ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
Том 66, № 2
февраль, 1986

ДВУМЕРНЫЙ АТОМ ВОДОРОДА. ВЗАИМНЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ ПОЛЯРНОГО И ПАРАБОЛИЧЕСКОГО БАЗИСОВ НЕПРЕРЫВНОГО СПЕКТРА

Давтян Л. С. [1], Погосян Г. С. [1], Сисакян А. Н.,
Тер-Антонян В. М. [1]

В области непрерывного спектра найдено разложение параболического базиса двумерного атома водорода по полярному и обратное ему разложение. Прослежена связь между этими разложениями и соответствующими им разложениями в дискретном спектре. Установлен теоретико-групповой смысл двумерной кулоновской фазы рассеяния.

ВВЕДЕНИЕ

Как известно, в уравнении Шредингера для двумерного атома водорода (ДАВ) переменные разделяются в полярных [1], параболических [2] и эллиптических координатах [3]. Соответствующие этим координатам решения, или базисы, связаны унитарными преобразованиями. Знание таких межбазисных разложений существенно облегчает задачу вычисления матричных элементов, в которых начальное и конечное состояния заданы в виде базисов, соответствующих различным системам координат.

В области дискретного спектра взаимные связи между указанными выше тремя базисами были установлены в работах [4—7].

Для полного решения проблемы межбазисных разложений в ДАВ необходимо также исследовать область непрерывного спектра [2]. В настоящей работе делается первый шаг в этом направлении, а именно найдено разложение параболического базиса по полярному и обратное ему разложение. В разделе 1 приводятся формулы, определяющие эти два базиса, в разделе 2 получено разложение базиса, описывающего рассеяние на двумерном кулоновском центре, по полярному, в разделе 3 — разложение общего параболического базиса по полярному, в разделе 4 — разложение полярного базиса по параболическому, в разделах 5 и 6 — согласованность разложений в непрерывном и дискретном спектрах.

1. БАЗИСЫ

В атомной системе единиц ($\hbar=\mu=e=1$, $k=\sqrt{-2E}$, $E>0$) полярный и параболический базисы ДАВ имеют вид

---

[1] Ереванский государственный университет.

[2] Для трехмерного атома водорода такое исследование частично было проведено в работах [8—10].

(1) $$\Psi_{km}(r,\varphi)=C_{km}\frac{(-2ikr)^{|m|}}{(2|m|)!}e^{-ikr}\times$$
$$\times F\left(\frac{1}{2}+|m|-\frac{i}{k};\ 2|m|+1;\ -2ikr\right)\frac{e^{im\varphi}}{\sqrt{2\pi}},$$

(2) $$\Psi_{k\beta}^{(\pm)}(u,v)=C_{k\beta}^{(\pm)}e^{ik(u^2+v^2)/2}f_{k\beta}^{(\pm)}(u)f_{k,-\beta}^{(\pm)}(v),$$

где β — константа разделения в параболических координатах,

$$f_{k\beta}^{(+)}(z)=F\left(\frac{1}{4}-\frac{i}{2k}-\frac{i\beta}{2k};\ \frac{1}{2};\ -ikz^2\right),$$
$$f_{k\beta}^{(-)}(z)=zF\left(\frac{3}{4}-\frac{i}{2k}-\frac{i\beta}{2k}.\ \frac{3}{2};\ -ikz^2\right),$$

а координаты выбраны так:

$$x=r\cos\varphi,\quad y=r\sin\varphi;$$
$$x=(u^2-v^2)/2,\quad y=uv,\quad 0\leqslant u<\infty,\quad -\infty<v<\infty.$$

Отметим еще, что соблюдение условия

$$\int_0^\infty\int_0^{2\pi}\Psi_{k'm'}^*(r,\varphi)\Psi_{km}(r,\varphi)\,r\,dr\,d\varphi=2\pi\delta(k'-k)\delta_{m'm}$$

обеспечивается константой C_{km}, равной

(3) $$C_{km}=(i)^{|m|}e^{\pi/2k}\sqrt{2k}\left|\Gamma\left(\frac{1}{2}+|m|-\frac{i}{k}\right)\right|$$

(о константах $C_{k\beta}^{(\pm)}$ будет сказано ниже в разделе 4).

Кулоновская фаза рассеяния определяется выражением

(4) $$\delta_{|m|}=\arg\Gamma\left(\frac{1}{2}+|m|-\frac{i}{k}\right).$$

Разбиение параболического базиса на два подбазиса объясняется тем, что формально парам (u, v) и $(-u, -v)$ соответствуют одни и те же декартовы координаты (x, y): $\Psi(u, v)$ может быть произведением двух функций с данной четностью относительно инверсии своего аргумента.

