Международная конференция
по математическим проблемам
квантовой теории поля и
квантовой статистики
Москва, 12-17 декабря 1972

International Conference on
Mathematical Problems of
Quantum Field Theory and
Quantum Statistics
Moscow, 12-17 December, 1972

ИЗУЧЕНИЕ МОДЕЛИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ НЕРЕЛЯТИВИСТСКОЙ ЧАСТИЦЫ СО СКАЛЯРНЫМ КВАНТОВАННЫМ ПОЛЕМ МЕТОДОМ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ

С.П.Кулешов, В.А.Матвеев, А.Н.Сисакян, М.А.Смондырев (ОИЯИ)

I. Среди различных подходов квантовой теории поля, не опирающихся на теорию возмущений, важное место занимают методы функционального интегрирования.

Представления функций Грина и амплитуд рассеяния в виде замкнутых выражений дают удобную возможность для формулировки различных приближений теории поля [I, 2]. Среди известных приложений этих методов отметим исследования инфракрасных асимптотик и градиентных преобразований функций Грина в квантовой электродинамике [3-5].

В последнее время методы функционального интегрирования были использованы при исследовании ультрафиолетовых или высокоэнергетических асимптотик амплитуд рассеяния. Исследования в этом направлении привели к формулировке приближения прямолинейных путей, являющегося эффективным методом изучения асимптотического поведения амплитуд рассеяния в области больших энергий и ограниченных передач импульса в моделях квантовой теории поля [6].

Дальнейшее обобщение этот метод получил в работах [7, 8], в которых был сформулирован ряд аппроксимационных процедур, представляющих различные математические реализации общей концепции прямолинейных путей.

Детальное изучение этих приближений в моделях теории поля сталкивается, однако, с трудностями, которые обусловлены сингулярным характером типичных релятивистских взаимодействий. По этой причине представляет интерес рассмотрение более простых нерелятивистских моделей, в рамках которых было бы возможно более полно исследовать характер предложенных аппроксимаций, свойства сходимости соответствующих разложений и тому подобные вопросы.

Одной из задач подобного рода является задача нахождения функций Грина в модели полярона, т.е. для нерелятивистской частицы, взаимодействующей со скалярным квантованным полем [9-13].

Впервые эта задача в рамках техники континуального интегрирования рассматривалась в работе [14], в которой была дана оценка энергии низшего энергетического состояния системы для случая слабой связи.

Противоположный случай сильной связи в моделях подобного типа исследовался в работах [15-17]. В этих работах рассматривалось каноническое преобразование Н.Н.Боголюбова, позволяющее трансляционно-инвариантным образом разделить равномерное прямолинейное движение частицы от квантового "дрожания", обусловленного взаимодействием с квантованным полем.

Целью настоящей работы является изучение функции Грина полярона методами континуального интегрирования в рамках приближения прямолинейных путей. В работе сравниваются результаты различных функциональных аппроксимаций при вычислении вакуумных средних функций Грина и исследуются первые поправки к основному приближению.

В § 2 формулируется и изучается общая задача о нахождении функции Грина в модели полярона в координатном представлении.

Найденное точное решение задачи в виде T-упорядоченной экспоненты представляется затем в форме континуального интеграла. В основе используемого здесь метода лежит представление хронологических произведений операторов типа $A[\vec{\tau}(s)]$, где $\vec{\tau}(s)=\vec{\tau}+\frac{i}{\mu}\int\vec{\nabla}\,d\eta$, в виде континуальных интегралов по путям частиц $\vec{\tau}(s)$ таких, что $\vec{\tau}(0)=\vec{\tau}$.

Выписываются матричные элементы функции Грина в когерентном базисе, которые могут рассматриваться как производящие функции средних функций Грина по состояниям с определенными числами квантов.

В § 3 функция Грина строится с помощью преобразования Н.Н.Боголюбова в P-представлении, в котором полный импульс системы является C-числом. Изучаются функциональные аппроксимации для нахождения вакуумных средних функций Грина, являющиеся простейшими вариантами приближения прямолинейных путей.

В § 4 рассматриваются первые поправки к энергии основного состояния системы, обусловленные эффектами корреляции во взаимодействии частиц с квантованным полем.

В качестве примера анализируется простейший вариант модели полярона, для которой находятся условия применимости приближений слабой и умеренно-сильной связей. Обсуждается применимость развиваемых методов для случая сильной связи.

2. Рассмотрим задачу нахождения функции Грина нерелятивистской частицы, взаимодействующей со скалярным квантованным полем.

Модель определяется гамильтонианом

$$H=-\frac{1}{2\mu}\Delta_{\tau}+g\sum_{k}\left(A_k e^{i\vec{k}\vec{\tau}}b_k+A_k^{*}e^{-i\vec{k}\vec{\tau}}b_k^{+}\right)+\frac{1}{2}\sum_{k}\omega_k\left(b_k^{+}b_k+b_k b_k^{+}\right). \tag{2.1}$$

Здесь b_k^{+}, b_k – операторы рождения, уничтожения квантов скалярного поля (фононов) с волновым вектором $\vec{k}$, так что $[b_k, b_{k'}^{+}]=\delta_{kk'}$;
A_k – компоненты Фурье плотности источника. Для удобства считаем, что система находится в конечном объеме, представляющем собою куб со стороной L, так что волновые вектора $\vec{k}$ определяются выражением

$$\vec{k}=\frac{2\pi}{L}(n_1,n_2,n_3); \qquad n_1,n_2,n_3 \text{ – целые числа.}$$

