ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
Том 34, № 3
март, 1978

ИЗУЧЕНИЕ АВТОМОДЕЛЬНОГО ПОВЕДЕНИЯ ПОЛУИНКЛЮЗИВНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ МЕТОДОМ РЕНОРМАЛИЗАЦИОННОЙ ГРУППЫ

Я. З. Дарбаидзе [1], Н.-В. Махалдиани, А. Н. Сисакян, Л. А. Слепченко [1]

Дан анализ соотношения подобия для полуинклюзивных множественных реакций с точки зрения его непротиворечивости квантовой теории поля. Для этого использовался метод ренормгруппы, который позволяет также оценивать поправки к автомодельному решению в определенных кинематических областях. Устанавливается связь полученного автомодельного решения с другими известными масштабными свойствами. Обсуждаются условия применимости следствий найденных соотношений.

1. Важное место в физике высоких энергий принадлежит масштабно-инвариантным или автомодельным свойствам характеристик взаимодействия фундаментальных частиц [1, 2]. В последнее время в физике множественного рождения частиц при высоких энергиях уделяется большое внимание изучению масштабно-инвариантных закономерностей для сечений инклюзивных и полуинклюзивных процессов [3—7]. Их использование приводит к ряду следствий о высокоэнергетическом поведении средней множественности [5], корреляционных функций, зависимости средних ассоциативных множественностей от поперечных и продольных компонент импульса [7] и др.

В работе будет проанализировано соотношение подобия [5] для полуинклюзивных множественных реакций. В частности, в рамках метода ренормализационной группы (РГ) [8, 9] с использованием соображений универсальности сечений [6] показано, что удается получить автомодельное решение $\Psi(z_p)$, $z_p=n/\langle n(\mathrm{p})\rangle$, удовлетворяющее соотношению подобия [5]. При этом оцениваются поправки на случай возможного отклонения от автомодельного режима в определенных кинематических областях. Полученное решение позволяет установить соответствие с зависимостью дисперсии $D(p)$ от величины импульса выделенной частицы в реакции $a+b\to\to c(\mathrm{p})+n+\ldots$. Рассмотрены также возможные связи функции $\Psi(z_p)$ с масштабными функциями, определенными в работах [3, 4], и обсуждаются условия применимости полученных соотношений.

2. В работе [5] для сечений полуинклюзивных реакций $a+b\to\to c(\mathrm{p})+n_{\text{з.ч.}}+\ldots$ было предложено следующее автомодельное соотношение:

$$\langle n(\mathrm{p})\rangle(d\sigma_n/d\mathrm{p})/(d\sigma/d\mathrm{p})=\Psi(n/\langle n(\mathrm{p})\rangle),\quad d\mathrm{p}=d^3p/E. \tag{1}$$

[1] Тбилисский государственный университет.

Это соотношение было получено из общих соображений физического подобия [1, 2] и определяет, по сути дела, наличие корреляций между множественностью реакции и величиной импульса детектируемой частицы. Закономерность (1) находится в удовлетворительном согласии с экспериментом [10, 11]. Отметим, что при получении (1) неявно предполагалась некоторая универсальность соотношения, выраженная в отсутствии зависимости $\Psi(z_p)$, $z_p=n/\langle n(\mathrm{p})\rangle$ от внутренних параметров теории, таких, например, как масса и константа связи.

При рассмотрении масштабных соотношений Коба – Нильсена – Олесена (КНО) [3] с привлечением соображений подобной универсальности множественных сечений были получены некоторые ограничения на средние множественности и корреляционные функции полуинклюзивных реакций $ab\to n+\ldots$ [6]. Мы будем следовать аналогичному методу рассмотрения. С этой целью получим сейчас уравнения РГ для инклюзивных, полуинклюзивных распределений и соответствующих ассоциативных моментов [2].

