ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
Том 63, № 3
июнь, 1985

МЕЖБАЗИСНЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ В ДВУМЕРНОМ АТОМЕ ВОДОРОДА

Мардоян Л. Г. [1], Погосян Г. С. [1], Сисакян А. Н., Тер-Антонян В. М. [1]

Показано, что коэффициенты разложения параболических подбазисов двумерного атома водорода по полярным подбазисам выражаются через обобщенную гипергеометрическую функцию ${}_3F_2$ при значении аргумента $x=1$. Исследованы также разложения эллиптического базиса по полярному и параболическому. Прослежены пределы $R\to 0$ и $R\to\infty$ (R – параметр, входящий в определение эллиптических координат) в разложениях эллиптического базиса, и получены формулы, выражающие коэффициенты разложений эллиптического базиса через эллиптическую константу разделения.

1. Как известно [1–3], методом разделения переменных уравнение Шредингера для двумерного атома водорода решается в трех системах координат – полярной, параболической и эллиптической. Взаимные разложения одного из этих решений (базисов) по другому обсуждались с точки зрения добавочных интегралов движения в работе [4]. Здесь мы вычисляем коэффициенты межбазисных разложений, отталкиваясь от присущей двумерному атому водорода ортогональности радиальных волновых функций при данной энергии по второму (неэнергетическому) квантовому числу [5].

2. Рассмотрим сначала разложение параболического базиса по полярному. Разобьем оба базиса на подбазисы с данной четностью относительно преобразования $\varphi\to-\varphi$ и запишем связь между подбазисами в виде

$$\Psi_{Np}^{(\pm)}(u,v)=\sum_{m=0;1}^{N}\langle N,m|N,p\rangle_{\pm}\Psi_{Nm}^{(\pm)}(r,\varphi). \tag{1}$$

Координаты здесь выбраны так:

$$x=r\cos\varphi,\quad y=r\sin\varphi;\quad -\pi\leqslant\varphi\leqslant\pi,\quad 0\leqslant r<\infty,$$

$$u=\sqrt{2r}\cos\frac{\varphi}{2},\quad v=\sqrt{2r}\sin\frac{\varphi}{2};\quad 0\leqslant u<\infty,\quad -\infty<v<\infty.$$

Информация о подбазисах в кулоновской системе единиц ($\hbar=\mu=e=1$) дается формулами

$$\Psi_{Nm}^{(+)}(r,\varphi)=R_{Nm}(r)\frac{\cos m\varphi}{\sqrt{2\pi}},\quad 0\leqslant m\leqslant N, \tag{2a}$$

---

[1] Ереванский государственный университет.

(2б) $$\Psi^{(-)}_{Nm}(r,\varphi)=R_{Nm}(r)\,i\frac{\sin m\varphi}{\sqrt{2\pi}},\qquad 1\leqslant m\leqslant N,$$

(2в) $$R_{Nm}(r)=(2\omega)^{1/2}\sqrt{\frac{(N+m)!}{(N-m)!}}\frac{(2\omega r)^m}{(2m)!}e^{-\omega r}F(-N+m,2m+1,2\omega r),$$

(3) $$\Psi^{(\pm)}_{Np}(u,v)=\left(\frac{\omega^3}{\pi}\right)^{1/2}\frac{\exp\left\{-\frac{\omega}{2}(u^2+v^2)\right\}}{2^N\sqrt{(N+p)!(N-p)!}}\cdot H_{N+p}(\sqrt{\omega}u)H_{N-p}(\sqrt{\omega}v).$$

Квантовое число p для четного (нечетного) подбазиса пробегает значения $-N$, $-N+2,\ldots,N-2$, N ($-N+1$, $-N+3,\ldots N-3$, $N-1$), спектр энергий $E_N=-2/(2N+1)^2$, $N=0,1,\ldots$, а параметр $\omega=\sqrt{-2E_N}$. Индексы полиномов Эрмита в (3) для четного (нечетного) подбазиса четны (нечетны), и потому параболические подбазисы выражаются через вырожденные гипергеометрические функции:

(4а) $$\Psi^{(+)}_{Np}(u,v)=\left(\frac{\omega^3}{\pi}\right)^{1/2}\frac{(-1)^N}{2^N}\frac{\sqrt{(N+p)!(N-p)!}}{\left(\frac{N+p}{2}\right)!\left(\frac{N-p}{2}\right)!}\times$$
$$\times\exp\left\{-\frac{\omega}{2}(u^2+v^2)\right\}F\left(-\frac{N+p}{2};\frac{1}{2};\omega u^2\right)F\left(-\frac{N-p}{2};\frac{1}{2};\omega v^2\right),$$