2. РАЗЛОЖЕНИЕ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО БАЗИСА ПО ПОЛЯРНОМУ (ЗАДАЧА РАССЕЯНИЯ)

Задаче рассеяния соответствует волновая функция, получающаяся из (2) в частном случае, когда $\beta=-1-ik/2$. Легко проверить, что при таком выборе в пределе $v\to\infty$ волновая функция (2) (с индексом «+») с точностью до характерных для кулоновского поля логарифмических искажений переходит в суперпозицию плоской и круговой расходящейся волн. Полагая амплитуду падающей плоской волны равной единице, получаем

$$\Psi_k(u,v)=\frac{e^{\pi/2k}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{i}{k}\right)e^{ik(u^2-v^2)/2}\times$$
$$\times F\left(\frac{i}{k};\ \frac{1}{2};\ ikv^2\right).$$

Рассмотрим теперь разложение

$$\Psi_k(u,v)=\sum_{m=-\infty}^{\infty} W_{km}\Psi_{km}(r,\varphi).$$

Пользуясь ортонормируемостью функций $e^{im\varphi}/\sqrt{2\pi}$ и предварительно убедившись в справедливости равенства

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F\left[\frac{1}{2}-\frac{i}{k};\ \frac{1}{2};\ -ik(1-\cos\varphi)r\right]e^{-im\varphi}\,d\varphi=$$

$$=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{i}{k}+|m|\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{i}{k}\right)}\frac{(2ikr)^{|m|}}{(2|m|)!}\times$$

$$\times F\left(\frac{1}{2}+|m|-\frac{i}{k};\ 2|m|+1;\ -2ikr\right),$$

приходим к разложению

$$\Psi_k(u,v)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}(i)^{|m|}\frac{e^{i\delta_{|m|}}}{\sqrt{k}}\Psi_{km}(r,\varphi), \tag{5}$$

в котором $\delta_{|m|}$ дается выражением (4).

Как известно [4], в дискретном спектре разложение параболического базиса ДАВ по полярному имеет вид

$$\Psi_{jt}(u,v)=\sum_{m=-j}^{j} d^{j}_{m,t}\left(\frac{\pi}{2}\right)\Psi_{jm}(r,\varphi), \tag{6}$$

где $d^{j}_{m,t}$ — вещественная функция, связанная с D-функцией Вигнера соотношением [8]

$$D^{j}_{M,M'}(\alpha,\beta,\gamma)=e^{-iM\alpha}d^{j}_{M,M'}(\beta)e^{-iM'\gamma}$$

а индексы имеют следующий смысл:

$$j=\frac{n_1+n_2}{2},\qquad t=\frac{n_1-n_2}{2},\qquad E_j=-\frac{1}{(2j+1)^2}$$

(n_1, $n_2=0, 1, 2, \ldots$). Сами базисы определяются выражениями

$$\Psi_{jm}(r,\varphi)\equiv\Psi_{nm}(r,\varphi)=(2\lambda^3)^{1/2}\sqrt{\frac{(n+|m|)!}{(n-|m|)!}}\times$$

$$\times\frac{(2\lambda r)^{|m|}}{(2|m|)!}e^{-\lambda r}\frac{e^{im\varphi}}{\sqrt{2\pi}}F(-n+|m|;2|m|+1;2\lambda r),$$

$$\Psi_{jt}(u,v)\equiv\Psi_{n_1,n_2}(u,v)=\left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^{1/2}\frac{H_{n_1}(\sqrt{\lambda}u)H_{n_2}(\sqrt{\lambda}v)}{\sqrt{2^{n_1+n_2}(n_1)!\,(n_2)!}}\times$$

$$\times e^{-\frac{\lambda}{2}(u^2+v^2)},\qquad \lambda=\sqrt{-2E}.$$

Из формулы [11]

$$d^{\,i}_{m,-j}\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{(-1)^{j+m}}{2^j}\sqrt{\frac{(2j)!}{(j+|m|)!(j-|m|)!}}$$

полагая $j=i/k-{}^1/_2$, после простых вычислений приходим к равенству

$$e^{i\delta_{|m|}}=\frac{(\pi)^{1/4}}{(-i)^{|m|}(-1)^{i/k-1/2}}\sqrt{\frac{\Gamma(1/2-i/k)}{\Gamma(i/k)}}\,d^{\,i/k-1/2}_{m,\,1/2-i/k}\left(\frac{\pi}{2}\right),$$

из которого следует, что разложение (5) является аналитическим продолжением (6) в область $E>0$ (при дальнейшем отборе решений, соответствующих рассеянию).