Функция Грина системы определяется уравнением

$$(H-E)G=1 \tag{2.2}$$

и в силу вещественности спектра оператора H может быть представлена в виде

$$G=-i\int_0^\infty d\tau\, e^{i\tau(H-E+i0)}=-i\int_0^\infty d\tau\, e^{-i\tau(E+i0)}G_\tau\,, \tag{2.3}$$

где величина G_τ удовлетворяет условиям

$$-i\frac{\partial}{\partial\tau}G_\tau=HG_\tau\,,\qquad G_{\tau=0}=1. \tag{2.4}$$

Переходя к представлению взаимодействия

$$G_\tau = e^{i\tau H_0}g_\tau\,, \tag{2.5}$$

где

$$H_0=-\frac{1}{2\mu}\Delta_z+\frac{1}{2}\sum_k\omega_k\left(b_k^+b_k+b_kb_k^+\right) \tag{2.6}$$

– свободный гамильтониан системы, находим

$$-i\frac{\partial}{\partial\tau}g_\tau=U_\tau g_\tau\,,\qquad g_\tau=1\,. \tag{2.7}$$

Здесь

$$U_\tau=e^{-i\tau H_0}\left[g\sum_k\left(A_ke^{i\vec k\vec z}b_k+A_k^*e^{-i\vec k\vec z}b_k^+\right)\right]e^{i\tau H_0}=$$

$$=g\sum_k\left[A_ke^{i\vec k\vec z(\tau)}b_k(\tau)+A_k^*e^{-i\vec k\vec z(\tau)}b_k^+(\tau)\right] \tag{2.8}$$

– гамильтониан взаимодействия в системе, где

$$\vec z_\tau=\vec z+\frac{i\tau}{\mu}\vec\nabla_z\,,\quad b_k(\tau)=e^{i\omega_k\tau}b_k\,,\quad b_k^+(\tau)=e^{-i\omega_k\tau}b_k^+\,. \tag{2.9}$$

Формальное решение уравнений (2.7) имеет вид T -экспоненты

$$g_\tau=T\left[\exp\left(i\int_0^\tau U_{\tau'}d\tau'\right)\right]=$$

$$=T\left\{\exp\left[ig\sum_k b_k^+A_k^*\int_0^\tau d\tau'\,e^{-i\omega_k\tau'-i\vec k\vec z(\tau')}\right]R_\tau\,\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\exp\left[ig\sum_k b_kA_k\int_0^\tau d\tau'\,e^{i\omega_k\tau'+i\vec k\vec z(\tau')}\right]\right\}, \tag{2.10}$$

где

$$R_\tau=\exp\left[-g^2\sum_k|A_k|^2\int_0^\tau ds_1\,e^{-i\omega_ks_1-i\vec k\vec z(s_1)}\int_0^{s_1}ds_2\,e^{i\omega_ks_2+i\vec k\vec z(s_2)}\right]. \tag{2.11}$$

В решении (2.10) для g_τ T-упорядочивание действует лишь на расстановку операторов, зависящих от $\vec{\tau}_\tau$.

При получении (2.11) использовался тот факт, что "причинная" свертка $[b_k(\tau)\, b^+_{k'}(\tau')]$ имеет вид

$$b_k(\tau)b^+_{k'}(\tau') = T\left[b_k(\tau)b^+_{k'}(\tau')\right] - b^+_{k'}(\tau')b_k(\tau) = \vartheta(\tau-\tau')\, e^{i\omega_k(\tau-\tau')} . \tag{2.12}$$

При "распутывании" упорядоченной T-экспоненты в (2.10) может быть использован следующий результат:

$$T\left[\prod_{\alpha=1}^{n} e^{i\vec{k}_\alpha\vec{\tau}(s_\alpha)}\right] = \sum_{\substack{\text{перестановки}\\ s_\alpha}} \vartheta(s_1-s_2)\vartheta(s_2-s_3)\cdots\vartheta(s_{n-1}-s_n)\,\cdot$$

$$\cdot\, e^{i\vec{k}\vec{\tau}(s_1)}\, e^{i\vec{k}_2\vec{\tau}(s_2)} \cdots e^{i\vec{k}_n\vec{\tau}(s_n)} =$$

$$= \exp\left[i\sum_\alpha \vec{k}_\alpha\vec{\tau}(s_\alpha) - \frac{i}{4\mu}\sum_{\alpha,\beta}\vec{k}_\alpha\vec{k}_\beta |s_\alpha - s_\beta|\right] , \tag{2.13}$$

где учитывается, что

$$\left[\tau_i(s_1), \tau_j(s_2)\right] = \frac{i}{\mu}(s_1 - s_2)\delta_{ij} . \tag{2.14}$$

Выражение (2.13) может быть представлено в "нормальной" форме

$$T\left[\prod_{\alpha=1}^{n} e^{i\vec{k}_\alpha\vec{\tau}(s_\alpha)}\right] = \exp\Big[i\vec{\tau}\sum_\alpha \vec{k}_\alpha + \frac{i}{2\mu}\sum_\alpha \vec{k}_\alpha^2 s_\alpha +$$

$$+ \frac{i}{2\mu}\sum_{\alpha,\beta}\vec{k}_\alpha\vec{k}_\beta\,\Phi(s_\alpha, s_\beta)\Big] \exp\Big(\frac{1}{\mu}\vec{\nabla}\sum \vec{k}_\alpha s_\alpha\Big) , \tag{2.15}$$

где корреляционная функция $\Phi(s_\alpha, s_\beta)$ определена соотношением

$$\Phi(s_\alpha, s_\beta) = \begin{cases} \min(s_\alpha, s_\beta) , & \alpha \neq \beta , \\ 0 , & \alpha = \beta . \end{cases} \tag{2.16}$$

Формула (2.15) позволяет в принципе найти вакуумное среднее функции Грина, исходя из выражения (2.10), по теории возмущений.