(4б) $$\Psi^{(-)}_{Np}(u,v)=\left(\frac{\omega^3}{\pi}\right)^{1/2}\frac{(-1)^{N-1}}{2^N}\frac{\sqrt{(N+p)!(N-p)!}}{\left(\frac{N+p-1}{2}\right)!\left(\frac{N-p-1}{2}\right)!}4\omega uv\times$$
$$\times\exp\left\{-\frac{\omega}{2}(u^2+v^2)\right\}F\left(-\frac{N+p-1}{2};\frac{3}{2};\omega u^2\right)\times$$
$$\times F\left(-\frac{N-p-1}{2};\frac{3}{2};\omega v^2\right).$$

Ниже мы будем пользоваться обоими представлениями для параболических подбазисов.

Начнем с четного разложения. Пользуясь (1) и (4а) и переходя к пределу $r\to0$, имеем

(5) $$\langle N,m=0|N,p\rangle_+=\frac{(-1)^N}{2^N}\frac{\sqrt{(N+p)!(N-p)!}}{\left(\frac{N+p}{2}\right)!\left(\frac{N-p}{2}\right)!}.$$

Для вычисления коэффициентов $\langle N,\ m|N,\ p\rangle_+$ при $m\neq0$ устремим в обеих частях разложения (1) $\varphi\to\pi$ и воспользуемся присущей двумерному атому водорода ортогональностью радиальных волновых функций [5]:

(6) $$\int\limits_0^\infty R_{Nm}(r)R_{Nm'}(r)\frac{dr}{r}=\frac{\omega^3}{m}\delta_{mm'}.$$

Это позволит записать коэффициенты разложения в виде интеграла и после использования формулы

$$\int_0^\infty e^{-x}x^{m-1}F\left(-\frac{N-p}{2};\ \frac{1}{2};\ x\right)F(-N+m;\ 2m+1;\ x)\,dx = \tag{7}$$

$$=\frac{(2m)!}{2}\ \frac{N!}{(N+m)!}\ {}_3F_2\left\{\begin{matrix}-\frac{N-p}{2},\ m,\ -m\\ {}^1/_2,\ -N\end{matrix}\middle|\ 1\right\}$$

получить

$$\langle N,\ m\,|\,N,\ p\rangle_+ = \frac{(-1)^{N-m}}{2^{N-1}}\sqrt{\frac{(N+p)!\,(N-p)!}{(N+m)!\,(N-m)!}}\ \times \tag{8}$$

$$\times\frac{N!}{\left(\frac{N+p}{2}\right)!\left(\frac{N-p}{2}\right)!}\ {}_3F_2\left\{\begin{matrix}-\frac{N-p}{2},\ m,\ -m\\ {}^1/_2,\ -N\end{matrix}\middle|\ 1\right\}.$$

Вычисление коэффициентов $\langle N,\ m|N,\ p\rangle_-$ производится аналогично. Единственный добавочный момент заключается в учете предельного равенства

$$\frac{\sin mx}{\sin x}\xrightarrow{\ \pi\ }(-1)^{m+1}m.$$

Окончательный результат таков:

$$\langle N,\ m\,|\,N,\ p\rangle_- = i\,\frac{(-1)^{N-m}}{2^{N-2}}\,m\sqrt{\frac{(N+p)!\,(N-p)!}{(N+m)!\,(N-m)!}}\ \times \tag{9}$$

$$\times\frac{(N-1)!}{\left(\frac{N+p-1}{2}\right)!\left(\frac{N-p-1}{2}\right)!}\ \times$$

$$\times\ {}_3F_2\left\{\begin{matrix}-\frac{N-p-1}{2},\ m+1,\ 1-m\\ {}^3/_2,\ 1-N\end{matrix}\middle|\ 1\right\}.$$

Формулы (5), (8) и (9) можно записать в едином виде. Действительно, четырехкратно применяя тождество [6]

$${}_3F_2\left\{\begin{matrix}a,\ a',\ -N\\ c',\ 1-N-c\end{matrix}\middle|\ 1\right\} = \tag{10}$$

$$=\frac{\Gamma(c+a+N)\,\Gamma(c)}{\Gamma(c+a)\,\Gamma(c+N)}\ {}_3F_2\left\{\begin{matrix}a,\ c'-a',\ -N\\ c',\ c+a\end{matrix}\middle|\ 1\right\},$$