3. РАЗЛОЖЕНИЕ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО БАЗИСА ПО ПОЛЯРНОМУ (ОБЩИЙ СЛУЧАЙ)

Запишем искомое разложение в виде

$$\Psi^{(\pm)}_{k\beta}(u,v)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}W^{(\pm)}_{k\beta m}\Psi_{km}(r,\varphi). \tag{7}$$

Из ортонормированности функций $e^{im\varphi}/\sqrt{2\pi}$, обращения в нуль при $s+t<|m|$, $s+t+1<|m|$ интегралов

$$A_{st}{}^m=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{2\pi}(1+\cos\varphi)^s(1-\cos\varphi)^t e^{-im\varphi}\,d\varphi,$$

$$B_{st}{}^m=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{2\pi}(1+\cos\varphi)^s(1-\cos\varphi)^t\sin\varphi\, e^{-im\varphi}\,d\varphi$$

и из равенств

$$A^m_{s,|m|-s}=(-1)^{|m|-s}\frac{\sqrt{2\pi}}{2^{|m|}},\qquad B^m_{s,|m|-1-s}=i\,\mathrm{sgn}\,m A^m_{s,|m|-s}$$

(sgn — знаковая функция) после некоторых вычислений получим

$$W^{(+)}_{k\beta m}=(-1)^{|m|}\sqrt{2\pi}\,\frac{C^{(+)}_{k\beta}}{C_{km}}(b)_{|m|}\times$$
$$\times\,{}_3F_2\left\{\begin{matrix}a, & -|m|, & 1/2-|m|\\ 1/2, & 1/2-|m|-b & \end{matrix}\,\middle|\,1\right\},$$

$$W^{(-)}_{k\beta m}=(-1)^{|m|-1}m\sqrt{2\pi}\,\frac{C^{(-)}_{k\beta}}{C_{km}}\left(\frac{1}{2}+b\right)_{|m|+1}\times$$
$$\times\,{}_3F_2\left\{\begin{matrix}1/2+a, & 1/2-|m|, & 1-|m|\\ 3/2, & 3/2-|m|-b & \end{matrix}\,\middle|\,1\right\}.$$

Здесь использованы обозначения (${}_3F_2$ — обобщенная гипергеометрическая функция)

$$a=\frac{1}{4}+\frac{i}{2k}(1+\beta),\qquad b=\frac{1}{4}-\frac{i}{2k}(1-\beta),\qquad (\alpha)_n=\frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)}.$$

Учитывая формулу [12]

$$(8)\qquad {}_3F_2\left\{\begin{matrix} s, & s', & -N \\ t', & 1-N-t \end{matrix}\ \Big|\ 1\right\} = \frac{\Gamma(t+s+N)\Gamma(t)}{\Gamma(t+s)\Gamma(t+N)}\times$$

$$\times {}_3F_2\left\{\begin{matrix} s, & t'-s', & -N \\ t', & t+s \end{matrix}\ \Big|\ 1\right\},$$

имеем

$$W^{(+)}_{k\beta m} = (-1)^{|m|}\frac{C^{(+)}_{k\beta}}{C_{km}}\sqrt{2\pi}(a+b)_{|m|}\times$$

$$\times {}_3F_2\left\{\begin{matrix} a, & |m|, & -|m| \\ {}^1/_2, & a+b \end{matrix}\ \Big|\ 1\right\},$$

$$W^{(-)}_{k\beta m} = (-1)^{|m|-1}\frac{C^{(-)}_{k\beta}}{C_{km}}m\sqrt{2\pi}(1+a+b)_{|m|-1}\times$$

$$\times {}_3F_2\left\{\begin{matrix} {}^1/_2+a, & 1+|m|, & 1-|m| \\ {}^3/_2, & 1+a+b \end{matrix}\ \Big|\ 1\right\}.$$

Полученные формулы полностью решают проблему перехода от кулоновского параболического базиса ДАВ к полярному в непрерывном спектре.

При $\mathrm{Re}(a+\alpha+1)>0$, $\mathrm{Re}(a+\beta+1)>0$ справедливо тождество

$${}_3F_2\left\{\begin{matrix} -N, & N+2\alpha+2\beta+1, & -a+\alpha \\ \alpha+\beta+1, & \alpha+\beta-2a \end{matrix}\ \Big|\ 1\right\} =$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{2a+\alpha+\beta+1}\frac{\Gamma(\alpha+\beta+1)}{\Gamma(a+\alpha+1)}\times$$

$$\times\frac{\Gamma(2a-N-\alpha-\beta+1)\Gamma(2a+N+\alpha+\beta+2)N!}{\Gamma(2a-\alpha-\beta+1)\Gamma(a+\beta+1)\Gamma(\alpha+\beta+N+1)}\times$$

$$\times\int_{-1}^{1}(1-x)^{a+\beta}(1+x)^{a+\alpha}P_N^{\alpha+\beta,\alpha+\beta}(x)\,dx,$$

в котором можно убедиться прямой проверкой ($P_n^{\gamma,\gamma}(x)$ — полином Якоби).

