psi_{km}^{(\pm)}. \tag{7}$$

Согласно /8/,

$$\psi_{km}^{(\pm)} = R_{km}(r)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\begin{Bmatrix}\cos m\varphi \\ \sin m\varphi\end{Bmatrix}, \tag{8}$$

где радиальная функция имеет вид

$$R_{km}(r) = C_{km}\, r^m e^{ikr} F\left(m+1/2-i/k,\, 2m+1;\, -2ikr\right)$$

(здесь учтено, что $m \geqslant 0$,как того требует разложение (7)). Если соблюдать условие нормировки

$$\int_0^\infty R_{k'm}^*(r)\, R_{km}(r)\, r\,dr = 2\pi\,\delta(k'-k), \tag{9}$$

то

$$C_{km} = \frac{(2k)^{m+1/2}}{(2m)!}\, e^{\pi/2k}\left|\Gamma(m+1/2-i/k)\right|.$$

Из (6) и (7) стандартным образом получаем уравнения, определяющие вид коэффициентов $W^{(\pm)}$ и собственные значения эллиптического квантового числа λ :

$$\sum_{m=0}^{\infty}\Big\{(m^2-\lambda^{(+)})\pi\,\delta(k'-k)\,\delta_{mm'}\,(1+\delta_{m0}) + \tag{10a}$$

$$+ kR\,\mathcal{P}^{(+)}_{k'm';\,km}\Big\}\, W^{(+)}_{k\lambda m} = 0$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\Big\{(m^2-\lambda^{(-)})\pi\,\delta(k'-k)\,\delta_{mm'} + \tag{10б}$$

$$+ kR\,\mathcal{P}^{(-)}_{k'm';\,km}\Big\}\, W^{(-)}_{k\lambda m} = 0,$$

в которых

$$\mathcal{P}^{(\pm)}_{k'm';\,km} = \int \psi^{*(\pm)}_{k'm'}\,\hat{\mathcal{P}}\,\psi^{(\pm)}_{km}\, dV. \tag{11}$$

4. Вычислим матричные элементы (II). Перейдя в (5) к полярным координатам, после интегрирования по $d\varphi$ получим

$$\mathcal{P}^{(+)}_{k'm';km} = \frac{1}{4k}\left\{\left(\delta_{m,m'+1} + \delta_{m,1-m'}\right) E_{k'm';km} + \delta_{m,m'-1}\,\mathcal{D}_{k'm';km}\right\}$$

$$\mathcal{P}^{(-)}_{k'm';km} = \frac{1}{4k}\left\{\delta_{m,m'+1} E_{k'm';km} + \delta_{m,m'-1}\,\mathcal{D}_{k'm';km}\right\},$$

где

$$E_{k'm';km} = \int_0^\infty R^*_{k'm'}(r)\,\hat{A}_m\,R_{km}(r)\,r\,dr$$

$$\mathcal{D}_{k'm';km} = \int_0^\infty R^*_{k'm'}(r)\,\hat{A}_{-m}\,R_{km}(r)\,r\,dr$$

и оператор $\hat{A}_m$ имеет вид

$$\hat{A}_m = 1 - \left(m - \frac{1}{r}\right)\left(\frac{d}{dr} + \frac{m}{r}\right).$$

Действуя далее, оператором $\hat{A}_m$ на радиальную функцию R_{km} и пользуясь соотношениями /10/

$$\frac{d}{dx}F(a,c;x) = \frac{c-1}{x}\left\{F(a,c-1;x) - F(a,c;x)\right\}$$

$$\gamma(\gamma-1)F(a,\gamma-1;x) - \gamma(\gamma-1+x)F(a,\gamma;x) + (\gamma-a)x\,F(a,\gamma+1;x) = 0$$

$$\beta F(a,\beta;x) - \beta F(a-1,\beta;x) - x\,F(a,\beta+1;x) = 0,$$

в которых

$$a = m + 1/2 - i/k\,,\quad c = 2m+1\,,\quad x = -2ikr$$

$$\gamma = c-1\,,\quad \beta = c-2,$$

можно доказать, что оператор $\hat{A}_m$ ведет себя как понижающий оператор:

$$\hat{A}_m R_{km} = -k\sqrt{(m-1/2)^2+1/k^2}\, R_{k,m-1}.$$

Отсюда очевидно также, что

$$\hat{A}_{-m} R_{km} = -k\sqrt{(m+1/2)^2+1/k^2}\, R_{k,m+1}.$$

Полученные формулы вместе с условием (9) приводят к выводу, что

$$\mathcal{P}^{(+)}_{k'm';km} = -\frac{\pi}{2}\delta(k'-k)\Big\{\sqrt{(m-1/2)^2+1/k^2}\left(\delta_{m,m'+1}+\delta_{m,1-m'}\right)+ \qquad (12a)$$