получим $(m\neq 0)$

$${}_3F_2\left\{\begin{matrix}-\frac{N-p-1}{2},\ 1+m,\ 1-m\\ {}^3/_2,\qquad 1-N\end{matrix}\middle|\ 1\right\} =$$

$$=-i\,\frac{N}{2m}\,\frac{\Gamma\left(\frac{N+p+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{N-p+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{N+p}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{N-p}{2}+1\right)}\ \times$$

$$\times\ {}_3F_2\left\{\begin{matrix}-\frac{N-p}{2},\ m,\ -m\\ {}^1/_2,\qquad -N\end{matrix}\middle|\ 1\right\}.$$

После этого легко написать единый ответ:

$$\langle N, m \mid N, p\rangle_{\pm} = \tag{11}$$
$$= (-1)^{N-m} \frac{N!}{2^{N-1}\Gamma\left(\frac{N+p}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{N-p}{2}+1\right)} \times$$
$$\times \sqrt{\frac{(N+p)!\,(N-p)!}{(N+m)!\,(N-m)!}} \times$$
$$\times\, {}_3F_2\left\{\begin{matrix} -\frac{N-p}{2}, & m, & -m \\ {}^1/_2, & & -N \end{matrix} \middle| 1\right\}\left(1-\frac{1}{2}\delta_{m,0}\right).$$

3. Эллиптические координаты связаны с полярными следующим образом:

$$\operatorname{ch}\xi = \frac{r}{R} + \sqrt{\frac{r^2}{R^2} - \frac{2r}{R}\cos\varphi + 1}, \tag{12а}$$

$$\cos\eta = \frac{r}{R} - \sqrt{\frac{r^2}{R^2} - \frac{2r}{R}\cos\varphi + 1}. \tag{12б}$$

Они изменяются в пределах $0 \leqslant \xi < \infty$, $-\pi \leqslant \eta \leqslant \pi$ $(R \geqslant 0)$. Подбазисы с данной четностью относительно преобразования $\eta \to -\eta$ даются выражениями [3]

$$\Psi_{Nq}^{(+)}(\xi, \eta; R) = C_{Nq}^{(+)}(R)\, hc_N{}^q\left(i\frac{\xi}{2} + \frac{\pi}{2}; -R\right) hc_N^{N-q}\left(\frac{\eta}{2}; R\right),$$

$$\Psi_{Nq}^{(-)}(\xi, \eta; R) = C_{Nq}^{(-)}(R)\, hs_N{}^q\left(i\frac{\xi}{2} + \frac{\pi}{2}; -R\right) hs_N^{N-q}\left(\frac{\eta}{2}; R\right),$$

в которых

$$hc_N{}^q(z, R) = \exp\left\{-\frac{\omega R}{2}\cos 2z\right\} \sum_{s=0}^{N} a_{2s}\left(\frac{1+\cos 2z}{2}\right)^s, \tag{13а}$$

$$hs_N{}^q(z, R) = \exp\left\{-\frac{\omega R}{2}\cos 2z\right\} \frac{\sin 2z}{2} \sum_{s=0}^{N-1} a_{2s+1}\left(\frac{1+\cos 2z}{2}\right)^s, \tag{13б}$$

а $C_{Nq}^{(\pm)}(R)$ — нормировочные константы. Коэффициенты a_{2s} и a_{2s+1} считаются известными (см. ниже пункт 6); в частности, $a_0 = 1$, $a_{-2} = 0$; $a_1 = 1$, $a_{-1} = 0$. Квантовое число q при данном N равно числу нулей угловой эллиптической функции, т. е. функции, зависящей от η. Для четного подбазиса $0 \leqslant q \leqslant N$, для нечетного q лежит в интервале $1 \leqslant q \leqslant N$.

Разложения эллиптических подбазисов по полярным имеют вид

$$\Psi_{Nq}^{(\pm)}(\xi, \eta; R) = \sum_{m=0;1}^{N} \langle N, m \mid N, q\rangle_{\pm} \Psi_{Nm}^{(\pm)}(r, \varphi). \tag{14}$$

Как и в пункте 2, устремляя r к нулю, получаем

$$\langle N, m=0 \mid N, q\rangle_{+} = \left(\frac{\pi}{\omega^3}\right)^{1/2} C_{Nq}^{(+)}(R). \tag{15}$$

Для остальных коэффициентов имеем

$$(16а)\qquad \langle N,m|N,q\rangle_+=(-1)^m\sqrt{2\pi}\,\frac{m}{\omega^3}C^{(+)}_{Nq}(R)e^{\omega R/2}\times$$

$$\times\int\limits_0^\infty hc_{N^q}\left(i\xi/2+\frac{\pi}{2},-R\right)R_{Nm}\left(\frac{R}{2}(\operatorname{ch}\xi-1)\right)\frac{\operatorname{sh}\xi}{\operatorname{ch}\xi-1}\,d\xi,$$

$$(16б)\qquad \langle N,m|N,q\rangle_-=i(-1)^m\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,C^{(-)}_{Nq}(R)e^{\omega R/2}\times$$

$$\times\int\limits_0^\infty hs_{N^q}\left(i\frac{\xi}{2}+\frac{\pi}{2},-R\right)R_{Nm}\left(\frac{R}{2}(\operatorname{ch}\xi-1)\right)d\xi.$$