Рассмотрим для простоты случай скалярного поля с самодействием [3]. Полуинклюзивное распределение $d\sigma_n/d\mathrm{p}$ с одной выделенной частицей в конечном состоянии с помощью одночастично-приводимой функции Грина G_{n+2} выражается следующим образом:

$$F(n,\mathrm{p})\equiv\frac{d\sigma_n}{d\mathrm{p}}=\frac{1}{(n-1)!}\int\prod_{i=1}^{n-1}\frac{d\mathrm{p}_i'}{(2\pi)^3}\,\delta\left(p_1+p_2-p-\sum_{i=1}^{n-1}p_i'\right)\times \tag{2}$$
$$\times|G_{n+2}(p_1,p_2,p,p_1',\ldots,p_{n-1}';m(\mu),g(\mu),\mu)|^2,$$

где $d\mathrm{p}=d^3p/E$, $E=\sqrt{\mathrm{p}^2+m^2}$, μ – точка нормировки, m в отличие от «эффективной массы» $m(\mu)$ – реальная масса. Одночастично-приводимая функция Грина G_n удовлетворяет уравнению (см. приложение)

$$\left\{\mu\frac{\partial}{\partial\mu}+\eta(g)m\frac{\partial}{\partial m}+\beta(g)\frac{\partial}{\partial g}+\frac{n}{2}\gamma(g)\right\}\times \tag{3}$$
$$\times G_n(p_i;m(\mu),g(\mu),\mu)=0.$$

Действуя оператором $\hat{D}=\mu\partial/\partial\mu+\eta(g)m\partial/\partial m+\beta(g)\partial/\partial g$ на уравнения (2), для полуинклюзивных и инклюзивных сечений получим соответственно

$$\hat{D}F(n,\mathrm{p})=\gamma(n+2)F(n,\mathrm{p}), \tag{4}$$

$$\hat{D}F(\mathrm{p})=\gamma(\langle n(\mathrm{p})\rangle+2)F(\mathrm{p}), \tag{5}$$

где величины

$$F(\mathrm{p})=\sum_{n\geq 1}F(n,\mathrm{p}),\qquad \langle n(\mathrm{p})\rangle=\sum_{n\geq 1}nF(n,\mathrm{p})\Big/F(\mathrm{p}) \tag{6}$$

определяют инклюзивное сечение и первый ассоциативный момент, соответственно.

---

[2] Применение РГ для изучения вероятностей физических процессов впервые рассматривалось в работе [16].

[3] Метод РГ в перенормируемых скалярных теориях поля для изучения высокоэнергетических асимптотик применялся в работе [12].

Рассмотрим поведение высших моментов полуинклюзивных распределений

$$(7) \qquad C_k=\langle n^k(\mathrm{p})\rangle/\langle n(\mathrm{p})\rangle^k=\int_0^\infty z_p^k\Psi(z_p)dz_p,$$

где функция $\Psi(z_p)$ определена соотношением (1). По аналогии с (4) для величин (7) с учетом (5), (6) получим следующее уравнение:

$$(8) \qquad \hat{D}C_k=\gamma\langle n(\mathrm{p})\rangle\{C_{k+1}-[1+k(C_2-1)]C_k\}.$$

С другой стороны, отсутствие зависимости автомодельных функций $\Psi(z_p)$ от внутренних параметров теории означает для моментов (7) равенство $\hat{D}C_k=0$. Это, в свою очередь, приводит к следующему рекуррентному соотношению для моментов C_k:

$$(9) \qquad C_k=[1+(k-1)(C_2-1)]C_{k-1}.$$

Разрешая его, получим

$$(10) \qquad C_k=1\left(1+\frac{1}{a}\right)\dots\left(1+(k-1)\frac{1}{a}\right), \qquad \frac{1}{a}=C_2-1.$$

Из формулы (10) с помощью обратного к (7) преобразования

$$(11) \qquad \Psi(z_p)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}dn\, z_p^{-n-1}C_n$$

