объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

P2-84-211

Л.Г.Мардоян,* Г.С.Погосян,* А.Н.Сисакян,
В.М.Тер-Антонян*

ЭЛЛИПТИЧЕСКИЙ БАЗИС КРУГОВОГО ОСЦИЛЛЯТОРА

Направлено в журнал "Nuovo Cimento, A"

* Ереванский государственный университет

1984

ВВЕДЕНИЕ

Как известно [1], задача о круговом осцилляторе решается точно в декартовых и полярных координатах. Эти решения являются предельными случаями более общего эллиптического базиса. Задача о круговом осцилляторе в эллиптических координатах не поддается точному аналитическому решению, т.к. она сводится к проблеме отыскания корней алгебраического уравнения произвольной степени. В настоящей работе развит общий подход к задаче, получены все формулы, на основе которых можно проводить численные расчеты; показано, каким образом в нужных пределах эллиптический базис переходит в декартовый и полярный; вычислены эллиптические волновые функции кругового осциллятора для низших квантовых чисел. Работа является продолжением предпринятого нами ранее изучения двумерных квантовых систем со скрытой симметрией [2-5].

1. ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ КООРДИНАТЫ

Эллиптические координаты ξ и η, с которыми мы дальше будем иметь дело, изменяются в пределах $0 \le \xi < \infty$, $0 \le \eta \le 2\pi$ и связаны с декартовыми координатами x и y следующим образом:

$$x = \frac{R}{2}\,\mathrm{ch}\xi\cos\eta, \qquad y = \frac{R}{2}\,\mathrm{sh}\xi\,\sin\eta\,. \qquad /1.1/$$

При $R \to 0$ и $R \to \infty$ выбранные таким образом координаты вырождаются в полярные и декартовы

$$\mathrm{ch}\xi \to \frac{2r}{R}, \qquad \cos\eta \to \cos\phi \qquad (R \to 0), \qquad /1.2а/$$

$$\mathrm{sh}\xi \to \frac{2y}{R}, \qquad \cos\eta \to \frac{2x}{R} \qquad (R \to \infty)\,. \qquad /1.2б/$$

Лапласиан и элемент двумерного объема даются формулами

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{8}{R^2(\mathrm{ch}2\xi - \cos2\eta)}\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\right),$$

$$dV = dxdy = \frac{R^2}{8}(\mathrm{ch}2\xi - \cos2\eta)\,d\xi\,d\eta\,.$$

2. РАЗДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕННЫХ

Для упрощения формул ниже принята система единиц, в которой $h = \mu = \omega = 1$. Обозначая через ϵ энергию кругового осциллятора, приходим к уравнению Шредингера

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\right)\psi + \left\{\frac{\epsilon R^2}{4}(\operatorname{ch}2\xi - \cos2\eta) - \frac{R^4}{64}(\operatorname{ch}^2 2\xi - \cos^2 2\eta)\right\}\psi = 0,$$

которое после подстановки $\psi(\xi, \eta; R^2) = X(\xi; R^2)\,Y(\eta; R^2)$ и введения константы разделения $A(R^2)$ расщепляется на два обыкновенных дифференциальных уравнения

$$\left(\frac{d^2}{d\xi^2} + \frac{\epsilon R^2}{4}\operatorname{ch}2\xi - \frac{R^4}{64}\operatorname{ch}^2 2\xi\right)X(\xi; R^2) = -A(R^2)X(\xi; R^2), \qquad /2.1а/$$

$$\left(\frac{d^2}{d\eta^2} - \frac{\epsilon R^2}{4}\cos2\eta + \frac{R^4}{64}\cos^2 2\eta\right)Y(\eta; R^2) = A(R^2)Y(\eta; R^2). \qquad /2.1б/$$

Уравнения /2.1а/ и /2.1б/ приводятся друг к другу заменой $\eta = i\xi$, и поэтому

$$\psi(\xi, \eta; R^2) = C(R^2)Z(i\xi; R^2)Z(\eta; R^2), \qquad /2.2/$$

где C - нормировочная постоянная, определяемая условием

$$\int |\psi(\xi, \eta; R^2)|^2 dV = 1, \qquad /2.3/$$

а $Z(\zeta; R^2)$ - функция, являющаяся решением уравнения

$$\left(\frac{d^2}{d\zeta^2} - \frac{\epsilon R^2}{4}\cos2\zeta + \frac{R^4}{64}\cos^2 2\zeta\right)Z(\zeta; R^2) = A(R^2)Z(\zeta; R^2), \qquad /2.4/$$

удовлетворяющая условию периодичности /однозначность/

$$Z(\zeta + 2\pi; -R^2) = Z(\zeta; R^2) \qquad /2.5/$$

и убывающая при $\zeta \to i\infty$ /финитность/.

3. РЕКУРРЕНТНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Введем функцию $W(\zeta; R^2)$, согласно

$$Z(\zeta; R^2) = e^{-\frac{R^2}{16}\cos2\zeta}\,W(\zeta; R^2),$$

и преобразуем /2.4/ в уравнение Айнса[6]*

$$\frac{d^2W}{d\zeta^2} + \frac{R^2}{4}\sin 2\zeta \frac{dW}{d\zeta} + [\frac{R^4}{64} - A(R^2) - \frac{R^2}{4}(\epsilon - 1)\cos 2\zeta]W = 0. \qquad /3.1/$$

Известно[7], что уравнение /3.1/ в общем случае имеет два типа решений:

$$W^{(+)}(\zeta; R^2) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(R^2)(\cos\zeta)^k, \qquad /3.2а/$$

$$W^{(-)}(\zeta; R^2) = \sin\zeta \sum_{k=0}^{\infty} b_k(R^2)(\cos\zeta)^k - \qquad /3.2б/$$

первое из которых четно, а второе - нечетно относительно замены $\zeta \to -\zeta$. Легко убедиться, что решения /3.2/ удовлетворяют условию периодичности /2.5/. Подстановка рядов /3.2/ в уравнение /3.1/ и доопределение коэффициентов a_k и b_k с помощью равенств $a_{-1} = a_{-2} = b_{-1} = b_{-2} = 0$ приводит к трехчленным рекуррентным соотношениям

$$(k+1)(k+2)a_{k+2} + \beta_k a_k + \frac{R^2}{2}(k - \epsilon - 1)a_{k-2} = 0, \qquad /3.3а/$$

$$(k+1)(k+2)b_{k+2} + \tilde{\beta}_k b_k + \frac{R^2}{2}(k - \epsilon)b_{k-2} = 0, \qquad /3.3б/$$

в которых

$$\beta_k = -k^2 + \frac{R^2}{4}(\epsilon - 2k - 1) + \frac{R^4}{64} - A(R^2), \qquad /3.4а/$$

$$\tilde{\beta}_k = -(k+1)^2 + \frac{R^2}{4}(\epsilon - 2k - 1) + \frac{R^4}{64} - A(R^2). \qquad /3.4б/$$

Из /3.3/ следует, что для определения коэффициентов a_k и b_k необходимо иметь четыре начальных условия. Выберем эти условия в виде $a_0 = a_1 = b_0 = b_1 = 1$ и расщепим каждое из соотношений /3.3/ на два класса - с четным и нечетным k.

4. СПЕКТР ЭНЕРГИЙ

Проследим теперь за тем, каким образом условие финитности выделяет дискретный спектр энергий. Пусть для определенности $k = 2s$, и речь идет о коэффициентах a_{2s}. При больших a из /3.3а/ и /3.4а/

---

*К уравнению Айнса приводит также задача о двумерном атоме водорода в эллиптических координатах[2]. В этой задаче условие периодичности, аналогичное /2.5/, отбирает лишь определенный тип решений уравнения Айнса.

имеем

$$(s^2+\frac{3}{2}s)\frac{a_{2s+2}}{a_{2s}}\frac{a_{2s}}{a_{2s-2}}-(s^2+\frac{R^2}{4}s)\frac{a_{2s}}{a_{2s-2}}+\frac{R^2}{4}s=0.$$

Так как $s^{-1}\ll 1$, то справедливы разложения

$$\frac{a_{2s+2}}{a_{2s}}\sim c_0+\frac{c_1}{s}+o(\frac{1}{s^2}),\quad \frac{a_{2s}}{a_{2s-2}}\sim c_0+\frac{c_1}{s-1}+o(\frac{1}{s^2})=c_0+\frac{c_1}{s}+o(\frac{1}{s^2}),$$

которые вместе с предыдущим соотношением приводят к двум случаям:

а/ $c_0=0,\ c_1=\frac{R^2}{4};\ a_{2s}\sim(\frac{R^2}{4})^s\frac{1}{s!}$;

б/ $c_0=1,\ c_1=-\frac{3}{2},\ a_{2s}\sim s^{-3/2}$.