Пользуясь этим тождеством и замечая, что [13]

$$P_{|m|}^{-1/2,-1/2}(\cos\varphi) = \frac{(2|m|-1)!!}{(2|m|)!!}\cos|m|\varphi,$$

$$P_{|m|-1}^{1/2,1/2}(\cos\varphi) = 2\frac{(2|m|-1)!!}{(2|m|)!!}\frac{\sin|m|\varphi}{\sin\varphi},$$

приходим к интегральным представлениям

$$(9)\qquad W^{(+)}_{k\beta m} = 2^{a+b}\sqrt{2\pi}\frac{C^{(+)}_{k\beta}}{C_{km}}\frac{\Gamma(1+|m|-a-b)}{\Gamma({}^1/_2-a)\Gamma({}^1/_2-b)}\times$$

$$\times\int_0^{\pi}(1-\cos\varphi)^{-a}(1+\cos\varphi)^{-b}\cos m\varphi\,d\varphi,$$

(10) $$W_{k\beta m}^{(-)}=2^{a+b-1}\sqrt{2\pi}\,\frac{C_{k\beta}^{(-)}}{C_{km}}\frac{\Gamma(1+|m|-a-b)}{\Gamma(1-a)\Gamma(1-b)}\times$$
$$\times\int_0^{\pi}(1-\cos\varphi)^{-a}(1+\cos\varphi)^{-b}\sin m\varphi\,d\varphi.$$

4. НЕКОТОРЫЕ СЛЕДСТВИЯ

А. Параболические нормировочные константы $C_{k\beta}^{(\pm)}$. Так как базисы $\Psi_{k\beta}^{(+)}(u,v)$ и $\Psi_{k\beta}^{(-)}(u,v)$ имеют разную четность по переменной v, то

$$\int_{-\infty}^{\infty}dv\int_0^{\infty}du\,(u^2+v^2)\,\Psi_{k'\beta'}^{(\pm)*}(u,v)\,\Psi_{k\beta}^{(\mp)}(u,v)=0.$$

Будем считать, что выполняется условие ортонормированности

$$\int_0^{\infty}du\int_{-\infty}^{\infty}dv\,(u^2+v^2)\,\Psi_{k'\beta'}^{(\pm)*}(u,v)\,\Psi_{k\beta}^{(\pm)}(u,v)=2\pi\delta(k'-k)\,\delta(\beta'-\beta).$$

На языке коэффициентов $W_{k\beta m}^{(\pm)}$ выписанные формулы принимают вид

(11) $$\sum_{m=-\infty}^{\infty}W_{k\beta' m}^{(\pm)*}\,W_{k\beta m}^{(\mp)}=0,$$

(12) $$\sum_{m=-\infty}^{\infty}W_{k\beta' m}^{(\pm)*}\,W_{k\beta m}^{(\pm)}=\delta(\beta'-\beta).$$

Соотношение (12) и интегральные представления (9) и (10) позволяют вычислить параболические нормировочные константы $C_{k\beta}^{(\pm)}$. Действительно, используя формулы

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}\cos m\varphi\cos m\varphi'=\pi\delta(\varphi-\varphi'),$$
$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sin m\varphi\sin m\varphi'=\pi\delta(\varphi-\varphi')$$
$$(-\pi\leqslant\varphi-\varphi'\leqslant\pi),$$
$$\int_0^{\pi}\frac{d\varphi}{\sin\varphi}\left(\frac{1-\cos\varphi}{1+\cos\varphi}\right)^{\frac{i}{k}(\beta-\beta')}=2\pi\delta(\varphi-\varphi'),$$

получим

(13) $$C_{k\beta}^{(+)}=\frac{e^{\pi/2k}}{2\pi\sqrt{\pi}}\left|\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{i}{2k}+\frac{i\beta}{2k}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{i}{2k}-\frac{i\beta}{2k}\right)\right|,$$

(14) $$C_{k\beta}^{(-)}=\frac{e^{\pi/2k}}{\pi\sqrt{\pi}}\left|\Gamma\left(\frac{3}{4}+\frac{i}{2k}+\frac{i\beta}{2k}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}+\frac{i}{2k}-\frac{i\beta}{2k}\right)\right|.$$

Б. Разложение полярного базиса ДАВ по параболическому. Из интегральных представлений (9) и (10) и формулы

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{(1-\cos\varphi)(1+\cos\varphi')}{(1+\cos\varphi)(1-\cos\varphi')}\right]^{i\beta/2k} d\beta =$$

$$=2\pi\delta(\nu'-\nu)\qquad\begin{pmatrix}\cos\varphi=\operatorname{th}\nu\\ \cos\varphi'=\operatorname{th}\nu'\end{pmatrix}$$

выводятся условия

$$\int_{-\infty}^{\infty} W_{k\beta m'}^{(\pm)*}\, W_{k\beta m}^{(\pm)}\, d\beta=\frac{1}{2}[\delta_{m',m}\pm\delta_{m',-m}]. \tag{15}$$

Эти условия позволяют сразу записать разложение полярного базиса по параболическому:

$$\Psi_{km}(r,\varphi)=\int_{-\infty}^{\infty}[W_{k\beta m}^{(+)*}\Psi_{k\beta}^{(+)}(u,v)+W_{k\beta m}^{(-)*}\Psi_{k\beta}^{(-)}(u,v)]d\beta. \tag{16}$$

Подчеркнем нетривиальность разложения (16): заранее не очевидно, по каким β следует интегрировать, чтобы обеспечить ортогональность (15).