следует явный вид функции

$$(12) \qquad \Psi(z_p)=\frac{a^a}{\Gamma(a)}z_p^{a-1}e^{-az_p}.$$

Таким образом, используя метод РГ, удается найти частный вид автомодельных функций $\Psi(z_p)$, удовлетворяющих масштабному соотношению (1). Заметим, что равенство (10) соответствует линейной зависимости дисперсии $D(\mathrm{p})=\sqrt{\langle n^2(\mathrm{p})\rangle-\langle n(\mathrm{p})\rangle^2}$ полуинклюзивного распределения от ассоциативной средней множественности

$$(13) \qquad D(\mathrm{p})=\frac{1}{\sqrt{a}}\langle n(\mathrm{p})\rangle.$$

Учтем сейчас возможность отклонения функции $\Psi(z_p)$ от масштабного соотношения (1), которое, вообще говоря, не исключено при конечных энергиях или в определенных кинематических областях значений $\mathrm{p}=(p_\parallel, \mathrm{p}_\perp)$. Предположим, что искомое отклонение имеет вид

$$(14) \qquad \Psi=\Psi^{(0)}(z_p)+\frac{1}{\langle n(\mathrm{p})\rangle}\Psi^{(1)}(z_p), \qquad z_p=n/\langle n(\mathrm{p})\rangle.$$

Соответственно имеем

$$(15) \qquad C_k=C_k^{(0)}+C_k^{(1)}/\langle n(\mathrm{p})\rangle,$$

где

$$C_k^{(0)} = \int z_p^k \Psi^{(0)}(z_p)\,dz_p, \qquad C_k^{(1)} = \int z_p^k \Psi^{(1)}(z_p)\,dz_p. \tag{16}$$

Тогда из уравнений (8), (9), проделав аналогичные вычисления, получим

$$C_k^{(1)} = 1\left(1+\frac{1}{a}\right)\dots\left(1+(k-2)\frac{1}{a}\right)\frac{k(k-1)}{2}C_2^{(1)}, \tag{17}$$

$$C_2 = 1+\frac{1}{a}+\frac{C_2^{(1)}}{\langle n(\mathrm{p})\rangle}.$$

Как и следовало ожидать, это соотношение изменит закон дисперсии, который будет отличаться от (13) на постоянный сдвиг

$$D(\mathrm{p}) = \frac{1}{\sqrt{a}}\langle n(\mathrm{p})\rangle + \frac{\sqrt{a}}{2}C_2^{(1)}. \tag{18}$$

Заметим, что формула (18) является аналогом соотношения $D=A\langle n\rangle - B$, полученного в [13] для полных средних множественностей. При достаточно больших значениях $\langle n(\mathrm{p})\rangle$ в (18) постоянным членом можно пренебречь, тогда выражение (18) переходит в линейный закон (13).

С помощью соотношения (17) аналогично построению функции $\Psi^{(0)}(z_p)$ получим явное выражение для $\Psi^{(1)}(z_p)$. Окончательно для автомодельной функции Ψ с учетом отклоняющих поправок получим

$$\Psi = \frac{a^a}{\Gamma(a)} z_p^{a-1} e^{-az_p}\left\{1+\frac{1}{\langle n(\mathrm{p})\rangle}\frac{a^2 C_2^{(1)}}{2}\left(z_p - 2 + \frac{a-1}{az_p}\right)\right\}. \tag{19}$$

Напомним, что значения коэффициентов a, $C_2^{(1)}$ определяются из формулы (18) для дисперсии $D(\mathrm{p})$, так что (19) не содержит свободных параметров при наличии экспериментальных данных для последней величины в зависимости от величины p. В этой связи необходимо заметить, что имеющийся экспериментальный материал [14] содержит очень большие ошибки, хотя и дает возможность сделать заключение качественного характера о наличии такой зависимости $D=D(p)$ (от интервала изменения величины p). Желательны были бы эксперименты по измерению дисперсии как функции импульса p детектируемой инклюзивным образом частицы.

3. Установим сейчас связь между автомодельной функцией $\Psi(z_p)$, удовлетворяющей (1), и соответствующей функцией закона подобия сечений множественных распределений КНО [3]

$$\langle n\rangle \sigma_n/\sigma = \Psi(z), \quad z = n/\langle n\rangle, \tag{20}$$

где σ_n — топологическое сечение, $\langle n\rangle$ — полная средняя множественность заряженных частиц. Метод построения величин $\Psi(z_p)$ (12), (19), рассмотренный выше, аналогичен методу, предложенному в работах [6]. Наконец, обращает внимание совпадение в полученных решениях функциональной зависимости Ψ от z- и z_p-переменных. Постараемся установить общую связь такого рода между $\Psi(z)$ и $\Psi(z_p)$, не привлекая на помощь аргументы метода РГ.