Легко убедиться, что в обоих случаях $Z(\zeta;R^2)\to\infty$ при $\zeta\to i\infty$. Отсюда следует, что ряд /3,2a/ должен обрываться. Аналогичные рассуждения без труда воспроизводятся и для остальных трех рекуррентных соотношений и дают тот же результат. Условие обрывания рядов /3.2/ приводит к спектру энергий

$$\epsilon_N=N+1,\quad N=0,1,2,\dots\ . \qquad /4.1/$$

В зависимости от четности числа N в качестве допустимых условием финитности решений выступают следующие четыре полинома Айнса:

$$C_{2n}^{2q}(\zeta;R^2)=\sum_{s=0}^{n}a_{2s}(R^2)(\cos\zeta)^{2s},\quad N=2n;$$

$$C_{2n+1}^{2q+1}(\zeta;R^2)=\sum_{s=0}^{n}a_{2s+1}(R^2)(\cos\zeta)^{2s+1},\quad N=2n+1;$$

$$S_{2n+1}^{2q+1}(\zeta;R^2)=\sin\zeta\sum_{s=0}^{n}b_{2s}(R^2)(\cos\zeta)^{2s},N=2n+1; \qquad /4.2/$$

$$S_{2n+2}^{2q+2}(\zeta;R^2)=\sin\zeta\sum_{s=0}^{n}b_{2s+1}(R^2)(\cos\zeta)^{2s+1},\quad N=2n+2.$$

5. ЭЛЛИПТИЧЕСКАЯ КОНСТАНТА РАЗДЕЛЕНИЯ

При обрывании рядов /3.2/ каждое из рекуррентных соотношений /$k=2s$; $k=2s+1$/ /3.3/ превращается в систему из $n+1$ линейных однородных уравнений относительно коэффициентов a_{2s}, a_{2s+1}, b_{2s} и b_{2s+1}. Приравнивание соответствующих детерминантов к нулю –

$$N = 2n \qquad \begin{vmatrix} \beta_0 & 2 & 0 & & \bigcirc \\ -nR^2 & \beta_2 & 12 & & \\ - & - & - & - & - \\ \bigcirc & & -2R^2 & \beta_{2n-2} & 2n(2n-1) \\ & & 0 & -R^2 & \beta_{2n} \end{vmatrix} = 0, \qquad N = 2n+1 \qquad \begin{vmatrix} \beta_1 & 8 & 0 & & \bigcirc \\ -nR^2 & \beta_3 & 20 & & \\ - & - & - & - & - \\ & & -2R^2 & \beta_{2n-1} & 2n(2n+1) \\ & & 0 & -R^2 & \beta_{2n+1} \end{vmatrix} = 0, \qquad /5.1/$$

$$N = 2n+1 \qquad \begin{vmatrix} \tilde{\beta}_0 & 2 & 0 & & \bigcirc \\ -nR^2 & \tilde{\beta}_2 & 12 & & \\ - & - & - & - & - \\ \bigcirc & & -2R^2 & \tilde{\beta}_{2n-2} & 2n(2n-1) \\ & & 0 & -R^2 & \tilde{\beta}_{2n} \end{vmatrix} = 0, \qquad N = 2n+2 \qquad \begin{vmatrix} \tilde{\beta}_1 & 8 & 0 & & \bigcirc \\ -nR^2 & \tilde{\beta}_3 & 20 & & \\ - & - & - & - & - \\ \bigcirc & & -2R^2 & \tilde{\beta}_{2n-1} & 2n(2n+1) \\ & & 0 & -R^2 & \tilde{\beta}_{2n+1} \end{vmatrix} = 0 -$$

приводит к четырем алгебраическим уравнениям $(n+1)$- й степени, из которых определяются собственные значения константы разделения $A^t_N(R^2)$. Для решений /4.2/ индекс t принимает значения: $2q$, $2q+1$, $2q+1$, $2q+2$, причем во всех случаях $0 \le q \le n$.

6. ЭЛЛИПТИЧЕСКИЙ БАЗИС

В соответствии со сказанным в пункте 5 эллиптический базис /2.2/ разбивается на следующие четыре подбазиса:

$$\psi^{(1,1)} = C^{(1,1)}\, hc^{2q}_{2n}(i\xi;R^2)\, hc^{2q}_{2n}(\eta;R^2), \quad N = 2n,\ D = n+1 = \frac{N+2}{2}, \qquad /6.1а/$$

$$\psi^{(1,2)} = C^{(1,2)}\, hc^{2q+1}_{2n+1}(i\xi;R^2)\, hc^{2q+1}_{2n+1}(\eta;R^2), \quad N = 2n+1,\ D = n+1 = \frac{N+1}{2}, \qquad /6.1б/$$

$$\psi^{(2,1)} = C^{(2,1)}\, hs^{2q+1}_{2n+1}(i\xi;R^2)\, hs^{2q+1}_{2n+1}(\eta;R^2), \quad N = 2n+1,\ D = n+1 = \frac{N+1}{2}, \qquad /6.1в/$$

$$\psi^{(2,2)} = C^{(2,2)}\, hs^{2q+2}_{2n+2}(i\xi;R^2)\, hs^{2q+2}_{2n+2}(\eta;R^2), \quad N = 2n+2,\ D = n+1 = \frac{N}{2}. \qquad /6.1г/$$

Здесь D - число состояний при данном N, а через hc и hs обозначены полиномы /4.2/, умноженные на фактор $\exp(-\frac{R^2}{16}\cos 2\zeta)$.