Наконец, пользуясь вещественностью параболических нормировочных констант (13) и (14), явным видом фазового множителя в полярной нормировочной константе C_{km} и соотношением (8), после некоторых вычислений приходим к свойству

$$[W_{k\beta m}^{(\pm)}]^*=\pm W_{k\beta m}^{(\pm)}.$$

5. СОГЛАСОВАННОСТЬ РАЗЛОЖЕНИЙ (7) И (6)

Переходя в (7) к дискретному спектру, т. е. совершая замены

$$k\to i|k|=i(n+{}^1/_2)^{-1}\equiv i\lambda,$$

$$\frac{1}{4}-\frac{i}{2k}(1+\beta)\to-\frac{n_1}{2},\qquad \frac{1}{4}-\frac{i}{2k}(1-\beta)\to-\frac{n_2}{2}$$

(n_1 и n_2 четны и неотрицательны для $\Psi^{(+)}$),

$$\frac{3}{4}-\frac{i}{2k}(1+\beta)\to-\frac{n_1}{2}+\frac{1}{2},\qquad \frac{3}{4}-\frac{i}{2k}(1-\beta)\to-\frac{n_2}{2}+\frac{1}{2}$$

(n_1 и n_2 нечетны и неотрицательны для $\Psi^{(-)}$)
и учитывая (8) и интегральное представление коэффициентов Клебша — Гордана [11]

$$C_{a\alpha,b\beta}^{c\gamma}=$$

$$=\sqrt{\frac{(a+\alpha)!(b-\beta)!(c-\gamma)!(c+\gamma)!(a-b-c)!(b-a+c)!(2c+1)}{(a+b-c)!(a-\alpha)!(b+\beta)!(a+b+c+1)!}}\times$$

$$\times\frac{\delta_{\gamma,\alpha+\beta}}{(c-b+\alpha)!(c-a+\beta)!}\,{}_3F_2\left\{\begin{matrix}-a-b+c, & -a+\alpha, & -b-\beta\\ -a+c-\beta+1, & -b+c+\alpha+1\end{matrix}\middle|1\right\},$$

получим

$$\Psi_{n_1n_2}(u,v)=\sum_{m=-n}^{n}\tilde W_{n_1n_2m}^{*}\Psi_{nm}(r,\varphi), \tag{17}$$

где

$$\tilde{W}_{n_1n_2m}=\left\{\frac{1+(-1)^{n_1}}{2}+\frac{1-(-1)^{n_1}}{2}\operatorname{sgn} m\right\}\frac{(-1)^{n+n_1/2}}{\sqrt{2}}\times$$

$$\times C^{|m|-1/2,\,-1/2}_{n/2-1/4,\,-1/4+(n_2-n_1)/2;\; n/2-1/4,\,-1/4-(n_2-n_1)/2}.$$

Учитывая, что согласно [11]

$$C^{c\gamma}_{a\alpha,b\beta}=$$

$$=\frac{(-1)^{a-c+\beta}}{2^{J+1}}\sqrt{\frac{(c+\gamma)!(J-2c)!(J+1)!}{(a-\alpha)!(a+\alpha)!(b-\beta)!(b+\beta)!(c-\gamma)!(J-2a)!(J-2b)!}}\times$$

$$\times\int\limits_{-1}^{1}(1-x)^{a-\alpha}(1+x)^{b+\beta}\frac{d^{c-\gamma}}{dx^{c-\gamma}}[(1-x)^{c-\gamma}(1+x)^{c+\gamma}]\,dx$$

$(J=a+b+c+1)$, и формулу

$$T_{|m|}(\cos\varphi)=\frac{(-1)^{|m|}\sqrt{\pi}}{2^{|m|}\Gamma(|m|+{}^1/_2)}(1-\cos^2\varphi)^{1/2}\times$$

$$\times\frac{d^{|m|}}{(d\cos\varphi)^{|m|}}(1-\cos^2\varphi)^{|m|-1}=\cos|m|\varphi,$$

получим

$$\tilde{W}_{n_1n_2m}=\frac{(-1)^{n+n_1-|m|}}{\pi}\left\{\frac{1+(-1)^{n_1}}{2}+\frac{1-(-1)^{n_1}}{2}\operatorname{sgn} m\right\}\times$$

$$\times\sqrt{\frac{2^{n_1+n_2}(n+|m|)!(n-|m|)!}{(n_1)!(n_2)!}}\int\limits_0^{\pi}(\cos\varphi)^{n_1}(\sin\varphi)^{n_2}e^{-im\varphi}\,d\varphi.$$

Сравнивая этот результат с интегральным представлением [14]

$$d^{\frac{n_1+n_2}{2}}_{\frac{m}{2},\frac{n_1-n_2}{2}}\left(\frac{\pi}{2}\right)=$$

$$=(-i)^{n_2}\sqrt{\frac{2^{n_1+n_2}\left(\frac{n_1+n_2+|m|}{2}\right)!\left(\frac{n_1+n_2-|m|}{2}\right)!}{(n_1)!\,(n_2)!}}\times$$

$$\times\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^{2\pi}(\sin\varphi)^{n_2}(\cos\varphi)^{n_1}e^{-im\varphi}\,d\varphi,$$