Из правила сумм для полуинклюзивных сечений

$$\int \frac{d\sigma_n}{d\mathbf{p}} d\mathbf{p} = n\sigma_n \tag{21}$$

следует

$$\int \Psi(z_p) \frac{1}{\langle n(\mathbf{p})\rangle} \frac{d\sigma}{d\mathbf{p}} d\mathbf{p} = \frac{n}{\langle n\rangle} \sigma \Psi(z), \tag{22}$$

где $z_p = n/\langle n(\mathbf{p})\rangle$, $z = n/\langle n\rangle$ и функции, удовлетворяющие (1) и (20), отличаются индексами переменной z.

Удобно перейти к моментам соответствующих распределений C_m и $\bar{C}_m$

$$C_m = \int_0^\infty z_p{}^m \Psi(z_p) dz_p, \quad \bar{C}_m = \int_0^\infty z^m \Psi(z) dz. \tag{23}$$

Составим выражение (23), интегрируя (22) по переменной z,

$$\int_0^\infty dz\, z^m \int d\mathbf{p} \Psi(z_p) \frac{1}{\langle n(\mathbf{p})\rangle} \frac{d\sigma}{d\mathbf{p}} = \sigma \int_0^\infty dz\, z^{m+1} \Psi(z). \tag{24}$$

Меняя порядок интегрирования и переходя к переменной z_p:

$$z = \frac{n}{\langle n\rangle} = \frac{n}{\langle n(\mathbf{p})\rangle} \frac{\langle n(\mathbf{p})\rangle}{\langle n\rangle} = z_p \alpha(p), \quad \alpha(p) = \frac{\langle n(\mathbf{p})\rangle}{\langle n\rangle},$$

имеем

$$\int d\mathbf{p} \alpha^{m+1}(p) \frac{1}{\langle n(\mathbf{p})\rangle} \frac{d\sigma}{d\mathbf{p}} \int dz_p z_p{}^m \Psi(z_p) = \sigma \int_0^\infty dz\, z^{m+1} \Psi(z). \tag{25}$$

Учитывая теперь определения (23), получим

$$\bar{C}_{m+1} = \langle \alpha^m \rangle C_m, \tag{26}$$

где

$$\langle \alpha^m \rangle = \frac{1}{\langle n\rangle \sigma} \int \left(\frac{\langle n(\mathbf{p})\rangle}{\langle n\rangle} \right)^m \frac{d\sigma}{d\mathbf{p}} d\mathbf{p}.$$

Формулы (24) и (26) устанавливают в общем виде связь между функциями КНО (20) и $\Psi(z_p)$ соотношения подобия (1).

Рассмотрим приближенный случай, когда величина $\alpha(p)$ не зависит от импульса. Такое приближение отвечает отсутствию корреляций между значением множественности n и величиной импульса $\mathbf{p}$ выделенной частицы. В этом случае из (22) получим

$$\frac{1}{\langle n(\mathbf{p})\rangle} \Psi_p(z_p) \langle n\rangle = \frac{n}{\langle n\rangle} \Psi(z)$$

или

$$z_p = \alpha^{-1} n/\langle n\rangle, \; \alpha \neq \alpha(p),$$

и искомая связь сведется к следующему виду:

$$\alpha^{-1} \Psi_p(\alpha^{-1} z) = z \Psi(z), \tag{27}$$

а формула (26) примет вид

$$\bar{C}_{m+1} = \alpha^m C_m. \tag{28}$$

Подчеркнем, что согласно полученной связи (26) из требования универсальности для функций КНО [6] $\hat{D}\bar{C}_m=0$ не следует, вообще говоря, соответствующее свойство $\hat{D}C_m=0$ для функций $\Psi(z_\nu)$ и наоборот. Эти условия согласуются друг с другом, только если моменты $\langle\alpha^m\rangle$ не зависят от внутренних параметров теории, т. е. $\hat{D}\langle\alpha^m\rangle=0$. Отметим, что соответствующие величины могут, вообще говоря, зависеть определенным образом от так называемого инвариантного заряда $\bar{g}$ [8], который удовлетворяет уравнению $\hat{D}\bar{g}=0$.