Волновые функции /6.1/, как собственные функции гамильтониана, ортогональны при $N \neq N'$: $\int \psi^{*(i,j)}_{N,t} \cdot \psi^{(i,j)}_{N',t}\, dV = 0$.

Из теории Штурма-Лиувилля следуют равенства

$$\int_0^{\infty} h^*c_j^i(i\xi;R^2)h_j^{i'}c(i\xi;R^2)d\xi = \int_0^{\infty} h^*s_j^i(i\xi;R^2)hs_j^{i'}(i\xi;R^2)d\xi = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} h^*c_j^i(\eta;R^2)hc_j^{i'}(\eta;R^2)d\eta = \int_0^{2\pi} h^*s^i(\eta;R^2)h_{j'}^{i'}s(\eta;R^2)d\eta = 0,$$

пользуясь которыми легко доказать, что при $t \neq t'$ $\int \overset{*}{\psi}{}_{N,t}^{(i,j)} \cdot \psi_{N,t'}^{(i,j)} dV = 0$.

Уравнение /2.4/ формулирует задачу на собственные значения константы разделения $A(R^2)$ и соответствующие им собственные функции. Поскольку оператор, стоящий в левой части уравнения /2.4/, инвариантен при преобразовании

$$\zeta \to \zeta + \frac{\pi}{2}, \quad R^2 \to -R^2, \qquad /6.2/$$

то при замене $R^2 \to -R^2$ совокупность собственных значений константы разделения $A(R^2)$ остается прежней; меняется, вообще говоря, лишь их нумерация: $A_N^t(R^2) = A_N^{t'}(-R^2)$. Это обстоятельство приводит к тому, что преобразование /6.2/ переводит решения /4.2/ друг в друга. Установлено следующее правило соответствия [7]:

$$hc_{2n}^{2q}(\zeta+\frac{\pi}{2};-R^2) \to hc_{2n}^{2q'}(\zeta;R^2), \qquad hc_{2n+1}^{2q+1}(\zeta+\frac{\pi}{2};-R^2) \to hs_{2n+1}^{2q'+1}(\zeta;R^2),$$

$$hs_{2n+1}^{2q+1}(\zeta+\frac{\pi}{2};-R^2) \to hc_{2n+1}^{2q'+1}(\zeta;R^2), \qquad hs_{2n+2}^{2q+2}(\zeta+\frac{\pi}{2};-R^2) \to hs_{2n+2}^{2q'+2}(\zeta;R\ ). \qquad /6.3/$$

Из /6.3/ заключаем, что эллиптический базис /6.1/ можно представить в виде

$$\psi^{(1,1)} = C^{(1,1)}\, hc_{2n}^{2q}(i\xi+\frac{\pi}{2};-R^2)hc_{2n}^{2q'}(\eta;R^2), \qquad /6.4а/$$

$$\psi^{(1,2)} = C^{(1,2)}\, hs_{2n+1}^{2q+1}(i\xi+\frac{\pi}{2};-R^2)hc_{2n+1}^{2q'+1}(\eta;R^2), \qquad /6.4б/$$

$$\psi^{(2,1)} = C^{(2,1)}\, hc_{2n+1}^{2q+1}(i\xi+\frac{\pi}{2};-R^2)hs_{2n+1}^{2q'+1}(\eta;R^2), \qquad /6.4в/$$

$$\psi^{(2,2)} = C^{(2,2)}\, hs_{2n+2}^{2q+2}(i\xi+\frac{\pi}{2};-R^2)hs_{2n+2}^{2q'+2}(\eta;R^2). \qquad /6.4г/$$

7. ПОЛЯРНЫЙ И ДЕКАРТОВ ПРЕДЕЛЫ

Проследим за тем, как из формул /6.4/ в пределах $R \to 0$ и $R \to \infty$ получаются полярные и декартовы волновые функции кругового осциллятора. Из /3.3/, /3.4/ и /5.1/ следует, что при $R \to 0$ каждое из четырех трехчленных рекуррентных соотношений /3.3/ ($k = 2s$; $k = 2s+1$) расщепляется на два двухчленных:

$$(2s+1)(2s+2)a_{2s+2}+4(q+s)(q-s)a_{2s}=0,$$
$$(2s+2)(2s+3)a_{2s+3}+4(q+s+1)(q-s)a_{2s+1}=0,$$
$$(2s+1)(2s+2)b_{2s+2}+4(q+s+1)(q-s)b_{2s}=0, \qquad (0\le s\le q-1); \qquad /7.1а/$$
$$(2s+2)(2s+3)b_{2s+3}+4(q+s+2)(q-s)b_{2s+1}=0;$$

$$4(q+s)(q-s)a_{2s}+R^2(s-n-1)a_{2s-2}=0,$$
$$4(q+s+1)(q-s)a_{2s+1}+R^2(s-n-1)a_{2s-1}=0,$$
$$4(q+s+1)(q-s)b_{2s}+R^2(s-n-1)b_{2s-2}=0, \qquad (q+1\le s\le n). \qquad /7.1б/$$
$$4(q+s+2)(q-s)b_{2s+1}+R^2(s-n-1)b_{2s-1}=0;$$