Методы континуального интегрирования позволяют найти замкнутое выражение для функции Грина, удобное для выхода за рамки теории возмущений.

Один из способов введения континуального интеграла в задачах подобного типа связан с линеаризацией оператора Лапласа в выражении для кинетической энергии частицы.

Ниже мы изложим альтернативный метод, связанный с представлением хронологических произведений операторов типа $A[\vec{r}(s)]$, где $\vec{r}(s) = \vec{r} + \frac{1}{\mu}\int_0^s \vec{v}\,d\eta$ в виде континуальных интегралов по путям частиц $\vec{x}(s)$ таких, что $\vec{x}(0) = \vec{r}$.

В основе этого метода лежит тождество

$$T\Big\{\prod_i A_i[\vec{r}(s_i)]\Big\}\,1 = C_\tau \int\limits_{\vec{x}(0)=\vec{r}} \mathcal{D}\vec{x}(s)\, e^{-\frac{i\mu}{2}\int_0^\tau \dot{\vec{x}}^2 ds} \prod_i A_i[\vec{x}(s_i)], \tag{2.17}$$

где $\tau \geqslant s_i \geqslant 0$, причем константа C_τ выбирается таким образом, что

$$C_\tau \int\limits_{\vec{x}(0)=\vec{r}} \mathcal{D}\vec{x}\, e^{-\frac{i\mu}{2}\int_0^\tau \dot{\vec{x}}^2 ds} = 1\,. \tag{2.18}$$

Вводя импульс частицы вдоль траектории $\vec{v}(s) = \mu\dot{\vec{x}}(s)$ и обозначая

$$[\delta\vec{v}]_0^\tau = C_\tau\, \mathcal{D}\vec{x}(s)\, e^{-\frac{i}{2\mu}\int_0^\tau \vec{v}^2 ds}, \tag{2.19}$$

приведем основное тождество (2.17) к виду

$$T\Big\{\prod_i A_i[\vec{r}(s_i)]\Big\}\,1 = \int [\delta\vec{v}]_0^\tau \prod_i A_i\Big[\vec{r} + \frac{1}{\mu}\int_0^{s_i}\vec{v}\,d\eta\Big]. \tag{2.20}$$

Используем этот результат для исследования функции Грина в модели полярона в координатном представлении:

$$\langle r'|G|r\rangle = -i\int_0^\infty d\tau\, e^{-i\tau(E-i0)} \langle r'_\tau|g_\tau|r\rangle, \tag{2.21}$$

где

$$|r_\tau\rangle = e^{-i\tau H_0}|r\rangle \tag{2.22}$$

и оператор g_τ определен выражениями (2.10) и (2.11).

Используя тождество (2.20), после ряда преобразований найдем

$$
\begin{aligned}
&\langle \tau'_\tau | g_\tau | \tau \rangle = \\
&= \exp\left[i\tau \sum_k (b_k^+ b_k + \tfrac{1}{2})\right] \int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3}\, e^{i\vec{p}\vec{\tau}}\, T\left[e^{-i\vec{p}\vec{\tau}'(\tau)} g_\tau \right] 1 = \\
&= \int [\delta \vec{v}]_0^\tau\, \delta\left(\vec{\tau}' - \vec{\tau} - \frac{1}{\mu}\int_0^\tau \vec{v}\, d\eta\right) g_\tau \Big|_{\vec{\tau}_s \to \vec{\tau} + \frac{1}{\mu}\int_0^s \vec{v}\, d\eta} .
\end{aligned}
\tag{2.23}
$$

Производя в (2.23) замену функциональной переменной

$$
\vec{v}(s) \longrightarrow \vec{v}(s) + \vec{p} , \tag{2.24}
$$

где $\vec{p}$ – импульс, канонически сопряженный координате частицы, найдем окончательное выражение для функции Грина в координатном представлении в квазинормальной форме по операторам квантованного поля:

$$
\begin{aligned}
&\langle \tau' | G | \tau \rangle = \frac{-i}{(2\pi)^3} \int d\vec{p}\, e^{i\vec{p}(\vec{\tau}' - \vec{\tau})}\, i \int_0^\infty d\tau \exp\Big\{ -i\tau \Big[E - \frac{1}{2\mu}\vec{p}^2 - \\
&- \sum_k \omega_k (b_k^+ b_k + \tfrac{1}{2}) - i0 \Big] \Big\} \int [\delta v]_0^\tau \exp\Big[ig \sum_k b_k^+ e^{-i\vec{k}\vec{\tau}} A_k^* \cdot \\
&\cdot \int_0^\tau d\tau'\, e^{-i\int_0^{\tau'} d\tau'' (\omega_k + \frac{\vec{k}\vec{p} + \vec{k}\vec{v}}{\mu})} \Big] \exp\Big[-g^2 \sum_k |A_k|^2 \cdot \\
&\cdot \int_0^\tau ds_1\, e^{-i\int_0^{s_1} ds_1' (\omega_k + \frac{\vec{k}\vec{p} + \vec{k}\vec{v}}{\mu})} \int_0^{s_1} ds_2\, e^{i\int_0^{s_2} ds_2' (\omega_k + \frac{\vec{k}\vec{p} + \vec{k}\vec{v}}{\mu})} \Big] \cdot \\
&\cdot \exp\Big[ig \sum_k b_k e^{i\vec{k}\vec{\tau}} A_k \int_0^\tau d\tau'\, e^{i\int_0^{\tau'} d\tau'' (\omega_k + \frac{\vec{k}\vec{p} + \vec{k}\vec{v}}{\mu})} \Big] .
\end{aligned}
\tag{2.25}
$$

Выражение (2.25) может служить исходным пунктом при построении приближенных схем вычисления матричных элементов функции Грина по состояниям с определенными числами квантов поля: $\langle n', \tau' | G | n, \tau \rangle$. Производящей функцией этих величин могут служить средние функции Грина в когерентном базисе $| f_k \rangle$, где

$$
b_k | f_k \rangle = f_k | f_k \rangle , \quad \langle f_k' | f_k \rangle = \exp\left[-\tfrac{1}{2}\left(|f_k'|^2 + |f_k|^2 - 2 f_k f_k'^* \right) \right] . \tag{2.26}
$$

Действительно,

$$
\langle \{f'\}, \tau' | G | \{f_k\}, \tau \rangle = e^{-\frac{1}{2}\sum_k (|f_k'|^2 + |f_k|^2)} \sum_{n_k, m_{k'}} \cdot \tag{2.27}
$$

$$\cdot (n_k! \, m_{k'}!)^{-1/2} (f_{k'}^{\prime *})^{m_{k'}} (f_k)^{n_k} \langle m_{k'}, \vec{r}' | G | n_k, \vec{r} \rangle .$$

Исходя из выражения (2.25), нетрудно получить матричные элементы функции Грина в когерентном базисе

$$\frac{\langle \{f_k'\}, \vec{r}' | G | \{f_k\}, \vec{r} \rangle}{\langle \{f_k'\} | \{f_k\} \rangle} = -\frac{i}{(2\pi)^3} \int d\vec{p} \, e^{-i\vec{p}(\vec{r}-\vec{r}')} \, i \int_0^\infty d\tau \, \cdot$$

$$\cdot e^{-i\tau(E - \frac{1}{2\mu}\vec{p}^2 - \frac{1}{2}\sum_k \omega_k - i0)} \exp\Big[\sum_k f_k f_k^{\prime *}(e^{i\tau\omega_k} - 1)\Big] \cdot$$

$$\cdot \int [\delta \vec{v}]_0^\tau \exp\Big[ig \sum_k f_k^{\prime *} e^{-i\vec{k}\vec{r}} A_k^* \, e^{i\tau\omega_k} \int_0^\tau d\tau' \, \cdot$$

$$\cdot e^{-i\int_0^{\tau'} d\tau'' (\omega_k + \frac{\vec{k}\vec{p} + \vec{k}\vec{v}}{\mu})}\Big] \exp\Big[ig \sum_k f_k e^{i\vec{k}\vec{r}} A_k \, \cdot$$

$$\cdot \int_0^\tau d\tau' \, e^{i\int_0^{\tau'} d\tau'' (\omega_k + \frac{\vec{k}\vec{p} + \vec{k}\vec{v}}{\mu})}\Big] \exp\Big[-g^2 \sum_k |A_k|^2 \cdot$$

$$\int_0^\tau ds_1 \, e^{-i\int_0^{s_1} ds_1' (\omega_k + \frac{\vec{k}\vec{p} + \vec{k}\vec{v}}{\mu})} \int_0^{s_1} ds_2 \, e^{i\int_0^{s_2} ds_2' (\omega_k + \frac{\vec{k}\vec{p} + \vec{k}\vec{v}}{\mu})}\Big] . \quad (2.28)$$

3. Рассмотрим задачу построения функции Грина в $\mathcal{P}$-представлении, когда полный импульс системы

$$\vec{\mathcal{P}} = -i\vec{\nabla}_r + \sum_k \vec{k} \, b_k^+ b_k \quad (3.1)$$

является C-числом. Напомним при этом, что в силу трансляционной симметрии оператор (3.1) коммутирует с гамильтонианом, т.е. $[\mathcal{P}, H] = 0$.