4. В работе [4] было предложено следующее масштабное соотношение для полуинклюзивных сечений:

$$\frac{1}{n\sigma_n}\frac{d\sigma_n}{dp_\parallel d\mathbf{p}_\perp}=\frac{1}{\langle p_\parallel\rangle_n\langle\mathbf{p}_\perp\rangle_n}\Phi\left(\frac{p_\parallel}{\langle p_\parallel\rangle_n},\frac{\mathbf{p}_\perp}{\langle\mathbf{p}_\perp\rangle_n}\right), \tag{29}$$

из которого, в частности, следует масштабное поведение в отдельности по переменным $p_\parallel$ и $\mathbf{p}_\perp$. Обратим внимание на то, что поведение (29) не является независимым, а может быть получено из соотношения подобия (1). Покажем это на простом примере [15]. Рассмотрим кинематическую область высоких энергий и ограниченных поперечных импульсов $p_\parallel\gg p_\perp$, m, $s\to\infty$, так что $E=\sqrt{p^2+m^2}\to|p_\parallel|$. Из правила сумм для сечений полуинклюзивных реакций

$$\int\frac{d\sigma_n}{d\mathbf{p}}E\,d\mathbf{p}=\sqrt{s}\,\sigma_n,$$

в этом случае следует, что $\langle p_\parallel\rangle\approx\sqrt{s}/n$ или $\langle x\rangle_n=2/n$, $x=2p_\parallel/\sqrt{s}$. Тогда из (29) для инвариантного сечения получим

$$E\frac{d\sigma_n}{dp_\parallel}\approx n\sigma_n\frac{nx}{2}\Phi\left(\frac{nx}{2}\right). \tag{30}$$

С другой стороны, из соотношения (1) для продольной составляющей импульса имеем

$$\frac{d\sigma_n}{dx}=\frac{1}{\langle n(x)\rangle}\frac{d\sigma}{dx}\Psi\left(\frac{n}{\langle n(x)\rangle}\right). \tag{31}$$

Если предположить, что в рассматриваемой области полуинклюзивное сечение обладает поведением $d\sigma_n/dx\sim e^{-nx}$, то при малых x, вычисляя значения инклюзивного сечения, множественного распределения σ_n и ассоциативной средней множественности, получим из (31) и (30)

$$\Psi(nx)=\frac{nx}{2}\Phi\left(\frac{nx}{2}\right). \tag{32}$$

Последнее соотношение устанавливает в частных предположениях связь между масштабными функциями, определенными (1) и (29).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Выведем уравнения РГ. Для конкретности рассмотрим модель φ^4. Неперенормированный лагранжиан имеет вид

$$L=\frac{1}{2}\partial_\mu\varphi_0\,\partial^\mu\varphi_0-\frac{m_0^2}{2}\varphi_0^2(x)-\frac{g_0}{4!}\varphi_0^4(x). \tag{П.1}$$

Введем ренормированные величины

$$(\text{П}.2)\qquad \varphi(x)=z^{-1/2}\varphi_0(x),\ g=z^2z_g^{-1}g_0,\quad m^2=zz_m^{-1}m_0^2.$$

Фурье-образ функции Грина

$$G_n(x_1,\ldots,x_n)=\langle 0|T\varphi(x_1)\ldots\varphi(x_n)|0\rangle$$

связывается с вершинной функцией следующим образом:

$$(\text{П}.3)\qquad \Gamma_n(p_1,\ldots,p_n)=\prod_{i=1}^{n}G_2^{-1}(p_i^2)G_n(p_1,\ldots,p_n).$$

Ренормированная вершинная функция связана с неренормированной по формуле

$$(\text{П}.4)\qquad \Gamma_n(p_i,m,g,\mu)=z(m_0,\lambda_0,\mu)^{n/2}\Gamma_{0n}(p_i,m_0,g_0),$$

здесь μ — точка нормировки. Дифференцируя (П.4) по μ, получим

$$(\text{П}.5)\qquad \left\{\mu\frac{\partial}{\partial\mu}+\beta(g)\frac{\partial}{\partial g}+\eta(g)m\frac{\partial}{\partial m}-\frac{n}{2}\gamma(g)\right\}\Gamma_n(p_i,m(\mu),g(\mu),\mu)=0,$$