Преобразуя /7.1/, имеем

$$a_{2s}(0)=\frac{(q)_s(-q)_s}{s!(\frac{1}{2})_s}, \qquad a_{2s+1}(0)=\frac{(q+1)_s(-q)_s}{s!(\frac{3}{2})_s};$$
$$(0\le s\le q).$$
$$b_{2s}(0)=\frac{(q+1)_s(-q)_s}{s!(\frac{1}{2})_s}, \quad b_{2s+1}(0)=\frac{(q+2)_s(-q)_s}{s!(\frac{3}{2})_s}; \qquad /7.2а/$$

$$a_{2s}(-R^2)\xrightarrow{R\to 0}(-1)^q\frac{2^{2q-1}(q-n)_{s-q}}{(s-q)!(2q+1)_{s-q}}\left(-\frac{R^2}{4}\right)^{s-q};$$

$$a_{2s+1}(-R^2)\xrightarrow{R\to 0}\frac{(-1)^q 2^{2q}}{2q+1}\frac{(q-n)_{s-q}}{(s-q)!(2q+2)_{s-q}}\left(-\frac{R^2}{4}\right)^{s-q};$$

$$b_{2s}(-R^2)\xrightarrow{R\to 0}\frac{(-1)^q 2^{2q}(q-n)_{s-q}}{(s-q)!\ (2q+2)_{s-q}}\left(-\frac{R^2}{4}\right)^{s-q}; \qquad (q+1\le s\le n).$$

$$/7.2б/$$

$$b_{2s+1}(-R^2)\xrightarrow{R\to 0}\frac{(-1)^q 2^{2q}}{q+1}\frac{(q-n)_{s-q}}{(s-q)!(2q+3)_{s-q}}\left(-\frac{R^2}{4}\right)^{s-q};$$

Пользуясь формулами /1.2а/ и /7.2/ и учитывая соотношения /8/

$$\cos az=F\left(\frac{a}{2},-\frac{a}{2};\frac{1}{2};\sin^2 z\right)=\cos z\,F\left(\frac{1}{2}+\frac{a}{2},\frac{1}{2}-\frac{a}{2};\frac{1}{2};\sin^2 z\right),$$
$$\sin az=a\sin z\,F\left(\frac{1}{2}+\frac{a}{2},\frac{1}{2}-\frac{a}{2};\frac{3}{2};\sin^2 z\right)=a\sin z\cos z\,F\left(1+\frac{a}{2},1-\frac{a}{2};\frac{3}{2};\sin^2 z\right),$$

приходим к следующему поведению функций hc и hs при $R \to 0$:

$$hc_{2n}^{2q}(\eta;0) = (-1)^q \cos 2q\phi, \qquad hc_{2n+1}^{2q+1}(\eta;0) = \frac{(-1)^q}{2q+1}\cos(2q+1)\phi,$$

$$hs_{2n+1}^{2q+1}(\eta;0) = (-1)^q \sin(2q+1)\phi, \quad hs_{2n+2}^{2q+2}(\eta;0) = \frac{(-1)^q}{2q+2}\sin(2q+2)\phi,$$

$$h_{2n}^{2q}(i\xi + \frac{\pi}{2}; -R^2) \xrightarrow{R\to 0} \frac{2^{4q-1}}{R^{2q}} e^{-r^2/2} r^{2q} F(q-n, 2q+1, r^2) + O(\frac{1}{R^{2q-2}}),$$

$$hc_{2n+1}^{2q+1}(i\xi + \frac{\pi}{2}; -R^2) \xrightarrow{R\to 0} -i\frac{2^{4q+1}}{R^{2q+1}}\,\frac{1}{2q+1} e^{-r^2/2} r^{2q+1} F(q-n, 2q+2; r^2) + O(\frac{1}{R^{2q-1}}),$$

$$hs_{2n+1}^{2q+1}(i\xi + \frac{\pi}{2}; -R^2) \xrightarrow{R\to 0} \frac{2^{4q+1}}{R^{2q+1}} e^{-r^2/2} r^{2q+1} F(q-n, 2q+2; r^2) + O(\frac{1}{R^{2q-1}}),$$

$$hs_{2n+2}^{2q+2}(i\xi + \frac{\pi}{2}; -R^2) \xrightarrow{R\to 0} -i\frac{2^{4q+3}}{R^{2q+2}} e^{-r^2/2} r^{2q+2} F(q-n, 2q+3, r^2) + O(\frac{1}{R^{2q-1}}).$$