Используя каноническое преобразование Н.Н.Боголюбова [9]

$$b_k \longrightarrow \xi_k = e^{i\vec{k}\vec{r}} b_k$$

$$b_k^+ \longrightarrow \xi_k^+ = e^{-i\vec{k}\vec{r}} b_k^+ , \qquad [\xi_k, \xi_{k'}^+] = \delta_{kk'} ,$$

$$-i\vec{\nabla}_r \longrightarrow \vec{\mathcal{P}} - \sum_k \vec{k} \, \xi_k^+ \xi_k , \quad (3.2)$$

приведем гамильтониан системы к виду

$$H \to \frac{1}{2\mu}\left(\vec{\mathcal{P}} - \sum_k \vec{k}\, \xi_k^+ \xi_k\right)^2 + \frac{1}{2}\sum_k \omega_k(\xi_k^+ \xi_k + \xi_k \xi_k^+) +$$

$$+ g\sum_k (A_k \xi_k + A_k^* \xi_k^+). \tag{3.3}$$

Функция Грина системы в данном каноническом представлении может быть записана в форме (2.3), где

$$G_\tau = e^{\frac{i\tau}{2}\sum_k \omega_k(\xi_k^+ \xi_k + \xi_k \xi_k^+)} \; g_\tau ,$$

(3.4)

$$g_\tau = T\exp\left[\frac{i}{2\mu}\int_0^\tau ds\left(\vec{\mathcal{P}} - \sum_k \vec{k}\,\xi_k^+ \xi_k\right)^2 + ig\int_0^\tau ds \sum_k \left(A_k \xi_k e^{is\omega_k} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + A_k^* \xi_k^+ e^{-is\omega_k}\right)\right]. \tag{3.5}$$

Используя континуальное представление первой экспоненты в (3.5), найдем

$$g_\tau = \int [\delta^3 \vec{v}]_0^\tau \, e^{-\frac{i}{\mu}\int_0^\tau ds\, \vec{v}\,\vec{\mathcal{P}}} \; f_\tau(v) , \tag{3.6}$$

где функционал $f_\tau(v)$, определяемый T -экспонентой

$$f_\tau(v) =$$

$$= T\exp\left[\frac{i}{\mu}\int_0^\tau ds\, \vec{v}\sum_k \vec{k}(\xi_k^+ \xi_k) + ig\sum_k \int_0^\tau ds \left(A_k \xi_k e^{i\omega_k s} + A_k^* \xi_k^+ e^{-i\omega_k s}\right)\right], \tag{3.7}$$

может быть приведен к виду

$$f_\tau(v) = e^{\frac{i}{\mu}\int_0^\tau ds\, \vec{v}\sum_k \vec{k}(\xi_k^+ \xi_k)} \; f_+ R f_- , \tag{3.8}$$

где

$$f_+ = e^{ig\sum_k A_k^* \xi_k^+ \int_0^\tau ds\; e^{-i\int_0^s d\eta\left(\omega_k + \frac{1}{\mu}\vec{k}\vec{v}\right)}} ,$$

(3.9)

$$f_- = e^{ig\sum_k A_k \xi_k \int_0^\tau ds\; e^{i\int_0^s d\eta\left(\omega_k + \frac{1}{\mu}\vec{k}\vec{v}\right)}} , \tag{3.10}$$

$$R = e^{-g^2\sum_k |A_k|^2 \int_0^\tau ds_1\, e^{i\int_0^{s_1} d\eta(\omega_k + \frac{1}{\mu}\vec{k}\vec{\nu})} \int_0^{s_1} ds_2\, e^{-i\int_0^{s_2} d\eta(\omega_k + \frac{1}{\mu}\vec{k}\vec{\nu})}} \tag{3.11}$$

Ниже мы используем полученные выражения для вычисления вакуумного среднего функции Грина

$$\langle G\rangle_0 = i\int_0^\infty d\tau\, e^{-i\tau(\mathcal{E}-i0)} \int [\delta\vec{\nu}]_0^\tau\, e^{-\frac{i}{\mu}\int_0^\tau ds\,\vec{\nu}\vec{\mathcal{P}}} R, \tag{3.12}$$

где $\mathcal{E} = E - \frac{1}{2}\sum_k \omega_k$.

Совершив замену функциональной переменной

$$\vec{\nu}(\tau) \longrightarrow \vec{\nu}(\tau) - \vec{\mathcal{P}}, \tag{3.13}$$

получим

$$\langle G\rangle_0 = -i\int_0^\infty d\tau\, e^{-i\tau(\mathcal{E}-\frac{1}{2\mu}\vec{\mathcal{P}}^2 - i0)} \int [\delta^3\vec{\nu}]_0^\tau \cdot$$

$$\cdot \exp\Big[-g^2\sum_k |A_k|^2 \int_0^\tau ds_1\, e^{i\int_0^{s_1} d\eta(\omega_k + \frac{\vec{k}\vec{\nu}-\vec{k}\vec{\mathcal{P}}}{\mu})} \cdot$$

$$\cdot \int_0^{s_1} ds_2\, e^{-i\int_0^{s_2} d\eta(\omega_k + \frac{\vec{k}\vec{\nu}-\vec{k}\vec{\mathcal{P}}}{\mu})}\Big]. \tag{3.14}$$

Рассмотрим теперь две простейшие функциональные аппроксимации, соответствующие низшему приближению в картине прямолинейных путей.