имеем

$$\tilde{W}_{n_1n_2m}=(-1)^{n+|m|+\frac{n_2}{2}}\left\{\frac{1+(-1)^{n_1}}{2}+\frac{1-(-1)^{n_1}}{2}\operatorname{sgn} m\right\}\times$$

$$\times d^{\frac{n_1+n_2}{2}}_{\frac{m}{2},\frac{n_1-n_2}{2}}\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

Наконец, используя свойство [11]

$$d^J_{M,M'}\left(\frac{\pi}{2}\right)=(-1)^{J-M'}d^J_{-M,M'}\left(\frac{\pi}{2}\right),$$

приходим к выводу, что $\tilde{W}_{n_1n_2m}$ в точности совпадает с коэффициентом, реализующим разложение (6).

6. ПЕРЕХОД К ДИСКРЕТНОМУ СПЕКТРУ В РАЗЛОЖЕНИИ ПОЛЯРНОГО БАЗИСА ПО ПАРАБОЛИЧЕСКОМУ

Перейдем в (16) от переменной β к переменной z

$$z=\frac{1}{4}-\frac{i}{2k}(1+\beta)$$

и введем обозначения

$$\Psi_{kz}^{(+)}(u,v)=e^{ik(u^2+v^2)/2}F\left(z;\ \frac{1}{2};\ -iku^2\right)F\left(\frac{1}{2}-\frac{i}{k}-z;\ \frac{1}{2};\ -ikv^2\right),$$

$$\Psi_{kz}^{(-)}(u,v)=(-4ikuv)\,e^{ik(u^2+v^2)/2}F\left(\frac{1}{2}+z;\ \frac{3}{2};\ -iku^2\right)\times$$

$$\times F\left(1-\frac{i}{k}-z;\ \frac{3}{2};\ -ikv^2\right),$$

$$\Psi_{km}(r,\varphi)=$$

$$=\frac{(-2ikr)^{|m|}}{(2|m|)!}e^{ikr}F\left(\frac{1}{2}+|m|-\frac{i}{k};\ 2|m|+1;\ -2ikr\right)\frac{e^{im\varphi}}{\sqrt{2\pi}}$$

Тогда вместо (16) получим

$$\Psi_{km}(r,\varphi)=\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+|m|-\frac{i}{k}\right)}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\frac{1}{4}-\frac{i}{2k}\infty}^{\frac{1}{4}+\frac{i}{2k}\infty}[L_k^{(+)}(z)\,\overline{W}_{kzm}^{(+)}\times$$

$$\times\ \Psi_{kz}^{(+)}(u,v)+L_k^{(-)}(z)\,\overline{W}_{kzm}^{(-)}\Psi_{kz}^{(-)}(u,v)]\,dz, \tag{18}$$

где

$$L_k^{(+)}(z)=\Gamma(z)\Gamma\left(\frac{1}{2}-z\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{i}{k}-z\right)\Gamma\left(\frac{i}{k}+z\right),$$

$$L_k^{(-)}(z)=\Gamma(1-z)\Gamma\left(\frac{1}{2}+z\right)\Gamma\left(1-\frac{i}{k}-z\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{i}{k}+z\right),$$

а коэффициенты $\overline{W}_{kzm}^{(\pm)}$ даются выражениями

$$\overline{W}_{kzm}^{(+)}=\frac{(-1)^{|m|}}{2\pi^2}\frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(^1/_2+i/k)}\,{}_3F_2\left\{\begin{matrix}^1/_2-z, & |m|, -|m|\\ ^1/_2, & ^1/_2+i/k\end{matrix}\,\middle|\,1\right\},$$

$$\overline{W}_{kzm}^{(-)}=\frac{(-1)^{|m|-1}}{\pi^2}\frac{im\sqrt{2\pi}}{\Gamma(^3/_2+i/k)}\,{}_3F_2\left\{\begin{matrix}1-z, 1+|m|, 1-|m|\\ ^3/_2,\ ^3/_2+i/k\end{matrix}\,\middle|\,1\right\}$$

Особенности подынтегрального выражения в (18) по z совпадают с полюсами функций $L_k^{(\pm)}(z)$ и представлены соответственно на рис. 1 и 2.