Отсюда из условия нормировки /2.3/ видно, что эллиптический базис /6.4/ переходит при $R \to 0$ в полярный $(0 \le m \le N)$

$$\psi_{Nm}^{(\pm)}(r,\phi) \sim r^m e^{-r^2/2} F(-\frac{N-m}{2}, m+1, r^2) \begin{Bmatrix} \cos m\phi \\ i \sin m\phi \end{Bmatrix}$$

и что в том же пределе

$$C^{(1,1)}(R^2) \sim (R)^{2q}, \quad C^{(1,2)}(R^2) \sim C^{(2,1)}(R^2) \sim R^{2q+1}, \; C^{(2,2)}(R^2) \sim R^{2q+2}.$$

Устремим теперь в /3.4/ и /5.1/ R к бесконечности. Тогда вместо /3.3/ имеем

$$(2s+1)(2s+2)a_{2s+2} + R^2(q-s)a_{2s} = 0, \quad (q-s)a_{2s} + (s-n-1)a_{2s-2} = 0,$$

$$(2s+2)(2s+3)a_{2s+3} + R^2(q-s)a_{2s+1} = 0, \; (q-s)a_{2s} + (s-n-1)a_{2s-2} = 0,$$

/7.3/

$$(2s+1)(2s+2)b_{2s+2} + R^2(q-s)b_{2s} = 0, \quad (q-s)b_{2s} + (s-n-1)b_{2s-2} = 0,$$

$$(2s+2)(2s+3)b_{2s+3} + R^2(q-s)b_{2s+1} = 0, \; (q-s)b_{2s+1} + (s-n-1)b_{2s-1} = 0$$

и еще восемь рекуррентных соотношений, получающихся из /7.3/ заменой $q \to q'$, $R^2 \to -R^2$. Преобразуя эти рекуррентные соотношения и учитывая /1.26/, приходим к формулам $(R \to \infty)$

$$c_{2n}^{2q}(\eta;R^2) = s_{2n+1}^{2q+1}(\eta;R^2) \to F(-q,\frac{1}{2};x^2),$$

$$c_{2n+1}^{2q+1}(\eta;R^2) = s_{2n+2}^{2q+2}(\eta;R^2) = \frac{2x}{R}F(-q,\frac{3}{2};x^2),$$

$$c_{2n}^{2q'}(i\xi+\frac{\pi}{2};-R^2) = s_{2n+1}^{2q'+1}(i\xi+\frac{\pi}{2};-R^2) \to F(-q',\frac{1}{2};y^2),$$

$$c_{2n+1}^{2q'+1}(i\xi+\frac{\pi}{2};-R^2) = s_{2n+2}^{2q'+2}(i\xi+\frac{\pi}{2};-R^2) \to -i\frac{2y}{R}F(-q';\frac{3}{2},y^2),$$

которые вместе с условием нормировки /2.3/ показывают, что эллиптический базис переходит при $R \to \infty$ в декартов:

$$\psi_{n_1 n_2}(x,y) \sim e^{-(x^2+y^2)/2}\, H_{n_1}(x)\, H_{n_2}(y)$$

и что в том же пределе

$$C^{(1,1)}(R^2) \sim \mathrm{const},\quad C^{(1,2)}(R^2) \sim C^{(2,1)}(R^2) \sim R,\quad C^{(2,2)}(R^2) \sim R^2.$$

8. ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ

Уравнения /5.1/ в общем случае аналитически не решаются. Ниже мы приводим в таблицах информацию об ортонормированном эллиптическом базисе для низших квантовых чисел $(A' = A(R^2) - \frac{R4}{64})$.

Таблица 1

N	$\Psi^{(1,1)}(\xi,\eta;R^2)$	A'
0	$\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-\frac{R^2}{16}(\mathrm{ch}\,2\xi+\cos 2\eta)}$	$A' = 0$
2	$-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\{\frac{A'+4}{A'+2}\right\}e^{-\frac{R^2}{16}(\mathrm{ch}\,2\xi+\cos 2\eta)}\times$ $\times\left\{1+\frac{1}{2}(A'-\frac{R^2}{2})\cos^2\eta\right\}\left\{1-\frac{1}{2}(A'+\frac{R^2}{2})\mathrm{sh}^2\xi\right\}$	$A'(A'+4)=\frac{R^2}{4}$
4	$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left\{1+\frac{4}{3}(\frac{A'}{R})^2+\frac{1}{3}(\frac{A'}{A'+16})^2\right\}e^{-\frac{R^2}{16}(\mathrm{ch}\,2\xi+\cos 2\eta)}\times$ $\times\left\{1+\frac{1}{2}(A'-R^2)\cos^2\eta+\frac{A}{24}(A+4-R^2)\cos\eta\right\}\times$ $\times\left\{1-\frac{1}{2}(A'+R^2)\mathrm{sh}^2\xi+\frac{A'}{24}(A'+4+R^2)\mathrm{sh}^2\xi\right\}$	$A'(A'+4)(A'+16)=$ $=R^4(A'+12)$