А. Положим под знаком функционального интеграла в (3.14) $\vec{\nu} = 0$. Это приближение соответствует полному пренебрежению отдачей частицы во взаимодействии с полем. При этом находим

$$\langle G\rangle_0 = -i\int_0^\infty d\tau\, e^{-i\tau(\mathcal{E}-\frac{1}{2\mu}\vec{\mathcal{P}}^2 - i0)} \cdot$$

$$\cdot \exp\Big[g^2\sum_k \frac{1}{\tilde{\Omega}_k^2}|A_k|^2\big(e^{i\tau\tilde{\Omega}_k} - i\tau\tilde{\Omega}_k - 1\big)\Big] =$$

$$= -\sum_{n_k} P_{\{n_k\}}\Big(\mathcal{E} - \frac{1}{2\mu}\vec{\mathcal{P}}^2 + g^2\sum_k \frac{1}{\tilde{\Omega}_k}|A_k|^2 - \sum_k n_k\tilde{\Omega}_k - i0\Big)^{-1}. \tag{3.15}$$

Здесь $\tilde{\Omega}_k = \omega_k - \frac{1}{\mu}\vec{k}\vec{\mathcal{P}}$; $P_{\{n_k\}}$ – пуассоновские вероятности

$$P_{\{n_k\}} = \prod_k e^{-\bar{n}_k} \frac{(\bar{n}_k)^{n_k}}{n_k!}, \qquad \bar{n}_k = g^2 \frac{|A_k|^2}{\tilde{\Omega}_k^2} \tag{3.16}$$

и сумма в (3.15) распространяется по всем числам заполнения n_k.

Таким образом, функциональная аппроксимация А приводит к следующему выражению для энергетического спектра системы

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2\mu}\vec{\mathcal{P}}^2 - g^2 \sum_k \frac{1}{\tilde{\Omega}_k}|A_k|^2 + \sum_k n_k \tilde{\Omega}_k, \tag{3.17}$$

где n_k – положительные целые числа[x)].

Б. Перенесем действие функционального усреднения на показатель экспоненты в (3.14). Находим

$$\langle G \rangle_o = -i\int_0^\infty d\tau\, e^{-i\tau(\mathcal{E} - \frac{1}{2\mu}\vec{\mathcal{P}}^2 - i0)} \exp\Big[-g^2\sum_k |A_k|^2 \cdot$$

$$\cdot \int_0^\tau ds_1\, e^{is_1(\omega_k - \frac{1}{\mu}\vec{k}\vec{\mathcal{P}} + \frac{1}{2\mu}\vec{k}^2)} \int_0^{s_1} ds_2\, e^{-is_2(\omega_k - \frac{1}{\mu}\vec{k}\vec{\mathcal{P}} + \frac{1}{2\mu}\vec{k}^2)}\Big]. \tag{3.18}$$

Основные результаты приближения А сохранятся с заменой

$$\tilde{\Omega}_k \longrightarrow \omega_k - \frac{1}{\mu}\vec{k}\vec{\mathcal{P}} + \frac{1}{2\mu}\vec{k}^2 = \Omega_k. \tag{3.19}$$

В отличие от случая А, для которого член $\frac{1}{2\mu}\vec{k}^2$ в выражении для эффективной частоты (3.19) отсутствует, случай В позволяет частично учесть отдачу частицы при взаимодействии с квантованным полем. Однако при этом эффекты корреляции двух актов взаимодействия с испусканием или поглощением квантов поля с импульсами $\vec{k}_i$ и $\vec{k}_j$ $(i \neq j)$ отсутствуют.

Эти эффекты можно последовательно учесть, вычисляя поправки к приближениям А и В аналогично тому, как это было предложено в работе [8] в релятивистском случае.

Чтобы оценить точность введенных выше функциональных аппроксимаций, рассмотрим первую поправку к энергетическому спектру системы, обусловленную эффектами корреляции во взаимодействии частицы с квантованным полем.

---

x) Мы ограничиваемся здесь рассмотрением случая, когда

$$\inf_{\vec{k}} |\omega_k - \frac{1}{\mu}\vec{k}\vec{\mathcal{P}}| = a(\mathcal{P}) \neq 0.$$

Учет вкладов корреляции может быть приближенно произведен согласно формуле так называемого $\eta_i\eta_j$ - приближения [8]

$$\int [\delta\vec{v}]_0^\tau e^{g\pi[\vec{v}]} = \exp\left[g\bar{\pi} - \frac{i}{4}\frac{g^2\mu}{2}\int ds\left(\frac{\delta\bar{\pi}}{\delta v}\right)^2 + \ldots\right], \tag{3.20}$$

где первый член в правой части соответствует основному приближению В.

Полагая

$$\pi(v) = -g\sum_k |A_k|^2 \int_0^\tau ds_1 e^{i\int_0^{s_1}(\omega_k + \frac{\vec{k}\vec{v}+\vec{k}\vec{\Phi}}{\mu})d\eta} \cdot$$

$$\cdot \int_0^{s_1} ds_2\, e^{i\int_0^{s_1}(\omega_k + \frac{\vec{k}\vec{v}-\vec{k}\vec{\Phi}}{\mu})d\eta}, \tag{3.21}$$

найдем

$$\left(\overline{\frac{\delta\pi}{\delta v}}\right) = -\frac{ig}{\mu}\sum_k \vec{k}|A_k|^2\frac{1}{\Omega_k^2}\left(e^{i\Omega_k\tau} - e^{i\Omega_k s}\right)\left(e^{-i\Omega_k s} - 1\right), \tag{3.22}$$

где $\qquad \Omega_k = \omega_k - \frac{\vec{k}\vec{\Phi}}{\mu} + \frac{\vec{k}^2}{2\mu}, \qquad \tau \geqslant s \geqslant 0$.