Пользуясь формулами (13а), (13б), (2в) и интегрируя по $d\xi$, получаем

$$(17а)\qquad \langle N,m|N,q\rangle_+=(-1)^m\left(\frac{\pi}{\omega^3}\right)^{1/2}C^{(+)}_{Nq}(R)\,\frac{2N!}{\sqrt{(N+m)!\,(N-m)!}}\times$$

$$\times\sum_{s=0}^{m}\frac{a_{2s}(-R)}{(-2\omega R)^s}\,\frac{(-m)_s(m)_s}{(-N)_s},$$

$$(17б)\qquad \langle N,m|N,q\rangle_-=\frac{(-1)^m}{2\omega R}\left(\frac{\pi}{\omega^3}\right)^{1/2}\frac{m(N-1)!}{\sqrt{(N+m)!\,(N-m)!}}\,C^{(-)}_{Nq}(R)\times$$

$$\times\sum_{s=0}^{m-1}\frac{a_{2s+1}(-R)}{(-2\omega R)^s}\,\frac{(m+1)_s(1-m)_s}{(1-N)_s}.$$

4. Рассмотрим теперь разложение эллиптических подбазисов по параболическим

$$\Psi^{(\pm)}_{Nq}(\xi,\eta;R)=\sum_p\langle N,p|N,q\rangle_\pm\Psi^{(\pm)}_{Np}(u,v).$$

Переходя от параболических координат к эллиптическим

$$u^2=\frac{R}{2}(\operatorname{ch}\xi+1)(1+\cos\eta),\qquad v^2=\frac{R}{2}(\operatorname{ch}\xi-1)(1-\cos\eta),$$

выбирая η равным π и пользуясь ортонормируемостью полиномов Эрмита, получим

$$(18а)\qquad \langle N,\ p|N,\ q\rangle_+=(-1)^{\frac{N+p}{2}}\,\frac{2^{p+1}}{\omega}\,\frac{\left(\frac{N+p}{2}\right)!}{\sqrt{(N+p)!\,(N-p)!}}\,C^{(+)}_{Nq}(R)\times$$

$$\times\int\limits_0^\infty\exp\left\{-\frac{\omega R}{2}(\operatorname{ch}\xi-2)\right\}hc_{N^q}\left(i\frac{\xi}{2}+\frac{\pi}{2};\ -R\right)\times$$

$$\times H_{N-p}\left(\sqrt{\omega R(\operatorname{ch}\xi-1)}\right)\frac{\sqrt{R(\operatorname{ch}\xi+1)}}{2}\,d\xi,$$

(18б) $$\langle N,\ p\,|\,N,\ q\rangle_{-}=(-1)^{\frac{N+p-1}{2}}\,\frac{2^{p}}{\omega^{3/4}}\,\frac{\left(\frac{N+p-1}{2}\right)!}{\sqrt{(N+p)!\,(N-p)!}}\times$$

$$\times C^{(-)}_{Nq}(R)\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\exp\left\{-\frac{\omega R}{2}(\operatorname{ch}\xi-2)\right\}}{\sqrt{R(\operatorname{ch}\xi+1)}}\,hs_{N}^{N-q}\left(i\frac{\xi}{2}+\frac{\pi}{2};\,-R\right)\times$$

$$\times H_{N-p}\left(\sqrt{\omega R(\operatorname{ch}\xi-1)}\right)\frac{\sqrt{R(\operatorname{ch}\xi+1)}}{2}\,d\xi.$$

Выразим в этих формулах полиномы Эрмита через вырожденные гипергеометрические функции и воспользуемся разложениями (13а) и (13б). Это позволит нам провести интегрирование и получить

(19а) $$\langle N,\ p\,|\,N,\ q\rangle_{+}=(-1)^{\frac{N+p}{2}}\,\frac{2^{N}}{\omega^{3/4}}\,\frac{\left(\frac{N+p}{2}\right)!}{\sqrt{(N+p)!\,(N-p)!}}\,C^{(+)}_{Nq}(R)\times$$

$$\times\sum_{s=0}^{N}\frac{a_{2s}(-R)}{(-2\omega R)^{s}}\,\frac{\Gamma(s+1)\,\Gamma(s+{}^{1}/_{2})}{\Gamma\left(s+1-\frac{N-p}{2}\right)},$$