Таблица 2

N	$\Psi^{(1,2)}(\xi,\eta;R^2)$	A'
1	$\frac{R}{\sqrt{2\pi}}\cos\eta\,\mathrm{ch}\,\xi\, e^{-\frac{R^2}{16}(\mathrm{ch}2\xi+\cos 2\eta)}$	$A'=-1-\frac{R^2}{4}$
3	$\frac{4}{\sqrt{3\pi}}\frac{A'+9}{R}\left\{1+\frac{16}{3}\left(\frac{A'+9}{R^2}\right)^2\right\}^{-1/2}\mathrm{ch}\,\xi\cos\eta\, e^{-\frac{R^2}{16}(\mathrm{ch}2\xi+\cos 2\eta)}\times$ $\times\left\{1+\frac{1}{6}(A'+1-\frac{R^2}{4})\cos^2\eta\right\}\left\{1-\frac{1}{2}(A'+1+\frac{3R^2}{4})\mathrm{sh}^2\xi\right\}$	$(A'+1)(A'+9)=$ $=-\frac{R^2}{2}(A'+9)+\frac{3R^4}{16}$
5	$\sqrt{\frac{3}{2\pi}}R\left\{1+2\left(\frac{A'+1}{R^2}+\frac{3}{4}\right)^2+\frac{5}{8}\left(\frac{R^2}{A'+25}\right)^2\left(\frac{A'+1}{R^2}+\frac{3}{4}\right)^2\right\}^{-1/2}$ $\cos\eta\,\mathrm{ch}\,\xi\, e^{-\frac{R^2}{16}(\mathrm{ch}2\xi+\cos 2\eta)}\left\{1+\frac{1}{6}(A'+1-\frac{3R^2}{4})\cos^2\eta+\right.$ $\left.+\frac{1}{120}\left[(A'+1-\frac{3R^2}{4})(A'+9+\frac{R^2}{4})+12R^2\right]\cos^4\eta\right\}\times$ $\times\left\{1-\frac{1}{2}(A'+1+\frac{5R^2}{4})\mathrm{sh}^2\xi+\frac{1}{24}\left[(A'+1+\frac{5R^2}{4})(A'+9+\frac{R^2}{4})-4R^2\right]\mathrm{sh}^4\xi\right\}$	$(A'+1)(A'+9)(A'+25)=$ $=-\frac{3R^2}{4}(A'+9)(A'+25)+$ $+\frac{R^4}{16}(13A'+205)+$ $+\frac{15R^6}{64}$

Таблица 3

N	$\Psi^{(2,1)}(\xi,\eta;R^2)$	A'
1	$i\frac{R}{\sqrt{2\pi}}\sin\eta\,\mathrm{sh}\,\xi\, e^{-\frac{R^2}{16}(\mathrm{ch}2\xi+\cos 2\eta)}$	$A'=-1+\frac{R^2}{4}$
3	$-i\frac{R}{\sqrt{\pi}}\left\{1+\frac{3}{16}\left(\frac{R^2}{A'+9}\right)^2\right\}^{-1/2}\sin\eta\,\mathrm{sh}\,\xi\, e^{-\frac{R^2}{16}(\mathrm{ch}2\xi+\cos 2\eta)}\times$ $\times\left\{1+\frac{1}{2}(A'+1-\frac{3R^2}{4})\cos^2\eta\right\}\left\{1-\frac{1}{6}(A'+1+\frac{R^2}{4})\mathrm{sh}^2\xi\right\}$	$(A'+1)(A'+9)=$ $=\frac{R^2}{2}(A'+9)+\frac{3R^4}{16}$
5	$i\sqrt{\frac{3}{2\pi}}R\left\{1+2\left(\frac{A'+1}{R^2}-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{5}{2}\left(\frac{R^2}{A'+25}\right)^2\left(\frac{A'+1}{R^2}-\frac{3}{4}\right)^2\right\}^{-1/2}\times$ $\times\sin\eta\,\mathrm{sh}\,\xi\, e^{-\frac{R^2}{16}(\mathrm{ch}2\xi+\cos 2\eta)}\left\{1+\frac{1}{2}(A'+1-\frac{5R^2}{4})\cos^2\eta+\right.$ $\left.+\frac{1}{24}\left[(A'+1-\frac{5R^2}{4})(A'+9-\frac{R^2}{4})+4R^2\right]\cos^4\eta\right\}\times$ $\times\left\{1-\frac{1}{6}(A'+1+\frac{3R^2}{4})\mathrm{sh}^2\xi+\frac{1}{120}\left[(A'+1-\frac{3R^2}{4})(A'+9-\frac{R^2}{4})-12R^2\right]\mathrm{sh}^4\xi\right\}$	$(A'+1)(A'+9)(A'+25)=$ $=\frac{3R^2}{4}(A'+9)(A+25)+$ $+\frac{R^4}{16}(13A'+205)-$ $-\frac{15R^6}{64}$