$$+\sqrt{(m+1/2)^2+1/k^2}\,\delta_{m,m'+1}\Big\}$$

$$\mathcal{P}^{(-)}_{k'm';km} = -\frac{\pi}{2}\delta(k'-k)\Big\{\sqrt{(m-1/2)^2+1/k^2}\,\delta_{m,m'+1}+ \qquad (12б)$$

$$+\sqrt{(m+1/2)^2+1/k^2}\,\delta_{m,m'-1}\Big\}.$$

5. Подставляя (12а) и (12б) в (10а) и (10б), получаем трехчленные рекуррентные соотношения

$$\frac{1}{2}\sqrt{(m+1/2)^2+1/k^2}\,W^{(+)}_{k\lambda,m+1}+\frac{\lambda^{(+)}-m^2}{kR}\left[W^{(+)}_{k\lambda m}+W^{(+)}_{k\lambda,-m}\right]+$$

$$+\frac{1}{2}\sqrt{(m-1/2)^2+1/k^2}\left[W^{(+)}_{k\lambda,m-1}+W^{(+)}_{k\lambda,1-m}\right]=0 \qquad (13a)$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{(m+1/2)^2+1/k^2}\,W^{(-)}_{k\lambda,m+1}+\frac{\lambda^{(-)}-m^2}{kR}W^{(-)}_{k\lambda m}+$$

$$+\frac{1}{2}\sqrt{(m-1/2)^2+1/k^2}\,W^{(-)}_{k\lambda,m-1}=0. \qquad (13б)$$

Из разложения (7) следует, что эти уравнения должны решаться с учетом дополнительных условий

$$W^{(+)}_{k\lambda,-1}=W^{(-)}_{k\lambda,0}=0. \qquad (14)$$

Легко показать, что при переходе к дискретному спектру уравнения (I3) переходят в трехчленные рекуррентные соотношения, установленные в работе /4/.

6. Итак, нами доказано, что задача об эллиптическом базисе двухмерного атома водорода в непрерывном спектре приводится к задаче об исследовании двух трехчленных рекуррентных соотношений. Такая алгебраизация удобна для построения теории возмущений при $R < 1$, т.е. для вычисления эллиптических поправок к полярному базису.

Литература

I. Zaslow B., Zandler M.E., Am.J.Phys., 35, p. 1118, 1967.
2. Cisneros A., McIntosh M., J.Math.Phys., 10, p. 277, 1968.
3. Shibuya T., Wufman C.E., Am. J.Phys., 33, p. 570, 1965.
4. Mardoyan L.G., Pogosyan G.S., Sissakian A.V., Ter-Antonyan V.M., J.Phys., A18, No.3, 455, 1985.
5. Мардоян Л.Г., Погосян Г.С., Сисакян А.Н., Тер-Антонян В.М., ТМФ, т. 63, № 3, 406, I985.
6. Мардоян Л.Г., Погосян Г.С., Сисакян А.Н., Тер-Антонян В.М., ТМФ, т. 6I, № I, 99, I984.
7. Мардоян Л.Г., Погосян Г.С., Сисакян А.Н., Тер-Антонян В.М., препринт ОИЯИ, Р2-84-II0, Дубна, I984.
8. Давтян Л.С., Погосян Г.С., Сисакян А.Н., Тер-Антонян В.М., ТМФ, т. 66, № 2, 222, I986.
9. Давтян Л.С., Погосян Г.С., Сисакян А.Н., Тер-Антонян В.М., препринт ОИЯИ, Р2-86-392, Дубна, I986.
IO. Бейтман Г., Эрдейи А., Высшие трансцендентные функции, т. I, "Наука", М., I973.

Рукопись поступила в издательский отдел
22 июня I987 года.

Давтян Л.С. и др. P2-87-454
Алгебраизация эллиптических кулоновских волновых функций в непрерывном спектре

Найдены трехчленные рекуррентные соотношения, определяющие в непрерывном спектре разложение эллиптических кулоновских волновых функций по полярному базису двухмерного атома водорода.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1987

Перевод О.С.Виноградовой

Davtyan L.S. et al. P2-87-454
Elliptic Coulomb Wave Functions Algebraisation in the Continuous Spectrum

Trinomial recurrence relations defining elloptic coulomb wave functions expansions by Polar basis of the two-dimantional hydrogen atom have found.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1987

12 коп.

Редактор Б.Б.Колесова. Макет Р.Д.Фоминой.

Подписано в печать 14.07.87.
Формат 60x90/16. Офсетная печать. Уч.-изд.листов 0,78.
Тираж 490. Заказ 39356.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований.
Дубна Московской области.