Отсюда следует

$$-\frac{ig^2\mu}{8}\int_0^\tau ds\left(\overline{\frac{\delta\pi}{\delta v}}\right)^2 = \frac{i}{2\mu}\left(g^2\sum_k \vec{k}|A_k|^2\frac{1}{\Omega_k^2}\right)^2\tau + \ldots, \tag{3.23}$$

где явно выделен член, дающий вклад в энергию основного состояния системы

$$\delta E_0 = \frac{1}{2\mu}\left(g^2\sum_k \vec{k}|A_k|^2\frac{1}{\Omega_k^2}\right)^2 = \frac{1}{2\mu}\eta^2\vec{\Phi}^2. \tag{3.24}$$

Параметр η определяется соотношением

$$g^2\sum \vec{k}|A_k|^2\frac{1}{\Omega_k^2} = \eta\vec{\Phi} \tag{3.25}$$

и, грубо говоря, соответствует доле полного импульса системы, переносимой квантованным полем. Это нетрудно найти, используя определение полного импульса поля $\vec{\pi} = \sum_k \vec{k} n_k$ и вспоминая, что в приближении В среднее число квантов $\bar{n}_k$ дается формулой $\bar{n}_k = g^2 \frac{1}{\Omega_k^2}|A_k|^2$.

Очевидно, что условием применимости приближений А и В будет требование

$$\eta \ll 1.$$

Это условие накладывает ограничения на сходимость входящих в него сумм по $\vec{k}$, т.е. на свойства регулярности функции плотности источника $\rho(\vec{r})$, а также на величину константы связи частицы с полем (g).

4. Для иллюстрации рассмотрим модель полярона, т.е. модель, описывающую движение заряженной частицы, например электрона в ионном (полярном)

кристалле. Напомним, что наличие периодического поля ионной решетки учитывается по методу эффективной массы, т.е. $m_e \to \mu$, при этом

$$g A_k = -\frac{ie}{|\vec{k}|}\left(\frac{2\pi\omega_k c_k}{V}\right)^{1/2}. \qquad (4.1)$$

где e - заряд частицы, V - объем системы, ω_k - частоты колебаний ионной решетки, C_k - некоторые безразмерные постоянные.

Вычислим прежде всего энергию "основного" состояния системы, имеющей полный импульс $\vec{\mathcal{P}}$

$$E_0 = \frac{1}{2\mu}\vec{\mathcal{P}}^2 - g^2\sum_k \frac{1}{\omega_k + \vec{k}^2/2\mu - \vec{k}\vec{\mathcal{P}}/\mu}|A_k|^2 . \qquad (4.2)$$

Ниже мы будем рассматривать в действительности простейший вариант модели полярона, в котором величины ω_k, C_k считаются независящими от $\vec{k}$, т.е. $\omega_k = \omega$, $c_k = c = 1/\varepsilon_\infty - 1/\varepsilon$.

Переходя к пределу бесконечно большого объема и заменяя суммирование в (4.2) интегрированием согласно формуле

$$\frac{1}{V}\sum_k \cdots \longrightarrow \frac{1}{(2\pi)^3}\int d\vec{k} \ldots , \qquad (4.3)$$

найдем

$$E_0 = \frac{1}{2\mu}\vec{\mathcal{P}}^2 - \frac{e^2\mu\omega c}{2\pi^2}\int_0^1 dx \int \frac{d\vec{k}}{\left[\vec{k}^2 + 2\mu\omega(1-x) - \mathcal{P}^2(1-x)^2\right]^2} . \qquad (4.4)$$

Определим безразмерные параметры (в системе единиц, где $\hbar$ = I):

$$\theta^2 = \frac{\mathcal{P}^2}{2\mu\omega}, \qquad \lambda = ce^2\left(\frac{\mu}{2\omega}\right)^{1/2}, \qquad (4.5)$$

в терминах которых выражение (4.4) для энергии "основного" состояния системы принимает вид

$$\frac{E_0}{\omega} = \theta^2 - \lambda f(\theta), \qquad (4.6)$$

где функция $f(\theta)$ определяется интегралом

$$f(\theta) = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x)[1-\theta^2(1-x)]}} = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-\theta^2 x)}} =$$

$$= \begin{cases} 1/\theta \arcsin\theta , & \theta < 1 , \\ 1/\theta\left(\frac{\pi}{2} + i\,\mathrm{arch}\,\theta\right), & \theta > 1 . \end{cases} \qquad (4.7)$$

Отметим, что в области малых θ величина $f(\theta)$ является четной функцией θ и характеризуется разложением

$$f(\theta) = 1 + \frac{1}{6}\theta^2 + \dots , \quad \theta \ll 1 , \tag{4.8}$$

а в области асимптотически больших θ имеет поведение

$$f(\theta) \sim \frac{1}{\theta}\left[\frac{\pi}{2} + i\ln(2\theta) + O\left(\frac{1}{\theta^2}\right)\right], \quad \theta \gg 1 \tag{4.9}$$

Оставляя в разложении для величины E_0 по степеням малого параметра θ^2 первые два члена, мы найдем значения энергии покоя и эффективной массы состояния [II, I2, I8]

$$E_0 = \epsilon + \frac{1}{2\mu_{эфф}}\vec{q}^{\,2} + \dots , \quad \epsilon = -\lambda\omega, \quad \mu_{эфф} = \mu\left(1 - \frac{1}{6}\lambda\right)^{-1}. \tag{4.I0}$$

В противоположном случае больших импульсов выражение для энергии системы принимает вид

$$\frac{E_0}{\omega} \sim \theta^2 - \frac{\lambda}{\theta}\left[\frac{\pi}{2} + i\ln(2\theta)\right] + O\left(\frac{1}{\theta^3}\right), \quad \theta \gg 1 . \tag{4.II}$$