(19б) $$\langle N,\ p\,|\,N,\ q\rangle_{-}=(-1)^{\frac{N+p-1}{2}}\,\frac{2^{N-2}}{\omega^{5/4}R}\,\frac{\left(\frac{N+p-1}{2}\right)!}{\sqrt{(N+p)!\,(N-p)!}}\times$$

$$\times C^{(-)}_{Nq}(R)\sum_{s=0}^{N-1}\frac{a_{2s+1}(-R)}{(-2\omega R)^{s}}\,\frac{\Gamma(s+1)\,\Gamma(s+{}^{3}/_{2})}{\Gamma\left(s+1-\frac{N-p-1}{2}\right)}.$$

5. При $R\to 0$ эллиптические координаты переходят в полярные. Проследим за этим пределом в формулах (16) и (18). Из работы [3] известно, что при $R\to 0$

(20а) $$hc_{N}^{q}\left(i\frac{\xi}{2}+\frac{\pi}{2};\,-R\right)\to\left(\frac{2}{\omega R}\right)^{q}\frac{(2q)!}{(2\omega)^{3/4}}\sqrt{\frac{(N-q)!}{(N+q)!}}\,R_{Nq}(r),$$

(20б) $$hs_{N}^{q}\left(i\frac{\xi}{2}+\frac{\pi}{2};\,-R\right)\to -i\left(\frac{2}{\omega R}\right)^{q}\frac{(2q-1)!}{(2\omega)^{3/4}}\sqrt{\frac{(N-q)!}{(N+q)!}}\,R_{Nq}(r),$$

(20в) $$C^{(+)}_{Nq}(R)\to\frac{(-1)^{q}}{(2q)!}\left(\frac{8\omega^{3}}{\pi}\right)^{1/4}\left(\frac{\omega R}{2}\right)^{q}\sqrt{\frac{(N+q)!}{(N-q)!}},$$

(20г) $$C^{(-)}_{Nq}(R)\to\frac{(-1)^{q}}{(2q)!}\,2q^{2}\left(\frac{8\omega^{3}}{\pi}\right)^{1/4}\left(\frac{\omega R}{2}\right)^{q}\sqrt{\frac{(N+q)!}{(N-q)!}}.$$

Пользуясь этими формулами, сразу получаем

$$\langle N,\ m=0\,|\,N,\ q\rangle_{+}=2\sqrt{2}\,\delta_{q0},\qquad \langle N,\ m\,|\,N,\ q\rangle_{\pm}=\sqrt{2}\,\delta_{qm}.$$

Поставим теперь (20) в (18) и учтем (7). Тогда после двукратного применения формулы (10)

$$
{}_3F_2\left\{\begin{matrix} -\frac{N-p}{2}, & m+\frac{1}{2}, & -m+\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}, & \frac{1}{2}-N & \end{matrix}\middle| 1\right\}=
$$

$$
=\frac{\Gamma\left(\frac{N+p+1}{2}\right)N!}{\Gamma\left(N+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{N+p}{2}\right)}\,{}_3F_2\left\{\begin{matrix} -\frac{N-p}{2}, & m, & -m \\ \frac{1}{2}, & -N & \end{matrix}\middle| 1\right\},
$$

$$
{}_3F_2\left\{\begin{matrix} -\frac{N-p-1}{2}, & m+\frac{1}{2}, & -m+\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2}, & \frac{1}{2}-N & \end{matrix}\middle| 1\right\}=
$$

$$
=\frac{\Gamma\left(\frac{N+p+2}{2}\right)(N-1)!}{\Gamma\left(N+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{N+p-1}{2}\right)}\times
$$

$$
\times\,{}_3F_2\left\{\begin{matrix} -\frac{N-p-1}{2}, & 1+m, & 1-m \\ \frac{3}{2}, & 1-N & \end{matrix}\middle| 1\right\}
$$

приходим к выводу, что при $m\neq 0$

$$
\langle N,p|N,q\rangle_{\pm}\xrightarrow{R\to 0}\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\langle N,p|N,m\rangle.
$$

Фактор $1/\sqrt{2}$ возникает вследствие принятого нами условия нормировки

$$
\int|\Psi_{Nq}^{(\pm)}(\xi,\eta;R)|^2\,dv=1,\qquad \int|\Psi_{Nm}^{(\pm)}(r,\varphi)|^2\,dv={}^1/_2,\qquad m\neq 0.
$$