из (П.3) и (П.5) следует

$$(\text{П}.6)\qquad \left\{\mu\frac{\partial}{\partial\mu}+\beta(g)\frac{\partial}{\partial g}+\eta(g)m\frac{\partial}{\partial m}+\frac{n}{2}\gamma(g)\right\}G_n(p_i,m(\mu),g(\mu),\mu)=0.$$

Из рассмотрения скелетного разложения легко увидеть, что одночастично приводимая функция Грина также удовлетворяет уравнению (П.6).

Авторы благодарят Н. Н. Боголюбова, А. Н. Тавхелидзе, Д. В. Ширкова за интерес к работе, а также В. Г. Кадышевского, А. Н. Квинихидзе, С. П. Кулешова, В. А. Матвеева, М. Д. Матеева, Р. М. Мир-Касимова за полезные обсуждения. Приносим нашу искреннюю признательность А. А. Хелашвили за многочисленные ценные советы и замечания.

Объединенный институт
ядерных исследований

Поступила в редакцию
22 марта, 1977 г.

Литература

[1] В. А. Матвеев, Р. М. Мурадян, А. Н. Тавхелидзе. Препринт ОИЯИ Е2-5962, Дубна, 1971; Е2-6638, Дубна, 1972.
[2] Р. М. Мурадян. Препринт ОИЯИ Р2-6762, Дубна, 1972. V. A. Matveev. In: «Proceedings of the 1973 CERN — JINR School of Physics», Geneva, 1973.
[3] Z. Koba, H. B. Nielsen, P. Olesen. Nucl. Phys., B40, 317, 1972.
[4] F. T. Dao et. al. Phys. Rev. Lett., 6, 389, 1974.
[5] V. A. Matveev, A. N. Sissakian, L. A. Slepchenko. Preprint JINR E2-9105, Dubna, 1975; ЯФ, 23, 432, 1976.
[6] W. Ernst, I. Schmitt. Nuovo Cim., 31A, 120, 1976; 33A, 195, 1976.
[7] A. N. Sissakian, L. A. Slepchenko. In: «Proceedings of the VI Int. Seminar on High Energy Problems», JINR, D1-9224, Dubna, 1975.
[8] Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков. Введение в теорию квантованных полей, «Наука», 1973.
[9] D. V. Shirkov. Nucl. Phys., B62, 194, 1973. Лекции на Школе по физике элементарных частиц, Тбилисский гос. ун-т, Тбилиси, 1973.
[10] A. N. Sissakian, L. A. Slepchenko. In: «Proceedings of the XVIII Int. Conf. on High Energy Physics», JINR, D12-10400, Dubna, 1975.
[11] Л. Н. Абесалашвили и др. Препринт ОИЯИ 1-9406, Дубна, 1975.
[12] D. I. Kazakov, L. R. Lomidze, N. V. Makhaldiani, A. A. Vladimirov. Preprint JINR E2-8085, Dubna, 1974.
[13] A. Wroblewski. Acta Phys. Polon., 4B, 867, 1973.
[14] E. W. Anderson et al. Talk at the London Conference, 1974. F. Turkot et al. Talk at the London Conference, 1974. T. S. Clifford et al. Phys. Rev. Lett., 34, 978, 1975.
[15] R. Yaes. Nuovo Cim. Lett., 8, 365, 1973.
[16] В. З. Бланк. ЖЭТФ, 32, 932, 1957.

STUDY OF AUTOMODEL BEHAVIOUR OF SEMI-INCLUSIVE DISTRIBUTIONS BY MEANS OF THE RENORMALIZATION GROUP METHOD

Ya. Z. Darbaidze, N. V. Makhaldiani,
A. N. Sissakyan, L. A. Slepchenko

The similarity relationship for semi-inclusive multiple production reactions is analysed from the viewpoint of its compatibility with the quantum field theory principles. To this end the renormalization group method was used which makes it possible to get the estimates for the corrections to automodel solution in definite kinematical regions. Connection of the automodel solution obtained with the other known scale properties is established. Implications of the relationships obtained are discussed.