Как видно из формул (4.7) и (4.II), при $\theta > 1$ состояние системы приобретает отличную от нуля ширину, т.е. конечное время жизни, причем отношение полуширины состояния к его энергии при больших значениях импульса имеет величину порядка

$$\frac{\Gamma}{E_0} \sim \frac{\lambda\ln(2\theta)}{\theta^3}, \quad \theta \gg 1 . \tag{4.I2}$$

Вычислим теперь первую поправку к энергии "основного" состояния, найденную в предыдущем параграфе на основе приближения прямолинейных путей. Исходя из формул (3.24) и (3.25) получим, что параметр η, определяющий долю полного импульса системы, переносимую квантовым полем, есть

$$\eta = \frac{\lambda}{2\theta} f'(\theta) = \begin{cases} \dfrac{\lambda}{6}, & \theta \approx 0 , \\ -\dfrac{i\lambda}{2\theta^3}\ln(2\theta), & \theta \gg 1 , \end{cases} \tag{4.I3}$$

откуда для поправки к энергии "основного"состояния системы находим

$$\frac{\delta E_0}{\omega} = \eta^2\theta^2 = \begin{cases} \dfrac{\theta^2\lambda^2}{36}, & \theta^2 \ll 1, \\ -\dfrac{\lambda^2}{4\theta^4}\ln^2(2\theta), & \theta^2 \gg 1. \end{cases} \tag{4.I4}$$

Из найденных результатов следует, что условиями применимости приближения прямолинейных путей (аппроксимации А и В) в рассматриваемой модели являются требования

$$\lambda \ll 1 \text{ для медленных частиц, т.е. } \theta \ll 1,$$
$$\frac{\lambda \ln(2\theta)}{\theta^3} \ll 1 \text{ для быстрых частиц, т.е. } \theta \gg 1. \tag{4.15}$$

Первый из перечисленных здесь случаев, описывающий поляронное состояние, соответствует приближению слабой связи; второй, соответствующий быстро движущимся частицам, мы будем называть "умеренно сильной связью".

Изучение высших приближений к энергии "основного" состояния указывает на новый параметр разложения $\varkappa = \lambda\theta^2$, причем сумма главных членов дает

$$\frac{E_0}{\omega} = \theta^2 - \lambda \sum_{n=0} (\lambda\theta^2)^n f_n(\theta), \tag{4.16}$$

где $f_n(\theta)$ - регулярны при $\theta \sim 0$ и $f_n(0) = c_n \neq 0$.

При достаточно малых импульсах этот метод позволяет исследовать также и случай сильной связи в модели полярона

$$\lambda \gg 1, \qquad \theta^2 = \frac{\varkappa}{\lambda} \ll 1. \tag{4.17}$$

Подчеркнем, однако, что случай сильной связи требует более детального изучения свойств квантового движения частицы в эффективном поле, обусловленном существенной поляризацией вакуума вблизи частицы.

Литература

1. R.P.F e y n m a n. Rev. Mod. Phys., 1947, 20, 376.
2. Н.Н.Б о г о л ю б о в. ДАН СССР, 1954, 99, 225.
3. Н.Н.Б о г о л ю б о в, Д.В.Ш и р к о в. Введение в теорию квантованных полей, 1957, М., ГИТТЛ.
4. Е.С.Ф р а д к и н. Труды ФИАН, 1965, 29, 7.
5. Б.М.Б а р б а ш о в. ЖЭТФ, 1965, 48, 607.
6. B.M.B a r b a s h o v, S.P.K u l e s h o v, V.A.M a t v e e v, V.N.P e r v u s h i n, A.N.S i s s a k i a n, A.N.T a v k h e l i d z e Phys. Lett., 1970, 33B, 484.
7. С.П.К у л е ш о в, В.А.М а т в е е в, А.Н.С и с а к я н, М.А.С м о н д ы р е в. ОИЯИ, Р2-6437. Дубна, 1972.
8. С.П.К у л е ш о в, В.А.М а т в е е в, А.Н.С и с а к я н, М.А.С м о н д ы р е в. ОИЯИ, Р2-6445. Дубна, 1972.
9. Н.Н.Б о г о л ю б о в. Укр. матем. журн., 1950, 2, 3; Избранные труды, т. 2, Киев, 1970.
10. С.И.П е к а р. Исследования по электронной теории кристаллов. М., 1951.
11. T.D.L e e, F.L o w, D.P i n e s. Phys. Rev., 1953, 90, 297.
12. T.D.L e e, D.P i n e s. Phys. Rev., 1953, 92, 883.
13. H.F r o h l i c h. Advans. Phys., 1954, 3, 325.
14. R.P.F e y n m a n. Phys. Rev., 1955, 97, 660.

15 Е.П.Солодовникова, А.Н.Тавхелидзе, О.А.Хрусталев. ТМФ, 1971, 8, 256.
16 E.P.Solodovnikova, A.N.Tavkhelidze, O.A.Khruatelev. JINR, E2-5976, Dubna, 1971.
17 Н.Е.Тюрин, А.В.Шургая. ИФВЭ, СТФ 72-15. Серпухов, 1972.
18 H.Frohlich, H.Pelzer, S.Zienau. Phil. Mag., 1950, 41, 221.