Рассмотрим теперь предел $R\to\infty$, в котором эллиптические координаты переходят в параболические. В этом пределе согласно работе [3]

$$
hc_N{}^q\left(i\frac{\xi}{2}+\frac{\pi}{2},\,-R\right)\to(-1)^{\frac{N-p}{2}}\frac{\left(\frac{N-p}{2}\right)!}{(N-p)!}\times
$$

$$
\times\exp\left\{-\frac{\omega R}{2}-\frac{\omega v^2}{2}\right\}H_{N-p}\left(\sqrt{\omega}v\right),
$$

$$
hs_N{}^q\left(i\frac{\xi}{2}+\frac{\pi}{2},\,-R\right)\to i(-1)^{\frac{N-p+1}{2}}\frac{\left(\frac{N-p-1}{2}\right)!}{(N-p)!}\times
$$

$$
\times\frac{\exp\left\{-\frac{\omega R}{2}-\frac{\omega v^2}{2}\right\}}{2\sqrt{2\omega R}}H_{N-p}\left(\sqrt{\omega}v\right),
$$

$$C_{Nq}^{(+)}(R)\to\frac{(-1)^N}{2^N}\left(\frac{\omega^3}{\pi}\right)^{1/4}\frac{\sqrt{(N+p)!(N-p)!}}{\left(\frac{N+p}{2}\right)!\left(\frac{N-p}{2}\right)!},$$

$$C_{Nq}^{(-)}(R)\to i\frac{(-1)^{N+1}}{2^N}\left(\frac{\omega^3}{\pi}\right)^{1/4}8\omega R\frac{\sqrt{(N+p)!(N-p)!}}{\left(\frac{N+p}{2}\right)!\left(\frac{N-p}{2}\right)!},$$

и поэтому

$$\langle Nm|Nq\rangle_\pm \xrightarrow{R\to\infty} \langle Nm|Np\rangle_\pm,$$

$$\langle Np|Nq\rangle_\pm \xrightarrow{R\to\infty} \delta_{p,2q-N}.$$

6. Вернемся к формулам (17) и (19). Согласно [3] коэффициенты a_{2s} и a_{2s+1} удовлетворяют трехчленным рекуррентным соотношениям

(21а) $$\alpha_{2s}a_{2s+2}+\beta_{2s}a_{2s}+R\gamma_{2s}a_{2s-2}=0,$$

$$\alpha_{2s}=(s+1)(s+{}^1/_2),\qquad \beta_{2s}=-s^2+[2s\omega+\omega/2-1]R-A'^{(+)}(R),$$

$$\gamma_{2s}=2\omega(-N+s-1),$$

(21б) $$\alpha_{2s+1}a_{2s+3}+\beta_{2s+1}a_{2s+1}+R\gamma_{2s+1}a_{2s-1}=0,$$

$$\alpha_{2s+1}=(s+1)(s+{}^3/_2),$$

$$\beta_{2s+1}=-(s+1)^2-[2s\omega+3\omega/2-1]R-A'^{(-)}(R),$$

$$\gamma_{2s+1}=2\omega(s-N),$$

в которых величины $A'^{(\pm)}$ определяются из уравнений

(22а) $$\begin{vmatrix} \beta_0 & \alpha_0 & & & \\ R\gamma_2 & \beta_2 & \alpha_2 & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & R\gamma_{2N-2} & \beta_{2N-2} & \alpha_{2N-2} \\ & & & R\gamma_{2N} & \beta_{2N} \end{vmatrix}=0,$$

(22б) $$\begin{vmatrix} \beta_1 & \alpha_1 & & & \\ R\gamma_3 & \beta_3 & \alpha_3 & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & R\gamma_{2N-3} & \beta_{2N-3} & \alpha_{2N-3} \\ & & & R\gamma_{2N-1} & \beta_{2N-1} \end{vmatrix}=0.$$

Квантовое число q, определяющее эллиптический базис, нумерует в порядке возрастания корни этих уравнений. Находя из (22) корни $A'^{(\pm)}_{Nq}(R)$ и далее определяя a_{2s} и a_{2s+1} из (21), можно построить коэффициенты $\langle Nm|Nq\rangle_\pm$ и $\langle Np|Nq\rangle_\pm$. Результаты таких вычислений приведены в таблицах 1—4.

В заключение выражаем искреннюю благодарность Я. А. Смородинскому, Л. И. Пономареву, А. В. Матвеенко, С. И. Виницкому за полезные обсуждения.