Таблица 4

N	$\psi^{(2,2)}(\xi,\eta;R^2)$	A'
2	$\frac{i}{8}\sqrt{\frac{2}{\pi}}R^2\sin 2\eta\,\mathrm{sh}\,2\xi\, e^{-\frac{R^2}{16}(\mathrm{ch}\,2\xi+\cos 2\eta)}$	$A'=-4$
4	$-i\sqrt{\frac{6}{\pi}}\,\frac{R}{16}\left\{\frac{A'+16}{A+10}\right\}^{1/2}\sin 2\eta\,\mathrm{sh}\,2\xi\, e^{-\frac{R^2}{16}(\mathrm{ch}\,2\xi+\cos 2\eta)}\times$ $\times\left\{1+\frac{1}{6}(A'+4-\frac{R^2}{2})\cos^2\eta\right\}\left\{1-\frac{1}{6}(A'+4+\frac{R^2}{2})\mathrm{sh}^2\xi\right\}$	$(A'+4)(A'+16)=$ $=\frac{R^4}{4}$
6	$i\sqrt{\frac{3}{2\pi}}\,\frac{R}{4}\left\{1+\frac{8}{5}(\frac{A'+4}{R})^2+\frac{3}{5}(\frac{A'+4}{A'+36})^2\right\}^{-1/2}\sin 2\eta\,\mathrm{sh}\,2\xi\times$ $\times e^{-\frac{R^2}{16}(\mathrm{ch}\,2\xi+\cos 2\eta)}\left\{1+\frac{1}{6}(A'+4-R^2)\cos^2\eta\,\frac{A'+4}{120}(A'+16-R^2)\cos^4\eta\right\}\times$ $\times\left\{1-\frac{1}{6}(A'+4+R^2)\mathrm{sh}^2\xi+\frac{A'+4}{120}(A'+16+R^2)\mathrm{sh}^4\xi\right\}$	$(A'+4)(A'+16)(A'+36)=$ $=R^4(A'+24)$

Мы признательны Г.С. Саакяну, А.Я. Смородинскому, Л.И.Пономареву, А.В.Матвеенко и С.И.Виницкому за интересные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Флюгге З. Задачи по квантовой механике. "Мир", М., 1974, т.1.
2. Мардоян Л.Г. и др. ОИЯИ, Р2-83-475, Дубна, 1983.
3. Мардоян Л.Г. и др. ОИЯИ, Р2-83-899, Дубна, 1983.
4. Мардоян Л.Г. и др. ОИЯИ, Р2-84-86, Дубна, 1984.
5. Мардоян Л.Г. и др. ОИЯИ, Р2-84-110, Дубна, 1984.
6. Айнс Э.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Харьков, 1939.
7. Arscott F.M. Proc.Roy Soc. Edinburg, 1967, A67, p.265.
8. Бейтмен Г., Эрдейн А. Высшие трансцедентные функции. "Наука", М., 1965, т.1.

Рукопись поступила в издательский отдел
11 мая 1984 года

Мардоян Л.Г. и др. Р2-84-211
Эллиптический базис кругового осциллятора

Развита общая схема построения эллиптического базиса кругового осциллятора. Получены формулы, на основе которых следует проводить дальнейшие вычисления на ЭВМ; выявлено поведение эллиптического базиса в полярном и декартовом пределах; выписаны некоторые частные результаты.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1984

Перевод О.С.Виноградовой

Mardoyan L.G. et al. P2-84-211
Elliptic Basis of Circular Oscillator

A general scheme is developed for constructing the elliptic basis of circular oscillator. Formulae are obtained for the calculation by computer, the behaviour of the elliptic basis is established in Cartesian and polar limits, and some particular results are presented.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1984

16 коп.

Редактор М.И.Зарубина. Макет Н.А.Киселевой.
Набор И.Г.Андреевой, Е.М.Граменицкой.

Подписано в печать 29.05.84.
Формат 60х90/16. Офсетная печать. Уч.-изд.листов 1,08.
Тираж 545. Заказ 34743.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований.
Дубна Московской области.