Рассмотрим интегралы

$$I^{(\pm)}(k,m,R)=\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+|m|-\frac{i}{k}\right)}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\frac{1}{4}-\frac{iR}{2k}}^{\frac{1}{4}+\frac{iR}{2k}}f^{(\pm)}(k,m,z)\,dz,$$

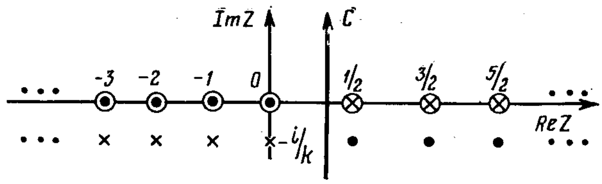

Рис. 1

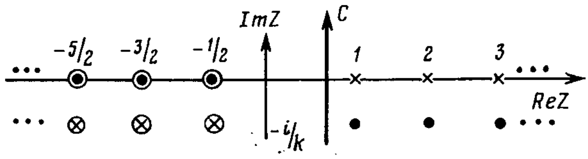

Рис. 2

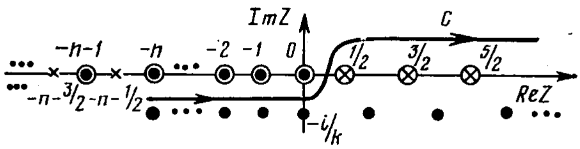

Рис. 3

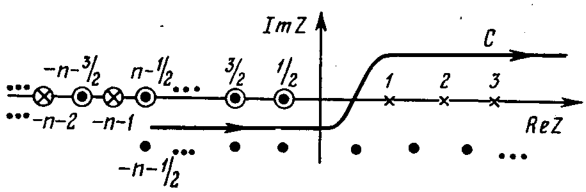

Рис. 4

в которых

$$f^{(\pm)}(k, m, z) = L_k^{(\pm)}(z)\,\overline{W}_{kzm}^{(\pm)}\,\overline{\Psi}_{kz}^{(\pm)}(u, v).$$

Совершим аналитическое продолжение по k в область $k \to i\lambda + \varepsilon = i(n + {}^1/_2)^{-1} + \varepsilon$, где $\lambda > 0$, а ε мало и положительно. При этом контур интегрирования приближается к вещественной оси, а полюсы занимают положения, представленные соответственно на рис. 3 и 4. Замкнем контур в верхней полуплоскости z и запишем

$$I^{(+)}(i\lambda + \varepsilon, m, R) = \frac{1}{\Gamma(-n + |m| + \varepsilon)} \times$$

$$\times \left\{ \sum_{t=0,2}^{2n} \operatorname{Res} f^{(+)}\left(k, m, -\frac{t}{2}\right) + \sum_{t=2n+2}^{t_R^{(1)}} \operatorname{Res} f^{(+)}\left(k, m, -\frac{t}{2}\right) + \right.$$

$$\left. + \sum_{t=1,3}^{t_R^{(2)}} \operatorname{Res} f^{(+)}\left(k, m, -n - \frac{t}{2}\right) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} f^{(+)}(k, m, z)\, dz \right\},$$

$$I^{(-)}(i\lambda+\varepsilon, m, R)=\frac{1}{\Gamma(-n+|m|+\varepsilon)}\times$$

$$\times\left\{\sum_{t=1,3}^{2n-1}\operatorname{Res} f^{(-)}\left(k, m, -\frac{t}{2}\right)+\sum_{t=2n+1}^{t_R^{(3)}}\operatorname{Res} f^{(-)}\left(k, m, -\frac{t}{2}\right)+\right.$$

$$\left.+\sum_{t=2,4}^{t_R^{(4)}}\operatorname{Res} f^{(-)}\left(k, m, -n-\frac{t}{2}\right)-\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_R} f^{(-)}(k, m, z)\,dz\right\}.$$

Здесь γ_R — полуокружность радиуса R, $t_R^{(i)}$ — крайние левые полюсы каждого типа, находящиеся внутри контура C. При $\varepsilon\to 0$ вклады последних трех членов в предыдущих формулах конечны, а первые суммы стремятся к бесконечности. Вследствие сказанного зависимость от R выпадает, и можно написать

$$I^{(+)}(i\lambda+\varepsilon, m)=\frac{1}{\Gamma(-n+|m|+\varepsilon)}\times$$

$$\times\sum_{t=0,2}^{2n}(-1)^{t/2}\frac{\Gamma(1/2+t/2)\,\Gamma(n+1/2-t/2)}{\Gamma(1+t/2)}\times$$

$$\times\Gamma(-n+t/2+\varepsilon)\,\overline{W}^{(+)}_{i\lambda+\varepsilon,\,-t/2,\,m}\overline{\Psi}^{(+)}_{i\lambda+\varepsilon,\,-t/2}(u, v),$$

$$I^{(-)}(i\lambda+\varepsilon, m)=\frac{1}{\Gamma(-n+|m|+\varepsilon)}\times$$

$$\times\sum_{t=1,3}^{2n-1}(-1)^{\frac{t-1}{2}}\frac{\Gamma(1+t/2)\,\Gamma(n+1-t/2)}{\Gamma(1/2+t/2)}\times$$

$$\times\Gamma(1/2-n+t/2+\varepsilon)\,\overline{W}^{(-)}_{i\lambda+\varepsilon,\,-t/2,\,m}\overline{\Psi}^{(-)}_{i\lambda+\varepsilon,\,-t/2}(u, v).$$