Таблица 1

N	m	$\langle Nm \mid Nq\rangle_+$	$A'^{(+)}$
0	0	1	$A'^{(+)}=0$
1	0	$\left\{\dfrac{A'^{(+)}+1}{2A'^{(+)}+1}\right\}^{1/2}$	$A'^{(+)}\left(A'^{(+)}+1\right)=\dfrac{4}{9}R^2$
1	1	$\dfrac{3}{\sqrt{2}}\dfrac{A'^{(+)}}{R}\left\{\dfrac{A'^{(+)}+1}{2A'^{(+)}+1}\right\}^{1/2}$	
2	0	$\left\{1+\dfrac{25}{12}\left(\dfrac{A'^{(+)}}{R}\right)^2+\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{A'^{(+)}}{A'^{(+)}+4}\right)^2\right\}^{-1/2}$	$A'^{(+)}\left(A'^{(+)}+1\right)\left(A'^{(+)}+4\right)=\dfrac{16R^2}{25}\left(A'^{(+)}+3\right)$
2	1	$\dfrac{5}{\sqrt{6}}\dfrac{A'^{(+)}}{R}\left\{1+\dfrac{25}{12}\left(\dfrac{A'^{(+)}}{R}\right)^2+\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{A'^{(+)}}{A'^{(+)}+4}\right)^2\right\}^{-1/2}$	
2	2	$\dfrac{2}{\sqrt{6}}\dfrac{A'^{(+)}}{A'^{(+)}+4}\left\{1+\dfrac{25}{12}\left(\dfrac{A'^{(+)}}{R}\right)^2+\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{A'^{(+)}}{A'^{(+)}+4}\right)^2\right\}^{-1/2}$	

Таблица 2

N	m	$\langle Nm \mid Nq\rangle_-$	$A^{(-)\prime}$
1	1	$-\sqrt{2}$	$A^{(-)\prime}=-1$
2	1	$-\sqrt{2}\left(\dfrac{A^{(-)\prime}+4}{2A^{(-)\prime}+5}\right)^{1/2}$	$\left(A^{(-)\prime}+1\right)\left(A^{(-)\prime}+4\right)=\dfrac{4}{25}R^2$
2	2	$-\dfrac{5}{\sqrt{2}}\dfrac{A^{(-)\prime}+1}{R}\left(\dfrac{A^{(-)\prime}+4}{2A^{(-)\prime}+5}\right)^{1/2}$	
3	1	$-\sqrt{2}\left\{1+\dfrac{49}{10}\left(\dfrac{A^{(-)\prime}+1}{R}\right)^2+\dfrac{3}{5}\left(\dfrac{A^{(-)\prime}+1}{A^{(-)\prime}+9}\right)^2\right\}^{-1/2}$	$\left(A^{(-)\prime}+1\right)\left(A^{(-)\prime}+4\right)\times\left(A^{(-)\prime}+9\right)=\dfrac{16R^2}{49}\left(A^{(-)\prime}+6\right)$
3	2	$-\dfrac{7}{\sqrt{5}}\dfrac{A^{(-)\prime}+1}{R}\left\{1+\dfrac{49}{10}\left(\dfrac{A^{(-)\prime}+1}{R}\right)^2+\dfrac{3}{5}\left(\dfrac{A^{(-)\prime}+1}{A^{(-)\prime}+9}\right)^2\right\}^{-1/2}$	
3	3	$-\sqrt{\dfrac{6}{5}}\dfrac{A^{(-)\prime}+1}{A^{(-)\prime}+9}\left\{1+\dfrac{49}{10}\left(\dfrac{A^{(-)\prime}+1}{R}\right)^2+\dfrac{3}{5}\left(\dfrac{A^{(-)\prime}+1}{A^{(-)\prime}+9}\right)^2\right\}^{-1/2}$	

Таблица 3

N	p	$\langle Np \mid Nq\rangle_+$	$A^{(+)'}$
0	0	1	$A^{(+)'}=0$
1	1	$\frac{3}{4R}\left(A^{(+)'}-\frac{2R}{3}\right)\left\{\frac{2(A^{(+)'}+1)}{2A^{(+)'}+1}\right\}^{1/2}$	$A^{(+)'}(A^{(+)'}+1)=\frac{4}{9}R^2$
1	-1	$-\frac{3}{4R}\left(A^{(+)'}+\frac{2R}{3}\right)\left\{\frac{2(A^{(+)'}+1)}{2A^{(+)'}+1}\right\}^{1/2}$	
2	2	$\frac{25}{24}\sqrt{\frac{3}{2}}\frac{A^{(+)'}}{R^2}\left(A^{(+)'}+1-\frac{4R}{5}\right)\left\{1+\frac{25}{12}\left(\frac{A^{(+)'}}{R}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{A^{(+)'}}{A^{(+)'}+4}\right)^2\right\}^{-1/2}$	
2	0	$\frac{2}{A^{(+)'}+4}\left\{1+\frac{25}{12}\left(\frac{A^{(+)'}}{R}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{A^{(+)'}}{A^{(+)'}+4}\right)^2\right\}^{-1/2}$	$A^{(+)'}(A^{(+)'}+1)(A^{(+)'}+4)=\frac{16R^2}{25}(A^{(+)'}+3)$
2	-2	$\frac{25}{24}\sqrt{\frac{3}{2}}\frac{A^{(+)'}}{R^2}\left(A^{(+)'}+1+\frac{4R}{5}\right)\left\{1+\frac{25}{12}\left(\frac{A^{(+)'}}{R}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{A^{(+)'}}{A^{(+)'}+4}\right)^2\right\}^{-1/2}$	

Таблица 4

N	p	$\langle Np \mid Nq\rangle_-$	$A^{(-)'}$
1	0	$-i$	$A^{(-)'}=1$
2	1	$-\frac{i}{\sqrt{2}}\frac{5}{2R}\left(A^{(-)'}+1-\frac{2R}{5}\right)\left(\frac{A^{(-)'}+4}{2A^{(-)'}+5}\right)^{1/2}$	$(A^{(-)'}+1)(A^{(-)'}+4)=\frac{4}{25}R^2$
2	-1	$\frac{i}{\sqrt{2}}\frac{5}{2R}\left(A^{(-)'}+1+\frac{2R}{5}\right)\left(\frac{A^{(-)}+4}{2A^{(-)}+5}\right)^{1/2}$	
3	2	$-i\frac{49}{8\sqrt{5}}\frac{A^{(-)'}+1}{R^2}\left(A^{(-)'}+4-\frac{4R}{7}\right)\left\{1+\frac{49}{10}\times\left(\frac{A^{(-)'}+1}{R}\right)^2+\frac{3}{5}\left(\frac{A^{(-)'}+1}{A^{(-)'}+9}\right)^2\right\}^{-1/2}$	
3	0	$-i\frac{2\sqrt{6}}{A^{(-)'}+9}\left\{1+\frac{49}{10}\left(\frac{A^{(-)'}+1}{R}\right)^2+\frac{3}{5}\left(\frac{A^{(-)'}+1}{A^{(-)}+9}\right)^2\right\}^{-1/2}$	$(A^{(-)'}+1)(A^{(-)'}+4)\times(A^{(-)'}+9)=\frac{16R^2}{49}(A^{(-)'}+6)$
3	-2	$-\frac{i}{\sqrt{5}}\frac{49}{8}\frac{A^{(-)'}+1}{R^2}\left(A^{(-)'}+4+\frac{4R}{7}\right)\times\left\{1+\frac{49}{10}\left(\frac{A^{(-)'}+1}{R}\right)^2+\frac{3}{5}\left(\frac{A^{(-)'}+1}{A^{(-)}+9}\right)^2\right\}^{-1/2}$	

Литература

[1] *Zaslow B., Zandler M. E.*– Amer. J. Phys., 1967, *35*, № 12, 1118–1119.
[2] *Cisneros A., McIntosh H. V.*– J. Math. Phys., 1968, *10*, № 2, 277–286.
[3] *Мардоян Л. Г., Погосян Г. С., Сисакян А. Н., Тер-Антонян В. М.*– ТМФ, 1984, *61*, № 1, 99–117.
[4] *Mardoyan L. G., Pogosyan G. S., Sissakian A. N., Ter-Antonyan V. M.*– J. Phys., 1985, *A18*, № 3, 455–467.
[5] *Мардоян Л. Г., Погосян Г. С., Тер-Антонян В. М.*– Изв. АН АрмССР, Физика, 1984, *19*, № 1, 3–9.
[6] *Bailey W. N.* Generalized Hypergeometric Series. Cambridge Tract., № 32. Cambridge, 1935.

Объединенный институт
ядерных исследований

Поступила в редакцию
1.III.1984 г.

INTERBASIS EXPANSIONS IN A TWO-DIMENSIONAL HYDROGEN ATOM

Mardoyan L. G., Pogosyan G. S., Sissakyan A. N., Ter-Antonyan V. M.

It is shown that the expansion coefficients of parabolic sub-bases of a two-dimensional hydrogen atom over polar sub-bases are expressed in terms of generalised hypergeometric function ${}_3F_2$ at the value of the argument $x=1$. Expansions of an elliptic basis over the polar and parabolic ones are studied as well. The limits $R \to 0$ and $R \to \infty$ (R being the parameter of the definition of elliptic coordinates) are traced in elliptic-basis expansions and formulas are found for the expansion coefficients of the elliptic basis in terms of the elliptic separation constant.