Учитывая теперь свойство гамма-функций

$$\frac{\Gamma(z)}{\Gamma(z-n)}=(-1)^n\frac{\Gamma(n+1-z)}{\Gamma(1-z)}$$

и устремляя $\varepsilon\to 0$, получим

$$\Psi_{i\lambda,m}(r,\varphi)=(-1)^{n-|m|}(n-|m|)!\left\{\sum_{N_1=0,2}^{2n}\frac{\Gamma(1/2+N_1/2)\,\Gamma(1/2+N_2/2)}{(N_1/2)!\,(N_2/2)!}\times\right.$$

$$\times\overline{W}^{(+)}_{i\lambda,-N_1/2,m}\overline{\Psi}^{(+)}_{i\lambda,-N_1/2}(u, v)+$$

$$\left.+\sum_{N_1=1,3}^{2n-1}(-1)^{N_1}\frac{\Gamma(1+N_1/2)\,\Gamma(1+N_2/2)}{\left(\frac{N_1-1}{2}\right)!\left(\frac{N_2-1}{2}\right)!}\,\overline{W}^{(-)}_{i\lambda,-N_1/2,m}\overline{\Psi}^{(-)}_{i\lambda,-N_1/2}(u, v)\right\}$$

где $n=(N_1+N_2)/2$. Применяя, далее, к коэффициентам $\overline{W}^{(\pm)}_{i\lambda,-N_1/2,m}$ преобразование (8), переходя от вырожденных гипергеометрических функций к полиномам Эрмита, учитывая, что

$$\overline{\Psi}_{i\lambda,m}(r,\varphi)=\left(\frac{1}{2\lambda^3}\right)^{1/4}\sqrt{\frac{(n-|m|)!}{(n+|m|)!}}\,\Psi_{nm}(r,\varphi),$$

после некоторых вычислений приходим к разложению (17).

Мы признательны Г. С. Саакяну, Л. И. Пономареву, С. И. Виницкому и Л. Г. Мардояну за интересные обсуждения.

Литература

[1] *Zaslow B., Zandler M. E.*– Am. J. Phys., 1967, *35*, 1118–1119.
[2] *Cisneros A., McIntosh H. V.*– J. Math. Phys., 1968, *10*, 277–286.
[3] *Мардоян Л. Г., Погосян Г. С., Сисакян А. Н., Тер-Антонян В. М.*– ТМФ, 1984, *61*, № 1, 99–117.
[4] *Mardoyan L. G., Pogosyan G. S., Sissakian A. N., Ter-Antonyan V. M.*– J. Phys., 1985, *A18*, № 3, 455–466.
[5] *Мардоян Л. Г., Погосян Г. С., Сисакян А. Н., Тер-Антонян В. М.*– ТМФ, 1985, *63*, № 3, 406–416.
[6] *Мардоян Л. Г., Погосян Г. С., Сисакян А. Н., Тер-Антонян В. М.* К эллиптическому базису двумерного атома водорода. Препринт Р2-84-110. Дубна: ОИЯИ, 1984.
[7] *Арутюнян Г. М., Давтян Л. С., Мардоян Л. Г., Погосян Г. С., Тер-Антонян В. М.* Связь между волновыми функциями двумерных квантовых систем со скрытой симметрией. Препринт ПЛРФ-79-17. Ереван: ЕГУ, 1979.
[8] *Переломов А. М., Попов В. С.*– ЖЭТФ, 1968, *54*, 1799–1805.
[9] *Majundar S. D., Basu D.*– J. Phys. A, 1974, 7, 787–793.
[10] *Погосян Г. С., Тер-Антонян В. М.* Связь между сферическими и параболическими кулоновскими волновыми функциями в непрерывном спектре. Препринт Р2-80-318. Дубна: ОИЯИ, 1980.
[11] *Варшалович Д. А., Москалев А. Н., Херсонский В. К.* Квантовая теория углового момента. Л.: Наука, 1975.
[12] *Slater L.* Generalized Hypergeometric Functions. London, N.-Y.: Cambridge University Press, 1966.
[13] *Сеге Г.* Ортогональные многочлены. М.: Физматгиз, 1962.
[14] *Погосян Г. С., Тер-Антонян В. М.*– ТМФ, 1979, *40*, № 1, 140–143.

Объединенный институт
ядерных исследований

Поступила в редакцию
14.I.1985 г.

TWO-DIMENSIONAL HYDROGEN ATOM. RECIPROCAL EXPANSIONS OF POLAR AND PARABOLIC BASES IN CONTINUOUS SPECTRUM

Davtyan L. S., Sissakyan A. N., Pogosyan G. S., Ter-Antonyan V. M.

In the region of continuous spectrum we have found the expansion of the parabolic basis of two-dimensional hydrogen atom over the polar basis and the inverse expansion as well. We have also analysed the connection between these expansions and the corresponding expansions in the discrete spectrum. The group-theoretic meaning of the two-dimensional Coulomb scattering phase is established.